تذکر: اگر در معادله درجه دوم ، b زوج باشد می توان از فرمول زیر برای محاسبه ریشه های معادلـه استفاده کرد. $\Delta' = b'^{۲} - ac \,,\, (b' = \frac{b}{۲})$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

مثال) معادلات زیر را با استفاده از فرمول کلی حل نمائید.

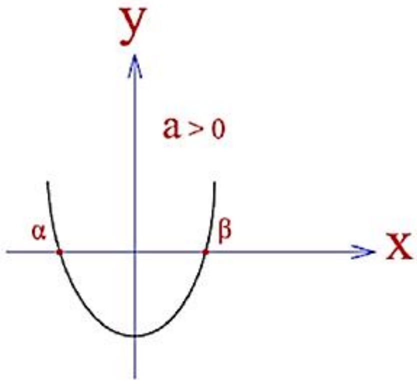
الف) $۵x^{۲} - ۶x + ۱ = ۰$

ب) $۲x^{۲} - x - ۳ = ۰$

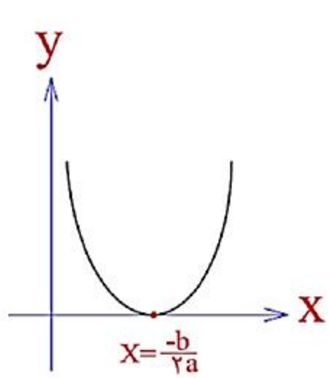
بحث در وجود و تعداد ریشه های معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$

ابتدا مبین معادله $\Delta = b^{۲} - ۴ac$ را محاسبه می کنیم و سپس توسط آن در مورد تعـداد ریشـه هـای معادله بحث می کنیم.

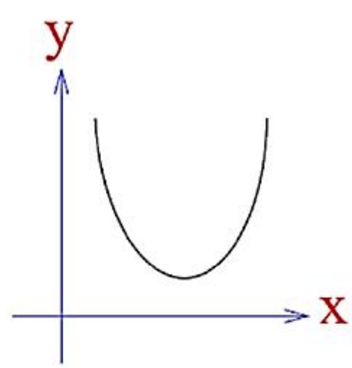
$$\begin{cases} \Delta > ۰ \text{ معادله دو ریشه متمایز دارد } \alpha, \beta = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \rightarrow ax^{۲} + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) \\ \Delta = ۰ \text{ معادله یک ریشه مضاعف دارد } \alpha = \beta = \dfrac{-b}{۲a} \rightarrow ax^{۲} + bx + c = a(x-\alpha)^{۲} \\ \Delta < ۰ \text{ معادله ریشه حقیقی ندارد و نمودار تابع محور } x \text{ ها را قطع نمی کند.} \end{cases}$$



$\Delta > ۰$



$\Delta = ۰$



$\Delta < ۰$

09144101130

مثال) به ازای چه مقادیر صحیح m ، معادله $x^{۲}+۸x+۴m^{۲}=۰$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

روابط بین ضرایب و ریشه ها در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=۰$

اگر β,α ریشه های معادله درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشند در این صورت مجموع، حاصل ضرب و تفاضل ریشه ها با روابط زیر قابل محاسبه است.

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲b}{۲a}=-\frac{b}{a}$$

$$P=\alpha.\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}.\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴ac}{۴a^{۲}}=\frac{c}{a}$$

$$|\alpha-\beta|=|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}|=|\frac{۲\sqrt{\Delta}}{۲a}|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

چند رابطه مهم دیگر:

$$۱)\alpha^{۲}+\beta^{۲}=(\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=S^{۲}-۲P$$

$$۲)\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}=\frac{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}{\alpha^{۲}\beta^{۲}}=\frac{S^{۲}-۲P}{P^{۲}}$$

$$۳)\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳(\alpha.\beta)(\alpha+\beta)=S^{۳}-۳P.S$$

$$۴)\frac{۱}{\alpha^{۳}}+\frac{۱}{\beta^{۳}}=\frac{\alpha^{۳}+\beta^{۳}}{\alpha^{۳}\beta^{۳}}=\frac{S^{۳}-۳PS}{P^{۳}}$$

مثال ***1***) اگر $\tan\beta,\tan\alpha$ ریشه های معادله $x^{۲}+Px+۶=۰$ باشند، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.

مثال 2) اگر β,α ریشه های معادله $x^۲-(m-۱)x+m=۰$ باشد و داشته باشیم $(\alpha+۱)(\beta+۱)=۱۴$ مقدار m را تعیین کنید.

مثال 3) اگر β,α ریشه های معادله $x^۲-۳x+۱=۰$ باشد مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

الف) $\alpha^۳\beta+\alpha\beta^۳$

ب) $\frac{۱}{\alpha^۲\beta}+\frac{۱}{\alpha\beta^۲}$

مثال 4) m را طوری پیدا کنید که یکی از ریشه های معادله ی $mx^۲-۴x+۱=۰$ سه برابر ریشه ی دیگر باشد. $(m\neq ۰)$

مثال 5) اگر β,α ریشه های معادله $x^۲-۵x+۳=۰$ باشند، بدون یافتن ریشه ها مقدار عددی $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ را محاسبه کنید.

مثال 6) اگر β,α ریشه های معادله ی درجه دوم $x^۲-۴x+۱=۰$ باشند، بدون حل معادله مقدار عددی عبارت $\alpha^۲+\frac{۱}{\alpha}+\beta^۲+\frac{۱}{\beta}$ را تعیین کنید.

مثال 7) در معادله ی درجه دوم $۴x^۲-۱۶x+m=۰$ یکی از ریشه ها دو واحد بیشتر از ریشه ی دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه ی معادله را بیابید.

09144101130

چند نکته مهم کنکوری:

1) اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=\circ$، مجموع ضرایب صفر باشد یکـی از ریشــه هـا (*1*) و دیگری $(\frac{c}{a})$ خواهد بود. یعنی:

$$a+b+c=\circ \rightarrow \begin{cases}\alpha=۱\\ \beta=\frac{c}{a}\end{cases}$$

2) اگر مجموع ضرایب ***c,a*** با ***b*** مساوی باشد داریم:

$$a+c=b \rightarrow \begin{cases}\alpha=-۱\\ \beta=-\frac{c}{a}\end{cases}$$

3) اگر ***c,a*** مختلف العلامه باشند، حتماً معادله دارای دو ریشه ی مختلف العلامه خواهد بود.

$$\frac{c}{a}<\circ \rightarrow \begin{cases}\Delta>\circ\\ \alpha<\circ<\beta\end{cases}$$

4) اگر یک ریشه ***k*** برابر دیگری باشد در این صورت تساوی مقابل برقرار است. $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}$

5) برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه های آن عکـس ریشــه هـای معادلـه $ax^۲+bx+c=\circ$ باشند کافی است جای ***c,a*** را با هم عوض کنیم. $(a \leftrightarrow c)$ $cx^۲+bx+a=\circ$

6) برای نوشتن معادله ای که ریشه هایش قرینه ریشه های معادله فوق باشد کافی است علامت ***b*** را عوض کنیم. $(b \rightarrow -b)$ $ax^۲-bx+c=\circ$

7) اگر β,α ریشه های یک معادله نامعلوم باشند پس از محاسبه ***P,S*** می تـوان صـورت معادلـه را بصورت مقابل نوشت. $x^۲-Sx+P=\circ$

مثال *1*) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $۵+\sqrt{۳}$, $۵-\sqrt{۳}$ باشند.

09144101130