

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱  | اگر $z$ و $\bar{z}$ دو عدد مختلط باشند. عبارت زیر را محاسبه کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۳/۹/۲۴)                                                                                                                                                                               |
| ۲  | معادله $2z^3 + (\bar{z})^3 = 3$ را حل کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۳/۹/۲۴)                                                                                                                                                                                                     |
| ۳  | ثابت کنید: $ z_1 + z_2  \leq  z_1  +  z_2 $                                                                                                                                                                                                                                         |
| ۴  | فرض کنید $w = \frac{az+b}{cz+d}$ که در آن $a$ و $b$ و $c$ و $d$ اعداد حقیقی می باشند،<br>نشان دهید $w - \bar{w} = \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{ cz+d ^2}$ . سپس چنانچه $ad-bc > 0$ باشد ثابت کنید قسمت های موهومی $z$ و $w$ هم علامت هستند. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - خرداد ماه ۶۴) |
| ۵  | معادله زیر را حل کنید: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$                                                                                                                                                                                                                                |
| ۶  | کلیه $z$ های مختلطی را بیابید که داشته باشیم $\theta^z = -1$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - دی ماه ۶۶)                                                                                                                                                                                |
| ۷  | نشان دهید $\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sinh y \sin x$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۶۷/۱۰/۲۵)                                                                                                                                                                                     |
| ۸  | اگر $z = 1+i$ ریشه معادله $z^7 + az^5 + b = 0$ باشد، $a$ و $b$ را به دست آورید. (دانشگاه علم و صنعت - بهمن ماه ۶۹)                                                                                                                                                                  |
| ۹  | ریشه های چهارم عدد مختلط $z = -\sqrt{3} - i$ را حساب کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۱/۶/۷)                                                                                                                                                                                     |
| ۱۰ | اعداد مختلط $z$ و $w$ مفروض اند و داریم $ z =1$ . نشان دهید: $ 1 - \bar{z}w  =  z - w $                                                                                                                                                                                             |
| ۱۱ | مکان هندسی تقاطعی از صفحه مختلط را که در رابطه زیر صدق کند به دست آورید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۱/۴/۳)                                                                                                                                                                       |
|    | $\left  \frac{z+1}{z-1} \right  \leq 2.$                                                                                                                                                                                                                                            |
| ۱۲ | معادله $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ را حل کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۲/۴/۱)                                                                                                                                                                                             |
| ۱۳ | اگر $m > 1$ عدد درست باشد، معادله $(z-i)^m + (z+i)^m = 0$ را در میدان اعداد مختلط $C$ حل کنید.<br>(دانشکده فنی دانشگاه تهران - دی ماه ۷۲)                                                                                                                                           |
| ۱۴ | ناحیه زیر را در صفحه مختلط رسم کنید: $3 <  z-i  +  z+i  < 5$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۲/۴/۱)                                                                                                                                                                                     |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱۵ | ریشه های سوم عدد مختلط $z$ را پیدا کنید. $z = \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \right)^{15}$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - تابستان ۷۳)                                                                                                                   |
| ۱۶ | هر گاه $z$ یک عدد مختلط باشد به طوری که $ z =1$ یعنی $z\bar{z}=1$ ، در این صورت عبارت $ 1+z ^2 +  1-z ^2$ را خلاصه کنید.                                                                                                                                             |
| ۱۷ | با استفاده از خواص اعداد مختلط عبارت زیر را به صورت مجموع دو مربع کامل بنویسید. $A = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - میان ترم - نیمسال اول ۷۳-۷۴)                                                                                                |
| ۱۸ | اگر $w, z$ اعداد مختلط باشند به قسمی که $\left  \frac{z+w}{z-w} \right  = 1$ ، نشان دهید که قسمت حقیقی $zw$ برابر صفر است. $\operatorname{Re}(zw) = 0$ (دانشکده فنی دانشگاه تهران - خرداد ماه ۷۳)                                                                    |
| ۱۹ | اگر $z_1, z_2, z_3$ اعداد مختلط با کالبد واحد باشند و داشته باشیم، $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ نشان دهید. $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$ و سپس با استفاده از این رابطه نشان دهید: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ . (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۴/۲/۲۴) |
| ۲۰ | معادله رویرو را حل کنید. $z^5 = -\sqrt{3} - i$ . (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۴/۵/۲۸)                                                                                                                                                                                 |
| ۲۱ | تمام ریشه های معادله $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ را بیابید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۲/۸/۲۰)                                                                                                                                                                          |
| ۲۲ | اگر $\beta, \alpha$ ریشه های معادله $z^2 - 2z + 4 = 0$ باشند، نشان دهید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۲/۱۱)<br>$\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$                                                                                     |
| ۲۳ | با استفاده از خواص اعداد مختلط ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات طول اقطار برابر است با مجموع مربعات طول اضلاع. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - ۷۵/۸/۲۲)                                                                                                      |
| ۲۴ | اگر $z_1, z_2$ دو عدد مختلط باشند و $ z_1 - z_2  =  z_1 + z_2 $ باشد نشان دهید:<br>$ \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2  = \frac{\pi}{2}$                                                                                                               |
| ۲۵ | هر گاه $a, c$ دو عدد حقیقی بوده و $b$ عددی مختلط باشد. نشان دهید که معادله $az\bar{z} + b\bar{z} + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ و $z = x + iy$ می باشد نمایشگر دایره ای است در صفحه $xy$ . (دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۲/۲/۱۰)                                         |
| ۲۶ | نشان دهید: $(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n + (1 + \cos \theta - i \sin \theta)^n = 2^{n+1} \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$                                                                                             |
| ۲۷ | با استفاده از بسط دو جمله ای $(1+i)^n$ نشان دهید:<br>$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$ الف-                                                                                                                              |

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \quad \text{ب -}$$

(دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ۷۷)

۲۸ معادله  $z^4 + 1 = 0$  را حل کنید و با استفاده از جواب های آن چند جمله ای  $x^4 + 1 = 0$  را به حاصل ضرب دو چند جمله ای دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کنید. (دانشکده فنی دانشگاه تهران - آبان ماه ۷۷)

۲۹ معادله زیر را حل کنید: (دانشکده فنی دانشگاه تهران - میان ترم نیمسال دوم ۷۷)

$$z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

$$\frac{1 + \sin \theta + i \cos \theta}{1 + \sin \theta - i \cos \theta} = \sin \theta + i \cos \theta \quad \text{نشان دهید:}$$

$$\left(1 + \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}\right)^{10} + \left(1 + \sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}\right)^{10} \quad \text{و سپس با استفاده از آن عبارت زیر را حساب کنید.}$$

(دانشکده فنی دانشگاه تهران ۷۸/۷۹)

۳۱ فرض کنیم  $z_1$  و  $z_2$  و  $z_3$  سه عدد مختلط باشند به طوری که:  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  ،  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  ، ثابت کنید که این سه عدد راس های یک مثلث متساوی الاضلاع می باشند که در دایره به شعاع واحد به مرکز مبدا مختصات محاط شده است.

۳۲ ریشه های معادله  $z^5 + z^3 + z = 0$  را به دست آورید.

۳۳ اگر داشته باشیم  $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$  نشان دهید:

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} .$$