۱ مروری بر کارهای گذشته

تنک‌کننده‌ی برش: یک گراف بدون جهت $G=(V,E)$ با وزن‌های $u:E\to\mathbb{R}_+$ داده شده است و می‌خواهیم زیرگراف $H=(V,F)$ از G را با وزن‌های $w:F\to\mathbb{R}_+$ پیدا کنیم که $|F|$ کوچک باشد و بین وزن برش‌ها رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$w(\delta_H(U))=(1\pm\epsilon)u(\delta_G(U))\quad \forall U\subset V$$

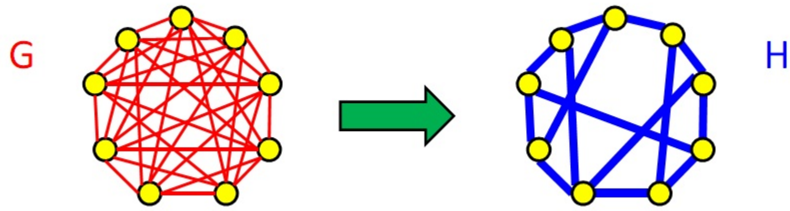
گراف بسط دهنده: گراف H روی مجموعه رئوس V را یک «بسط دهنده» می‌گویند، اگر ثابت c وجود داشته باشد که

$$|\delta_H(U)|\geq c|U|\quad \forall U\subset V, |U|\leq n/2$$

اگر G یک گراف کامل با مجموعه رئوس V باشد و به همه‌ی یالهای H وزن $w=n$ بدهیم، آنگاه

$$w(\delta_H(U))\geq cn|U|\approx|\delta_G(U)|\quad \forall U\subset V, |U|\leq n/2$$

پس بسط دهنده‌ها شبیه تنک‌کننده برای گراف‌های کامل عمل می‌کنند.



روش ساده‌ی ساخت تصادفی: گراف تصادفی $G_{n,p}$ با احتمال زیاد یک بسط دهنده است اگر $p=\theta(log(n)/n)$ باشد. این روش با احتمال زیاد یک بسط دهنده با $\theta(n\ log\ n)$ یال می‌دهد.
تنک‌کننده‌های طیفی: متناظر گراف G، ماتریس لاپلاسین L_G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^TL_Gx=\Sigma_{st\in E}u_{st}(x_s-x_t)^2\quad \forall x\in\mathbb{R}^V$$

در این صورت L_G یک ماتریس مثبت نیمه‌معین است.
تنک‌کننده‌های برشی: اگر تنک‌کننده طیفی را به بردارهای با درایه‌های ۰ و ۱ محدود کنیم، به یک تنک‌کننده برش می‌رسیم.

$$x^TL_Hx=(1\pm\epsilon)x^TL_Gx\quad \forall x\in\mathbb{R}^V\qquad \Rightarrow_{\{0,1\}-vectors}\qquad w(\delta_H(U))=(1\pm\epsilon)u(\delta_G(U))\quad \forall U\subset V$$

برنامه‌ریزی نیمه‌معین: با روش semi definite programming می‌توانیم تنک‌کننده‌های گفته شده را به دست بیاوریم. تعداد قیود تنک‌کننده‌های برشی 2^n و تعداد قیود تنک‌کننده‌های طیفی بینهایت است. چک کردن اینکه گراف H یک تنک‌کننده‌ی طیفی برای G است در زمان چندجمله‌ای امکان پذیر است اما چک کردن اینکه یک گراف H برای گراف G تنک‌کننده برشی است مسأله‌ی non-uniform sparsest cut است که np-سخت است.
کاربرد تنک‌کننده‌های طیفی: فرض کنید می‌خواهیم $L_Gx=b$ را حل کنیم. داریم:

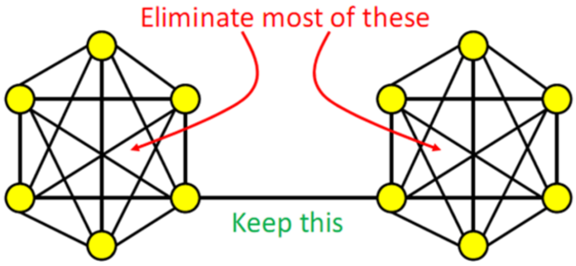
$$(1-\epsilon)L_G^{-1}\leq L_H^{-1}b\leq(1+\epsilon)L_G^{-1}b$$

امیدواریم چون H یک ماتریس تنک است حل کردن $L_H^{-1}b$ ساده‌تر باشد.
قضیه: جواب تقریبی برای $L_Gx=b$ می‌تواند در زمان $O(m\ log\ n(log\ log\ n)^2)$ پیدا شود که m تعداد یالها است.
روش‌های موجود:

- روش‌های ترکیبیاتی برای تنک‌کننده‌های برشی که تعداد یالهای $\frac{n\ log^{O(1)}(n)}{\epsilon^2}$ می‌دهند.
- روش‌های جبرخطی برای تنک‌کننده‌های طیفی که تعداد یالهای $\frac{n}{\epsilon^2}$ می‌دهند.

۲ تنک‌کننده با نمونه‌گیری تصادفی

برای گراف کامل به سادگی می‌توانیم بسط دهنده را حساب کنیم که $O(n\ log\ n)$ یال دارد. در گرافهای دیگر به این سادگی نیست، چون یالهایی که اتصال کمی دارند با احتمال زیاد انتخاب می‌کنیم و یالهایی که اتصال زیادی دارند با احتمال کمی برمی‌داریم.



۱.۲ الگوریتم نمونه‌گیری غیریکنواخت:

فرض کنید احتمال برداشتن هر یال p_e باشد و وزن هر یال w_e باشد.

۱. M بار عملیات زیر را اجرا می‌کنیم.

۲. یک یال را به صورت تصادفی با احتمال p_e انتخاب می‌کنیم.

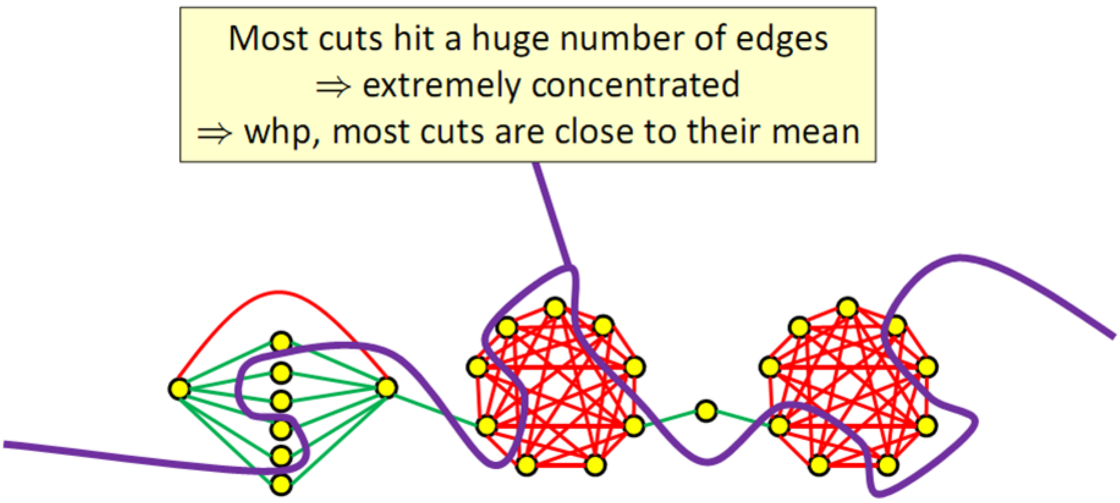
۳. وزن آن را در گراف تنک به اندازه‌ی $\frac{w_e}{p_e * M}$ افزایش می‌دهیم.

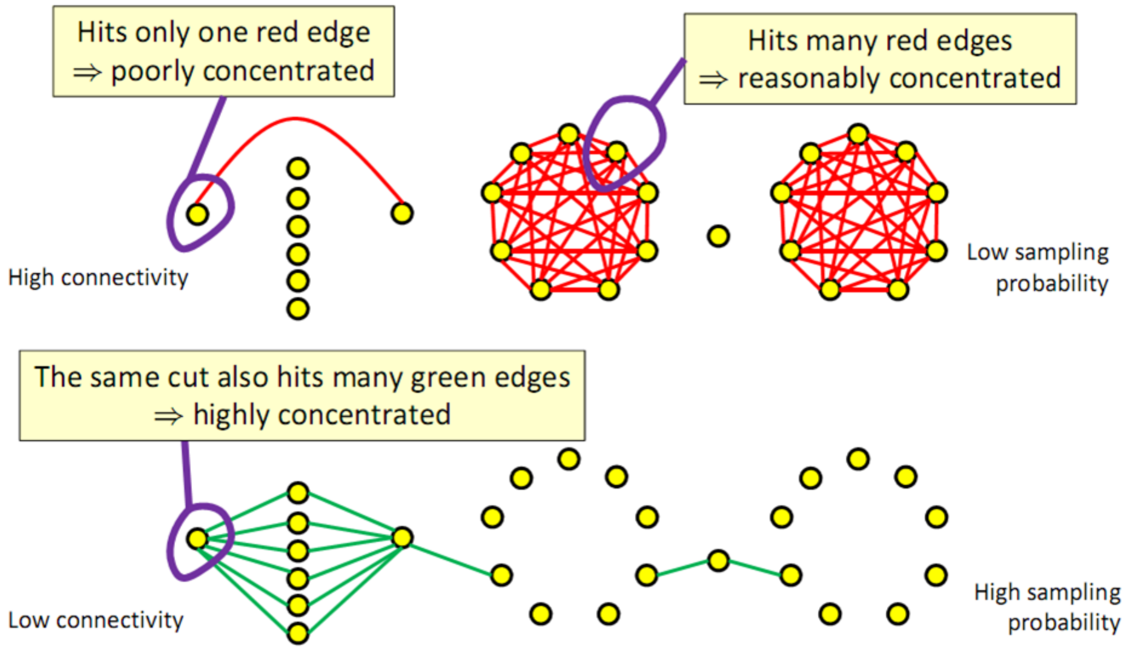
تحلیل الگوریتم نمونه‌گیری غیریکنواخت:

$$E[w'_e] = \Sigma_{1,\ldots,M} \frac{w_e}{p_e.M}.p_e = M.\frac{w_e}{M} = w_e$$

$$E[|E'|] \leq M.\Sigma_{e \in E} p_e$$

می‌خواهیم احتمال انتخاب یالها را طوری تعیین کنیم که متوسط وزن برش‌ها حفظ شود و متوسط تعداد یالها $n\ log^{O(1)}\ n$ شود. اگر احتمال حضور هر یال st را $p_{st} = \frac{1}{min\ s,t-cut}$ تعریف کنیم، در زمان $O(m + n\ log\ n)$ می‌توانیم وزن برش‌ها را تقریب بزنیم و متوسط تعداد یالها $O(nlog^2 n/\epsilon^2)$ می‌شود.





۳ تنک‌کننده با نمونه‌گیری تصادفی رأسها

این روش برای حل حالت بدی که در الگوریتم‌های قبلی وجود داشت ارائه شده است. در اینجا روی گرافهای شبه‌دوبخشی (گرافهایی که هیچ یالی بین رأسهای غیرپایانی آنها نیست) کار می‌شود. روشی که در این مقاله به کار رفته است نمونه‌گیری تصادفی رأسهای غیرنهایی است. احتمال متناظر هر رأس غیرنهایی مانند v را به این صورت حساب می‌کنیم که به ازای هر زیرمجموعه S از رئوس پایانی، مینیمم وزن یالی که رأس v را از S یا از $V-S$ جدا می‌کند به دست می‌آوریم که وزن برش این مجموعه‌ها است و اگر این برش با تقریب خوبی حفظ شود، به یک تنک‌کننده رسیده‌ایم. اگر مجموعه رأسهای پایانی را با T و متغیر تصادفی معادل حضور رأس v را با I_v نشان دهیم، خواهیم داشت:

Graph H:

$$\forall S \subset T,\ S' = T - S \quad cut'_{S,S'} = \sum_{v \notin T} I_v/p_v.min\sum_{s\in S} w_{sv}, \sum_{t \in S'} w_{vt}$$

چون احتمال برداشتن رأس که از تعریف بالا به دست می‌آید به مجموعه S وابسته است، محاسبات را سخت می‌کند. برای حل این مشکل ماکسیمم آنها را قرار می‌دهیم. از طرف دیگر می‌دانیم مجموع از $C(k,2)=k(k-1)/2 \leq k^2$ برابر ماکسیمم کمتر است. پس داریم:

$$cut'_{S,S'} \geq max_{\substack{s\in S\\ t\in S'}} \sum_{v} I_v/p_v.minw_(s,v), w_(v,t) \geq \frac{1}{k^2} cut'_{S,S'}$$

از اینجا احتمال انتخاب هر رأس به دست می‌آید:

$$p_v = M.max_{s\neq t}\frac{min\{w_{sv}, w_{vt}\}}{\sum_{v'} min\{w_{sv'}, w_{v't}\}}$$

که M بر حسب $1/\epsilon$ و k چندجمله‌ای است.

۴ ضریب تقریب حفظ جریان

گراف دیگری می‌سازیم که در آن فقط رأسهای ترمینال هستند و وزن برش کمینه بین دو رأس s و t را وزن یال بین آنها در گراف جدید می‌گذاریم. در گراف جدید از LP استفاده می‌کنیم و متغیرها را متناظر مسیرهای از s به t می‌گیریم که s و t دو رأس از ترمینالها هستند. مزیت این کار این است که به جای تعداد قیود نمایی (برش‌ها)، تعداد قیود ما $O(k^2)$ است.
ظرفیت (وزن) هر یال را با w_e و طول آن را با l_e نشان می‌دهیم. همچنین به ازای هر دو رأس پایانی فاصله‌ی آنها را با d_{st} و ظرفیت برش آنها را با δ_{st} نشان می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{e\in E} w_e . l_e \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{s,t\in\binom{T}{2}} d_{st}\delta_{st} \geq 1 \\
&\quad \delta_{st} \leq \sum_{e\in p} l_e \quad \forall s,t\in\binom{T}{2} \text{ and a path P connecting them} \\
&\quad l_e \geq 0 \quad \forall e\in E \\
&\quad \delta_{st} \geq 0 \quad \forall s,t\in\binom{T}{2}
\end{aligned}$$

۵ تنک‌کردن با روش ترکیب

می‌خواهیم جریان بین هر دو رأس پایانی را با مسیری بدون رأس پایانی تقریب بزنیم. سپس رأسهای پایانی را روی هم می‌گذاریم و دو گراف را به هم می‌چسبانیم. در ادامه اثبات ضریب تقریب گراف به دست آمده برای جریان را ارائه می‌دهیم.
لم ترکیب: ادغام دو گراف تنک با ضریب تقریب‌های ρ_1 و ρ_2 برای جریان، گراف تنک با تقریب $\rho = max(\rho_1, \rho_2)$ می‌دهد.
اثبات: با استفاده از تعریف تنک بودن برش داریم:

$$\begin{aligned}
&sparsity = cut/flow = (cut_1 + cut_2)/flow = cut_1/flow + cut_2/flow \\
&sparsity_1 + sparsity_2 = cut_1/flow_1 + cut_2/flow_2 \\
&flow = max(flow_1, flow_2) \Rightarrow sparsity \leq sparsity_1 + sparsity_2
\end{aligned}$$

۶ گراف‌های سری و موازی

گراف سری-موازی: گرافی که به صورت بازگشتی از مجموعه‌ای از عملیات سری و موازی کردن ساخته شده باشد.

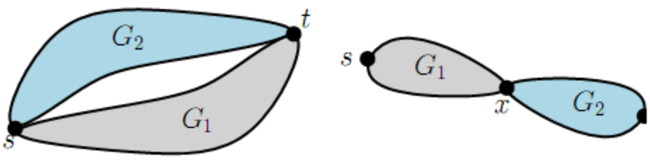
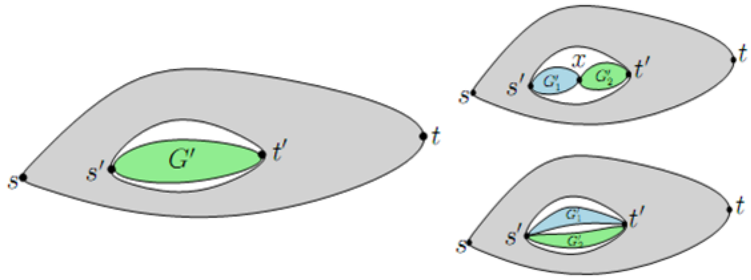


Figure 7.1: Series and Parallel Compositions



قضیه: گرافهای سری-موازی با k رأس ترمینال، گراف تنک بهینه با $O(k)$ رأس دارند.
اثبات: در این گرافها هر رأس غیرپایانی معادل ترکیب دو گراف دیگر است پس می‌توانیم مراحل ساخت آن را به صورت یک درخت نشان دهیم. با استقرا و لم ترکیب گرافهای تنک ثابت می‌شود که $O(k)$ رأس داریم.

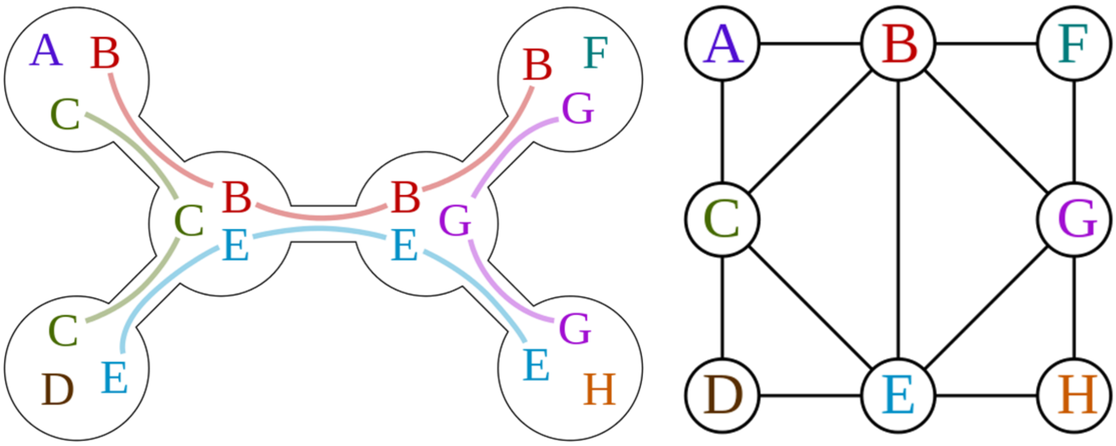
۷ تجزیه درختی گراف

درخت T با گره‌های $X_1, .., X_n$ که X_i زیرمجموعه‌ای از V (رئوس گراف) است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. هر رأس گراف حداقل در یک گره درخت هست.

۲. اگر X_i و X_j هر دو شامل رأس v باشند، همه‌ی گره‌های موجود در مسیر یکتای بین X_i و X_j شامل v هستند.

۳. به ازای هر یال (v, w) در گراف، زیرمجموعه‌ی X_{ij} وجود دارد که شامل هر دوی v و w باشد.



عرض درختی: ماکسیمم $|X_i| - 1$ بین همه‌ی تجزیه‌های درختی ممکن برای گراف را عرض درختی می‌گویند.
قضیه: (تعداد رأس‌ها بر حسب عرض درختی)
برای هر گراف با k رأس پایانی، اگر یک گراف تنک‌کننده جریان با تقریب $q(k)$ و اندازه‌ی $S(k)$ داشته باشیم، در صورتی که عرض درختی گراف اولیه w باشد، گراف با تقریب $q(6w)$ برای جریان وجود دارد که حداکثر $k^4.S(6w)$ رأس دارد.

۸ مسائل حل نشده

در زمینه‌ی گرافهای تنک‌کننده مسائل زیر حل نشده باقی می‌مانند:

- تنک‌کننده برای گراف‌های جهت‌دار

- روش‌های ساخت دیگر (مثلاً تصادفی) برای تنک‌کننده‌های با $O(n/\epsilon^2)$ یال
- ساخت ترتیبی (غیربازگشتی) گرافهای بسط دهنده
- کنترل بهتر وزن یال
- اثبات ترکیبیاتی برای تنک‌کننده‌های طیفی

References

[1] Alexandr Andoni, Anupam Gupta, Robert Krauthgamer, Towards $(1+\epsilon)$-Approximate Flow Sparsifiers, SODA,2014.

[2] Graph Sparsifiers: A Survey, Nick Harvey, UBC.

[3] Tree Width: wikipedia.