

بسمه تعالی

تمرین‌های درس ریاضی (۱)، رشته اقتصاد مدرس: محفوظ رستم‌زاده

مجموعه‌ها، تابع، حد و پیوستگی

۱- اگر $A \subseteq B$ آنگاه روابط زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.
 i. $A \Delta B - A'$ ii. $(A \cap B) \cup ((C - B') \cap A)$ iii. $(A \cup (A' \cup B)) \cap B$

۲- اگر $A = \{1, 2, \dots, 11\}$ ، $B = \{2k \mid k \in A\}$ ، $C = \{2k - 1 \mid k \in A\}$ و $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, 25\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد. آنگاه مطلوبست:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $B \cup C'$ d) $A \Delta B$

۳- اگر $A = [0, 2)$ ، $B = (-1, 1)$ و $C = (1, +\infty)$ آنگاه مطلوبست:

a) $A \cap C$ b) $B \cup C$ c) C' d) $A \Delta C'$

۴- به ازای چه مقادیری از x و y روابط زیر تابع هستند؟

$$R_1 = \{(1, x), (y, 2), (1, 2), (5, y)\}$$

$$R_2 = \{(x^2, 0), (2x, 1), (y, x), (0, 1)\}$$

$$R_3 = \{(0, x), (x, 2), (x - y, x), (y, x + y)\}$$

۵- کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

$$f = \{(x, y) \mid x^2 - 1 = y^2\}$$

$$g = \{(x, y) \mid 2y = x^2 + y^2\}$$

$$h = \{(x, y) \mid y = x^2 + \pi\}$$

$$k = \{(x, y) \mid y = \frac{x}{x-1}\}$$

۶- آیا دو تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

با هم مساوی هستند؟ چرا؟

۶- کدام یک از توابع زیر یک به یک و کدام یک پوشا هستند؟ نزولی یا صعودی بودن آنها را تعیین کنید. وارون آنها را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x) = x^3 + 1, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad h(x) = \frac{x}{x+1}, \quad k(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad l(x) = |x| + 1$$

۷- اگر

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad h(x) = |x| + 1$$

آنگاه مقادیر $f(1-x), f \circ f, f \circ g, g \circ h$ را در صورت وجود به دست آورید.

۸- دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را به دست بیاورید.

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 2016}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1-x^2}, \quad h(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$k(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad l(x) = \sin\left(\frac{5}{x^3 + 27}\right), \quad m(x) = \ln(x^2 - 1)$$

$$n(x) = \log(x-1), \quad o(x) = e^{x^2+1}, \quad p(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)$$

۹- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$i. \log_4(x) + \log(\sqrt{x}) = 2, \quad ii. \ln(x) + \ln(2-x) = 1, \quad iii. \log(10^x) - 2\log(10/1) = x^2$$

۱۰- نمودار هر یک از توابع درجه دوم زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^2 + 4x + 4, \quad g(x) = 3 - 2x - x^2, \quad h(x) = 5x^2 + 1$$

$$k(x) = x^2 + 3x + 2, \quad p(x) = 4x^2 - 2x - 8$$

۱۱- اگر نرخ تورم سالانه در ایران ۲۵ درصد باشد آنگاه قیمت یک مانتوی ۸۰۰۰۰ تومانی بعد از ۴ سال چقدر می شود؟

۱۲- اگر نرخ رشد جمعیت ایران سالانه ۵ درصد باشد آنگاه جمعیت ایران بعد از چند سال ۲ برابر می شود؟

۱۳ - قیمت فروش x لاستیک در یک ماه در یک کارخانه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. با فروش چه تعداد از آن در ماه درآمد فروش ماکزیمم می‌شود؟

$$p(x) = 500 - 8x$$

۱۴ - معادله‌ی هزینه‌ی تمام شده‌ی تولید یک دارو در یک شرکت به قرار زیر است:

$$C(x) = 10000 + 250x$$

در سطح چند واحد تولید هزینه‌های ثابت و متغیر با هم برابر می‌شوند؟

۱۵ - یک زلزله $10^{13/4}$ ژول انرژی آزاد کرده است. حساب کنید این زلزله چند ریشتر است؟ (انرژی آزاد شده در مبنای استاندارد $J = 10^{4/4} E$)

۱۶ - اگر قیمت یک دلار بعد از ۱۰ سال ۵ برابر شده باشد، نرخ تورم را حساب کنید.

۱۷ - تابع تقاضای ماهانه‌ی یک نوع برنج بر حسب تن به صورت

$$x = 6000,000 - 3p$$

است. مقدار p ، یعنی قیمت هر تن برنج، چقدر باشد تا درآمد فروش آن بیشترین شود؟

۱۸ - مقدار حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\begin{aligned} (I) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - [x]}{1 - x} & \quad (II) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 1}) & \quad (III) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{10x} \\ (IV) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \quad (V) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{1}{x - \frac{\pi}{4}}\right) & \quad (VI) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ (VII) \lim_{x \rightarrow 0} x[x] & \quad (VIII) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right) & \quad (IX) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x + 1} \\ (X) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x + 1}}{\sqrt{9x + 1}} & \quad (XI) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \quad (XII) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^{2016} + x^{100} - 1}{x^{1395} - 1} \end{aligned}$$

۱۹ - به ازای چه مقادیری از a توابع زیر روی اعداد حقیقی پیوسته‌اند؟

$$(I) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \quad (II) g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{3x} & x \neq 0 \\ a - 1 & x = 0 \end{cases}$$

۲۰- تمام نقاط پیوستگی و ناپیوستگی توابع زیر را روی اعداد حقیقی به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & x < 0 \\ 1 - x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) & 2 \leq x < 3 \\ 2 + \sin(\pi x) & x \geq 3 \end{cases}, \quad g(x) = x - \left[\frac{x}{2}\right]$$