ریاضیات مهندسی پیشرفته

استاد : جناب آقای دکتر قصوری

رشته : مکاترونیک

دانشگاه : آزاد اسلامی واحد کاشان

تهیه و تنظیم : ابراهیم شهنازی

جلسه اول

سری فوریه

ضرایب سری فوریه

شرایط دیریکله

توابع زوج و فرد

مثالهای مختلف

تمرینها

٩٢٠١١٨٧٧٤

①

1392/7/4 ریاضی مهندسی پیشرفته جلسه اول

سری فوریه:

هرگاه تابع $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π و شرایط دیریکله باشد می‌توان آن را به صورت یک مقدار ثابت به علاوه مجموعه‌ای از توابع sin و cos نمایش داد.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

شرایط دیریکله:

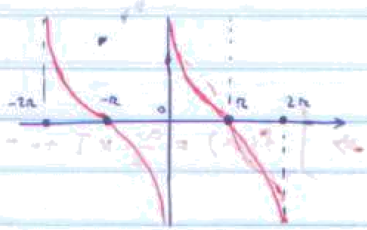
۱- تابع مطلق پیوسته تکه‌ای باشد (نقاط ناپیوستگی در یک دوره تناوب محدود باشد.)

۲- در یک دوره تناوب انرژی محدود باشد. $\frac{1}{T}\int |f(t)|^2 dt$

۳- تعداد نقاط اکسترمم در یک دوره تناوب محدود باشد.

تابع زیر شرایط دیریکله را دارد.

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad -\pi < t < \pi \qquad T = 2\pi$$



① شرط اول برقرار است. (پیوسته تکه‌ای)

② $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2\pi} \times 2\int_0^{\pi} \frac{dt}{t^2}$

$$= \frac{1}{\pi} \times -\frac{1}{t}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi} + \infty\right) = \infty$$

این تابع، شرط دوم دیریکله را نداشته و بنابراین سری فوریه نمی‌توان نوشت.

②

سوال) شرایط دیریکله را در تابع مقابل بررسی کنید.

$f(t) = \sin \frac{1}{t} \qquad -\pi < t < \pi \qquad T = 2\pi$

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T}$

$\int_T f(t)\,dt = \int_T \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right) dt$

$= \int \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int a_n \cos \frac{2n\pi t}{T}\,dt + \int_T b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t\,dt \right)$

$= \frac{a_0}{2} \int_{-T/2}^{T/2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2n\pi t}{T}\,dt + b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2n\pi}{T} t\,dt \right)$

چون تابع سینوس و کسینوس در یک دوره تناوب متقارن هستند بر روی n دوره تناوب صفر می‌شوند ، چون تابع sin فرد است

$= \frac{a_0}{2} \times T + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \times 0 + b_n \times 0)$

$\begin{cases} \sin t \rightarrow \text{دوره تناوب} \rightarrow 2\pi \\ \sin at \rightarrow \text{دوره تناوب} \rightarrow 2\pi/a \end{cases} \Rightarrow \int_T f(x) = \frac{a_0}{2} \times T + 0$

$\Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_T f(t)\,dt$

$\int_T f(t) \cos \frac{2m\pi t}{T}\,dt = \int_T \left(\frac{a_0}{2} \cos \frac{2m\pi t}{T} + \right.$

$\left. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} \cos \frac{2m\pi t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \cos \frac{2m\pi t}{T} \right) dt$

m: عدد صحیح بین یک و بی‌نهایت [1-∞] می‌باشد.

3

$$= \frac{a_0}{2}\int_T \cos\frac{2m\pi t}{T}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_T \cos\frac{2n\pi t}{T}\cos\frac{2m\pi t}{T}\,dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_T \sin\frac{2n\pi t}{T}\cos\frac{\cancel{2m\pi t}}{T}\,dt + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdots$$

روی هم صفرند

$$\begin{cases} \int \cos\frac{2n\pi t}{T}\cos\frac{2m\pi t}{T}\,dt = 0 & n \neq m \\ \int_T \cos^2\frac{2m\pi t}{T}\,dt = \frac{1}{2}\int_T \left(1+\cos\frac{4m\pi t}{T}\right)dt = \frac{T}{2} & n = 3 \end{cases}$$

$$\int_t f(t)\cos\frac{2m\pi t}{T}\,dt = \frac{T}{2}\times a_m = a_n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt$$

توابع زوج و فرد

$h(t) = h(-t)$ تابع زوج

$g(t) = -g(-t)$ تابع فرد

$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$

e = زوج = even o = odd = فرد

$$f(t) + f(-t) = \big(f_e(t) + f_o(t)\big) + \big(\underbrace{f_e(-t)}_{f_e(t)} + \underbrace{f_o(-t)}_{-f_o(t)}\big) = 2 f_e(t)$$

$$\Rightarrow f_e(t) = \frac{1}{2}\big(f(t) + f(-t)\big)$$ بخش زوج تابع

$$f(t) - f(-t) = \big(f_e(t) + f_o(t)\big) - \big(\underbrace{f_e(-t)}_{f_e(t)} + \underbrace{f_o(-t)}_{-f_o(t)}\big) = 2 f_o(t)$$

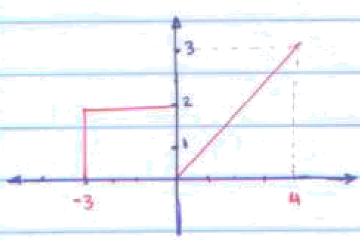
$$\Rightarrow f_o(t) = \frac{1}{2}\big(f(t) - f(-t)\big)$$ بخش فرد تابع

تابع زوج: $f(t) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\,dt \Rightarrow 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$

تابع فرد: $f(t) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\,dt \Rightarrow 0$

تمرین ۱)

1. محاسبه b_n
2. بخش زوج و فرد تابع مقابل را رسم نمائید.



5

مثال) مطلوبست محاسبه سری فوریه تابع زوج و فرد. زوج $f(t)$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt =$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{زوج}} \cos \underbrace{\frac{2n\pi t}{T}}_{\text{زوج}}}_{\text{زوج}}\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

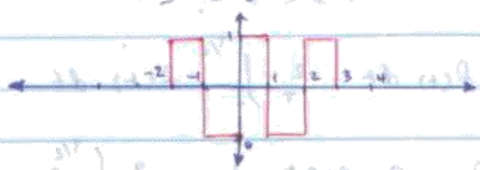
$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{زوج}} \sin \underbrace{\frac{2n\pi t}{T}}_{\text{فرد}}}_{\text{فرد}}\,dt = 0$$

$$\underset{\text{زوج}}{f_e(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi t}{T}$$

$$\underset{\text{فرد}}{f_o(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{فرد}} \sin \underbrace{\frac{2n\pi t}{T}}_{\text{فرد}}}_{\text{زوج}}\,dt =$$

مثال (۲) مطلوبست محاسبه ضرایب سری فوریه تابع زیر



$T = 2$

فرد $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^1 10 \sin n\pi t \, dt \rightarrow b_n = 1 \times \int_0^1 \sin n\pi t \, dt$$

$$= \frac{10}{n\pi} \cos n\pi t \Big|_0^1 = \frac{-10}{n\pi}\left(\cancelto{(-1)^n}{\cos n\pi} - 1\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{-10}{n\pi} \times 0 = 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{20}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{(2n-1)\pi} \sin (2n-1)\pi t$$

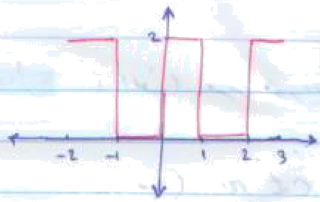
نکته:

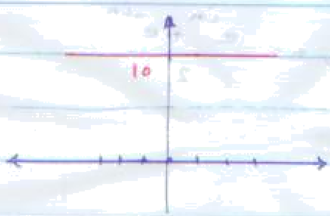
اگر تابع فرد باشد $\frac{a_0}{2}$ و a_n برابر با صفر هستند.

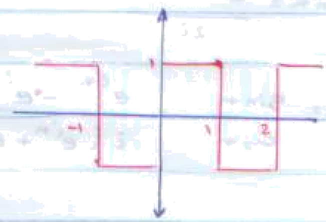
اگر تابع زوج باشد b_n صفر است.

7

مثال)







$f_e(t)=10$

$$f_o(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20\sin(2n-1)}{(2n-1)\pi}$$

تمرین 2)

بخش زوج و فرد تابع فوق را مجدداً بدست آورید.

در صورتی که a نقطه‌ای ناپیوسته باشد سری فوریه تابع در نقطه برابر است با :

$$f(a)=\frac{f(a^-)+f(a^+)}{2}$$

مجموع دو جمله را تقسیم بر 2 :

⑧

مثال) الف) سری فوریه کج $f(x)=e^{-ax}$ را محاسبه نمایید.

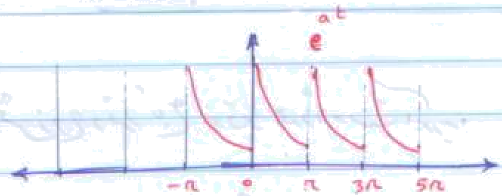
ب) $\cot \pi$ را بدست آورید.

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{ix}-e^{ix}}{i\,(e^{ix}+e^{-ix})}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\cot hx = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$



$$f(\pi) = \frac{e^{-a\pi}+e^{a\pi}}{2} \Rightarrow f(\pi) = \cosh a\pi$$

9

تمرین ۱) سری فوریه تابع فوق را بدست آورید

الف) از روش مستقیم یعنی محاسبه a_0, a_n, b_n

ب) تجزیه تابع زوج و فرد.

$$f_o(x) = \cosh ax$$

$$f_e(x) = \sinh(-ax)$$

حل الف)

$$a_0 = \frac{1}{2a\pi}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)$$

$$a_n = \frac{a(-1)^n}{\pi(a^2+n^2)}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{n(-1)^n}{\pi(a^2+n^2)}\left(a^{an} - e^{-an}\right)$$

$$f(x) = \left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)\left(\frac{1}{2a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(-1)^n}{\pi(a^2+n^2)} \cos nx + \frac{n(-1)^n \sin}{\pi(a^2+\pi^2)}\right)$$

$$f(t) = \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{2} = \left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)\left(\frac{1}{2a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\pi(a^2+n^2)}\right)$$

$$\frac{\left(e^{a\pi} + e^{-a\pi}\right)}{2\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)} = \frac{1}{2a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\pi(a^2+n^2)} = b$$

$$b = \frac{1}{2} \coth a\pi = \frac{1}{2a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\pi(a^2+n^2)}$$

حل قسمت ب)

$$\coth \pi = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1+\pi)^2}$$

⑩

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$