سرفصل :

۱. اعداد مختلط
۲. توابع نمایی و هیپربولیک
۳. دنباله‌ها
۴. حد و پیوستگی
۵. مشتق و کاربردهای آن
۶. بهینه‌سازی
۷. روش‌های انتگرال‌گیری
۸. انتگرال معین
۹. انتگرال ناسره
۱۰. کاربردهای انتگرال در محاسبه سطح، حجم و طول قوس
۱۱. سری‌های عددی
۱۲. سری توانی

منابع درس :

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال، تألیف: جیمز استوارت، ترجمه: ارشک حمیدی
انتشارات فاطمی، قسمت اول جلد ۱ + جلد ۲
(جلد ۱: میان‌ترم، جلد ۲: پایان‌ترم)

۲. ریاضی عمومی ۱، تألیف: حمید تولایی - مهدی علائیان - حمید محمدزاده
انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران

۳. ریاضی عمومی ۱، تألیف: مهدی نجفی خواه

۴. ریاضی عمومی ۱، تألیف: ابراهیم احمدپور، آنه گلدی مهیمانی
(رشته ریاضی)
انتشارات دانشگاه پیام نور

معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ که $a,b,c\in\mathbb{R}$ در حالت $\Delta=b^2-4ac<0$

در دستگاه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ دارای جواب نیست. برای آنکه این نوع معادله‌ها دارای جواب باشند

باید $\mathbb{R}$ را به دستگاه اعداد مختلط توسیع داد. برای اینکار i را عددی موهومی در نظر می‌گیریم به طوری که

$i^2=-1$ است و بنابراین $i^3=-i$ و $i^4=1$ خواهد بود.

تعریف: مجموعه‌ی اعداد مختلط را که با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{C}=\{x+yi \; : \; x,y\in\mathbb{R},\; i^2=-1\}$$

هر عدد مختلط را به صورت $z=x+yi$ نشان می‌دهیم که x را قسمت حقیقی z

گفته با $Re(z)$ و y را قسمت موهومی z گفته و با $Im(z)$ نشان می‌دهیم.

تعریف: دو عدد مختلط z_1 و z_2 مساوی‌اند اگر و تنها اگر

$$Re(z_1)=Re(z_2) \quad \& \quad Im(z_1)=Im(z_2)$$

مثال: فرض کنید $z_1=\frac{a}{3}+1-i$ و $z_2=2+bi$ دو عدد مختلط باشند.

اگر $z_1=z_2$ باشد مقدار a و b را تعیین کنید.

حل: $z_1=z_2$ است اگر و تنها اگر $\frac{a}{3}+1=2$ & $b=-1$

در این صورت $a=3$, $b=-1$ است.

- اعمال جبری روی اعداد مختلط:

تعریف: اگر $z_1=x_1+y_1i$ و $z_2=x_2+y_2i$ دو عدد مختلط باشند در این صورت

جمع z_1 و z_2 را با z_1+z_2 و ضرب z_1 و z_2 را به صورت $z_1.z_2$ یا z_1z_2 نمایش داده و اینگونه

تعریف می‌کنیم:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$$

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=x_1x_2+x_1y_2i+x_2y_1i+y_1y_2i^2$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$$

اگر $\alpha\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد آن‌گاه داریم:

$$\alpha z_1=\alpha(x_1+y_1i)=(\alpha x_1)+(\alpha y_1)i$$

قضیه: (ویژگی‌های جمع اعداد مختلط) اگر z_1، z_2 و z_3 سه عدد مختلط باشند آن‌گاه:

الف) $z_1+z_2=z_2+z_1$ جابجایی

ب) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ شرکت‌پذیری

پ) $z_1+0=0+z_1=z_1$ عضو خنثی

ت) $z_1+(-z_1)=(-z_1)+z_1=0$ عضو وارون (قرینه)

قضیه: (ویژگی ضرب اعداد مختلط) اگر z_1، z_2 و z_3 سه عدد مختلط باشند آن‌گاه:

الف) $z_1z_2=z_2z_1$ جابجایی

ب) $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$ شرکت‌پذیری

پ) $z_1 1=1z_1=z_1$ عضو خنثی

ت) اگر $z_1=x_1+y_1i\neq 0$ باشد آن‌گاه $z_1^{-1}=\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}+\frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}i$

وجود دارد به طوری که $z_1z_1^{-1}=z_1^{-1}z_1=1$ عضو وارون

ث) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ توزیع‌پذیری ضرب روی جمع

تعریف: اگر $z = x + yi$ یک عدد مختلط باشد $\bar{z} = x - yi$ را مزدوج z گوییم.

قضیه: (ویژگی‌های مزدوج عدد مختلط) اگر $z_n, \dots, z_2, z_1$ به تعداد n عدد مختلط باشند و $\alpha \in \mathbb{R}$ در این صورت داریم:

الف) $\bar{\bar{z}} = z$

ب) $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$

به ویژه برای $n = 2$ داریم: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

پ) $\overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n$

به ویژه برای $n = 2$ داریم: $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

و اگر $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ باشد آنگاه داریم: $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

ت) $\overline{\alpha z_1} = \alpha \bar{z}_1$

مثال: اگر z ریشه‌ی یک چندجمله‌ای درجه n با ضرائب حقیقی باشد ثابت کنید $\bar{z}$ نیز ریشه‌ی آن است.

حل: فرض کنید $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که $a_i \in \mathbb{R}$

و $n \geq 1$، چندجمله‌ای درجه n با ضرائب حقیقی باشد و z یک ریشه آن باشد

بنابراین $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ است

و $\overline{f(z)} = \bar{0} = 0$ می‌باشد

و با استفاده از ویژگی‌های مزدوج یک عدد مختلط داریم:

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
&= \bar{a}_n \overline{z^n} + \bar{a}_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \dots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 \\
&= a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_1 (\bar{z}) + a_0 = f(\bar{z})
\end{aligned}$$

در نتیجه z یک ریشه برای چندجمله‌ای درجه n $f(x)$ است.

نحوه‌ی محاسبه‌ی وارون یک عدد مختلط:

اگر $z=x+yi\neq 0$ یک عدد مختلط باشد وارون آن را با $\frac{1}{z}$ نمایش داده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}\times\frac{x-yi}{x-yi}=\frac{x-yi}{x^2+xyi-xyi-y^2i^2}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}i$$

تقسیم دو عدد مختلط:

اگر $z_1=x_1+y_1i$ و $z_2=x_2+y_2i\neq 0$ دو عدد مختلط باشند تقسیم z_1 به z_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}\times\frac{x_2-y_2i}{x_2-y_2i}=\frac{x_1x_2-x_1y_2i+x_2y_1i-y_1y_2i^2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i$$

مثال: برای هر $x\in\mathbb{R}$ ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i$$

حل:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}\times\frac{x+i\sqrt{1+x^2}}{x+i\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\sqrt{1+x^2}+(1+2x^2)i+x\sqrt{1+x^2}\,i^2}{x^2+(1+x^2)}$$

$$=\frac{(1+2x^2)i}{1+2x^2}$$

$$=i$$

قضیه: اگر z_1 و $z_2\neq 0$ دو عدد مختلط باشند آنگاه داریم:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

تمرین:

۱. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط بنویسید.

الف) $\frac{(2+i)(1-2i)(i+3)}{(1-i)^2}$

ب) $\frac{i^4+2i^9+i^{15}}{2-i^5+i^{10}}$

پ) $\left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^3$

ت) $(2i-1)^2(1+i)^3$

۲. درستی روابط زیر را برای هر عدد مختلط z ثابت کنید:

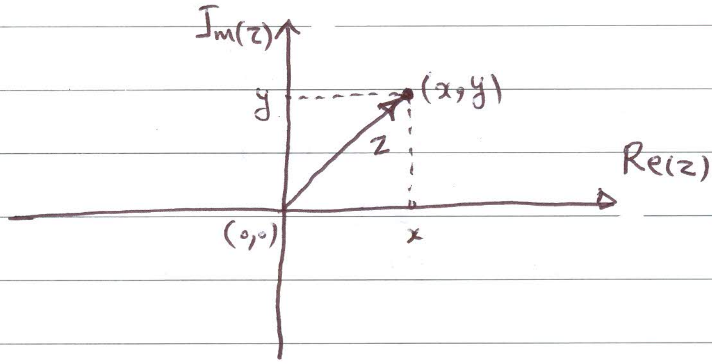
الف) $z+\bar{z} = 2\,Re(z)$

ب) $z-\bar{z} = 2i\,Im(z)$

۳. اگر $x^2+y^2\neq 0$ باشد و داشته باشیم $\frac{x+yi}{x-yi}=x-yi$
آن‌گاه مقادیر حقیقی x و y را بیابید.

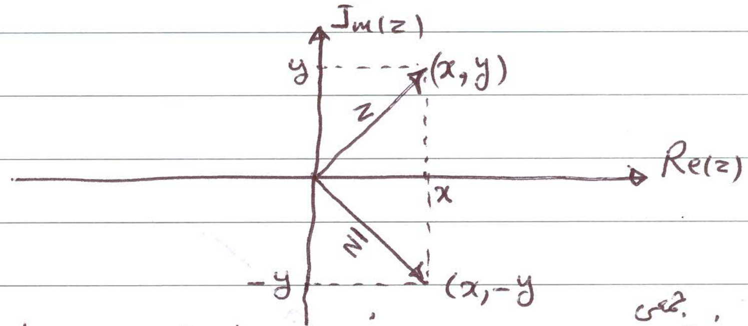
نمایش هندسی اعداد مختلط:

در فضای $\mathbb{R}^2$ می‌توان هر عدد مختلط $z=x+yi$ را به نقطه‌ی (x,y) نظیر نمود. در واقع با درنظر گرفتن محور xها به عنوان محور حقیقی و محور yها به عنوان محور موهومی بردار $\overrightarrow{oz}$ را از $(0,0)$ به نقطه‌ی (x,y) امتداد می‌دهیم و می‌نویسیم: $\overrightarrow{oz}=(x,y)$.

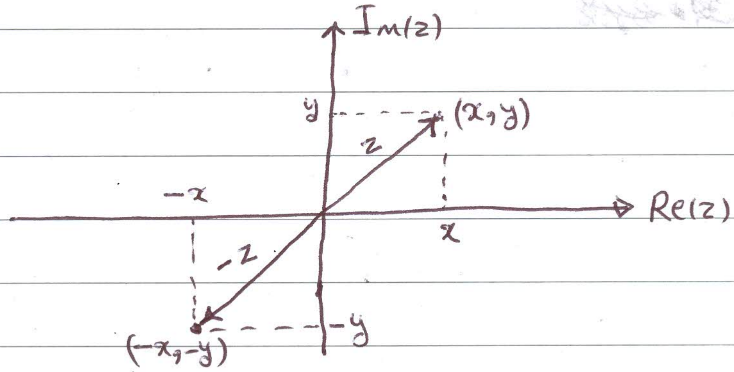


تعبیر هندسی مزدوج، قرینه و جمع اعداد مختلط:

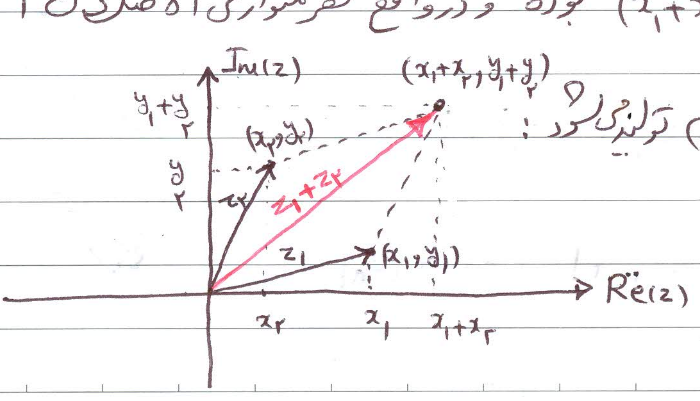
اگر $z=x+yi$ یک عدد مختلط با نمایش برداری (x,y) باشد آنگاه مزدوج آن $\bar{z}=x-yi$ با نمایش برداری $(x,-y)$ خواهد بود و در واقع $\bar{z}$ قرینه‌ی z نسبت به محور x ها (محور $Re(z)$) می‌باشد:



همچنین قرینه‌ی جمعی z به صورت $-z=(-x)+(-y)i$ بوده که نمایش برداری آن $(-x,-y)$ است. در واقع $-z$ قرینه‌ی z نسبت به مبدأ مختصات می‌باشد.



اگر $z_1=x_1+y_1i$ و $z_2=x_2+y_2i$ با نمایش‌های برداری به ترتیب (x_1,y_1) و (x_2,y_2) باشند آنگاه $z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ با نمایش برداری (x_1+x_2, y_1+y_2) بوده و در واقع قطر متوازی‌الاضلاعی است که توسط (x_1,y_1) و (x_2,y_2) تولید می‌شود:



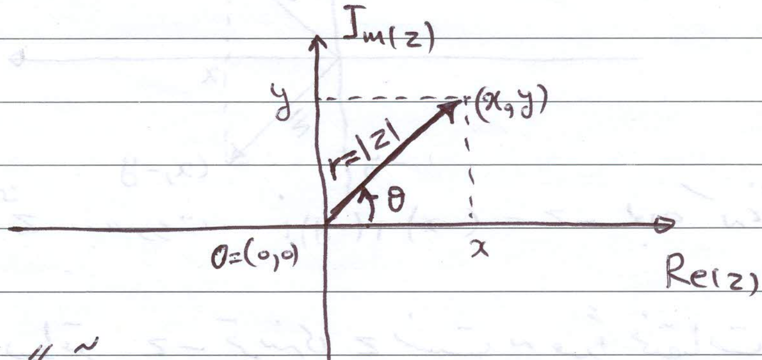
قدر مطلق یک عدد مختلط :

تعریف: اگر $z=x+yi$ یک عدد مختلط باشد فاصله‌ی نقطه‌ی (x,y) تا مبدأ را قدر مطلق z تعریف کرده و می‌نویسیم

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

از طرف دیگر چون $z\bar{z}=x^2+y^2$ است بنابراین داریم:

$$|z|^2=z\bar{z}$$



قضیه: الف) اگر $z_1, z_2, \dots, z_n$ اعداد مختلط باشند آن‌گاه داریم:

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1||z_2|\cdots|z_n|$$

به‌ویژه اگر $n=2$ باشد $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ است و اگر $z_1=z_2=\dots=z_n=z$ باشد آن‌گاه داریم:

$$|z^n|=|z|^n$$

ب) اگر z عددی مختلط باشد آن‌گاه داریم: $|z|=|\bar{z}|$

تمرین: ۱. اگر z یک عدد مختلط باشد آن‌گاه ثابت کنید.

$$Re(z)\leq|z| \quad \text{و} \quad Im(z)\leq|z|$$

۲. اگر $z, z_1, z_2, \dots, z_n$ اعداد مختلط باشند ثابت کنید:

الف) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ (نامساوی مثلث)

سپس با استقرا روی $n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید:

$$|z_1+z_2+\dots+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$$

ب) $$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2|$$

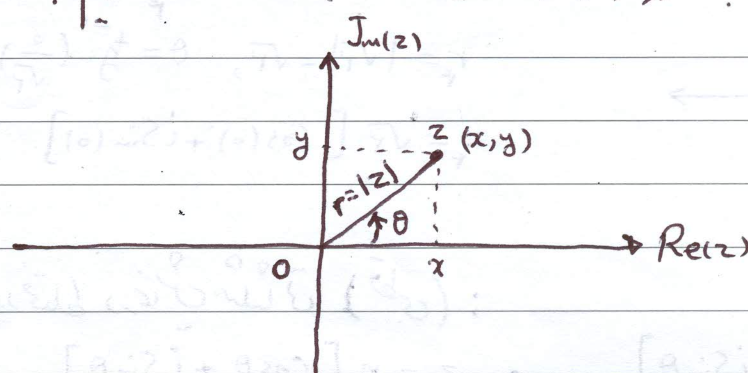
پ) $$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$$

ت) $$|Re(z)|+|Im(z)| \leq \sqrt{2}\,|z|$$

۳. اگر z و w دو عدد مختلط باشند که $\left|\frac{z+w}{z-w}\right|=1$ ، ثابت کنید قسمت حقیقی $z\bar{w}$ صفر است.

نمایش مثلثاتی عدد مختلط:

فرض کنید $z=x+yi$ یک عدد مختلط باشد. حال اگر پاره‌خط $\overline{OZ}$ با طول $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ با جهت مثبت محور $Re(z)$ زاویه‌ی θ بسازد آنگاه داریم:



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

بنابراین نمایش مثلثاتی عدد مختلط z به صورت زیر است:

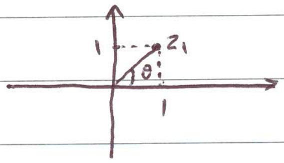
$$z = x+yi = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$= r\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$$

که $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ، قدر مطلق z ، $\theta=tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ را آرگومان z گفته با $Arg(z)$

نشان دهیم و محدوده‌ی آن $0 \le \theta < 2\pi$ است.

مثال: نمایش مثلثاتی اعداد مختلط زیر را بنویسید.

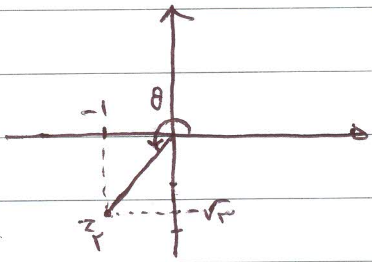
الف) $z_1 = 1+i$



$r_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\theta = tg^{-1}(\frac{1}{1}) = tg^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

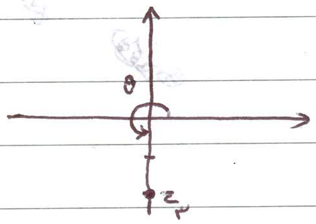
ب) $z_2 = -1-\sqrt{3}i$



$r_2 = |z_2| = \sqrt{1+3} = 2$, $\theta = tg^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = tg^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3}$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

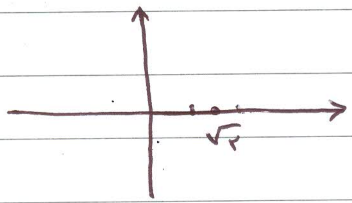
پ) $z_3 = -2i$



$r = |-2| = 2$, $\theta = tg^{-1}\left(\frac{-2}{0}\right) = \frac{3\pi}{2}$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

ت) $z_4 = \sqrt{2}$



$r_4 = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $\theta = tg^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{2}}\right) = tg^{-1}(0) = 0$

$$z_4 = \sqrt{2}\left[\cos(0) + i\sin(0)\right]$$

ضرب و تقسیم دو عدد مختلط در نمایش مثلثاتی (قطبی):

فرض کنید $z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$ و $z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

دو عدد مختلط در نمایش مثلثاتی باشند که $r_1 = |z_1|$ ، $r_2 = |z_2|$ ، $\theta_1 = Arg(z_1)$ و $\theta_2 = Arg(z_2)$ است. در این صورت ضرب $z_1 z_2$ در نمایش مثلثاتی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1][\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$$

$$= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i\,(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2) \right]$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2) \right]$$

درنتیجه داریم:

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$$

نمایش مثلثاتی مزدوج عدد مختلط:

اگر $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$ یک عدد مختلط با نمایش مثلثاتی باشد آن‌گاه مزدوج z دارای نمایش مثلثاتی زیر است:

$$\bar{z} = r\left[\cos\theta - i\sin\theta\right] = r\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

نیز برای $\operatorname{Arg}(\bar{z}) = -\theta = -\operatorname{Arg}(z)$ است.

نمایش مثلثاتی تقسیم دو عدد مختلط:

اگر z_1 و $z_2 \neq 0$ دو عدد مختلط با نمایش مثلثاتی معرفی شده در بالا باشند تقسیم $\frac{z_1}{z_2}$ در نمایش مثلثاتی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]}{r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]} \times \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}$$

$$= \frac{r_1\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\,(\cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_1)\right]}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

درنتیجه

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$$

می‌باشد.

__مثال:__ اگر $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ ، $z_2 = \sqrt{3} + i$ دو عدد مختلط باشند ابتدا نمایش مثلثاتی آنها را بیابید و سپس $z_1 z_2$ ، $\frac{z_1}{z_2}$ ، $\frac{z_2}{z_1}$ را محاسبه نمائید.

حل:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{1+3} = 2 \quad , \quad \theta_1 = tg^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{3+1} = 2 \quad , \quad \theta_2 = tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

حال با استفاده از فرمول های به دست آمده برای ضرب و تقسیم اعداد مختلط با نمایش مثلثاتی داریم:

$$z_1 z_2 = 4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right] = 4\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right] = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= -i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}\right)\right] = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= i$$

توان n ام یک عدد مختلط:

اگر $z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$ ، $z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$ ، ... و

$z_n = r_n[\cos\theta_n + i\sin\theta_n]$ اعداد مختلط با نمایش مثلثاتی باشند به طوری که برای هر j که

$1 \le j \le n$ داشته باشیم $r_j = |z_j|$ و $\theta_j = Arg(z_j)$. در این صورت با استقرا روی n

می توان ضرب n عدد مختلط را تعمیم داد:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n\left[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\right]$$

حال اگر قرار دهیم $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$ آن گاه خواهیم داشت:

$$z^n = r^n \left[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \right] \quad ; \quad n \in N$$

که به آن دستور دموآور گوییم. بنابراین $Arg(z^n) = n\theta = n.Arg(z)$ است.

<u>مثال</u>: حاصل هر کدام از عبارات زیر را به صورت $x+yi$ بیابید.

الف) $(\sqrt{3} - i)^{10}$ ب) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{12}$

حل: الف) قرار می‌دهیم $z = \sqrt{3} - i$ و داریم:

$$r = |z| = \sqrt{3+1} = 2 \quad , \quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right]$$

طبق دستور دموآور داریم:

$$z^{10} = (\sqrt{3} - i)^{10} = 2^{10}\left[\cos\left(\frac{110\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{110\pi}{6}\right) \right]$$

$$= 2^{10}\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$= 2^{10}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right] = 2^{9}(1 + \sqrt{3} i)$$

ب) قرار می‌دهیم $z = \frac{1+i}{1-i}$ ... با استفاده از نتایج قبلی داریم:

$$z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]}{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right]} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

بنابراین با استفاده از دستور دموآور داریم:

$$z^{12} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{12} = \cos(-18\pi) + i \sin(-18\pi) = 1$$

<u>تمرین</u>: ۱. حاصل $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ را بیابید.

۲. مقادیر حقیقی a و b را طوری تعیین کنید که $z = 1 - i$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^7 + ax^5 + b = 0$ باشد.

۳. با استفاده از دستور دموآور درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta$$

$$\sin(3\theta) = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta \sin\theta$$

۴. برای هر $n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید:

$$\left(\frac{1+i\,tg\theta}{1-i\,tg\theta}\right)^n = \frac{1+i\,tg(n\theta)}{1-i\,tg(n\theta)}$$

۵. اگر n عدد صحیح مثبت باشد حاصل $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ را محاسبه کنید.

۶. اگر a و b ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم $x^2-2x+4=0$ باشد ثابت کنید:

$$a^n+b^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

۷. فرض کنید $z\neq 0$ عددی مختلط باشد که $z+\frac{1}{z} = 2\cos\theta$ در اینصورت برای $n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید:

$$z^n+\frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta) \quad , \quad \theta = Arg(z)$$

ریشه‌ی nام یک عدد مختلط:

قضیه اساسی جبر: هر چندجمله‌ای درجه nام با ضرایب حقیقی $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0$ روی میدان اعداد مختلط دارای n ریشه است.

تعریف: فرض کنید z یک عدد مختلط باشد. w را ریشه‌ی nام عدد z گوییم هرگاه $w^n=z$ باشد و می‌نویسیم $w=z^{\frac{1}{n}}$.

قضیه: اگر n عدد طبیعی و $z=r\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]$ عددی مختلط با نمایش مثلثاتی باشد آن‌گاه ریشه‌ی nام z عبارتست از:

$$w_k = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right]$$

که $k=0,1,2,\dots,n-1$ است.

<u>اثبات</u>: فرض کنیم w ریشه‌ی nام z باشد و $w=\rho[\cos\alpha+i\sin\alpha]$ که

$\rho=|w|$ و $\alpha=Arg(w)$ است. دراین صورت با توجه به رابطه‌ی $w^n=z$ و استفاده از دستور

دموآور داریم:
$$\rho^n[\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)]=r[\cos\theta+i\sin\theta]$$

بنابراین داریم:
$$\begin{cases}\rho^n=r \longrightarrow \rho=\sqrt[n]{r}\\ n\alpha=2k\pi\pm\theta\end{cases}$$

با توجه به اینکه $2\pi\geq\theta\geq 0$ و $2\pi\geq\alpha\geq 0$ قرار دارند بنابراین $n\alpha=2k\pi+\theta$

قابل قبول است و در نتیجه $\alpha=\dfrac{2k\pi+\theta}{n}$ را نتیجه می‌دهد و با توجه به اینکه

$w^n=z$ دارای n ریشه است بنابراین $k=0,1,2,\dots,n-1$ می‌باشد.

<u>مثال</u>: ۱. ریشه‌ی چهارم عدد $z=-1$ را بیابید.

حل: ریشه‌ی چهارم عدد $z=-1$، همان جوابهای معادله‌ی $w^4=-1$ است و چون

$z=-1=1[\cos(\pi)+i\sin(\pi)]$ نمایش مثلثاتی می‌باشد بنابراین داریم:

$$w_k=(-1)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)\right]$$

که $k=0,1,2,3$ است:

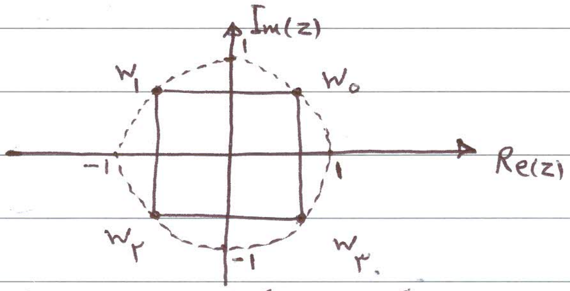
$k=0$; $w_0=\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=1$; $w_1=\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=2$; $w_2=\cos(\frac{5\pi}{4})+i\sin(\frac{5\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=3$; $w_3=\cos(\frac{7\pi}{4})+i\sin(\frac{7\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

با نمایش ریشه ها در صفحه ی مختلط



اگر نقاط w_0, w_1, w_2, w_3 را به هم وصل کنیم نمایش یک چهارضلعی منتظم (مربع) خواهد بود که

رئوس مربع (ریشه ها) روی دایره ی واحد قرار دارند.

۲. ریشه های سوم عدد $z=8$ را بیابید.

حل: نمایش مثلثاتی $z = 8 = 8\left[\cos(0) + i\sin(0)\right]$ را درنظر می گیریم. بنابراین

$$w_k = (8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi+0}{3}\right)\right]$$

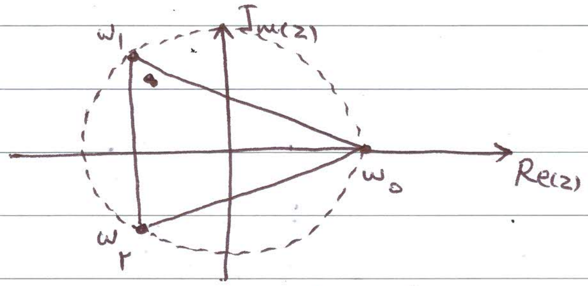
که $k=0,1,2$ است:

$k=0$; $w_0 = 2\left[\cos(0) + i\sin(0)\right] = 2$

$k=1$; $w_1 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = -1 + \sqrt{3}i$

$k=2$; $w_2 = 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = 2\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = -1 - \sqrt{3}i$

با نمایش ریشه ها در صفحه مختلط



و اتصال ریشه ها، نمایش یک سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی الاضلاع) خواهد بود که رئوس مثلث

روی دایره به شعاع ۲ است.

۳. ریشه های سوم عدد $z=-i$ را بیابید.

حل: نمایش مثلثاتی $z = -i = 1\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$ را درنظر می گیریم.

بنابراین

$$w_K=(-i)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{2K\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2K\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right)\right]$$

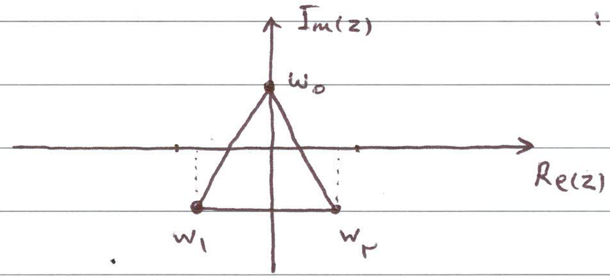
است که $K=0,1,2$.

$$K=0\ ;\quad w_0=\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)=i$$

$$K=1\ ;\quad w_1=\cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

$$K=2\ ;\quad w_2=\cos(11\pi/6)+i\sin(11\pi/6)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

که دارای نمایش هندسی زیر است:



مکان هندسی:

مثال: مکان هندسی نقاط (x,y) از صفحه را بیابید که به ازای $z=x+iy$ در هر کدام از شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $\left|\frac{z+i}{z-1}\right|<1$

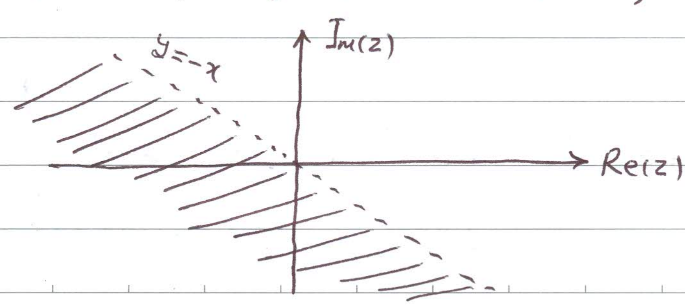
حل: قرار می‌دهیم $z=x+yi$:

$$\left|\frac{z+i}{z-1}\right|=\left|\frac{x+yi+i}{x+yi-1}\right|=\left|\frac{x+(y+1)i}{(x-1)+yi}\right|=\frac{|x+(y+1)i|}{|(x-1)+yi|}<1$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}<1\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+(y+1)^2}<\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2+2y+1<x^2-2x+1+y^2\ \Rightarrow\ y<-x$$

بنابراین مجموعه نقاط $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y<-x\}$ در نامعادله‌ی بالا صدق می‌کند:



ب) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{\bar{z}+1}\right) \geq 1$

حل: با قرار دادن $z=x+yi$ داریم:

$$\frac{1}{\bar{z}+1} = \frac{1}{x-yi+1} = \frac{1}{(x+1)-yi} \times \frac{(x+1)+yi}{(x+1)+yi} = \frac{(x+1)+yi}{(x+1)^2+y^2}$$

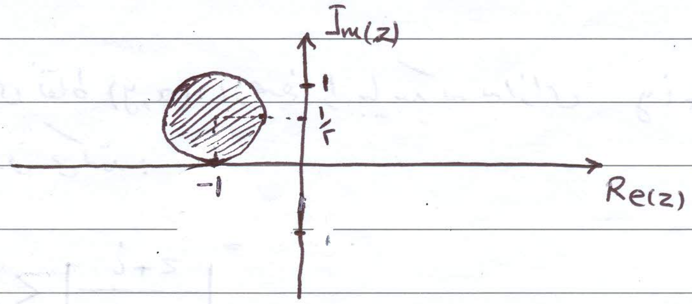
$$= \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{y}{(x+1)^2+y^2}\, i$$

بنابراین

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}+1}\right) = \frac{y}{(x+1)^2+y^2} \geq 1 \implies y \geq (x+1)^2+y^2$$

$$\implies (x+1)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

مکان هندسی نقاطی که در نامعادله بالا صدق می‌کنند نقاط روی و درون دایره به مرکز $(-1, \tfrac{1}{2})$ و شعاع $\tfrac{1}{2}$ است.



تمرین: ۱. ریشه‌های معادلات مختلط زیر را بیابید.

الف) $z^4 = 1+i$ ب) $z^4 - 2z + 4 = 0$

پ) $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$

ت) $z^3 = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{6}) - i\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(\frac{\pi}{3})} + i$ ث) $(1+z)^3 = (1-z)^3$

ج) $z^2 - 2iz - 2z + i = 0$ چ) $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$

۲. اگر $z \neq 1$ ریشه‌ی n ام عدد ۱ باشد ثابت کنید:

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = 0, \quad n\in\mathbb{N}$$

۳. مکان هندسی مجموعه نقاط (x,y) از صفحه را بیابید که به ازای $z=x+iy$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

الف) $|z+i|=1$ ب) $\left|\frac{z-1}{z+i}\right|\leqslant 2$

پ) $|2z+i-1|\geq 4$ ت) $Re(z^3)<1$

ث) $Im\left(\frac{1}{z}\right)\geqslant 1$ ج) $\left|\frac{z}{\bar{z}+1}\right|\leqslant 1$

چ) $0<Arg(z^2)<\frac{\pi}{2}$ ح) $0\leqslant Arg(\bar{z})\leq \pi$

خ) $|z|<|2z-1|$ د) $Re\left(1+i+\frac{1}{\bar{z}+1}\right)=1$

۴. اگر z_1 و z_2 ریشه‌ی مختلط معادله‌ی $z^3=1$ باشند آن‌گاه ثابت کنید:

$$(z_1+1)^n+(z_2+1)^n=2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

۵. فرض کنید z_1، z_2 و z_3 سه عدد مختلط باشند که $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$

و $z_1+z_2+z_3=0$. در این صورت ثابت کنید: $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$

۶. اگر a و c اعداد حقیقی و b عددی مختلط باشد نشان دهید معادله‌ی

$$az\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c=0$$

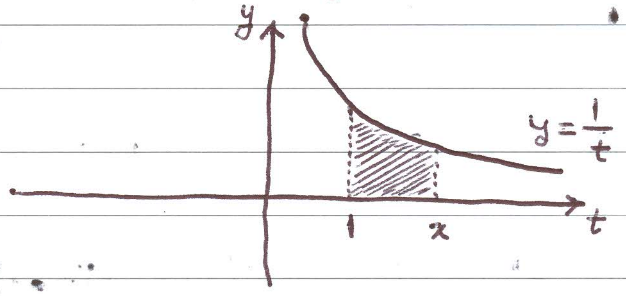
که $z=x+yi\in\mathbb{C}$، نمایش یک دایره در صفحه است.

تعریف: تابع $Ln:(0,+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$Ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

را تابع لگاریتم طبیعی Ln گوییم که تعبیر هندسی این تابع برای $1<x$ عبارتست از

مساحت ناحیه‌ی محدود به زیر تابع $f(t)=\frac{1}{t}$ در بازه‌ی $[1,x]$ و بالای محور x.



ویژگی‌های لگاریتم طبیعی Ln:

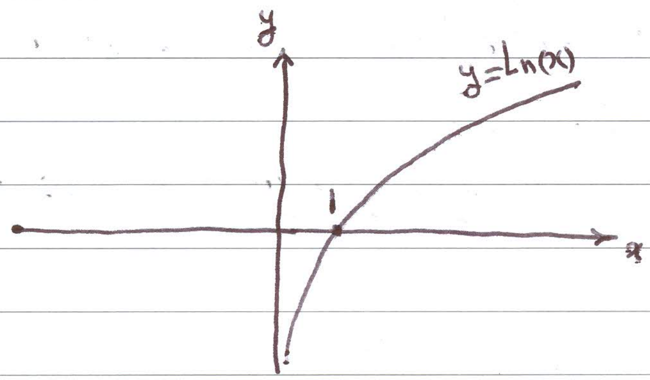
اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند آنگاه داریم:

الف) $Ln(1)=0$ ب) $Ln(xy)=Ln(x)+Ln(y)$

پ) اگر $y\neq 0$ باشد $Ln(\frac{x}{y})=Ln(x)-Ln(y)$

ت) اگر $\alpha\in\mathbb{R}^{>0}$ باشد $Ln(x^{\alpha})=\alpha Ln(x)$

نمودار تابع $y=Ln(x)$:

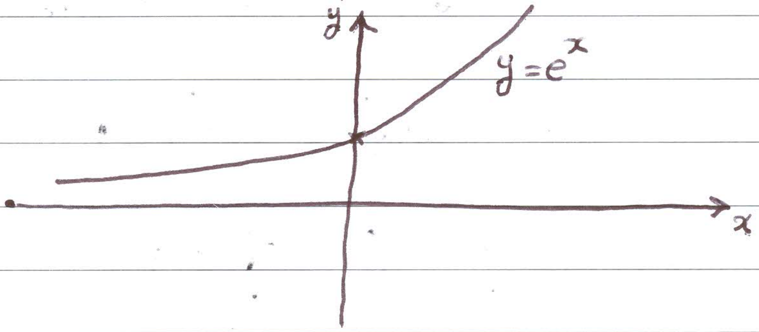


وارون تابع لگاریتم طبیعی Ln:

تابع $Ln(x)$ وارون پذیر است و تابع وارون آن را با $y=e^x$ نمایش می‌دهیم و

برای $x>0$ داریم: $e^x\circ Ln(x)=Ln(x)\circ e^x=x$

تابع $f(x)=e^x$ را تابع نمایی گوییم که دامنه آن $\mathbb{R}$ است.



ویژگی‌های نمایی:

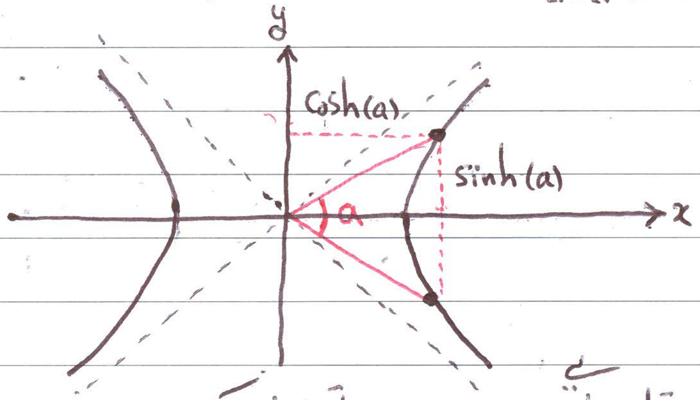
برای هر x و y حقیقی داریم:

الف) $e^0=1$ ب) $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$

پ) $(e^x)^y=e^{xy}$ ت) $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$

توابع هیپربولیک:

هذلولی $x^2-y^2=1$ را در نظر بگیرید. از لحاظ هندسی $\sinh(a)$ و $\cosh(a)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:



توابع هیپربولیک را می‌توان برحسب توابع نمایی به صورت زیر تعریف کرد:

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad,\quad \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\text{tgh}(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$\text{cotgh}(x)=\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$\text{csch}(x)=\frac{1}{\sinh(x)}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}\quad,\quad \text{sech}(x)=\frac{1}{\cosh(x)}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

روابط هیپربولیک :

با جایگذاری فرمول‌های بالا روابط زیر نتیجه خواهد شد :

الف) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

زیرا

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ب) با استفاده از رابطه الف نتیجه می‌گیریم :

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x = \frac{1}{\sinh^2 x}$$

پ) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

زیرا

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2}$$

$$= \sinh(x+y)$$

و همچنین

$$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2}$$

$$= \cosh(x+y)$$

ت) با استفاده از رابطه‌های پ) و قرار دادن $x=y$ داریم:

• $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

•• $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

$= 1 + 2\sinh^2(x)$

$= 2\cosh^2(x) - 1$

ث)

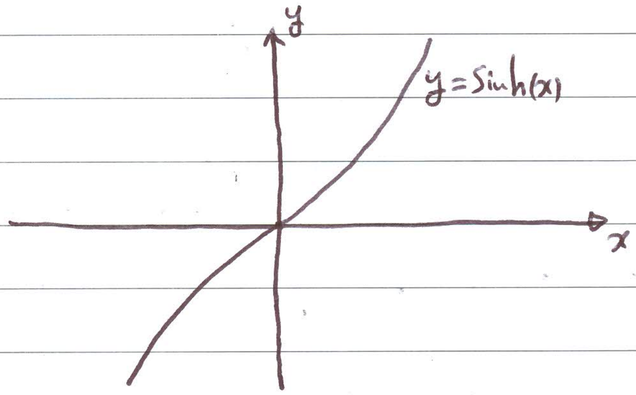
• $\cosh(x) + \sinh(x) = e^{x}$

•• $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$

اثبات به عنوان تمرین

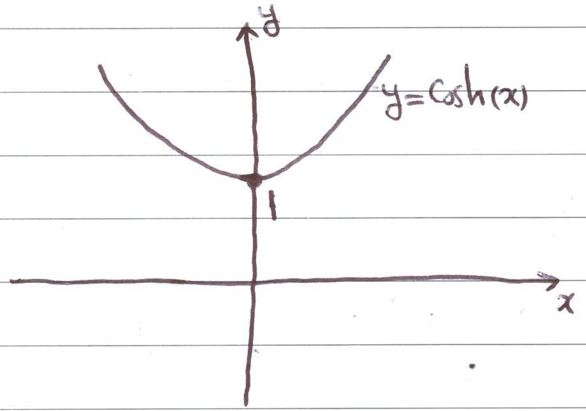
ویژگی‌های توابع هیپربولیک:

الف) تابع $y=\sinh(x)$ با دامنه و برد $\mathbb{R}$ بوده و تابعی فرد است که نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:



$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\sinh(x)$$

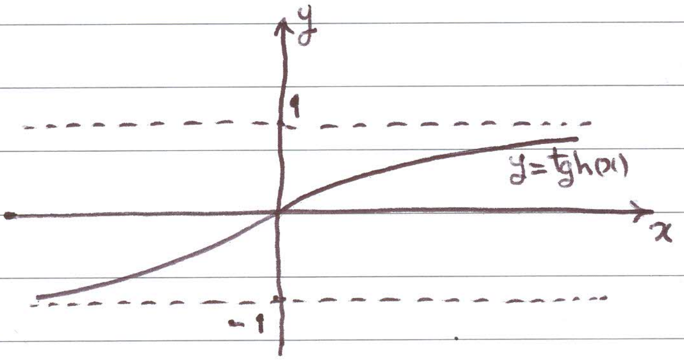
ب) تابع $y=\cosh(x)$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و برد $[1,+\infty)$، تابعی زوج است و نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:



$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh(x)$$

پ) تابع $y=tgh(x)$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و برد $(-1,1)$ بوده و تابعی فرد است و

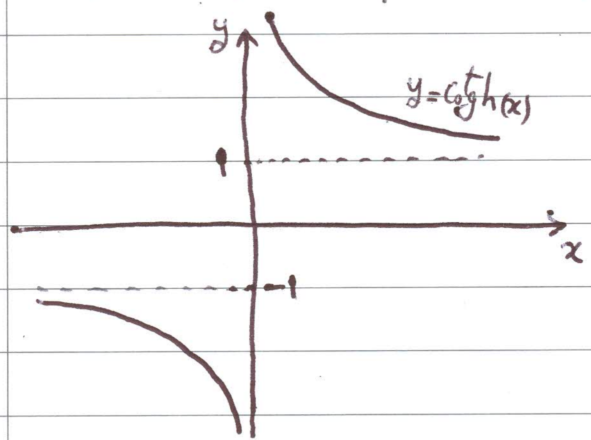
نمودار آن به شکل زیر است:



$$tgh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{e^{-x}+e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}$$
$$= -\,tgh(x)$$

ت) تابع $y=cotgh(x)$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{0\}$ و برد $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

بوده و تابعی فرد است. نمودار آن عبارتست از:



$$cotgh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{e^{-x}-e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}-e^{x}}$$
$$= -cotgh(x)$$

وارون توابع هیپربولیک:

الف) تابع $y=\sinh(x)$ روی $\mathbb{R}$ یک به یک و پوشاست پس وارون‌پذیر باشد

و تابع وارون آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sinh^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh}(x) = Ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

زیرا

$$y=\sinh(x) \longrightarrow y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \longrightarrow e^{x}-e^{-x}=2y$$

$$\longrightarrow e^{2x}-2y\,e^{x}-1=0$$

$$\longrightarrow e^{x}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

چون $y<\sqrt{y^2+1}$ است پس $e^{x}=y-\sqrt{y^2+1}$ قابل قبول نیست و

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

که نتیجه می‌دهد

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

با جابجایی نقش x و y تابع وارون به دست می‌آید.

ب) تابع $y=\cosh(x)$ روی $[0,+\infty)$ تابعی یک‌به‌یک و پوشاست پس

وارون‌پذیر می‌باشد و داریم:

$$\cosh^{-1}(x) = \operatorname{arc}\cosh(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad ; \quad x \geq 1$$

زیرا

$$y=\cosh(x) \longrightarrow y = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \longrightarrow e^x+e^{-x} = 2y$$

$$\longrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$\longrightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

چون $0<y-\sqrt{y^2-1}\leq 1$ و $e^x>1$ است بنابراین $e^x = y+\sqrt{y^2-1}$ قابل قبول

است و داریم:

$$x = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

با تغییر نقش x و y تابع وارون به دست می‌آید.

تمرین: ثابت کنید:

الف) $\tanh^{-1}(x) = \operatorname{arc}\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad ; \quad |x|<1$

ب) $\coth^{-1}(x) = \operatorname{arc}\coth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad ; \quad |x|>1$

پ) $\operatorname{sech}^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad ; \quad 0<x\leq 1$

ت) $\operatorname{csch}^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) \quad ; \quad x\neq 0$

<u>تعریف</u>: منظور از یک دنباله‌ی عددی حقیقی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ عبارتست از تابع $x_n: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

که به ازای هر عدد طبیعی n یک عدد حقیقی x_n را به ما می‌دهد. جملات دنباله را به صورت

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

می‌نویسیم و x_n را جمله‌ی عمومی دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ گوییم.

<u>مثال</u>: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که $x_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ را در نظر می‌گیریم. به ازای مقادیر

$n=1,2,3,4,5$، پنج جمله‌ی اول این دنباله را بیابید.

حل:
$$x_1 = \frac{1}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2}\sin(\pi) = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} \quad , \quad x_4 = \frac{1}{4}\sin(2\pi) = 0 \quad , \quad x_5 = \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$$

<u>تعریف</u>: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را همگرا به L گوییم و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \; ; \; \forall n, \; n \geq N \Longrightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

اگر حد $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ موجود باشد دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را همگرا و اگر این حد موجود نباشد یا

یا $\pm\infty$ برابر باشد دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را واگرا گوییم.

<u>مثال</u>: با استفاده از تعریف ثابت کنید دنباله‌ی $x_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ به ۱ همگراست.

حل: به ازای هر $\varepsilon > 0$ باید $N \in \mathbb{N}$ ای را بیابیم که: $\left|\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right| = \left|\frac{2n-1-2n-1}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{2n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow n + \frac{1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

بنابراین با انتخاب $N = \begin{cases} 1 & \varepsilon \geq 1 \\ \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right] & 0 < \varepsilon < 1 \end{cases}$ حکم برقرار است.

تعریف: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را صعودی گوییم هرگاه $N\in\mathbb{N}$ای وجود داشته باشد

به طوری که برای هر $n\geqslant N$ داشته باشیم $x_{n+1}\geqslant x_n$ و این دنباله را نزولی گوییم هرگاه $N\in\mathbb{N}$

ای وجود داشته باشد که برای هر $n\geqslant N$ داشته باشیم $x_{n+1}\leqslant x_n$.

مثال: ۱. دنباله‌ی $x_n=\frac{1}{n}$ نزولی است زیرا برای هر n طبیعی بزرگتر از ۱ داریم:

$$x_{n+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=x_n$$

۲. دنباله‌ی $x_n=\frac{10^n}{n!}$ نزولی است زیرا

$$x_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{10^n}{n!}\times\frac{10}{n+1}=x_n\times\frac{10}{n+1}$$

برای $n\geqslant 10$ داریم $1>\frac{10}{n+1}$ و بنابراین $x_{n+1}<x_n$ است.

۳. دنباله‌ی $x_n=n^2$ صعودی است زیرا برای $n\geqslant 2$ داریم:

$$x_n=n^2<(n+1)^2=x_{n+1}$$

تعریف: دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را کراندار گوییم هرگاه $M\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که

$|x_n|\leqslant M$ به ازای هر n.

مثال: دنباله‌ی $x_n=\frac{1}{n^2+1}$ کراندار است زیرا $1<x_n=\frac{1}{n^2+1}<0$

قضیه: هر دنباله‌ی کراندار صعودی (نزولی) همگرا است.

نتیجه: هر دنباله‌ی نزولی و از پایین کراندار و یا صعودی از بالا کراندار همگرا است.

مثال: نشان دهید دنباله‌ی $x_1=1$ و برای $n>1$، $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{1+x_n}$ همگرا است و حد آن را بیابید.

حل: به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n>0$ است و برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1+x_n} < \frac{x_n^2}{x_n} = x_n$$

بنابراین $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نزولی است و چون از پایین کراندار است پس دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است

حال قرار می‌دهیم $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ و داریم $L = \frac{L^2}{1+L}$ که $L = 0$ را نتیجه

می‌دهد بنابراین دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به 0 همگرا است.

<u>مثال</u>: دنباله‌ی $x_1 = \sqrt{6}$ و به ازای هر $n > 1$ داریم $x_n = \sqrt{6 + x_{n-1}}$

را در نظر می‌گیریم. نشان دهید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است و مقدار حد آنرا بیابید.

حل: به ازای هر n، $x_n > 0$ است. به کمک استقرای ریاضی نشان می‌دهیم که دنباله‌ی

صعودی است. برای $n = 2$، $x_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}} > \sqrt{6} = x_1$ است.

حال اگر برای $n = K$، $x_{K+1} > x_K$ باشد آن‌گاه $6 + x_{K+1} > 6 + x_K$ است

و در نتیجه داریم: $x_{K+2} = \sqrt{6 + x_{K+1}} > \sqrt{6 + x_K} = x_{K+1}$

طبق استقرای ریاضی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی است. حال با استقرای ریاضی نشان می‌دهیم

که این دنباله از بالا کراندار است. به وضوح $x_1 = \sqrt{6} < 3$ است حال اگر

فرض شود $x_K < 3$ آن‌گاه $6 + x_K < 6 + 3 = 9$ است و

$$x_{K+1} = \sqrt{6 + x_K} < 3$$

بنابراین حکم برقرار است. چون دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی و از بالا کراندار است

در نتیجه همگرا است. قرار می‌دهیم $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ و در نتیجه $L = \sqrt{6 + L}$

بوده و بنابراین $L^2-L-6=0$ و $(L-3)(L+2)=0$ می‌باشد که

$L=3$ قابل قبول است.

مثال: اگر $x_1=\frac{1}{2}$ و به ازای هر $n\geq 1$ داشته باشیم $7x_{n+1}=x_n^3+6$

نشان دهید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست و سپس مقدار حد آنرا بیابید.

حل: ابتدا با استقرای ریاضی نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی است.

قرار می‌دهیم $x_{n+1}=\frac{x_n^3+6}{7}$ و برای $n=1$ داریم: $x_1=\frac{1}{2}<\frac{7}{8}=x_2$

حال اگر $x_{k+1}>x_k$ فرض شود آن گاه $\frac{x_{k+1}^3+6}{7}>\frac{x_k^3+6}{7}$

و درنتیجه $x_{k+2}>x_{k+1}$ است پس دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی است.

حال با استقرای ریاضی نشان می‌دهیم این دنباله از بالا کراندار است. بوضوح $x_1=\frac{1}{2}<1$

است حال اگر $x_k<1$ فرض شود آن گاه $x_k^3<1$ بوده

و داریم: $6+x_k^3<6+1=7$ که از آن نتیجه می‌شود:

$$x_{k+1}=\frac{6+x_k^3}{7}<\frac{7}{7}=1$$

بنابراین دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کراندار است. چون این دنباله صعودی و از بالا کراندا

است پس همگراست. قرار می‌دهیم $L=\lim_{n\to\infty}x_n$ که $7L=L^3+6$

و درنتیجه $(L-1)(L-2)(L+3)=0$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه

به‌ازای هر n داریم $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$ بنابراین $L = 1$ است.

تمرین:

۱. اگر $x_1 = 3$ و برای هر $n \geq 1$ داشته باشیم $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$ باشد

نشان دهید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست و مقدار حد آن را بیابید.

۲. اگر $x_1 = 2$ و به‌ازای هر $n \geq 2$ داشته باشیم: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

ثابت کنید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست سپس مقدار حد آن را بیابید.

۳. اگر $x_1 > 1$ بوده و به‌ازای هر $n \geq 2$ داشته باشیم $x_{n+1} = 1 + \ln(a_n)$

ثابت کنید دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست و سپس مقدار حد دنباله را بیابید.

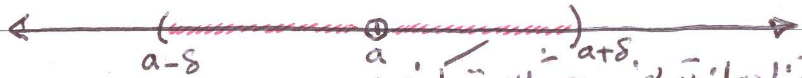
تعریف: منظور از δ-همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ عبارتست از:

$$(a-\delta, a+\delta)-\{a\}=\{x\in\mathbb{R} : 0<|x-a|<\delta\}$$

تعریف: فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ در یک δ-همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 ; \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

δ-همسایگی محذوف a



مثال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

الف) $\lim_{x\to 1} 2x+1=3$ ، ب) $\lim_{x\to 3} x^2=9$

حل: الف) ابتدا فرض می‌کنیم حد برقرار است بنابراین طبق تعریف حد داریم:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 ; \quad 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |2x+1-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow 2|x-1|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1|<\varepsilon/2$$

بنابراین با انتخاب $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ (یا $\frac{\varepsilon}{2}\geq\delta$) حکم برقرار است.

ب) با توجه به تعریف حد داریم:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 ; \quad 0<|x-3|<\delta \Rightarrow |x^2-9|<\varepsilon \quad \therefore$$

اگر $0<|x-3|<1$ بگیریم آنگاه $-1<x-3<1$ و در نتیجه $6<x+3<7$

قرار دارند. پس $|x+3|<7$ بوده و داریم:

$$\therefore \quad |x^2-9|=|(x-3)(x+3)|=|x-3||x+3|<7|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |x-3|<\frac{\varepsilon}{7}$$

بنابراین با انتخاب $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$ حکم برقرار است.

مثال: نشان دهید تابع (دیریکله) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in \mathbb{Q} \\ 0 & x\notin \mathbb{Q}\end{cases}$
در هیچ نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ حد ندارد.

حل: با استفاده از برهان خلف فرض کنیم تابع f در $x=a$ دارای حد L باشد در این صورت

طبق تعریف حد داریم:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \;;\; 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-L|<\varepsilon \qquad (*)$$

دو حالت الف) $L\neq 0$ و ب) $L=0$ را بررسی می‌کنیم:

الف) اگر $L\neq 0$ باشد چون رابطه‌ی $(*)$ به ازای هر x در δ-همسایگی محذوف a

برقرار است بنابراین اگر x را عددی اصم و $\varepsilon=\frac{|L|}{2}$ بگیریم آن‌گاه داریم:

$$|L|=|0-L|=|f(x)-L|<\varepsilon=\frac{|L|}{2}$$

که یک تناقض است.

ب) اگر $L=0$ باشد در رابطه‌ی $(*)$، x را عددی گویا در δ-همسایگی محذوف a و

$\varepsilon=\frac{1}{2}$ می‌گیریم در این صورت داریم:

$$1=|1-0|=|f(x)-L|<\varepsilon=\frac{1}{2}$$

که یک تناقض است.

بنابراین فرض خلف باطل است و تابع f در هیچ نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ حد ندارد.

قضیه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله‌ی همگرا به a، دنباله‌ی $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$
به L همگرا باشد.

نتیجه: اگر بخواهیم نشان دهیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود نیست کافیست دو دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و
$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ هر دو همگرا به a را بیابیم به طوری که دنباله‌ی $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ به L_1 و دنباله‌ی $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$

به L_2 همگرا باشد درحالی که $L_1 \neq L_2$.

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$ وجود ندارد.

حل: به ازای $n=1,2,\dots$ دو دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_n = 1+\frac{1}{n\pi} \quad , \quad y_n = 1+\frac{2}{(4n+1)\pi}$$

به روشنی دنباله‌های $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ هردو همگرا به ۱ هستند و داریم:

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n\pi}-1}\right) = \sin(n\pi) = 0$$

$$f(y_n) = \sin\left(\frac{1}{1+\frac{2}{(4n+1)\pi}-1}\right) = \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

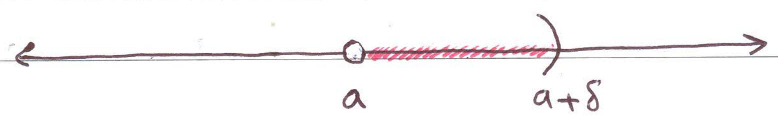
بنابراین دنباله‌ی $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ به ۰ و دنباله‌ی $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ به ۱ همگراست که ثابت می‌کند $\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$ موجود نیست.

حد راست و حد چپ:

اگر تابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ در بازه‌ی $(a, a+\delta)$ تعریف شده باشد آن‌گاه $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ است اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 ; \quad 0<x-a<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

بازه‌ی $(a, a+\delta)$

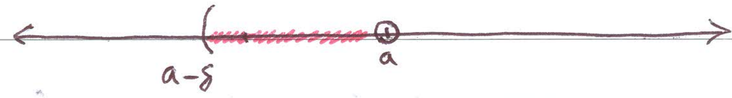


و اگر f بر بازه‌ی $(a-\delta, a)$ تعریف شده باشد آن‌گاه $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

است اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 ; \quad 0<a-x<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

بازه‌ی $(a-\delta,a)$



<u>قضیه</u>: اگر f در یک δ-همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده باشد آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ است اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$.

<u>مثال</u>: مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1||x+1|}{x-1}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)|x+1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}|x+1|=2\\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)|x+1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}-|x+1|=-2\end{cases}$$

= وجود ندارد

جبر حدود توابع:

<u>قضیه</u>: فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ باشند در این صورت داریم:

<u>الف)</u> $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_1\pm L_2$

<u>ب)</u> $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_1L_2$

<u>پ)</u> اگر $L_2\neq 0$ و g در یک δ-همسایگی محذوف $x=a$ مخالف صفر باشد داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

قضیه: اگر x یک کمان باشد آنگاه داریم:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

نتیجه: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$. زیرا

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1$$

مثال: مقدار هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $m,n\neq 0$ ،
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}=\lim_{x\to 0}\frac{m\times\frac{\sin(mx)}{mx}}{n\times\frac{\sin(nx)}{nx}}=\frac{m}{n}$$

ب)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}x\times\frac{\sin(x^2)}{x^2}=0\times 1=0$$

پ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

ت)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{x}$$
$$=\begin{cases}\sqrt{2} & x\to 0^+\\ -\sqrt{2} & x\to 0^-\end{cases}=\text{وجود ندارد}$$

قضیه (فشردگی): فرض کنید f ، g و h توابعی باشند که در یک همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده اند و به ازای هر x که $0<|x-a|<\delta$ داشته باشیم:
$$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$$
در این صورت اگر $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$ باشد آنگاه داریم: $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

مثال: هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)
$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

حل: به ازای هر x که $0<|x|<\delta$ داریم: $-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$

بنابراین $-x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leq x^2$ بوده و چون $\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

است بنابر قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$ است.

ب) $\lim_{x\to 0^+} x\left(\lfloor\frac{1}{x}\rfloor + \lfloor\frac{2}{x}\rfloor + \cdots + \lfloor\frac{n}{x}\rfloor\right)$

حل: برای هر K که $1 \leq K \leq n$ و هر x که $0<x<\delta$ داریم:

$$\frac{K}{x} - 1 < \lfloor\frac{K}{x}\rfloor \leq \frac{K}{x}$$

بنابراین برای $x>0$ می‌توان نوشت:

$$K - x = x(\frac{K}{x} - 1) < x\lfloor\frac{K}{x}\rfloor \leq x \cdot \frac{K}{x} = K$$

از آنجا که $\lim_{x\to 0^+} K - x = \lim_{x\to 0^+} K = K$ است بنابر قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x\to 0^+} x\lfloor\frac{K}{x}\rfloor = K$

می‌باشد در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(\lfloor\frac{1}{x}\rfloor + \lfloor\frac{2}{x}\rfloor + \cdots + \lfloor\frac{n}{x}\rfloor\right) = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حد بینهایت و حدود در بینهایت:

۱. $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = L$ اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists M>0 \; ; \quad |x|>M \implies |f(x)-L|<\varepsilon$$

۲. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ اگر و تنها اگر

$$\forall N>0 \quad \exists \delta>0 \; ; \quad 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)|>N$$

۳. $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ اگر و تنها اگر

$$\forall N>0 \quad \exists M>0 \; ; \quad |x|>M \implies |f(x)|>N$$

مثال: با استفاده از تعریف حد (استلزام منطقی) درستی حدود زیر را ثابت کنید.

الف) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} = \infty$.

حل: $\forall N>0 \quad \exists \delta>0 \; ; \; 0<|x-1|<\delta \Longrightarrow \left|\frac{1}{x^2-1}\right| > N$ ∴

∴ $\left|\frac{1}{x^2-1}\right| = \frac{1}{|x-1||x+1|} > N \Rightarrow |x-1||x+1| < \frac{1}{N}$

با فرض $0<|x-1|<1$ نتیجه می‌گیریم که $-1<x-1<1$ و در نتیجه $1<x+1<3$ خواهد بود

پس $|x+1|<3$ است و داریم: $|x-1||x+1| < 3|x-1| < \frac{1}{N}$

$\Rightarrow \quad |x-1| < \frac{1}{3N}$

بنابراین با انتخاب $\delta = \min\{1, \frac{1}{3N}\}$ حکم برقرار است.

ب) $\lim_{x\to -\infty} x^4+1 = +\infty$.

$\forall N>0 \; \exists M>0 \; ; \; x<-M \Longrightarrow x^4+1>N$ ∴

∴ $x^4 > N-1 \Rightarrow |x| > \sqrt[4]{|N-1|}$

$\Rightarrow \quad x < -\sqrt[4]{|N-1|}$

با انتخاب $M=\sqrt[4]{|N-1|}$ حکم برقرار است.

مثال: هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{3x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(3-\frac{1}{x^2})} = \frac{2}{3}$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}} = 1$

پ) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}}{(x+1)(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{6}$$

توجه: در حل حد بالا از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ استفاده شد.

ث) $$\lim_{x\to+\infty} x(x-\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to+\infty} x(x-\sqrt{x^2+1}) \times \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(-1)}{\cancel{x}(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})} = \frac{-1}{2}$$

تمرین:

۱. با استفاده از تعریف حد (استلزام منطقی) درستی هریک از حدود زیر را ثابت کنید.

الف) $\lim_{x\to 1} 2x^2+1 = 3$ ب) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

پ) $\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2$ ت) $\lim_{x\to 2} x^4 = 16$

ث) $\lim_{x\to-\infty} -2x^3+5 = +\infty$ ج) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$

۲. ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty} \cos x$ وجود ندارد.

۳. نشان دهید تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ -1 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌اش $\mathbb{R}$ حد ندارد.

۴. مقدار هریک از حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$ ب) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

پ) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{1-x}$ ت) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

ث) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$ ج) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} (x^2-\frac{1}{4})\, tg(\pi x)$

ج) $\lim_{n\to+\infty} \frac{[x]+[x^2]+\cdots+[x^n]}{x^n}$ ح) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

خ) $\lim_{n\to+\infty} \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$ د) $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x^2]-4}{x-2}$

ذ) $\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

۵. اگر f تابعی باشد که $\lim_{x\to+\infty} x\,f(x)=0$ باشد آن‌گاه ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

۶. اگر $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

در این صورت ضابطهٔ تابع f را مشخص نمایید.

۷. مقادیر α و β را طوری بیابید تا تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta$ در بی‌نهایت حدی برابر صفر داشته باشد.

پیوستگی :

تعریف : فرض کنید تابع f در یک δ-همسایگی نقطه‌ی $x=a$ ،

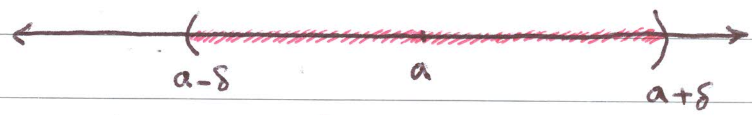
$$\{x\in\mathbb{R} : |x-a|<\delta\}$$

تعریف شده باشد در اینصورت تابع f در $x=a$ پیوسته است هرگاه

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ اگر و تنها اگر

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ ;\ |x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

δ همسایگی a



اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشد ولی با $f(a)$ برابر نباشد f را در a ناپیوسته نوع اول یا رفع شدنی گوییم و اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود نباشد f را در a ناپیوسته نوع دوم یا رفع نشدنی گوییم.

مثال : الف) تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در $x=0$ ناپیوستگی نوع اول دارد

زیرا $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 0=f(0)$

ب) تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|2x-1|}{2x-1} & x\neq \frac{1}{2}\\ 0 & x=\frac{1}{2}\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$ ناپیوستگی نوع دوم رفع نشدنی دارد زیرا

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{|2x-1|}{2x-1}=\begin{cases}1 & x\to \frac{1}{2}^{+}\\ -1 & x\to \frac{1}{2}^{-}\end{cases}$$

= وجود ندارد

مثال : نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ -x^2, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ را بیابید.

حل : ابتدا نشان می‌دهیم تابع f در هر نقطه از $\mathbb{R}-\{0\}$ ناپیوسته است. فرض کنید

$x=a\in\mathbb{R}-\{0\}$ نقطه‌ای دلخواه باشد. دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد گویا که به a همگرا

است را درنظر می‌گیریم. بوضوح دنباله‌ی $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ به a^2 همگرا است. حال اگر دنباله‌ی $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$

از اعداد گنگ را درنظر بگیریم که به a همگرا است آنگاه دنباله‌ی $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ به $-a^2$ همگرا

می باشد. با توجه به اینکه a مقداری غیر صفر است بنابراین دنباله‌ی $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$

به مقادیر متفاوتی همگرا هستند در نتیجه $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود نیست. اکنون ثابت می‌کنیم تابع

f در صفر پیوسته است. اگر $|x|<\delta$ انتخاب کنیم آنگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ داریم:

$$|f(x)-f(0)|=|\pm x^2-0|=x^2<\varepsilon \implies |x|<\sqrt{\varepsilon}$$

بنابراین برای هر $\varepsilon>0$ کافیست $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ (یا $\delta\le\sqrt{\varepsilon}$) اختیار کنیم در این صورت

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$$

می باشد.

<u>مثال</u>: فرض کنید به ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در شرط

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

صدق کند. اگر f در $x=0$ پیوسته باشد ثابت کنید f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ پیوسته است.

حل: ابتدا قرار می‌دهیم $a=b=0$ و داریم $f(0)=f(0)+f(0)$ و لذا $f(0)=0$

است. حال به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $a=x$ و $b=-x$ و داریم:

$$f(x-x)=f(x)+f(-x)$$

$$\implies 0=f(0)=f(x)+f(-x)$$

$$\implies \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(-x)=-f(x)$$

چون طبق فرض f در مبدأ پیوسته است بنابراین $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.

حال نشان می‌دهیم f در هر نقطه‌ی دلخواه $x_0 \in R$ نیز پیوسته خواهد بود. قرار می‌دهیم

$a=x$ و $b=-x_0$ و داریم:

$$f(x-x_0) = f(x) + f(-x_0)$$
$$= f(x) - f(x_0)$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x-x_0) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) - f(x_0)$$

پیوستگی f در نقطه‌ی $x=0$ نتیجه می‌دهد $\lim_{x \to x_0} f(x-x_0) = f(0) = 0$ در نتیجه رابطه‌ی بالا

به صورت زیر خواهد بود: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

<u>قضیه</u>: اگر f و g دو تابع پیوسته در $x=a$ باشند آن‌گاه توابع زیر در $x=a$ پیوسته‌اند:

<u>الف)</u> $f \pm g$ <u>ب)</u> fg

<u>پ)</u> $\frac{f}{g}$ (اگر $g(a) \neq 0$ و تابع $g(x)$ در یک δ-همسایگی $x=a$ مخالف صفر باشد)

<u>ت)</u> $|f|$ <u>ث)</u> $\sqrt{f}$ (برای $f(x) \geq 0$)

<u>قضیه</u>: اگر g در نقطه‌ی a و f در نقطه‌ی $g(a)$ پیوسته باشند آن‌گاه تابع

$f \circ g$ در a پیوسته است.

تمرین:

۱. نقاط پیوستگی و ناپیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\in Q \\ x^2+2x & x\notin Q \end{cases}$ را با بیان دلیل بیابید.

۲. پیوستگی تابع $f(x)=\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x-1}{2}\right]$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع حقیقی مقدار باشد که به ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$ عدد حقیقی $M>0$ ای وجود داشته باشد که $|f(a)-f(b)|\leqslant M|a-b|$.

در این صورت ثابت کنید f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۴. مقادیر α و β را طوری بیابید که تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+4x+4}} & x<-2 \\ \alpha & x=-2 \\ \beta+[x^2] & x>-2 \end{cases}$$

در نقطه‌ی -2 پیوسته باشد.

۵. دو تابع f و g مثال بزنید که در نقطه‌ی صفر ناپیوسته باشد اما مجموع دو تابع $f+g$ در صفر پیوسته باشد.

۶. دو تابع f و g مثال بزنید که در مبدأ ناپیوسته اند اما ترکیب دو تابع $f\circ g$ در مبدأ ناپیوسته باشد.

۷. فرض کنید تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ در مبدأ از راست پیوسته است و به ازای هر $x\in[0,1]$ داشته باشیم $f(x^2)=f(x)$. در این صورت ثابت کنید f روی $[0,1]$ پیوسته است.

۸. فرض کنید $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی باشد که به ازای هر $a,b>0$ حقیقی

داشته باشیم $f(ab) = f(a) + f(b)$ و $f(1) = 0$.

اگر f در نقطه‌ی ۱ پیوسته باشد ثابت کنید تابع f روی $(0, +\infty)$ پیوسته است.

۹. نشان دهید تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
در نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ پیوسته است اما در هیچ نقطه‌ای از $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ پیوسته نیست.

۱۰. نشان دهید تابع $f(x) = [x] + (x - [x])^2$ در تمام نقاط صحیح $\mathbb{Z}$ پیوسته است.

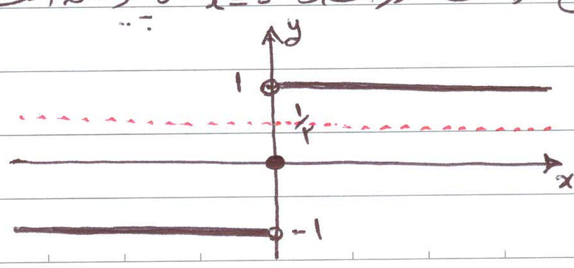
قضایای پیوستگی:

<u>قضیه (مقدار میانی)</u>: اگر $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ تابع حقیقی مقدار پیوسته بوده و λ عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آن‌گاه $c \in (a,b)$ ای وجود دارد به‌طوری‌که $f(c) = \lambda$.

<u>نکته</u>: شرط پیوستگی برای حکم قضیه‌ی مقدار میانی، شرط لازم است.

<u>مثال</u>: تابع علامت
$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
را در نظر بگیرید. اگر $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیریم آن‌گاه $\frac{1}{2} \in [-1,1] = [f(-1), f(1)]$ درحالیکه $c \in (-1,1)$ وجود ندارد به‌طوری‌که $f(c) = \frac{1}{2}$. تابع علامت در قضیه‌ی مقدار میانی صدق نمی‌کند زیرا تابع علامت در نقطه‌ی $x = 0$ ناپیوسته است.

نمودار تابع علامت
$f(x) = \operatorname{Sgn}(x)$



نتیجه قضیه‌ی مقدار میانی (قضیه‌ی بولتزانو) :

اگر تابع $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته بوده و $f(a)f(b)<0$ باشد آن‌گاه $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $f(c)=0$.

مثال : اگر $f:[0,1] \longrightarrow [0,1]$ تابعی پیوسته باشد نشان دهید $c\in[0,1]$ وجود دارد به طوری که $f(c)=c$.

حل : اگر $f(0)=0$ یا $f(1)=1$ باشد حکم بوضوح برقرار است. حال فرض کنیم $f(0)\neq 0$ و $f(1)\neq 1$ باشد و تابع $g(x)=f(x)-x$ را بر $[0,1]$ تعریف می‌کنیم که تابعی پیوسته است و داریم :

$$g(1)=f(1)-1<0 \quad , \quad g(0)=f(0)>0$$

بنابراین $g(0)g(1)<0$ بوده و طبق قضیه‌ی بولتزانو $c\in(0,1)$ ای وجود دارد که $g(c)=0$ یعنی $g(c)=f(c)-c=0$ و در نتیجه $f(c)=c$ است .

مثال : نشان دهید معادله‌ی $x^3+3x^2-1=0$ حداقل یک ریشه در بازه‌ی $(0,1)$ دارد .

حل : تابع $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+3x^2-1$ را در نظر می‌گیریم که تابعی پیوسته است و داریم :

$$f(0)=-1<0 \quad , \quad f(1)=3>0$$

بنابراین $f(0)f(1)<0$ است و طبق قضیه‌ی بولتزانو $x_0\in(0,1)$ ای وجود دارد به طوری که $f(x_0)=0$.

بنابراین $x_0^3+3x_0^2-1=0$ که $x_0\in(0,1)$ است .

مثال: ثابت کنید هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و با بالاترین درجه‌ی فرد، حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

حل: تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}$$

را که $a_i\in\mathbb{R}$، $0\leq i\leq 2n+1$ و $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ و $a_0>0$ را در نظر می‌گیریم. بوضوح

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

هستند و بنابراین اعداد حقیقی a و b وجود دارند به طوری که $f(a)>0$ و $f(b)<0$.

در نتیجه $f(a)f(b)<0$ است و طبق قضیه‌ی بولتزانو $c\in(a,b)$ وجود دارد که $f(c)=0$ و

c همان ریشه‌ی حقیقی تابع f است. (برای حالت $a_0<0$ اثبات مشابه است.)

مثال: فرض کنید f تابعی پیوسته روی $[0,1]$ باشد به طوری که $f(0)=f(1)$.

ثابت کنید $c\in[0,\frac{1}{2}]$ وجود دارد به طوری که $f(c)=f(c+\frac{1}{2})$.

حل: تابع $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$ را بر $[0,\frac{1}{2}]$ در نظر می‌گیریم. بوضوح g بر این بازه پیوسته

است و داریم:

$$g(0)=f(0)-f(\tfrac{1}{2})$$
$$g(\tfrac{1}{2})=f(\tfrac{1}{2})-f(1)=f(\tfrac{1}{2})-f(0)$$

اگر $f(0)=f(\frac{1}{2})$ باشد که با انتخاب $c=0$ حکم واضح خواهد بود. حال اگر $f(0)\neq f(\frac{1}{2})$

باشد آنگاه $g(0)g(\frac{1}{2})<0$ می‌باشد و طبق قضیه‌ی بولتزانو $c\in(0,\frac{1}{2})$ وجود دارد که $g(c)=0$

یعنی $g(c)=f(c)-f(c+\frac{1}{2})=0$ که حکم را نتیجه می‌دهد.

مثال: اگر $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ تابعی پیوسته و $f(0)\neq 0$ و $f(1)\neq 1$ باشند آنگاه

ثابت کنید $c_1, c_2 \in (0,1)$ مجزا وجود دارند به طوری که $\frac{f(c_1)f(c_2)}{2} = c_2^2$.

حل: از مثال اول در این بخش می دانیم $c_1 \in (0,1)$ وجود دارد به طوری که $f(c_1) = c_1$. حال تابع

پیوسته ی $g(x) = 2x^2 - c_1 f(x)$ را بر بازه ی $[0, c_1]$ در نظر می گیریم و داریم:

$$g(0) = -c_1 f(0) < 0$$

$$g(c_1) = 2c_1^2 - c_1 f(c_1) = 2c_1^2 - c_1^2 = c_1^2 > 0$$

چون $g(0)g(c_1) < 0$ است طبق قضیه ی بولتزانو $c_2 \in (0, c_1)$ وجود دارد به طوری که $g(c_2) = 0$

و داریم:

$$g(c_2) = 2c_2^2 - c_1 f(c_1) = 0$$

$$\longrightarrow 2c_2^2 - f(c_1) f(c_2) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{f(c_1) f(c_2)}{2} = c_2^2$$

قضیه: فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد در این صورت:

الف) f بر $[a,b]$ کراندار است.

ب) اگر $m = \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ و $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ باشند آن گاه به ازای هر A

که $m \leq A \leq M$ باشد $x_0 \in [a,b]$ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = A$.

مثال: فرض کنید $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نقاطی در بازه ی

$[a,b]$ باشند. ثابت کنید $c \in [a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{n(n+1)}{2} f(c) = f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + n f(x_n)$$

حل: چون تابع f بر $[a,b]$ پیوسته است پس f بر این بازه کراندار است در نتیجه ماکزیمم و مینیمم f بر $[a,b]$ موجودند. فرض کنید $m = \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ و $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ باشند.

در این صورت به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داریم: $m \leq f(x_i) \leq M$ ، بنابراین

$$m \leq f(x_1) \leq M$$
$$2m \leq 2f(x_2) \leq 2M$$
$$\vdots$$
$$nm \leq nf(x_n) \leq nM$$

درنتیجه

$$(1+2+\dots+n)m \leq f(x_1)+2f(x_2)+\dots+nf(x_n) \leq (1+2+\dots+n)M$$

$$\longrightarrow \quad m \leq \frac{f(x_1)+2f(x_2)+\dots+nf(x_n)}{\frac{n(n+1)}{2}} \leq M$$

طبق قضیه‌ی قبل، $c \in [a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$f(c) = \frac{f(x_1)+2f(x_2)+\dots+nf(x_n)}{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

که حکم را نتیجه می دهد.

تمرین:

۱. نشان دهید معادله‌ی $(1-x)\cos x = \sin x$ حداقل یک ریشه در بازه‌ی $(0,1)$ دارد.

۲. اگر تابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته بوده و $f(0)=f(1)$ باشد ثابت کنید c در بازه‌ی $[0,\frac{2}{3}]$ وجود دارد به طوری که $f(c)=f(c+\frac{1}{3})$

۳. فرض کنید $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و α و β دو عدد حقیقی مثبت باشند که $\alpha+\beta=1$ است. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی $x_0, y_0 \in [a,b]$ عدد $c \in [a,b]$ وجود دارد که
$$f(c) = \alpha f(x_0) + \beta f(y_0)$$

۴. فرض کنید $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ تابعی پیوسته باشد و $x_1, x_2, \dots, x_5$ اعداد حقیقی مفروض باشند. نشان دهید $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوریکه

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \dots + \frac{1}{f(x_5)} = \frac{5}{f(c)}$$

۵. ثابت کنید اگر تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ پیوسته باشد آن‌گاه f یک تابع ثابت است.

۶. اگر f بر بازه‌ی $[0,2]$ پیوسته بوده و $f(0)=f(2)$ باشد ثابت کنید x_1 و x_2 در بازه‌ی $[0,2]$ وجود دارند به‌طوری که $x_2 - x_1 = 1$ و $f(x_1) = f(x_2)$.

۷. فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$. اگر معادله‌ی $f \circ f(x) = g \circ g(x)$ جواب داشته باشد ثابت کنید معادله‌ی $f(x) = g(x)$ نیز جواب خواهد داشت.

۸. گیریم تابع $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ پوشا و پیوسته باشد که $0 < a < b < 1$ و $f(a) > \frac{a+b}{2a}$. نشان دهید که c_1 و c_2 متمایزی در بازه‌ی (a,b) وجود دارند به‌طوری که $f(c_1) = c_2 f(c_2)$.

۹. فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ در معادله‌ی $f \circ f(x) = -x$ صدق کند. ثابت کنید f نمی‌تواند پیوسته باشد.