

فصل سوم

درونیابی

زندگی ما زاینده افکار ماست. آنچه دیروز به آن اندیشیده ای، امروزت را ساخته و
آنچه امروز به آن می اندیشی فردایت را خواهد ساخت
بودا

درونیابی لاگرانژ

فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاطی متمایز بوده و مقدار $f(x)$ در این نقاط معلوم و برابر $f_0, f_1, \dots, f_n$ باشد. اکنون تابع $L_i(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$= \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \quad j \neq i, i = 0, 1, \dots, n \quad (1.3)$$

به آسانی ثابت می‌شود که

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

با استفاده از $L_i(x)$ چند جمله‌ای $p_n(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p_n(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \dots + L_n(x)f_n \quad (2.3)$$

به سادگی مشاهده می‌شود که $p_n(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \dots, n$ یعنی $p_n(x)$ از نقاط (x_i, f_i) می‌گذرد.

مثال: اگر جدولی مطابق زیر داشته باشیم، مطلوب است تعیین چند جمله‌ای لاگرانژ

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

حل: ابتدا ضرایب لاگرانژ را محاسبه می‌کنیم:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = \frac{x^2 - 1}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

بنابراین چند جمله‌ای لاگرانژ به فرم زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 \\ &= \frac{x^2 - x}{2} + \frac{x^2 - 1}{-1} + 2\left(\frac{x^2 + x}{2}\right) = x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

نکته: در مثال فوق مشاهده می‌شود که $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$. می‌توان ثابت نمود که همواره $L_0(x) + L_1(x) + \dots + L_n(x) = 1$ اثبات این رابطه به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد.

مثال: در مثال قبل فرض کنید نقطه $(2, 7)$ به جدول افزوده شود:

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	3	7

با تعیین مجدد چند جمله‌ای لاگرانژ نشان دهید که چند جمله‌ای حاصل تغییر نمی‌کند.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 1)(-1 - 2)} \\ = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x + 1)(x - 0)(x - 2)}{(1 + 1)(1 - 0)(1 - 2)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 0)(x - 1)}{(2 + 1)(2 - 0)(2 - 1)} = \frac{x^3 - x}{6}$$

بنابراین

$$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x) = x^3 + x + 1$$

مشاهده می‌شود که چند جمله‌ای حاصل نسبت به مثال قبل تغییر نکرده است. دلیل این امر آن است که نقطه $(2, 7)$ بر منحنی تابع $p(x)$ واقع است و چون چند جمله‌ای منحصر به فرد است پس جواب تغییر نمی‌کند.

معایب روش لاگرانژ

۱- اگر تعداد نقاط جدول افزایش یابد کلیه محاسبات باید از ابتدا صورت گیرد، مگر این که نقاط افزوده شده در چند جمله‌ای بدست آمده صدق کنند.

۲- حجم محاسبات حتی موقعی که n خیلی بزرگ نیست، زیاد می‌باشد.

۳- درجه چند جمله‌ای حاصل تا انتهای محاسبات مشخص نیست، همچنین از آنجا که محاسبات به تدریج شکل می‌گیرد، لذا در تعیین چند جمله‌ای باید دقت لازم را صورت داد. (مثال ۳-۷ را ببینید)

تفاضلات تقسیم شده نیوتن

تعریف: فرض کنید x_i ها نقاطی متمایز و f_i مقدار تابع $f(x)$ در x_i باشد. تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول چنین تعریف می‌شوند:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}} \quad i = 0, 1, \dots, n-2$$

به طور کلی تفاضل تقسیم شده مرتبه k به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}$$

قضیه: چند جمله‌ای درونیاب تابع $f(x)$ در نقاط $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ عبارت است از:

$$p(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (3.3)$$

مثال ۳-۳: با توجه به تابع جدولی زیر تفاضلات تقسیم شده نیوتن را محاسبه کنید.

x_i	-۱	۰	۱	۲	۳
f_i	-۱	۱	۴	۵	۱۱

حل:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = \frac{-1 - 1}{-1 - 0} = 2$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} = \frac{1 - 4}{0 - 1} = 3$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{2 - 3}{-1 - 1} = \frac{1}{2}$$

سایر تفاضلات تقسیم شده در جدول زیر آورده شده است:

x_i	f_i	تفاضل مرتبه اول	تفاضل مرتبه دوم	تفاضل مرتبه سوم	تفاضل مرتبه چهارم
-1	-1	$\frac{-1-1}{-1-0} = 2$			
0	1	$\frac{1-4}{0-1} = 3$	$\frac{2-3}{-1-1} = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2} - (-1)}{-1-2} = -\frac{1}{2}$	
1	4	$\frac{4-5}{1-2} = 1$	$\frac{3-1}{0-2} = -1$	$\frac{-1-\frac{5}{2}}{0-3} = \frac{7}{6}$	$\frac{-\frac{1}{2} - \frac{7}{6}}{-1-3} = \frac{5}{12}$
2	5	$\frac{5-11}{2-3} = 6$	$\frac{1-6}{1-3} = \frac{5}{2}$		
3	11				

مثال: مطلوب است چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر و مقدار تقریبی $f(0.5)$

x_i	-۱	۱	۲
f_i	۰	۱	۴

حل: بنا به جدول زیر و از رابطه (۳.۳) داریم:

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-۱	۰	$\frac{0-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$	
۱	۱		$\frac{0/5-3}{-1-2} = \frac{5}{6}$
۲	۴	$\frac{1-4}{1-2} = 3$	

$$p(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

$$= 0 + (x + 1)\left(\frac{1}{2}\right) + (x + 1)(x - 1)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

مزایای چند جمله‌ای تفاضلات تقسیم شده نیوتن

۱- با افزودن نقطه یا نقاطی به جدول، محاسبات قبلی به طور کامل مورد استفاده قرار می‌گیرند. (توجه داشته باشید، اگر نقاط جدید در چندجمله‌ای بدست آمده صدق کنند این چند جمله‌ای تغییر نخواهد کرد.)

۲- درجه چندجمله‌ای از روی جدول تفاضلات قابل پیش بینی است و برابر است با بزرگترین مرتبه تفاضلات تقسیم شده مخالف صفر.

مثال: با افزودن نقطه (۳,۹) به جدول مثال قبل، چندجمله‌ای درونیاب را بدست آورده و نشان دهید محاسبات قبلی به طور کامل مورد استفاده قرار می‌گیرند.

حل: تفاضلات محاسبه شده در جدول زیر آورده شده است. مقادیری که زیر آنها خط کشیده شده، اعدادی هستند که در اثر افزودن نقطه جدید به جدول قبلی افزوده شده اند. مشاهده می‌شود که تمامی محاسبات قبلی، مورد استفاده قرار گرفته‌اند:

x_i	f_i	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم
-۱	۰			
		$\frac{1}{2}$		
۱	۱		$\frac{5}{6}$	
		۳		$\frac{1}{24}$
۲	۴		$\frac{1}{-}$	
		$\frac{5}{-}$		
۳	۹			

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 0 + (x+1)\left(\frac{1}{2}\right) + (x+1)(x-1)\left(\frac{5}{6}\right) + (x+1)(x-1)(x-2)\left(\frac{1}{24}\right) \\
 &= \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x + \frac{1}{12}\right) \\
 &= \frac{1}{24}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{24}x - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

خطای چندجمله ای درونیاب

اگر $p(x)$ چندجمله ای درونیاب تابع $f(x)$ در نقاط دودو متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ بوده و $f(x)$ دارای مشتق مرتبه $(n+1)$ باشد آنگاه

$$f(x) = p(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \quad (4.3)$$

که در آن η نقطه ای در $[x_0, x_n]$ می باشد.
نتیجه: با شرایط فوق داریم:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \quad (5.3)$$

که در آن M یک کران بالا برای $f^{(n+1)}(x)$ بر $[x_0, x_n]$ می باشد.

تفاضلات متناهی

روشهای درونیابی لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن برای توابع جدولی که در آنها فاصله x_i ها مساوی یا غیر مساوی باشد به کار گرفته می شوند. با این حال هنگامی که فاصله x_i ها یکسان باشند، روشهای دیگری نیز وجود دارد که ساده تر از روشهای ارایه شده است.

تعریف عملگر انتقال

این عملگر با نماد E نشان داده شده و به صورت $E f_i = f_{i+1}$ تعریف می شود. بنابراین

$$E^2 f_i = E(E f_i) = E f_{i+1} = f_{i+2}$$

$$E^k f_i = f_{i+k} \quad \text{به طور کلی}$$

تعریف عملگر تفاضل پیشرو

عملگر تفاضل پیشرو که با Δ نشان داده می شود چنین تعریف می شود: $\Delta = E - 1$. بنابر این:

$$\Delta f_i = (E - 1)f_i = E f_i - f_i = f_{i+1} - f_i$$

و به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) \\ &= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) \\ &= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i\end{aligned}$$

به طور کلی

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i \quad (۶.۳)$$

عملگر تفاضل پسرو

این عملگر با نماد ∇ معرفی می شود، $\nabla = 1 - E^{-1}$ بنابراین

$$\nabla f_i = (1 - E^{-1})f_i = f_i - E^{-1}f_i = f_i - f_{i-1}$$

به راحتی می توان نشان داد که

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_i &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} \\ \nabla^k f_i &= \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}\end{aligned} \quad (۷.۳)$$

مثال: تفاضلات پیشرو و پسرو را برای تابع جدولی زیر محاسبه کنید.

x_i	-۲	-۱	۰	۱
f_i	۴	۲	۱	-۲

حل: تفاضلات پیشرو و پسرو بنا به رابطه های (۶.۳) و (۷.۳) محاسبه شده و به ترتیب در دو جدول زیر آورده شده اند:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-۲	۴	$\Delta f_0 = -2$		

-۱	۲	$\Delta^2 f_0 = 1$		
		$\Delta f_1 = -1$	$\Delta^2 f_0 = -3$	
۰	۱	$\Delta^2 f_1 = -2$		
		$\Delta f_2 = -3$		
۱	-۲			
x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
-۲	۴	$\nabla f_1 = -2$		
-۱	۲		$\nabla^2 f_2 = 1$	
		$\nabla f_2 = -1$	$\nabla^3 f_3 = -3$	
۰	۱		$\nabla^2 f_3 = -2$	
		$\nabla f_3 = -3$		
۱	-۲			

همانطور که در این مثال مشاهده می‌شود، مقادیر بدست آمده در هر دو جدول یکسان است. این یک نتیجه کلی است و جدول تفاضلات پیشرو و پسرو برای یک تابع جدولی همواره یکسان می‌باشد.

چند رابطه مهم:

بین تفاضلات پیشرو و پسرو و همچنین تفاضلات تقسیم شده نیوتن روابط مهمی وجود دارد که برخی از آنها در زیر آمده است.

الف: اگر x_i ها با فاصله مساوی باشند ($x_{i+1} - x_i = h$) آنگاه

$$f \left[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k} \right] = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k}$$

ب: اگر x_i ها دارای فاصله یکسان بوده و $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ $x_{i+1} - x_i = h$ و $x = x_i + \theta h$ آنگاه:

$$(x - x_i)(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{i+k}) = h^{k+1} \theta(\theta-1) \dots (\theta-k)$$

ج: اگر $f(x) = x^n$ آنگاه $\Delta^n f_i = n! h^n$ و اگر $m > n$ آنگاه $\Delta^m f_i = 0$.

چندجمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات پیشرو و پسرو

اگر x_i ها دارای فاصله یکسان باشند و $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ $x_{i+1} - x_i = h$ آنگاه چندجمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات پیشرو مبتنی بر x_i به صورت زیر نوشته می شود:

$$p_i(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta-1) \dots (\theta-k+1)}{k!} \Delta^k f_i \quad (۸.۳)$$

همچنین با فرض $x = x_i + \theta h$ می توان چندجمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات پسرو مبتنی بر x_i را به صورت زیر تعریف کرد:

$$p_i(x) = f_i + \theta \nabla f_i + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta+1) \dots (\theta+k-1)}{k!} \nabla^k f_i \quad (۹.۳)$$

در محاسبات به منظور کاهش خطا بهتر است x_i را آن نقطه از جدول اختیار کنیم که کمترین فاصله را تا مقدار x داده شده داشته باشد.

مثال: تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید:

x_i	-۱	۱	۳	۵
f_i	۲	-۴	۶	۱۰

به کمک چندجمله ای درونیاب مناسب مقادیر تقریبی $f(۰)$ و $f(۳/۷۵)$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا جدول تفاضلات را تشکیل می دهیم:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-۱	۲			
		-۶		
۱	-۴		۱۶	
		۱۰		-۲۲
۳	۶		-۶	
		۴		
۵	۱۰			

برای محاسبه تقریبی مقدار $f(0)$ چون فاصله $x = 0$ تا نقاط $x_0 = -1$ و $x_1 = 1$ یکسان است لذا می‌توان از چندجمله‌ای درونیاب مبتنی بر x_0 یا x_1 استفاده نمود. ما از چندجمله‌ای پیشرو مبتنی بر x_0 استفاده می‌نماییم:

$$\theta = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x + 1}{2}$$

$$p_0(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_0$$

$$= 2 + \frac{x+1}{2}(-6) + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2!}(16) + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)}{3!}(-22)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$p_0(x) = \frac{-11}{3}x^3 + 13x^2 + \frac{2}{3}x - 14 \Rightarrow f(0) \approx p_0(0) = -14$$

برای محاسبه تقریبی $f(3/75)$ از چندجمله‌ای درونیاب پیشرو مبتنی بر x_2 استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{x - x_r}{h} = \frac{x - 3}{2} \\ p_r(x) &= f_r + \theta \nabla f_r + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_r \\ &= 6 + \frac{x-3}{2} (10) + \frac{\left(\frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)}{2!} (16) \\ &= 2x^2 - 3x - 3\end{aligned}$$

که با قراردادن $x = 3/75$ داریم: $f(3/75) \approx p_r(3/75) = 13/875$

۶.۳ درونیابی معکوس

تا کنون تعیین چندجمله ای درونیاب توابع از روی جدول و سپس یافتن تقریبی از مقدار تابع در نقطه ای دلخواه، ارایه شده است. اینک می خواهیم ببینیم تابع در کجا مقدار دلخواه را می گیرد؟ این عمل را درونیابی معکوس می نامند. به عبارت دیگر هدف یافتن تقریبی از x است که $f(x) = \alpha$.

اگر $y = f(x)$ و معکوس تابع f وجود داشته باشد، آنگاه $x = f^{-1}(y)$ لذا به جای جدول

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\dots$	f_n

می توان جدول زیر را در نظر گرفت:

f_i	f_0	f_1	$\dots$	f_n
x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n

چون معمولاً f_i ها دارای فاصله یکسان نیستند، لذا از درونیابی لاگرانژ یا تفاضلات تقسیم شده نیوتن استفاده می شود که در آن نقش x_i و f_i عوض شده است. در ضمن به منظور کاهش خطای گرد کردن، جدول جدید را طوری تشکیل می دهیم که $|f_i - \alpha|$ صعودی باشد.

مثال: با استفاده از جدول زیر تخمینی از صفر تابع را طوری تعیین نمایید که خطا کمترین مقدار را داشته باشد.

x_i	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳
f_i	-۱/۲۵	-۰/۸۷	۰/۳۴	۰/۳۹

حل: جدول جدید را بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن طوری مرتب می‌کنیم که $|f_i - ۰|$ به طور صعودی در جدول قرار گیرد.

f_i	x_i	تفاضل اول	تفاضل دوم	تفاضل سوم
۰/۳۴	۱/۲	۲		
۰/۳۹	۱/۳		۱/۵۲	
		۰/۱۶		۰/۹۹
-۰/۸۷	۱/۱		-۰/۰۶	
		۰/۲۶		
-۱/۲۵	۱			

با توجه به این جدول چند جمله‌ای درونیاب تفاضلات تقسیم شده نیوتن که در آن نقش x_i و y_i عوض شده است به صورت زیر می‌باشد:

$$x \approx ۱/۲ + (۰ - ۰/۳۴)(۲) + (۰ - ۰/۳۴)(۰ - ۰/۳۹)(۱/۵۲) + (۰ - ۰/۳۴)(۰ - ۰/۳۹)(۰ - (-۰/۸۷))(۰/۹۹) \Rightarrow x \approx ۰/۸۴$$

تمرین:

۱- تابع جدولی زیر مفروض است. چندجمله‌ای درونیاب f را از روش تفاضلات تقسیم شده بدست آورید. آیا با اضافه نمودن نقطه $(1, 2)$ به جدول چندجمله‌ای درونیاب تغییر می‌کند؟ چرا؟

x_i	-۱	۰	۱
f_i	۱	-۱	-۱

۲- جدول روبرو را در نظر بگیرید:

x_i	-۱	۱	۳	۵
f_i	۲	-۴	۶	۱۰

تخمینی از $f(0/321)$ را بدست آورید.

۳- جدول زیر داده شده است. مطلوب است محاسبه تقریبی از $f(1/12)$ و محاسبه X به طوری که $f(X) = 0/721$

x_i	۱/۰۶	۱/۰۹	۱/۱۱	۱/۱۳
$f(x)$	۰/۴	۰/۵۶۱	۰/۹۷۲	۱/۰۲

۴- با استفاده از جدول زیر تقریبی از صفر تابع f بدست آورید.

x_i	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳
f_i	-۱/۲۵	-۰/۸۷۶	۰/۳۳۸	۰/۳۸۸

۵- اگر α مقداری ثابت و مثبت بوده و $f(x) = \alpha^x$ نشان دهید $\Delta f_i = (\alpha^h - 1)f_i$ که در آن $h = x_{i+1} - x_i$.

۶- ثابت کنید:

$$\Delta\left(\frac{f_i}{g_i}\right) = \frac{g_i \Delta f_i - f_i \Delta g_i}{g_i g_{i+1}} \quad \text{الف:}$$

$$\Delta(f_i g_i) = f_i \Delta g_i + g_{i+1} \Delta f_i \quad \text{ب:}$$

$$\Delta^k f_i = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} f_{i+k-r} \quad \text{ج:}$$

$$\nabla^k f_i = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} f_{i-r} \quad \text{د:}$$

۷- فرض کنید $p(x)$ چندجمله‌ای حداکثر از درجه n باشد که تابع $f(x) = e^x$ را در $n+1$ نقطه متمایز از بازه $(-1, 1)$ درونیابی کند و $x = 0$ یکی از این نقاط باشد. نشان دهید:

$$E(x) = |f(x) - p(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \quad -1 \leq x \leq 1$$

۸- فرض کنید $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ و $x_0 = -1$ و $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$. چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط x_0 و x_1 و x_2 بدست آورید. سپس کران بالای خطا را محاسبه کنید.