

۱. نشان دهید فضای برداری اعداد مختلط \mathbb{C} (روی میدان \mathbb{R}) همراه با عمل ضرب اعداد مختلط یک \mathbb{R} -جبر مرتکب نپذیرد و یکدار است.

۲. با ذکر دلیل رد یا اثبات کنید: هر R -مدول A یک مدول آزاد است. (توجه: R یک حلقه بجا نیست)

۳. پایه فضای برداری حقیقی $M(n \times n, \mathbb{R})$ ، فضای برداری حقیقی $M(m \times n, \mathbb{C})$ را بنویسید.

۴. نشان دهید که برای هر دو متغیر $n \times n$ حقیقی A و B در فضای برداری $M(n, \mathbb{R})$ است، بعد آن را تعیین کنید.

۵. یک فضای برداری با بُعد نامتناهی ارائه دهید و ادعای خوش را اثبات کنید.

۶. پایه فضای سطری و رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ و بُعد فضای ستونی و پایه فضای ستونی آن را بنویسید.

۷. الف) نشان دهید $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$

ب) با فرضی آنکه $A, P, Q \in M(n, \mathbb{R})$ و همچنین P, Q ناسمزد باشند ثابت کنید:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(PAQ).$$

۲) نشان دهید ماتریس A و B متساوی، رتبه‌های یکسان دارند.

۱) نشان دهید رتبه یک نگاشت خطی مستقل از ماتریس نمایش آن است.

۸. تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ موزون است.

$$T(x, y, z) = (3y + 2z, -y + 2z - 5x)$$

الف) پایه‌ای برای بردار هسته T بنویسید. ب) پایه‌ای برای تصویر T بنویسید. ج) رتبه و بزرگی T را بنویسید.

۹. فرض کنید $m \geq n$ نشان دهید تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ نوساز است $\Leftrightarrow \text{rank}(T) = m$

ب) با فرض $m \leq n$ نشان دهید تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ نوساز است $\Leftrightarrow \text{rank}(T) = n$

۲) با فرض $m = n$ نشان دهید تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ دوسری است \Leftrightarrow تبدیل T ناسمزد باشد.