فصل دوم

حل معادلات غیر خطی

علم و ادب بهای جان توست. پس در آموختن آن دو کوشا باش
هرچه برعلم و ادبت افزوده گردد قدر و ارزشت بیشتر می‌شود.

حضرت علی (ع)

حل بسیاری از مسائل علمی منجر به حل معادله $f(x)=0$ می‌شود. منظور از حل این معادله تعیین عدد یا اعدادی مانند α است به طوری که $f(\alpha)=0$. در صورت وجود چنین اعدادی، آنها را ریشه‌های معادله $f(x)=0$ می‌نامیم. در این فصل قصد داریم، تقریبی از جواب معادله غیرخطی را به روشهای عددی محاسبه کنیم. اما تمام این روشها محدودیت هایی نیز دارند.

قبل از بررسی روشهای تعیین ریشه های یک معادله غیر خطی، لازم است که با شرایط وجود و یکتایی جواب معادله آشنا شویم.

شرط بولتسانو – وایراشتراس: اگر یکی از شرایط زیر به نتیجه فوق اضافه شود، آنگاه تابع f دقیقاً دارای یک ریشه در بازه $[a,b]$ می‌باشد:

الف: f در بازه $[a,b]$ یکنوا باشد.

ب: $f'(x)\neq 0$ به ازای هر x در بازه $[a,b]$.

مثال ۲–۱: نشان دهید که تابع $f(x)=3xe^{x}-1$ در بازه $[0,1]$ تنها یک ریشه دارد.

حل: چون $f(0)=-1$ و $f(1)=3e-1$ بنابراین $f(0)f(1)<0$. پس تابع $f(x)$ حداقل یک ریشه در بازه $[0,1]$ دارد. از طرفی

$$f'(x)=3e^{x}+3xe^{x}=3e^{x}(1+x)>0$$

یعنی $f(x)$ تابعی صعودی است. بنابراین با توجه به شرط بولتسانو- وایراشتراس می‌توان گفت که تابع $f(x)$ در این بازه تنها یک ریشه دارد.

تعیین ریشه ها با دقت مطلوب

اینک به کمک روشهای عددی می‌توان ریشه معادله را تعیین نمود. در تمامی این روشها، هدف تعیین دنباله‌ای از x_nها است که به ریشه معادله یعنی α همگرا باشد. برای به‌کارگیری این روشها لازم است محدودیت‌های زیر را در نظر بگیریم:

محدودیت اول: مطمئن باشیم بازه‌ای مانند $[a,b]$ موجود است که معادله در این بازه ریشه دارد.

محدودیت دوم: ریشه می‌بایستی در بازه مذکور یکتا باشد.

روش تنصیف

فرض کنید $f(x)$ تنها یک ریشه در بازه $[a,b]$ دارد و $f(a)f(b)<0$. در روش تنصیف (نصف کردن بازه) به صورت زیر عمل می‌کنیم: ابتدا $c=\frac{a+b}{2}$ را به دست آورده، سپس اگر

$f(a)f(c)<0$ مقدار b را با c عوض می کنیم و در غیر این صورت a را بـا c عـوض نمـوده و ایـن عمل را تکرار می‌کنیم. دقت کنید که c بدست آمده در تکرارهای مختلف همان دنباله x_n می‌باشد.

شرایط توقف محاسبات: به منظور محاسبه تقریبی از ریشه در روش تنصیف و سایر روشهایی کـه در ادامه ذکر می‌شوند، می‌توان شرایطی را برای توقف دنباله بدست آمده در نظر گرفت:

الف: $n=m$ (تعداد تکرارها مشخص باشد)

ب: $|x_n - x_{n+1}| < \varepsilon$ (بازه شامل ریشه به اندازه کافی کوچک شود.)

ج: $|f(x_n)| < \varepsilon$ (مقدار تابع به اندازه کافی کوچک شود)

د: $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ (فاصله تا ریشه ناچیز باشد)

شرط چهارم به دلیل معلوم نبودن مقدار α بطور مستقیم قابل استفاده نمی‌باشد، اما بـا توجـه بـه این شرط می‌توان تعداد تکرارهای لازم جهت رسیدن به تقریبی مشخص از ریشه را تعیین نمود.

قضیه: فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد که از روش تنصیف بدست آمده و $f(a)f(b) < 0$ آنگاه

$$|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n}.$$

حال برای برقراری شرط چهارم کافی است قرار دهیم: $\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon$ بنابراین داریم:

$$\ln(b-a) - \ln 2^n \le \ln\varepsilon \Rightarrow n\ln 2 \ge \ln(b-a) - \ln\varepsilon$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2} \qquad (1.2)$$

همچنین اگر n به اندازه کافی بـزرگ باشـد آنگـاه $\frac{b-a}{2^n} \to 0$ و بنـابراین $|x_n - \alpha| \to 0$ در نتیجه $x_n \to \alpha$. این نشان می‌دهد که دنباله حاصل از روش نصـف کـردن فاصلـه حتمـاً بـه ریشـه معادله همگرا خواهد شد، اگر چه ممکن است سرعت همگرایی نسبت به سایر روشها کندتر باشد.

مثال : حداقل تعداد تکرارهای لازم برای تعیین تقریبی از ریشـه یـک معادلـه کـه در بـازه $[-1, 0]$ قرار دارد را چنان بدست آورید که خطا حداکثر 10^{-3} باشد.

حل:

$$n \geq \frac{\ln ۱ - \ln ۱۰^{-۳}}{\ln ۲} \approx ۹/۹$$
$$\Rightarrow n = ۱۰$$

مثال: تقریبی از ریشه معادله $x \sin x - ۱ = ۰$ در بازه $[۰/۵, ۲]$ به روش تنصیف چنان تعیین کنید که $|x_n - x_{n-۱}| < ۱۰^{-۲}$

حل: (**نکته مهم:** در تمامی مسائلی که شامل توابع مثلثاتی می‌باشند، لازم است که محاسبات مورد نیاز در مبنای رادیان صورت گیرد.). با فرض $f(x) = x \sin x - ۱$ داریم:

$$f(۰/۵) = -۰/۷۶۰۲۸۷ \qquad , \qquad f(۲) = ۰/۸۱۸۵۹$$

$$x_۱ = \frac{۰/۵ + ۲}{۲} = ۱/۲۵ \qquad , \qquad f(x_۱) = ۰/۱۸۶۲۳$$

چون $f(a) f(x_۱) = f(۰/۵) f(۱/۲۵) < ۰$ پس با قرار دادن $b = x_۱ = ۱/۲۵$ داریم: $x_۲ = \frac{۰/۵ + ۱/۲۵}{۲} = ۰/۸۷۵$ همچنین $f(x_۲) = -۰/۳۲۸۳۹۹$. اینک با توجه به اینکه $f(a) f(x_۲) > ۰$ قرار می دهیم: $a = x_۲ = ۰/۸۷۵$ و روند فوق را تکرار می‌کنیم. نتایج حاصل در جدول زیر قرار داده شده است:

a	x_i	b	$f(x_i)$	علامت $f(a)f(x_i)$
۰/۵	۱/۲۵	۲	۰/۱۸۶۲۳	منفی
۰/۵	۰/۸۷۵	۱/۲۵	−۰/۳۲۸۳۹۹	مثبت
۰/۸۷۵	۱/۰۶۲۵	۱/۲۵	−۰/۰۷۱۸۲۷	مثبت
۱/۰۶۲۵	۱/۱۵۶۲۵	۱/۲۵	۰/۰۵۸۳۱	منفی
۱/۰۶۲۵	۱/۱۰۹۳۷۵	۱/۱۵۶۲۵	−۰/۰۰۶۶۳۶	مثبت
۱/۱۰۹۳۷۵	۱/۱۳۲۸۱۲۵	۱/۱۵۶۲۵	۰/۰۲۵۸۸	منفی
۱/۱۰۹۳۷۵	۱/۱۲۱۰۹۳۷۵	۱/۱۳۲۸۱۲۵	۰/۰۰۹۶۳	

$x_{۷}$ مقدار تقریبی ریشه معادله است، زیرا $|x_{۷}-x_{۶}| < ۱۰^{-۲}$.

مثال: با فرض $f(x) = x^{۳} + ۴x^{۲} - ۱۰$ تقریبی از ریشه معادله $f(x) = ۰$ به روش تنصیف در بازه $[۱,۲]$ بیابید بطوریکه $|x_n - \alpha| < ۱۰^{-۳}$.

حل: تعداد تکرارهای لازم برای اینکه $|x_n - \alpha| < ۱۰^{-۳}$ بنا به رابطه (۱.۲) تعیین می‌شود :

$$n \geq \frac{\ln ۱ - \ln ۱۰^{-۳}}{\ln ۲} = ۳\frac{\ln ۱۰}{\ln ۲} \cong ۹/۹ \Rightarrow n = ۱۰$$

اینک با توجه به اینکه $f(a)=f(۱)=-۵$ و $f(b)=f(۲)=۱۴$ روش تنصیف را به‌کار برده که نتایج بدست آمده در جدول زیر مشاهده می‌شود:

a	x_i	b	$f(x_i)$	علامت $f(a)f(x_i)$
۱	۱/۵	۲	۲/۳۷۵	منفی
۱	۱/۲۵	۱/۵	−۱/۷۹۶۸۷۵	مثبت
۱/۲۵	۱/۳۷۵	۱/۵	۰/۱۶۲۱۰۹	منفی
۱/۲۵	۱/۳۱۲۵	۱/۳۷۵	−۰/۸۴۸۳۹	مثبت
۱/۳۱۲۵	۱/۳۴۳۷۵	۱/۳۷۵	−۰/۳۵۰۹۸	مثبت
۱/۳۴۳۷۵	۱/۳۵۹۳۷۵	۱/۳۷۵	−۰/۰۹۶۴۱	مثبت
۱/۳۵۹۳۷۵	۱/۳۶۷۱۸۸	۱/۳۷۵	۰/۰۳۲۳۵۶	منفی
۱/۳۵۹۳۷۵	۱/۳۶۳۲۸۲	۱/۳۶۷۱۸۸	−۰/۰۳۲۱۵	مثبت
۱/۳۶۳۲۸۲	۱/۳۶۵۲۳۵	۱/۳۶۷۱۸۸	۰/۰۰۰۰۸۲	منفی
۱/۳۶۳۲۸۲	۱/۳۶۴۲۵۹	۱/۳۶۵۲۳۵	−۰/۰۱۶۰۴	

بنابراین مقدار تقریبی ریشه برابراست با: $\alpha \cong x_{۱۰} = ۱/۳۶۴۲۵۹$

روش نابجایی

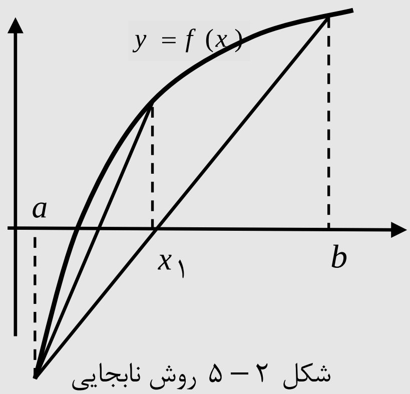
فرض کنید $f(x)$ تنها یک ریشه در بازه $[a,b]$ دارد و $f(a)f(b)<0$. در این روش معادله خطی که از دو نقطه $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ می گذرد را نوشته و محل تلاقی این خط با محور x ها را x_1 می‌نامیم (شکل ۲ - ۴). معادله چنین خطی به فرم زیر است:

$$y-f(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$$

اینک نقطه برخورد این خط را با محور x ها بدست می‌آوریم:

$$0-f(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_1-b)\Rightarrow x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \qquad (2.2)$$

در صورتی که $f(a)f(x_1)<0$ آنگاه جای b را با x_1 عوض کرده و با تکرار این روند x_2 را محاسبه می‌کنیم و اگر $f(b)f(x_1)<0$ آنگاه جای a با x_1 عوض شده و به همین ترتیب روند فوق تکرار می‌گردد.



شکل ۲ – ۵ روش نابجایی

مثال: تقریبی از ریشه معادله $f(x)=x\sin x-1=0$ به روش نابجایی در بازه $[0,2]$ چنان تعیین کنید که $|f(x_n)|<10^{-8}$.

حل: چون $f(0)=-1$ و $f(2)=0/81859485$ از رابطه (2.2) می‌توان x_1 را تعیین نمود:

$$x_{۱} = \frac{۰f(۲) - ۲f(۰)}{f(۲) - f(۰)} = ۱/۰۹۹۷۵۰۱۷$$

چون $f(x_{۱}) = -۰/۰۲۰۰۱۹۲۱$ بنابراین $f(b)f(x_{۱}) < ۰$ و لذا با تعویض جای a با $x_{۱}$ خواهیم داشت:

$$x_{۲} = \frac{x_{۱}f(۲) - ۲f(x_{۱})}{f(۲) - f(x_{۱})} = ۱/۱۲۱۲۴۰۷۴$$

اینک چون $f(x_{۲}) = ۰/۰۰۹۸۳۴۶۱$ بنابراین:

$$x_{۳} = \frac{x_{۱}f(x_{۲}) - x_{۲}f(x_{۱})}{f(x_{۲}) - f(x_{۱})} = ۱/۱۱۴۱۶۱۲۰ \Longrightarrow f(x_{۳}) = ۰/۰۰۰۰۰۵۶۳$$

$$x_{۴} = \frac{x_{۱}f(x_{۳}) - x_{۳}f(x_{۱})}{f(x_{۳}) - f(x_{۱})} = ۱/۱۱۴۱۵۷۱۴ \Rightarrow f(x_{۴}) = ۰$$

لذا $x_{۴}$ تقریبی از ریشه معادله با دقت $۱۰^{-۸}$ می‌باشد.

روش تکرار نقطه ثابت

روش تکرار نقطه ثابت یک راه بسیار مفید برای بدست آوردن ریشه‌ای از $f(x) = ۰$ است. برای استفاده از این روش $f(x) = ۰$ را به شکل هم ارز $x = g(x)$ تبدیل می‌کنیم که این کار به طور معمول به چند طریق صورت می‌گیرد. توجه کنید اگر α ریشه معادله $f(x) = ۰$ باشد، آنگاه داریم $\alpha = g(\alpha)$ ، در این حالت α را یک نقطه ثابت تابع $g(x)$ می‌نامیم.

اینک تقریبی نه چندان دقیق از α مانند $x_{۰}$ در نظر گرفته می‌شود و دنباله $\{x_n\}$ با ضابطه

$$x_{n+۱} = g(x_n) \qquad (۳.۲)$$

ساخته می‌شود که تحت شرایطی به ریشه معادله $f(x) = ۰$ همگراست .

مثال: معادله $f(x) = ۰$ که $f(x) = x^{۳} - x - ۱$ در $[۱,۲]$ ریشه منحصربفرد دارد. برای تغییر این معادله به فرم $x = g(x)$ راههای متفاوتی وجود دارند، که از آنجمله‌اند:

$$x = x^{۳} - ۱ = g_{۱}(x) \quad , \quad x = \frac{۱}{x^{۲} - ۱} = g_{۲}(x)$$

$$x = \frac{x + ۱}{x^{۲}} = g_{۳}(x) \quad , \quad x = \sqrt[۳]{۱ + x} = g_{۴}(x)$$

$$x = x - \frac{x^{۳} - x - ۱}{۳x^{۲} - ۱} = g_{۵}(x)$$

اینک با به‌کارگیری روش تکرار نقطه ثابت به ازای $x_{۰} = ۱/۵$ برای هر انتخاب $g(x)$ دنباله x_n را از رابطه (۳.۲) محاسبه کرده که نتایج حاصل در جدول زیر ثبت شده‌اند:

n	$g_{۱}$	$g_{۲}$	$g_{۳}$	$g_{۴}$	$g_{۵}$
۰	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۱/۵
۱	۲/۳۷۵	۰/۸	۱/۱۱۱۱۱	۱/۳۵۷۲۱	۱/۳۴۷۸۳
۲	۱۲/۳۹۶۴۸	−۲/۷۷۷۷۸	۱/۷۱۰۰۰	۱/۳۳۰۸۶	۱/۳۲۵۲۱
۳	۱۹۰۴/۰۰۲۷۷	۰/۱۴۸۹۰	۰/۹۲۶۷۸	۱/۳۲۵۸۸	۱/۳۲۴۷۲
۴	$۶/۹ \times ۱۰^{۹}$	−۱/۰۲۲۶۷	۲/۲۴۳۲۶	۱/۳۲۴۹۴	
۵		۲۱/۸۰۵۴۶	۰/۶۴۴۵۰	۱/۳۲۴۷۶	
۶		۰/۰۰۲۱۱	۳/۹۵۹۰۲	۱/۳۲۴۷۳	
۷		−۱	۰/۳۱۶۳۹	۱/۳۲۴۷۲	
۸		−۱۱۲۵۶۵/۰۷۶			

با دقت در جدول فوق متوجه می‌شویم که انتخاب $g_{۱}$، $g_{۲}$ و $g_{۳}$ به واگرایی دنباله حاصل، منجر می‌گردند، ولی انتخاب $g_{۴}$ و $g_{۵}$ هر دو منجر به مقدار تقریبی ریشه یعنی $x \approx ۱/۳۲۴۷۲$ می‌شوند؛ اما سرعت همگرایی دنباله حاصل از $g_{۵}$ بیشتر می‌باشد. لذا انتخاب تابع $g(x)$ در همگرایی یا واگرایی دنباله بدست آمده و همچنین سرعت همگرایی مؤثر می‌باشد. تصویر نشان می‌دهد که انتخاب $g(x)$ و $x_{۰}$ می‌تواند در همگرایی یا واگرایی دنباله حاصل از روش تکرار نقطه ثابت مؤثر باشد.

قضیه زیر شرایط کافی برای همگرایی دنباله $\{x_n\}$ به α را مهیا می‌کند.

قضیه: الف: فرض کنید تابع $g(x)$ بر (a,b) پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $g(x)\in[a,b]$ یعنی $g(x)$ تابعی بر $[a,b]$ به توی $[a,b]$ باشد ؛ به عبارت دیگر:

$$g:[a,b]\longrightarrow[a,b]$$

ب: عددی مانند L موجود باشد به طوری‌که:

$$|g'(x)|\le L<۱ \qquad\qquad \forall x\in[a,b]$$

در این صورت شرایط زیر برقرار است:

الف: معادله $x=g(x)$ فقط یک ریشه حقیقی دارد که متعلق به بازه $[a,b]$ است.

ب: به ازای هر $x_۰$ از $[a,b]$ دنباله $\{x_n\}$ که از (۳.۲) بدست می آید به تنها ریشه حقیقی معادله $x=g(x)$ همگراست. در ضمن سرعت همگرایی به مقدار L بستگی دارد، هر چه L به صفر نزدیکتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است.

بنابراین برای همگرایی $\{x_n\}$ به α باید برقراری شرایط قضیه فوق را تحقیق نمود. البته اگر یک یا هر دو شرط این قضیه برقرار نبود نمی‌توان نتیجه گرفت که دنباله $\{x_n\}$ به α همگرا نیست، بلکه توصیه می‌شود که از این $g(x)$ استفاده نشود.

مثال: تقریبی از ریشه $x-\cos x=۰$ به روش تکرار ساده چنان حساب کنید که

$$|x_{n+۱}-x_n|\le ۱۰^{-۳}$$

حل: قرار می‌دهیم $x=\cos x$ یعنی $g(x)=\cos x$ با فرض $f(x)=x-\cos x$ و از آنجا که

$$f(۰/۵)f(۱)\approx(-۰/۳۸)(۰/۴۶)<۰$$

پس ریشه معادله در بازه $[۰/۵,۱]$ واقع است. در ضمن داریم:

$$۰<۰/۵\le x\le ۱<\frac{\pi}{۲}$$

با توجه به این که $[۰/۵,۱]\subseteq[۰,\frac{\pi}{۲}]$ و نزولی بودن تابع $\cos x$ در بازه $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ لذا $\cos x$ در بازه $[۰/۵,۱]$ نزولی است و

$$۰/۵<۰/۵۴\approx\cos ۱\le\cos x\le\cos(۰/۵)\approx ۰/۸۸<۱$$

یعنی $\cos x$ تابعی بر $[\circ/\text{۵},\text{۱}]$ بتوی $[\circ/\text{۵},\text{۱}]$ است. همچنین

$$g'(x)=-\sin x \Rightarrow |g'(x)|=\sin x$$

چون تابع $\sin x$ در $[\circ/\text{۵},\text{۱}]$ صعودی است داریم:

$$\sin x \le \sin \text{۱} \simeq \circ/\text{۸۴} < \text{۱}$$

در اینجا چون $L=\circ/\text{۸۴}$ به یک نزدیک است سرعت همگرایی دنباله حاصل کند است. با قرار دادن $x_\circ = \frac{\circ/\text{۵}+\text{۱}}{\text{۲}} = \circ/\text{۷۵}$ از رابطه (۳.۲) داریم:

$$x_\text{۱}=\circ/\text{۷۳۱۷} \quad , \quad x_\text{۲}=\circ/\text{۷۴۴}\circ \quad , \quad x_\text{۳}=\circ/\text{۷۳۵۸}$$

$$x_\text{۴}=\circ/\text{۷۴۱۳} \quad , \quad x_\text{۵}=\circ/\text{۷۳۷۶} \quad , \quad x_\text{۶}=\circ/\text{۷۴}\circ\text{۱}$$

$$x_\text{۷}=\circ/\text{۷۳۸۴} \quad , \quad x_\text{۸}=\circ/\text{۷۳۹۵} \quad , \quad x_\text{۹}=\circ/\text{۷۳۸۸}$$

چون $|x_\text{۹}-x_\text{۸}|=\circ/\circ\circ\circ\text{۷}$ جواب برابر $x=\circ/\text{۷۳۸۸}$ می‌باشد.

مثال: با فرض $f(x)=xe^x-\text{۱}$ از روش تکرار ساده استفاده نموده و تقریبی از ریشه معادله $f(x)=\circ$ چنان تعیین نمایید که $|x_{n+\text{۱}}-x_n|\le \text{۱}\circ^{-\text{۳}}$.

حل: معادله دارای حداقل یک ریشه در بازه $[\circ,\text{۱}]$ می‌باشد زیرا

$$f(\circ)=-\text{۱} \quad , \quad f(\text{۱})=e-\text{۱} \Rightarrow f(\circ)f(\text{۱})<\circ$$

همچنین $f'(x)=(\text{۱}+x)e^x$ بنابراین $f'(x)$ در این بازه مثبت بوده و لذا $f(x)$ تابعی صعودی می‌باشد. پس بنا به شرط بولتسانو وایراشتراس معادله در بازه $[\circ,\text{۱}]$ تنها یک ریشه دارد.

اینک فرض کنید $x=\frac{\text{۱}}{e^x}=e^{-x}$ یعنی $g(x)=e^{-x}$ و داریم:

$$g'(x)=-e^{-x}<\circ$$

پس $g(x)$ تابعی نزولی است و بنابراین برای هر $\circ<x<\text{۱}$؛

$$\circ<e^{-\text{۱}}<g(x)<e^\circ=\text{۱}$$

به عبارت دیگر $g(x)$ تابعی از $[\circ,\text{۱}]$ بتوی $[\circ,\text{۱}]$ می‌باشد. همچنین

$$|g'(x)|=e^{-x}<\text{۱}$$

لذا $g(x)$ تابعی مناسب است. با فرض $x_{۰}=۰/۵$ دنباله زیر از رابطه (۳.۲) حاصل می‌شود :

$$x_{۱}=۰/۶۰۶۵۳ \quad , \quad x_{۲}=۰/۵۴۵۲۴ \quad , \quad x_{۳}=۰/۵۷۹۷۰ \quad , \quad x_{۴}=۰/۵۶۰۰۶$$

$$x_{۵}=۰/۵۷۱۱۷ \quad , \quad x_{۶}=۰/۵۶۴۸۶ \quad , \quad x_{۷}=۰/۵۶۸۴۴ \quad , \quad x_{۸}=۰/۵۶۶۴۱$$

$$x_{۹}=۰/۵۶۷۵۶ \quad , \quad x_{۱۰}=۰/۵۶۶۹۱$$

چون $|x_{۱۰}-x_{۹}|<۰/۰۰۱$ جواب برابر $x=۰/۵۶۶۹۱$ می‌باشد.

روش نیوتن – رافسون

فرض کنید تابع f تنها یک ریشه در بازه $[a,b]$ داشته باشد. در این روش، با فرض اینکه $x_{۰}$ تقریبی از α باشد، از نقطه $A(x_{۰},f(x_{۰}))$ واقع بر منحنی $y=f(x)$ مماس بر منحنی را رسم کرده و محل برخورد آن با محور x ها را $x_{۱}$ می‌نامیم، سپس این عمل را تکرار نموده و مماس در نقطه $(x_{۱},f(x_{۱}))$ را رسم و محل برخورد با محور x ها را $x_{۲}$ می‌نامیم. با تکرار این روند به ریشه معادله نزدیک‌تر خواهیم شد (شکل ۲ – ۸ را ببینید).

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه A به فرم زیر است:

$$y-f(x_{۰})=f'(x_{۰})(x-x_{۰})$$

محل تلاقی این خط با محور x ها را تعیین می‌کنیم:

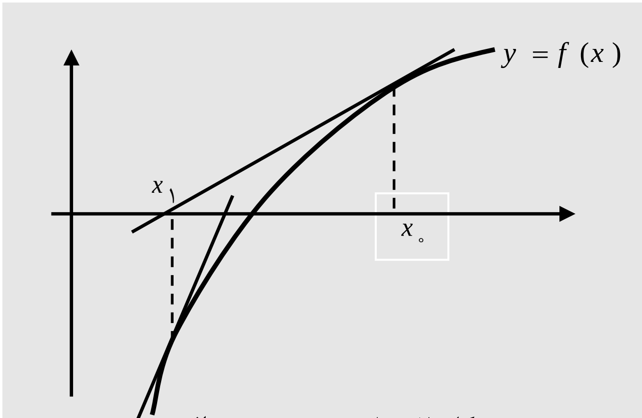
$$۰-f(x_{۰})=f'(x_{۰})(x_{۱}-x_{۰}) \Rightarrow x_{۱}=x_{۰}-\frac{f(x_{۰})}{f'(x_{۰})}$$

با ادامه این روند فرمول کلی زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{x_{n+۱}=x_{n}-\frac{f(x_{n})}{f'(x_{n})} \qquad n=۰,۱,۲,... \qquad (۴.۲)}$$

در واقع می توان گفت که روش نیوتن – رافسون حالت خاصی از روش تکرار ثابت است که در آن

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$



شکل ۲ – ۸ روش نیوتن – رافسون

مثال: تقریبی از ریشه معادلـه $f(x) = ۳e^{x} - ۴\cos x$ را بـه روش نیـوتن و بـا فـرض $x_{۰} = ۱$ طوری محاسبه کنید که $|x_n - x_{n-۱}| < ۱۰^{-۵}$.

حل: چون $f'(x) = ۳e^{x} + ۴\sin x$ لذا از رابطه (۴.۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{۳e^{x_n} - ۴\cos x_n}{۳e^{x_n} + ۴\sin x_n} \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

بنابراین

$$x_۱ = x_۰ - \frac{۳e^{x_۰} - ۴\cos x_۰}{۳e^{x_۰} + ۴\sin x_۰} = ۱ - \frac{۳e - ۴\cos ۱}{۳e + ۴\sin ۱} = ۰/۴۷۹۷۵۲۰۲$$

و به همین ترتیب

$$x_۲ = x_۱ - \frac{۳e^{x_۱} - ۴\cos x_۱}{۳e^{x_۱} + ۴\sin x_۱} = ۰/۴۷۹۷۵۲۰۲ - \frac{۳e^{۰/۴۷۹۷۵۲۰۲} - ۴\cos ۰/۴۷۹۷۵۲۰۲}{۳e^{۰/۴۷۹۷۵۲۰۲} + ۴\sin ۰/۴۷۹۷۵۲۰۲}$$

$$\Rightarrow x_۲ = ۰/۲۸۵۷۳۸۳۶$$

$$x_۳ = ۰/۲۵۵۵۷۶۹۰ \ , \quad x_۴ = ۰/۲۵۴۸۵۰۴۸ \ , \quad x_۵ = ۰/۲۵۴۸۵۰۴۷$$

$x_{۵}$ تقریبی از ریشه معادله است، زیرا $|x_{۵} - x_{۴}| < ۱۰^{-۵}$.

معایب روش نیوتن – رافسون

۱- همگرایی این روش به انتخاب $x_{۰}$ وابسته است.

مثال ۲ – ۱۲: می دانیم که $\alpha = ۰$ ریشه معادله $arc\tan(x) = ۰$ می باشد. با فرض $x_{۰} = ۱/۴$ از رابطه (۴.۲) داریم:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{\arctan x_n}{\frac{۱}{۱+x_n^{۲}}} = x_n - (\arctan x_n)(۱+x_n^{۲}) \qquad n = ۰,۱,۲,...$$

بنابراین

$$x_{۱} = -۱/۴۱۳۶۱۹ \qquad , \qquad x_{۲} = ۱/۴۵۰۱۳۰$$

$$x_{۳} = -۱/۵۵۰۶۲۶ \qquad , \qquad x_{۴} = ۱/۸۴۷۰۵۴$$

$$x_{۵} = -۲/۸۹۳۵۶۲ \qquad , \qquad x_{۶} = ۸/۷۱۰۳۲۶$$

$$x_{۷} = -۱۰۳/۲۴۹۷۷۴ \qquad , \qquad x_{۸} = ۱۶۵۴۰/۵۶۳۸۲۷$$

واضح است که دنباله حاصل واگرا می‌باشد. اینک فرض کرده $x_{۰} = ۱/۳۵$ و محاسبات را تکرار می‌کنیم. مشاهده می‌شود که دنباله حاصل به ریشه $\alpha = ۰$ همگراست.

$$x_{۱} = -۱/۲۸۴۰۹۱ \quad , \quad x_{۲} = ۱/۱۲۴۱۲۳ \quad , \quad x_{۳} = -۰/۷۸۵۸۷۲$$

$$x_{۴} = -۰/۲۹۱۵۵۴ \quad , \quad x_{۵} = ۰/۰۱۶۲۵۱ \quad , \quad x_{۶} = ۰$$

۲- اشکال دیگر روش نیوتن، امکان نوسان دنباله حاصل بین دو نقطه می‌باشد. (به شکل زیر توجه کنید که در آن $x_{۲n} = x_{۰}$ و $x_{۲n-۱} = x_{۱}$)

تمرین:

۱- معادله $۲e^{-x}-\frac{۱}{x^{۲}}=۰$ را درنظر بگیرید.

الف: به کمک روش نصف کردن فاصله جوابی از معادله را که در بازه $(۱,۲)$ واقع است را تا سه رقم اعشار درست تعیین کنید.

ب: تعداد تکرارهای لازم را تعیین کنید تا جواب بدست آمده دارای ۴ رقم درست اعشار باشد. حداکثر خطا در این حالت چقدر است؟

ج: جواب این معادله را با روش نقطه ثابت و با فرض $x_۰=۱/۵$ تا دو رقم اعشار درست تعین کنید.

۲- معادله $۲x^{۲}-۱-\sin x=۰$ مفروض است.

الف: نشان دهید که معادله دارای یک ریشه مثبت است.

ب: تابعی تکراری بدست آورید بطوری که دنباله تولید شده از آن تابع به این جواب میل کند.

ج: با استفاده از تابع بدست آمده، جواب معادله را تا چهار رقم اعشار درست تعیین نمایید.

۳- مسئله ۲ را برای معادله $e^{-x}\sin x+۲۵x-۱=۰$ تکرار نمایید.

۴- تعیین کنید کوچکترین ریشه مثبت معادله $x^{۲}-۱+\cos x=۰$ در چه بازه‌ای واقع است. سپس با روش نقطه ثابت این ریشه را تا سه رقم اعشار درست بدست آورید.

۵- برای تعیین ریشه معادله $x^{۳}+۴x^{۲}-۱۰=۰$ از روش نقطه ثابت، فرض کنید $g(x)=\sqrt{\frac{۱۰}{x+۴}}$ و پس از تحقیق شرایط همگرایی، جواب معادله را تا سه رقم اعشار درست بدست آورید.

.

۶- تعیین کنید برای حل معادله $x^{۳}-۲۱=۰$ به روش نقطه ثابت، کدامیک از توابع زیر مناسب تر می باشد؟ با استفاده از این تابع جواب معادله را تا چهار رقم اعشار درست بدست آورید.

$$g_{۱}(x)=x-\frac{x^{۳}-۲۱}{۳x^{۲}}\quad,\quad g_{۲}(x)=x-\frac{x^{۴}-۲۱x^{۳}}{x^{۲}-۲۱}\quad,\quad g_{۳}(x)=\frac{۱}{۲۱}(۲۰x+\frac{۲۱}{x^{۲}})$$

۷- مطلوب است محاسبه تقریبی ریشه معادله $x^{۲}=\frac{۱}{۴}\cos x+۳$ از روش های نصف کردن فاصله و نیوتن و با فرض $\varepsilon=۰/۰۰۱$

۸- تقریبی از $\sqrt{۵}$ به روش نیوتن بدست آورید.

۹- با تعیین فرمولی مناسب مقدار تقریبی $\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+...}}}$ را از روش تکرار نقطه ثابت تعیین کنید.