به نام خدا

تمرین شماره ۱ کیهان‌شناسی دوره تیم

کسری حاجیان - امیررضا قدیانی

تابستان ۱۴۰۰

- **جهان تک‌مولفه‌ای:**

در پژوهش های جدید جهان های تک مولفه ای با یک مولفه موثر، از مدل های پرتکرار و مهم در کیهان شناسی است. در نظر بگیرید جهانی تک مولفه ای داریم و معادله حالت $P = w\rho$ برای این جهان برقرار است که w یک ثابت بی بعد است.

الف) تابعیت پارامتر چگالی با پارامتر مقیاس را برای این جهان بدست آورید.

ب) رابطه زیر را برای این کیهان اثبات کنید.

$$\dot{\Omega} + H\Omega(1-\Omega)(1+3w) = 0$$

- **OH MY GOD:**

دانشمندانی از مشرق زمین اخیرا وقتی در ارتفاع بسیار زیادی بودند، متوجه شدند که مقدار بسیار کمی انرژی با آهنگ خاصی به جهان افزوده می‌شود. این دانشمندان نتیجه گرفتند که این آهنگ انرژی به دلیل تاثیر خدا بر جهان است و بر درگاه پروردگار تمسک جستند. این دانشمندان نرخ افزوده شدن این انرژی بر واحد زمان بر واحد حجم را مطابق زیر فرمولیزه کردند:

$$\frac{dE}{dt\, dV} = q_0 H(t)\epsilon(t)a(t)$$

که H پارامتر هابل و ϵ چگالی انرژی است. همچنین این دانشمندان در یک جهان باز با یک مولفهِ غالب با $w = \frac{P}{\epsilon} = -\frac{1}{3}$ زندگی می‌کنند.

الف) معادله شاره را برای این جهان بنویسید.

ب) رابطه ای بین a و t در این جهان بیابید.

ج) نمودار $a(t)$ را به کمک شبیه‌سازی کامپیوتری رسم و تحلیل کنید.

- **پیکل ریک:**

پیکل ریک علاقه زیادی به تماشای کهکشان گازورپازورپ دارد که قطر آن $50\ kpc$ است. به همین منظور هرشب به همراه مستر نیمبوس از فراز اقیانوس این کهکشان را تماشا می کنند. در این حین مستر نیمبوس برای محک پیکل ریک از او می خواد در جهانشان که بسته و انرژی تاریک غالب است رابطه فاصله قطر زاویه ای بر حسب پارامتر مقیاس و ثوابت را بدست آورد. پیکل ریک به دلیل حافظه ضعیف با مورتی تماس می گیرد تا مقالات مربوطه را برای او بفرستد ولی سامر به دلیل ضربه روحی از مستر نیمبوس مانع این کار می شود و ریک با شما تماس می گیرد تا مسئله را برای او حل کنید.

حال که مسئله قبل را برای ریک حل کردید، او خوشش آمده و از شما می پرسد اگر قطر زاویه ای دیده شده از گازورپازورپ $20.7421"$ باشد، تصویر مشاهده شده مربوط به چند سال قبل این کهکشان است؟

$$\Omega_0 = 1.2 \quad H_0 = 68\frac{km}{s\ Mpc}$$

- **کیهان در فواصل نزدیک:**

با توجه به مقادیر:

$$\Omega_m = 0.3089, \qquad \Omega_\Lambda = 0.6901, \qquad \Omega_r = 0.0189$$

و پارامتر هابل در زمان حال $H_0 = 71.6 \frac{km}{s\ Mpc}$، روابط زیر را تا مرتبه دوم بدست آورید:

الف) $z(t)$ ؟

ب) $a(t)$ ؟

ج) $d_p(z)$ ؟

د) $d_A(z)$ ؟

ه) $d_L(z)$ ؟

و) همچنین رابطه‌ای برای قدر سطحی کهکشانی با درخشندگی سطحی Σ بیابید. ($\mu(z)$)

- **فروپاشی کروی:**

یک جهان بسته ماده غالب در نظر بگیرید.

الف) روابط زیر را برای این جهان اثبات کنید.

$$\frac{a}{a_0} = (1 - \cos(\theta)) \frac{\Omega_m}{2(\Omega_m - 1)}$$

$$H_0 t = (\theta - \sin(\theta)) \frac{\Omega_m}{2(\Omega_m - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

با توجه به قضـــیه بیرخوف (Birkhoff's theorem) می‌دانیم: تحولات یک اختلال کروی متقارن در یک پس زمینه نرم را می‌توان به عنوان یک جهان مجزا درنظر گرفت. پس تحولات آن را می‌توان با معادلات فریدمان بررسی کرد.

در نظر بگیرید اختلاف چگالی اختلال نسبت به جهان پس زمینه با چگالی ρ_b، برابر $\delta = \frac{(\rho - \rho_b)}{\rho_b}$ باشد. در لحظات اولیه t_i داریم، $\delta_i \ll 1$ و همچنین می‌توان فرض کرد که این اختلال با جریان هابلی منبســط می‌شــود. پس تقریبا چگالی جهان پس‌زمینه و اختلال در $t = t_i$ برابر است. پس می‌توان پارامتر چگالی اختلال را به صورت زیر نوشت:

$$\Omega_m(t = t_i) = \frac{\rho}{\rho_c}[t = t_i] = \frac{\rho_b}{\rho_c}(1 + \delta)[t = t_i] = \Omega_{m,i}(1 + \delta_i)$$

که $\Omega_{m,i}$ پارامتر چگالی جهان پس زمینه در زمان $t = t_i$ است. برای سادگی فرض کنید برای کیهان پس زمینه داریم:

$$\Omega_m = 1, \qquad \Omega_\Lambda = \Omega_r = 0$$

در این حالت داریم $\Omega_m(t = t_i) = (1 + \delta_i)$ و با در نظر گرفتن $t_i = t_0$ پرواضح است که:

$$\frac{a}{a_i} = (1 - \cos(\theta))\frac{1 + \delta_i}{2\delta_i}$$

$$H_i t = (\theta - \sin(\theta))\frac{1 + \delta_i}{2\delta_i^{\frac{3}{2}}}$$

ب) برای تحول چگالی اختلال رابطه زیر را اثبات کنید:

$$1 + \delta = \frac{9}{2}\frac{(\theta - \sin(\theta))^2}{(1 - \cos(\theta))^3}$$

این رابطه را در $\theta = 2\pi$ بررسی کنید.

ج) در نظریه خطی (linear theory) داریم:

$$\delta_L = \frac{3}{5}\delta_i \left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{2}{3}}$$

آیا می‌توانید این عبارت را اثبات کنید؟ **(امتیازی)**

د) با فرض اینکه $\delta_i > 0$، در هنگام تبدیل شدن انبساط به انقباض، تفاوت جواب حقیقی و نظریه خطی برای چگالی چیست؟