# فصل اول

# ماتریس‌ها (جبر خطی) و دستگاه معادلات خطی

تعاریف و نکات اولیه
ضرب ماتریس‌ها
ترانهاده یا ترانسپوز یک ماتریس
ماتریس‌های متقارن و ضد متقارن
نکاتی در ماتریس‌های مربعی
تریس یا رد یک ماتریس مربعی
دترمینان یک ماتریس مربعی
ماتریس همسازه‌ها و ماتریس الحاقی
معکوس یک ماتریس مربعی
ماتریس برگردان
ماتریس متعامد
معادله مشخصه، مقادیر ویژه و امتدادهای ویژه یک ماتریس مربعی
ماتریس مثبت و منفی
رتبه یا رنک یک ماتریس
دستگاه معادلات خطی
حل دستگاه با استفاده از دستور کرامر
حل دستگاه با استفاده از معکوس ماتریس
دستگاه معادلات همگن
مجموعه تست ماتریس‌ها (جبر خطی) و دستگاه معادلات خطی

# تعاریف و نکات اولیه

## ماتریس‌ها (جبر خطی)

یک ماتریس مانند $A_{m\times n}$ آرایشی از عناصر است که مطابق زیر در $m$ سطر و $n$ ستون قرارگرفته‌اند:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

منظور از درایه $a_{ij}$ عضوی از این ماتریس است که در سطر $i$ ام و ستون $j$ ام واقع شده است.

## ضرب یک عدد در یک ماتریس

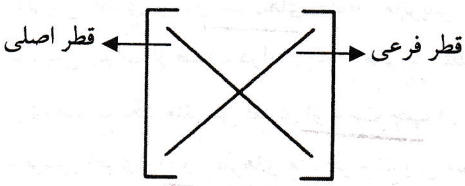
اگر $k$ یک عدد ثابت و $A$ ماتریسی دلخواه باشد؛ برای مشخص کردن ماتریس $kA$ کافی است تمام درایه‌های ماتریس $A$ را در عدد $k$ ضرب کنیم.

## ماتریس‌های هم درجه

دو ماتریس $A$ , $B$ را هم درجه می‌گوییم هرگاه تعداد سطرهایشان با هم برابر و تعداد ستون‌هایشان نیز با هم برابر باشد.

## ماتریس‌های مربعی

ماتریس $A$ را مربعی می‌گوییم، هرگاه تعداد سطرها و تعداد ستون‌های آن با هم برابر باشند. قطر اصلی و قطر فرعی یک ماتریس مربعی مطابق شکل تعریف می‌شود.




## ماتریس صفر

ماتریسی را که همه درایه‌های آن صفر باشد؛ ماتریس صفر گفته و با $\bar{0}$ نمایش می‌دهند.

## ماتریس ستونی

ماتریسی را که فقط یک ستون داشته باشد؛ ماتریس ستونی می‌گویند، طبیعی است $A_{m\times 1}$ ماتریس ستونی است.

## ماتریس سطری

ماتریسی را که فقط یک سطر داشته باشد؛ ماتریس سطری می‌گویند، طبیعی است $A_{1\times n}$ ماتریس سطری است.

### ماتریس همانی

ماتریسی مربعی را که کلیه عناصر روی قطر اصلی آن عدد یک و سایر درایه‌های آن عدد صفر باشد، ماتریس همانی می‌نامند و با نماد $I_n$ یا $I_{n\times n}$ نشان می‌دهند.

### ماتریس مثلثی

اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشد آن را پایین مثلثی و اگر تمام درایه‌های پایین قطر اصلی صفر باشد آن را بالا مثلثی می گویند.

### ماتریس قطری

اگر کلیه عناصر پایین و بالای قطر اصلی در یک ماتریس مربعی صفر باشند، آن را ماتریس قطری می گویند و با نماد $D$ نمایش می‌دهند. به تعبیری ماتریسی را قطری می گویند که هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثی باشد.

### چند نکته

۱ـ اگر $D$ یک ماتریس قطری باشد برای محاسبه $D^n$ کافی است عناصر قطر اصلی آن را به توان $n$ برسانیم.

۲ـ برای ضرب یک ماتریس قطری از سمت راست در یک ماتریس کافی است عناصر روی قطر اصلی ماتریس قطری را در ستون‌های متناظر ماتریس مورد نظر ضرب کنیم. بدین معنا که ستون اول ماتریس جواب از ضرب درایه $a_{11}$ از ماتریس قطری در ستون اول ماتریس چپ به‌دست می‌آید.

۳ـ برای ضرب یک ماتریس قطری از سمت چپ در یک ماتریس کافی است عناصر روی قطر اصلی ماتریس قطری را در سطرهای متناظر ماتریس مورد نظر ضرب کنیم. بدین معنا که سطر اول ماتریس جواب از ضرب درایه $a_{11}$ از ماتریس قطری در سطر اول ماتریس چپ به‌دست می‌آید.

۴ـ برای ضرب دو ماتریس قطری کافی است عناصر روی قطر اصلی متناظر در آن دو را در هم ضرب کنیم.

### ماتریس اسکالر

یک ماتریس قطری را که همه درایه‌های قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس اسکالر می گوییم. طبیعی است ماتریس اسکالر مضربی از یک ماتریس همانی است.

## توصیف درایه‌های ماتریس‌های همانی، بالا مثلثی، پایین مثلثی، قطری و اسکالر در بیان ریاضی

برای ماتریس همانی داریم:

$$I_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

برای ماتریس بالا مثلثی داریم:

$$A_{ij}=\begin{cases}0 & i>j\\ \text{دلخواه} & i\leq j\end{cases}$$

برای ماتریس پایین مثلثی داریم:

$$A_{ij}=\begin{cases}0 & i<j\\ \text{دلخواه} & i\geq j\end{cases}$$

برای ماتریس قطری داریم:

$$D_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \text{دلخواه} & i=j\end{cases}$$

برای ماتریس اسکالر داریم:

$$A_{ij}=\begin{cases}k & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

### تساوی دو ماتریس

دو ماتریس $A$ و $B$ را مساوی می‌گویند؛ هرگاه اولاً؛ هم درجه باشند و ثانیاً؛ عناصر نظیر به نظیرشان با هم برابر باشد؛ یعنی: $a_{ij}=b_{ij}$

### جمع و تفریق ماتریس‌ها

عمل جمع و تفریق روی دو ماتریس تنها برای ماتریس‌های هم درجه امکان پذیر است و برای محاسبه حاصل کافی است عمل مورد نظر را روی درایه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس انجام دهیم.

### خواص جمع ماتریس‌ها

۱ـ خاصیت جابجایی $A+B=B+A$

۲ـ خاصیت شرکت پذیری $A+(B+C)=(A+B)+C$

۳ـ وجود عضو قرینه $A+(-A)=(-A)+A=0$

٤ـ وجود عضو خنثی $A+0=0+A=A$

۵ ـ قانون حذف $A+C=B+C \Leftrightarrow A=B$

۶ ـ پخش اسکالر $(k\in R)$ $k(A+B)=kA+kB$

## ضرب ماتریس‌ها

ضرب دو ماتریس تنها در حالت خاصی امکان پذیر است که از روال زیر تبعیت کند:

$$A_{m\times p}\, B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

یعنی، ضرب تنها هنگامی امکان پذیر است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. در این حالت هر کدام از درایه‌های ماتریس C به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$C_{ij} = \sum_{t=1}^{p} A_{it}\, B_{tj}$$

(البته توجه داریم ما درایه‌های C را با استفاده از یک روال منطقی شناخته شده به‌دست می‌آوریم بدون آنکه به بسط سیگمای فوق پرداخته شود؛ بدین ترتیب که، عنصر $C_{ij}$ از طریق مجموع حاصل‌ضرب‌های عناصر سطر i ام ماتریس A در عناصر ستون j ام ماتریس B به‌دست می‌آید).

### خواص ضرب ماتریس‌ها

(خواص زیر با فرض آنکه اعمال ضرب نوشته شده امکان پذیر هستند، بیان شده است).

۱ـ عدم خاصیت جابجایی در حالت کلی $AB \neq BA$

۲ـ خاصیت شرکت‌پذیری $A(BC) = (AB)C$

۳ـ خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع $A(B+C) = AB + AC$

٤ـ وجود عضو خنثی در ضرب ماتریس‌های مربعی $AI = IA = A$

(A ماتریس $n\times n$ و $I_n$ ماتریس همانی)

۵ ـ عدم وجود قانون حذف $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

ـ۶ $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ یا $B = 0$

**نکته:** در حالات زیر ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابجایی است:

۱ـ دو ماتریس هم درجه و قطری باشند.

۲ـ یکی از ماتریس‌ها، ماتریس اسکالر باشد.

۳ـ هر دو ماتریس وضعیتی؛ مانند، $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ داشته باشد.

٤ـ یکی از ماتریس‌ها قرینه ماتریس دیگری باشد.

**نکته:** اگر B و A تعویض پذیر باشند؛ یعنی، $AB=BA$ آنگاه اتحادهای جبری در مورد دو ماتریس برقرار است؛ مثلاً، در حالت کلی داریم:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

و اگر $AB=BA$ باشد به‌دست می‌آید:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

## توان‌های طبیعی یک ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس مربعی باشد؛ داریم:

$$A^n = \underbrace{A.A.A \dots A}_{n \text{ بار}}$$

**چند نکته:** به سادگی می‌توان نشان داد:

۱ـ با فرض $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{bmatrix} & n = 2k \\ \begin{bmatrix} 0 & a^n \\ a^n & 0 \end{bmatrix} & n = 2k+1 \end{cases}$$

۲ـ با فرض $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & n = 2k \\ \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & n = 2k+1 \end{cases}$$

۳ـ با فرض $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$ داریم: $A^n = 0$

### چند تعریف

الف) ماتریس مربعی A را متناوب با دوره تناوب $n\ (n \in N)$ می‌گوییم؛ هرگاه: $A^{n+1} = A$

ب) ماتریس متناوب با دوره تناوب $n = 1$ را ماتریس هم قوه می‌خوانند؛ برای چنین ماتریس‌هایی داریم: $A^2 = A$

ج) ماتریس مربعی A را بی اثر از مرتبه $n\ (n \in N)$ می‌گوییم؛ هرگاه: $A^n = \overline{0}$

د) ماتریس بی‌اثر از مرتبه دو را ماتریس پوچ توان می‌خوانند؛ برای چنین ماتریس‌هایی داریم: $A^2 = \overline{0}$

## ترانهاده یا ترانسپوز یک ماتریس

اگر در ماتریس $A$ جای سطرها و ستون‌ها را عوض کنیم، ماتریسی حاصل می‌شود که آن را ترانهاده یا ترانسپوز $A$ می‌گویند و با $A'$ یا $A^T$ نمایش می‌دهند؛ لذا، بدیهی است:

$$A_{m\times n} \to A'_{n\times m} \quad , \quad a_{ij} = a'_{ji}$$

اگر $A$ و $B$ دو ماتریس هم درجه، $k$ عددی حقیقی و $p$ عددی طبیعی باشد؛ داریم:

$$(A')' = A \qquad (kA)' = kA'$$

$$(A+B)' = A' + B' \qquad (AB)' = B'A' \qquad (A^p)' = (A')^p$$

## ماتریس متقارن و ضد متقارن

الف) ماتریس مربعی $A$ را متقارن می‌گوییم، هرگاه $A' = A$ باشد.

ب) ماتریس مربعی $A$ را ضد متقارن (پاد متقارن) می‌گوییم، هرگاه $A = -A'$ باشد.

**چند نکته**

۱) در هر ماتریس متقارن عناصری که موقعیتشان نسبت به قطر اصلی ماتریس قرینه است، برابر یکدیگرند.

۲) در هر ماتریس ضد متقارن، عناصر روی قطر اصلی ماتریس، همگی صفرند و سایر عناصری که موقعیتشان نسبت به قطر اصلی ماتریس قرینه است، قرینه یکدیگرند.

۳) ماتریس‌های قطری همگی متقارن هستند و ماتریس صفر هم متقارن و هم ضد متقارن است.

٤) اگر $A$ ماتریس مربعی باشد $A+A'$ ماتریسی متقارن و $A-A'$ ماتریسی ضد متقارن است؛ لذا، هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس ضد متقارن نوشت؛ بدین ترتیب که:

$$A = \frac{1}{2}(A+A') + \frac{1}{2}(A-A')$$

۵) دترمینان هر ماتریس ضد متقارن از درجه فرد برابر صفر و از درجه زوج عددی به فرم مربع کامل است.

۶) حاصل‌ضرب یک عدد در یک ماتریس‌متقارن (ضدمتقارن) ماتریسی متقارن (ضدمتقارن) است.

۷) اگر $A$ و $B$ دو ماتریس متقارن هم درجه باشند، ماتریس‌های $A\pm B$ و $\lambda A$ و $A^n$ همگی متقارن هستند؛ ضمناً، ماتریس $AB+BA$ متقارن و ماتریس $AB-BA$ ضد متقارن است.

۸) اگر $A$ و $B$ دو ماتریس ضد متقارن هم درجه باشند، ماتریس‌های $A\pm B$ و $\lambda A$ همگی ضد متقارن هستند و $A^n$ چنانچه $n$ زوج باشد متقارن و چنانچه $n$ فرد باشد ضد متقارن خواهد بود.

# نکاتی در ماتریس‌های مربعی

## ۱ ـ تریس یا رد یک ماتریس مربعی

مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی؛ مانند، A را تریس آن ماتریس گفته و با $\operatorname{Tr} A$ نمایش دهند، لذا اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد؛ داریم:

$$\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

## ۲ـ دترمینان یک ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی؛ مانند، A، عددی به نام دترمینان این ماتریس قابل تعریف است که آن را با نماد $\det A$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند.

برای ماتریس $1\times1$ای؛ مانند، $A=[a]$ تعریف می‌کنیم:

$$|A| = a$$

برای ماتریس $2\times2$ای؛ مانند، $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تعریف می‌کنیم:

$$|A| = ad - bc$$

برای ماتریس‌های با درجه بالاتر محاسبه دترمینان از طریق بسط نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه صورت می‌گیرد (معمولا مناسب است بسط را نسبت به سطر یا ستونی انجام می‌دهیم که بیشترین درایه صفر در آنجا موجود باشد).

مثلا، در ماتریس $3\times3$ای مانند $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ داریم:

بسط دترمینان نسبت به سطر اول $\quad |A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

بسط دترمینان نسبت به سطر دوم $\quad |A| = -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

### جمع بندی

برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های مربعی از هر مرتبه دلخواه به نکات و تعاریف زیر توجه داشته باشید:

### ۱ـ دترمینان کهاد هر عنصر

به هر درایه یک ماتریس مربعی عددی نسبت داده می‌شود به نام دترمینان کهاد آن عنصر برای محاسبه دترمینان کهاد عنصر $a_{ij}$ کافی است سطر $i$ ام و ستون $j$ ام از ماتریس $A$ را حذف کرده و دترمینان حاصل را گزارش کنیم ( دترمینان کهاد عنصر $a_{ij}$ را با $\Delta_{ij}$ نمایش می‌دهند).

### ۲ـ علامت جایگاه هر عنصر

برای محل هر درایه علامتی در نظر گرفته می‌شود که از طریق $(-1)^{i+j}$ مشخص می‌گردد ($i$ شماره سطر و $j$ شماره ستون آن درایه خاص است).

### ۳ـ همسازه هر عنصر

به هر درایه یک ماتریس مربعی عددی نسبت داده می‌شود، به نام همسازه آن عنصر، برای محاسبه همسازه عنصر $a_{ij}$ کافی است دترمینان کهاد آن عنصر را در علامت جایگاه آن عنصر ضرب کنیم (همسازه عنصر $a_{ij}$ را با، $N_{ij}$ نمایش می‌دهند و بدیهی است که $N_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$).

### ۴ـ محاسبه دترمینان در حالت کلی

برای یک ماتریس مربعی $n\times n$؛ مانند، $A$ داریم $|A|=\sum_{j=1}^{n} N_{ij}\ a_{ij}$ که در آن $i$ می‌تواند $1$ یا $2$ یا ... یا $n$ انتخاب شود (بسته به اینکه بسط دترمینان نسبت به کدام سطر صورت گرفته است).

### چند نکته در بحث دترمینان

۱ـ اگر تمام درایه‌های یک سطر و یا یک ستون صفر باشد، حاصل دترمینان صفر است.

۲ـ اگر تمام درایه‌های یک سطر و یا یک ستون ماتریسی را $k$ برابر کنیم دترمینان حاصل $k$ برابر دترمینان اولیه خواهد بود؛ به عبارتی دیگر، اگر تمام عناصر یک سطر یا یک ستون دترمینانی مضرب $k$ باشند می‌توان از $k$ در آن سطر یا ستون فاکتور گرفته و در بیرون دترمینان نوشت.

۳ـ اگر جای دو سطر متوالی و یا دو ستون متوالی را عوض کنیم، دترمینان حاصل قرینه دترمینان اولیه خواهد بود.

٤ـ اگر دو سطر و یا دو ستون ماتریسی عینا یکسان و یا مضربی از همدیگر باشند، حاصل دترمینان صفر خواهد بود.

۵ ـ اگر ترکیب خطی از دو سطر دقیقا در سطر دیگر نوشته شده باشد و یا ترکیب خطی از دو ستون دقیقا در ستون دیگر نوشته شده باشد، حاصل دترمینان صفر است.

۶ـ اگر k برابر سطر یا ستون دلخواهی را به سطر یا ستون دلخواه دیگری اضافه کنیم، دترمینان حاصل تغییری نخواهد کرد.

۷ـ اگر مجموع چند سطر دلخواه یا چند ستون دلخواه را به سطر یا ستون دلخواه دیگری اضافه کنیم، دترمینان حاصل تغییری نخواهد کرد.

۸ ـ در ماتریس‌های مثلثی حاصل‌ضرب عناصر روی قطر اصلی ماتریس، دترمینان ماتریس را نشان می‌دهد.

۹ـ هرگاه A ماتریس $m \times n$ و B ماتریس $n \times m$ باشد، با فرض $m > n$ دترمینان ماتریس AB همواره صفر است! ولی دترمینان ماتریس BA باید محاسبه شود.

۱۰ـ مجموع دو دترمینان که فقط در یک سطر و یا یک ستون با هم اختلاف داشته باشند، برابر دترمینانی است که در آن سطرها یا ستون‌های یکسان را دقیقاً نوشته‌ایم و سطرها یا ستون‌های غیریکسان را با هم جمع کرده‌ایم.

۱۱ـ اگر Aو B دو ماتریس $n \times n$، k عددی حقیقی و p عددی طبیعی باشند؛ داریم:

$$|A| = |A'| \qquad |k \cdot A| = k^n |A|$$

$$|A \cdot B| A||B| \qquad |A^p| = |A|^p$$

### دستور ساروس برای محاسبه دترمینان‌های 3×3

علاوه بر روش بسط دترمینان نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه که راه حل عمومی برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی می‌باشد در ماتریس‌های $3 \times 3$ حاصل دترمینان را می‌توان با روشی به نام دستور ساروس نیز محاسبه کرد.

فرض کنید هدف محاسبه دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باشد. در روش ساروس، ابتدا ماتریس A را نوشته و در سمت راست آن دو ستون اول و دوم ماتریس را مجدداً می‌نویسیم. ملاحظه می‌شود که در مستطیل $3 \times 5$ به‌دست آمده، به موازات قطر اصلی و نیز قطر فرعی هر یک سه رشته از اعداد وجود دارند. دترمینان این ماتریس از رابطه زیر قابل دستیابی است:

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix} \qquad \Rightarrow \quad |A| = (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

**نکته:** می‌توان نشان داد: (قابل تعمیم)

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g'_1 & g'_2 & g'_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h'_1 & h'_2 & h'_3 \end{vmatrix}$$

**نکته:** دترمینان زیر به دترمینان واندرموند موسوم است:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

**نکته:** معادله خطی که از دو نقطه $(x_2,y_2)$ و $(x_1,y_1)$ می‌گذرد از بسط دترمینان زیر قابل حصول است:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**نکته:** مساحت مثلثی در صفحه با رئوس $(x_3,y_3)$ $(x_2,y_2)$ $(x_1,y_1)$ از بسط دترمینان زیر قابل حصول است:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

**نکته:** اگر $(x,y)$ تحت ماتریس $A_{2\times 2}$ تبدیل شود $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\cdot A = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$ یا $A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ و این تبدیل ناحیه بسته $D$ را به ناحیه بسته $D'$ تبدیل کند، مساحت این دو ناحیه به‌صورت زیر به‌هم مربوط می‌شوند:

$$S_{D'} = |A|\, S_D$$

### ماتریس منفرد (تکین)

ماتریس مربعی $A$ را منفرد می‌گویند، هرگاه دترمینان آن صفر باشد.

## ماتریس همسازه‌ها و ماتریس الحاقی

اگر در ماتریس مربعی A به جای هر عنصر، همسازه نظیر آن عنصر را قرار دهیم به ماتریس حاصل که با N نمایش داده می‌شود، ماتریس همسازه‌های ماتریس A و به ترانهاده N، یعنی، $N'$ ماتریس الحاقی ماتریس A گفته می‌شود. مطابق تعریف می‌نویسند: $N = \operatorname{cof} A \quad , \quad N' = \operatorname{adj} A$

**نکته:** اگر A یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) باشد ماتریس الحاقی آن نیز بالامثلثی (پایین مثلثی) خواهد بود.

## معکوس یک ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس غیر منفرد باشد؛ معکوس‌پذیر است؛ یعنی، می‌توان ماتریس مربعی هم درجه‌ای مانند B یافت به طوری که:

$$A.\,B = B.\,A = I$$

در این صورت B را معکوس (وارون) A گفته و می‌نویسند:

$$B = A^{-1}$$

برای محاسبه وارون ماتریس A می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$A^{-1} = \frac{N'}{|A|} \qquad , \qquad A^{-1}{}_{ij} = \frac{N'_{ij}}{|A|} = \frac{N_{ji}}{|A|}$$

### چند نکته

۱) اگر A و B دو ماتریس هم درجه، k عددی حقیقی و p عددی طبیعی باشد داریم:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (kA)^{-1} = kA^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (A^{p})^{-1} = (A^{-1})^{p}$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} \qquad (A')^{-1} = (A^{-1})'$$

$$(B^{-1}AB)^{n} = B^{-1}A^{n}B$$

۲) برای ماتریس $2\times 2$ای؛ مانند، $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ داریم:

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad-bc} \qquad A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

۳)

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(دو قاعده فوق قابل تعمیم می‌باشند).

۴) می‌توان نشان داد اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد؛ داریم:

$$|N'|=|A|^{n-1}$$

$$AN'=I_n|A|$$

۵) وارون هرماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) در صورت وجود یک ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) است که عناصر روی قطر اصلی آن معکوس عناصر روی قطر اصلی ماتریس اولیه می‌باشد.

## ماتریس برگردان

اگر معکوس یک ماتریس برابر خود آن ماتریس شود آن را «ماتریس برگردان» می‌نامند؛ به عبارتی، A یک ماتریس برگردان است، اگر و تنها اگر:

$$(A-I_n)(A+I_n)=0 \quad \text{یا} \quad A^2=I$$

$$\Rightarrow A^{2}-I_n^{2}=0 \Rightarrow A^{2}=I_n^{2} \rightarrow A^{2}=I_n$$

## ماتریس متعامد

اگر معکوس یک ماتریس برابر ترانهاده آن ماتریس شود، آن را ماتریس متعامد می‌نامند. به تعبیری A ماتریس متعامد است؛ هرگاه:

$A^{-1} = A'$ یا $A.A' = A'.A = I$

**نکته:** ماتریس یکه یک ماتریس برگردان و متعامد است.

### خواص ماتریس‌های متعامد

۱) دترمینان هر ماتریس متعامد برابر $+1$ یا $-1$ است.

۲) یک ماتریس مربعی، متعامد است؛ اگر و تنها اگر، اندازه هر یک از سطرهای آن به عنوان یک بردار برابر $1$ باشد و سطرهای ماتریس به عنوان بردار دو به دو بر هم عمود باشند؛ یعنی، حاصل‌ضرب درونی آنها صفر باشد (این مطلب در مورد ستون‌ها نیز صدق می‌کند).

۳) حاصل‌ضرب دو ماتریس متعامد هم مرتبه یک ماتریس متعامد است.

۴) ماتریس‌های $2\times2$ فقط در دو حالت متعامدند. یکی ماتریس‌های دوران به‌صورت $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ و دیگری ماتریس‌های تقارن نسبت به خط به معادله $y = x\tan\theta$ به‌صورت $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ می‌باشند.

۵) هر تبدیل که ماتریس نظیر آن متعامد باشد، طول را ثابت نگه می‌دارد.

۶) هر تبدیل که ماتریس نظیر آن متعامد باشد، زوایای بین بردارهای تبدیل یافته را تغییر نمی‌دهد.

## معادله مشخصه، مقادیر ویژه و امتدادهای ویژه یک ماتریس مربعی

فرض کنید $A$ یک ماتریس $n\times n$ باشد، چنانچه بتوان عددی مانند $\lambda$ و برداری $n\times1$؛ مانند، $X$ را به گونه‌ای یافت که $AX = \lambda X$ آنگاه $\lambda$ را یک مقدار ویژه ماتریس $A$ و $X$ را بردار ویژه نظیر $\lambda$ می‌نامند و به امتداد بردار مذکور، امتداد ویژه نظیر $\lambda$ گفته می‌شود.

برای پیدا کردن مقادیر ویژه یک ماتریس مربعی؛ مانند، $A$، کافی است از روی عناصر موجود در قطر اصلی ماتریس $\lambda$ واحد کم کرده و دترمینان ماتریس حاصل را مساوی صفر قرار دهیم. به معادله حاصل که در بیان ریاضی به فرم $|A-\lambda I| = 0$ نوشته می‌شود معادله مشخصه ماتریس $A$ گفته می‌شود. (دقت کنید اگر $A$ ماتریسی $n\times n$ باشد معادله مشخصه آن درجه $n$ خواهد بود و انتظار داریم از حل آن $n$ مقدار ویژه برای ماتریس حاصل شود).

اگر $\lambda_1$ یکی از مقادیر ویژه ماتریس $A$ باشد، برای یافتن امتداد ویژه نظیر آن کافی است دستگاه ماتریسی زیر را حل کنیم:

هدف: یافتن امتداد ویژه نظیر مقدار ویژهٔ معلوم $\lambda_1$ :

$$(A-\lambda_1 I)\ X=0$$

در معادله فوق $(A-\lambda_1 I)$ یک ماتریس $n\times n$، $X$ که همان امتداد ویژه نظیر $\lambda_1$ است یک ماتریس $n\times 1$ بوده و $\bar{0}$ نیز ماتریس صفر از نوع $n\times 1$ خواهد بود.

## چند نکته در بحث مقادیر ویژه

۱) برای هر ماتریس $A_{2\times 2}$ اگر مقادیر ویژه را $\lambda_1, \lambda_2$ بنامیم، بدون نیاز به محاسبه این مقادیر ویژه همواره می‌توان گفت:

$$\lambda_1+\lambda_2=\operatorname{Tr} A \qquad , \qquad \lambda_1\lambda_2=\det\ A$$

۲) برای هر ماتریس $A_{3\times 3}$ اگر مقادیر ویژه را $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ بنامیم، بدون نیاز به محاسبه این مقادیر ویژه همواره می‌توان گفت:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\operatorname{Tr} A \qquad , \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det\ A$$

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{Tr} A\right)^2-\left(\operatorname{Tr} A^2\right)\right)$$

۳) به طور کلی برای هر ماتریس $A_{n\times n}$ اگر مقادیر ویژه را $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ بنامیم؛ همواره داریم:

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\operatorname{Tr} A \qquad , \qquad \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n=\det\ A$$

٤) هرگاه یک و یا چند تا از مقادیر ویژه یک ماتریس برابر صفر باشند، نتیجه می‌شود که دترمینان آن ماتریس صفر بوده و لذا، آن ماتریس معکوس پذیر نخواهد بود.

۵) اگر مقادیر ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ را $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ بنامیم:

الف) مقادیر ویژه $A^{-1}$ عبارتند از:

$$\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\ldots,\frac{1}{\lambda_n}$$

ب) مقادیر ویژه $kA$ عبارتند از:

$$k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots, k\lambda_n$$

ج) مقادیر ویژه $A^p$ عبارتند از:

$$\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p$$

د) مقادیر ویژه $A+kI$ عبارتند از:

$$\lambda_1+k\ , \ \lambda_2+k\ , \ \ldots\ , \ \lambda_n+k$$

هـ) مقادیر ویژه $A'$ عبارتند از:

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

۶) مقادیر ویژه یک ماتریس مثلثی همان عناصر روی قطر اصلی ماتریس می‌باشند.

۷) برای ماتریس‌های با درایه‌های حقیقی همواره داریم:

الف) هرگاه ماتریس مورد نظر متقارن باشد، تمام مقادیر ویژه آن اعداد حقیقی خواهند بود.

ب) هرگاه ماتریس مورد نظر ضد متقارن باشد، تمام مقادیر ویژه آن صفر و یا اعداد موهومی محض (اعداد مختلط با قسمت حقیقی صفر باشد) خواهند بود.

۸) بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایز در ماتریس‌های متقارن دو به دو بر هم عمودند.

۹) دو ماتریس A و B را مشابه می‌گوییم هرگاه ماتریس معکوس‌پذیری؛ مانند، R وجود داشته باشد که $B = R^{-1}AR$.

می‌توان نشان داد مقادیر ویژه دو ماتریس مشابه با هم برابرند.

۱۰ـ برای دو ماتریس $n \times n$ مانند A و B مقادیر ویژه دو ماتریس AB و BA یکسان است.

۱۱ـ بردارهای ویژه، نظیر مقادیر ویژه متمایز، مستقل خطی‌اند.

### قضیه کیلی هامیلتون

هر ماتریس مربعی در معادله مشخصه خود صدق می‌کند؛ یعنی، اگر معادله مشخصه ماتریس A به‌صورت زیر باشد:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

داریم:

$$A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI = 0$$

(* از این قضیه می‌توان معکوس یک ماتریس را به‌دست آورد*) چنانچه طرفین رابطه فوق را از سمت راست در $A^{-1}$ ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I + a_nA^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{-1}{a_n}\left(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I\right)$$

### شکل قطری یک ماتریس

اگر A یک ماتریس مربعی غیرمنفرد و دارای مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ باشد و ستون‌های ماتریس B بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه باشند، آنگاه داریم:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

در این شرایط $B^{-1}AB$ تبدیل A توسط B به یک ماتریس قطری است و آن را شکل قطری A می‌نامند.

## ماتریس مثبت و منفی

ماتریس مربعی A را معین مثبت می‌گوییم، هرگاه تمام مقادیر ویژه آن مثبت باشند و ماتریس مربعی A را معین منفی می‌گوییم، هرگاه تمام مقادیر ویژه آن منفی باشند.

اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس A مثبت و یا صفر باشند آن را شبه مثبت و اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس A منفی و یا صفر باشند آن را شبه منفی می‌گویند.

اگر برخی از مقادیر ویژه‌های A مثبت و برخی منفی باشند A را نامعین می‌گویند.

## رتبه یا رنک یک ماتریس

رتبه یک ماتریس؛ مانند، A (که الزامی بر مربعی بودن آن نمی‌باشد) که آن را با Rank A نشان می‌دهند به یکی از دو طریق زیر قابل تعریف است:

۱) درجه بزرگ‌ترین دترمینان مخالف صفر قابل استخراج از ماتریس A را مرتبه A می‌گویند.

۲) مینیمم «تعداد سطرهای مستقل خطی» و «تعداد ستون‌های مستقل خطی» در ماتریس A را مرتبه A می‌گویند.

**نکته:** فرض کنید A یک ماتریس n×n باشد، اگر | A | مخالف صفر باشد، رتبه A برابر n است؛ ولی، اگر $|A| = 0$ رتبه ماتریس n نمی‌باشد حال اگر دست‌کم یک دترمینان $(n-1)\times(n-1)$ از داخل A قابل استخراج باشد که مقداری مخالف صفر داشته باشد، رتبه A برابر n-1 است؛ ولی، اگر تمام دترمینان‌های مذکور نیز صفر باشند رتبه ماتریس n-1 نیز نخواهد بود و این موضوع به همین ترتیب ادامه می‌یابد تا مرتبه ماتریس تعیین گردد.

**چند نکته**

۱ـ در ماتریس‌های قطری، رتبه برابر تعداد عناصر غیر صفر روی قطر اصلی است.

۲ـ رتبه هر ماتریس با رتبه ترانهاده آن یکسان است.

۳ـ برای هر ماتریس $A_{m\times n}$ داریم: $0 \le r(A) \le \min(m,n)$

۴ـ برای دو ماتریس هم درجه A و B داریم: $r(A+B) \le r(A)+r(B)$

۵ـ با فرض انجام پذیر بودن ضرب AB داریم: $r(AB) \le \min\big(r(A),r(B)\big)$

با فرض $|B| \neq 0$ داریم $r(AB)=r(A)$ .

## دستگاه معادلات خطی

دستگاه n معادله n مجهولی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \cdots + a_{nn}\ x_n = b_n \end{cases}$$

که در آن $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ مجهولات دستگاه معادلات می‌باشند.

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ماتریس ستونی طرف ثانی و $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ماتریس ضرایب خوانده می‌شوند.

به جز روش حذفی که روالی آشنا در حل دستگاه‌ها می‌باشد، دو روش دیگر نیز برای یافتن مجهولات مورد استفاده قرار می‌گیرد که در زیر توضیح داده می‌شود:

### ۱ـ حل دستگاه با استفاده از دستور کرامر

هر کدام از مجهولات دستگاه موردنظر را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \quad \text{و} \quad \ldots \quad \text{و} \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

که در آن $\Delta$ همان دترمینان ضرایب دستگاه بوده و $\Delta x_n$ و ... و $\Delta x_1$ به دترمینان‌های محذوف موسومند؛ مثلا، برای محاسبه $\Delta x_1$ کافی است در $\Delta$، ستون اول را حذف کرده و به جای آن ستون طرف ثانی دستگاه را قرار دهیم.

**نکته:** از بحث دستور کرامر به وضوح دیده می‌شود:

۱ـ اگر $\Delta$ مخالف صفر باشد، دستگاه دارای یک دسته جواب منحصر به فرد می‌باشد.

۲ـ اگر $\Delta$ مساوی صفر باشد دو حالت اتفاق می‌افتد:

الف) اگر مقادیر $\Delta x_1, \Delta x_2, ...., \Delta x_n$ مخالف صفر باشند، دستگاه حالت غیر ممکن داشته و مساله فاقد جواب است.

ب) اگر مقادیر $\Delta x_1, \Delta x_2, ...., \Delta x_n$ همگی صفر باشند، دستگاه حالت مبهم داشته و مساله بی‌نهایت جواب دارد.

$\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = 0$

بی‌نهایت جواب

### ۲ـ حل دستگاه با استفاده از معکوس ماتریس

اگر دستگاه n معادله و n مجهول مورد نظر را در فرم ماتریسی به صورت $AX=B$ بیان کنیم (که در آن A ماتریس ضرایب، X ماتریس ستونی شامل مجهولات و B ماتریس ستونی طرف ثانی می‌باشد)؛ چنانچه A معکوس پذیر باشد ($|A|\neq 0$)، با ضرب طرفین معادله از سمت چپ در $A^{-1}$ می‌توان مجهولات دستگاه را بدین صورت محاسبه کرد:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow IX=A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

## دستگاه معادلات همگن

اگر طرف ثانی تمام معادلات دستگاه n معادله n مجهولی برابر صفر باشند، به‌دستگاه معادلات همگن زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

طبیعی است این دستگاه همواره دارای جوابی به صورت $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ می‌باشد که اصطلاحاً‌به آن جواب بدیهی دستگاه مذکور گفته می‌شود. ثابت می‌شود شرط لازم و کافی برای آنکه دستگاه همگن مورد نظر دارای جواب غیر بدیهی نیز باشد (و به تعبیری بی نهایت دسته جواب داشته باشد)، آن است که معادلات این دستگاه وابستگی خطی داشته باشند و به بیان ساده‌تر دترمینان ضرایب دستگاه صفر شود.

## مجموعه تست ماتریس‌ها (جبر خطی) و دستگاه معادلات خطی

**۱ ـ ماتریس مربعی A در رابطه $A-A^2-I=0$ صدق می‌کند. حاصل $A^{12}+A^{13}$ کدام است؟**

۱) $A-I$ ۲) $I-A$ ۳) $A+I$ ۴) $-(A+I)$

**حل :**

از فرض مساله داریم $A^2=A-I$ و با ضرب طرفین این رابطه از سمت چپ در A به‌دست می‌آید:

$$A^3=A^2-AI=A^2-A=(A-I)-A=-I$$

لذا می‌توان نوشت:

$$A^{12}=(A^3)^4=(-I)^4=I \quad , \quad A^{13}=A^{12}.A=IA=A$$

و به‌دست می‌آید:

$$A^{12}+A^{13}=+I+A$$

**تذکر:** دقت کنید که می‌توانستیم بنویسیم:

$$A-A^2-I=0 \rightarrow A^2-A+I=0$$

و با ضرب طرفین رابطه فوق در $A+I\neq 0$ خواهیم داشت:

$$(A+I)(A^2-A+I)=0\,(A+I) \rightarrow A^3+I^3=0 \rightarrow A^3=-I$$

**۲ ـ حاصل** $k=\begin{vmatrix} a & b-c & d-e \\ b & c & 0 \\ -b & c & 2d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a & c-b & e-d \\ -b & -c & 0 \\ b & -c & -2d \end{vmatrix}$ **کدام است؟**

۱) 6acd ۲) صفر ۳) -3acd ۴) 3acd

**حل :**

ابتدا از 1- در ستون‌های دوم و سوم دترمینان دوم فاکتور می‌گیریم تا ستون‌های دوم و سوم هر دو دترمینان یکسان شود؛ سپس، برای محاسبه مجموع دو دترمینان مجازیم ستون‌های مشترک را نوشته و ستون‌های اول را با هم جمع کرده و دترمینان حاصل کار را بیابیم.

$$k=\begin{vmatrix} a & b-c & d-e \\ b & c & 0 \\ -b & c & 2d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a & b-c & d-e \\ -b & c & 0 \\ b & c & 2d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3a & b-c & d-e \\ 0 & c & 0 \\ 0 & c & 2d \end{vmatrix}=3a\begin{vmatrix} c & 0 \\ c & 2d \end{vmatrix}=6acd$$

**۳ـ ماتریس** $A=\begin{bmatrix}2\cos\theta & 1 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 1 & 2\cos\theta\end{bmatrix}$ **مفروض است. عضو واقع در سطر اول و ستون اول از معکوس این ماتریس کدام است؟**

۱) $\dfrac{4\cos^2\theta-1}{4\cos\theta.\cos2\theta}$ ۲) $\dfrac{1-4\cos^2\theta}{4\cos\theta.\cos2\theta}$ ۳) $\dfrac{4\cos^2\theta.\cos2\theta}{4\cos\theta-1}$ ۴) $\dfrac{4\cos^2\theta.\cos2\theta}{1-4\cos\theta}$

**حل :**

دترمینان A چنین است:

$$|A|=2\cos\theta\left(4\cos^2\theta-1\right)-1(2\cos\theta)=8\cos^3\theta-4\cos\theta$$
$$=4\cos\theta\left(2\cos^2\theta-1\right)=4\cos\theta.\cos2\theta$$

از طرفی همسازه عنصر $a_{11}$ چنین است:

$$N_{11}=(-1)^{1+1}\Delta_{11}=\begin{vmatrix}2\cos\theta & 1\\ 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=4\cos^2\theta-1$$

بنابراین:

$$A_{11}^{-1}=\frac{N'_{11}}{|A|}=\frac{N_{11}}{|A|}=\frac{4\cos^2\theta-1}{4\cos\theta.\cos2\theta}$$

**۴ـ اگر $(2A-I)^3=0$ باشد، معکوس A کدام است؟**

۱) $8A^2-12A-6I$ ۲) $8A^2+12A+6I$

۳) $8A^2+12A-6I$ ۴) $8A^2-12A+6I$

**حل :**

$$(2A-I)^3=0 \;\rightarrow\; (2A)^3-3(2A)^2I+3(2A)(I)^2-(I)^3=0$$
$$\rightarrow\; 8A^3-12A^2+6A-I=0 \;\rightarrow\; 8A^3-12A^2+6A=I$$
$$\rightarrow\; A\left(8A^2-12A+6I\right)=I$$

پس، انتظار داریم:

$$A^{-1}=8A^2-12A+6I$$

**۵ـ اگر ماتریس** $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ a & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ **معکوس پذیر نباشد، مجموع مقادیر ویژه آن کدام است؟**

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 0 ۴) 1

**حل :**

چون A فاقد معکوس است، باید:

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a(-1-2)+1(a-1)=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

حال می‌توان گفت، مجموع مقادیر ویژه ماتریس برابر است با:

$$\text{TrA}=-\frac{1}{2}+1-1=-\frac{1}{2}$$

**۶ـ اگر $\lambda=1$ یکی از مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & a & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ باشد؛ $(\text{TrA})^2-(\text{TrA}^2)$ کدام است؟**

۱) -10 ۲) -5 ۳) 10 ۴) 5

**حل :**

$\lambda=1$ باید معادله مشخصه را ارضاء کند؛ یعنی، باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 3-1 & 2 & 2 \\ 0 & a-1 & -2 \\ 0 & 5 & 3-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2(2(a-1)+10)=0 \Rightarrow a=-4$$

حال می‌توان گفت:

$$\text{TrA}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \Rightarrow 3-4+3=1+\lambda_2+\lambda_3$$

$$\det A=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Rightarrow 3(-12+10)=1(\lambda_2)(\lambda_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3=1 \\ \lambda_2\lambda_3=-6 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2=3 \quad , \quad \lambda_3=-2$$

اما داریم:

$$(\text{TrA})^2-(\text{TrA}^2)=2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)=2(3-2-6)=-10$$

**راه دوم:**

چون $a=-4$ به‌دست آمد؛ داریم: $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$؛ پس:

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & ? & ? \\ ? & 6 & ? \\ ? & ? & -1 \end{bmatrix}$$

و داریم:

$$TrA = 2 \qquad TrA^2 = 14$$

و خواهیم داشت:

$$(TrA)^2 - (TrA^2) = (2)^2 - (14) = -10$$

**۷ـ اگر $(1,1,0)$ یک بردار ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ باشد، مجموع دو مقدار ویژه دیگر ماتریس کدام است؟ (منظور مجموع دو مقدار ویژه‌ای است که بردار ویژه $(1,1,0)$ مربوط به آنها نیست).**

۱) 4 ۲) 5 ۳) 6 ۴) 7

**حل:**

اگر $X(1,1,0)$ بردار ویژه نظیر مقدار ویژه $\lambda$ باشد، باید:

$$(A - \lambda I).X = \overline{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & -1 \\ -1 & 6-\lambda & -1 \\ 4 & -4 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1-\lambda+4=0 \rightarrow \lambda=5 \\ -1+6-\lambda=0 \rightarrow \lambda=5 \\ 4-4=0 \end{cases}$$

پس $(1,1,0)$ بردار ویژه نظیر $\lambda_1 = 5$ بوده و چون:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = TrA \rightarrow 5 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1+6+4 \rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 6$$

**۸ـ بردار ویژه نظیر مقدار ویژه تکراری ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ کدام یک از بردارهای زیر می‌تواند فرض گردد؟**

۱) $(1,1,-2)$ ۲) $(1,-1,1)$ ۳) $(-1,0,2)$ ۴) $(-1,0,2)$

**حل:**

معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)((3-\lambda)(4-\lambda)-6) - (2(4-\lambda)-6) + 1(6-3(3-\lambda)) = 0$$

و با کمی عملیات جبری به‌دست می‌آید:

$$(\lambda-1)\left(-\lambda^2+8\lambda-7\right)=0 \Rightarrow \lambda=1,1,7$$

بردار ویژه نظیر $\lambda=1$ چنین مشخص می شود:

$$(A-1I)\cdot X=\overline{0}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$$

لذا، هر $x_1$ ، $x_2$ ، $x_3$ ای که جمعشان صفر باشد، به عنوان یک بردار ویژه برای $\lambda=1$، قابل قبول است؛ لذا، گزینه اول می‌تواند صحیح باشد.

**۹ ـ در ماتریس $A=\begin{pmatrix}m&m&-1\\0&1&2\\m&0&1\end{pmatrix}$ حداقل حاصل‌ضرب مقادیر ویژه به ازاء مقادیر مختلف پارامتر m کدام است؟**

۱) $0$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

**حل :**

حاصل‌ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس برابر دترمینان آن است؛ لذا:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}m&m&-1\\0&1&2\\m&0&1\end{vmatrix}=m(1-0)-m(0-2m)-1(0-m)=2m^2+2m$$

و برای مینیمم شدن حاصل فوق باید:

$$\left(2m^2+2m\right)'=0 \rightarrow 4m+2=0 \rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

و داریم:

$$\min(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)=2\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-1}{2}$$

**۱۰ ـ معادله مشخصه یک ماتریس $2\times 2$ به‌صورت $\lambda^2+2\lambda-3=0$ است. وارون ماتریس A کدام است؟**

۱) $\frac{1}{3}(A+I)$ ۲) $\frac{1}{3}(A+2I)$ ۳) $-\frac{1}{3}(A+I)$ ۴) $-\frac{1}{3}(A+2I)$

**حل :**

طبق قضیه کیلی هامیلتون هر ماتریس در معادله مشخصه‌اش صدق می کند؛ پس، باید:

$$A^2+2A-3I=0 \quad \to \quad A(A+2I)=3I$$
$$A\cdot\frac{1}{3}(A+2I)=I$$

و از آن‌جا که ضرب هر ماتریس در معکوسش ماتریس همانی می‌شود، باید:

$$A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2I)$$

**تذکر:** توجه داریم که $\left(\frac{1}{3}(A+2I)\right)\cdot A=A\cdot\left(\frac{1}{3}(A+2I)\right)=I$؛ پس، $A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2I)$

**۱۱ ـ معادله مشخصه ماتریس مربعی $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$ ، به‌صورت $(1-\lambda)(2-\lambda)^2=0$ است.**

**حاصل $A^3-5A^2+7A+3I$ کدام است؟**

۱) $7I-A$ ۲) $7I+A$ ۳) $0$ ۴) $-A$

**حل :**

معادله مشخصه را ساده می‌کنیم:

$$(1-\lambda)\left(4+\lambda^2-4\lambda\right)=0 \quad\to\quad -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0 \quad\to\quad \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$$

طبق قضیه کیلی هامیلتون هر ماتریس در معادله مشخصه‌اش صدق می‌کند؛ لذا، داریم:

$$A^3-5A^2+8A-4I=0 \quad\to\quad A^3-5A^2+(7A+A)+(3I-7I)=0$$
$$\to\quad A^3-5A^2+7A+3I=7I-A$$

**۱۲ ـ دستگاه معادلات خطی $\begin{cases}x+y-2z=-3\\3x-y+z=4\\2x+3y-z=5\end{cases}$ را در نظر بگیرید. اگر معکوس ماتریس $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\3&-1&1\\2&3&-1\end{pmatrix}$ به‌صورت $A^{-1}=\frac{-1}{19}\begin{pmatrix}-2&-5&-1\\5&3&-7\\11&-1&-4\end{pmatrix}$ باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟**

۱) 5 ۲) 6 ۳) 7 ۴) 8

**حل :**

دستگاه مورد نظر را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\3&-1&1\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix} \quad\to\quad AX=B$$

اگر طرفین معادله فوق را از سمت چپ در $A^{-1}$ ضرب کنیم، داریم:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \to \quad IX = A^{-1}B \quad \to \quad X = A^{-1}B$$

یعنی، می‌توان گفت:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ 11 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} -19 \\ -38 \\ -57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

یعنی داریم:

$$x+y+z=1+2+3=6$$

**۱۳ ـ دستگاه معادلات** $\begin{cases} -x+2y+3z=1 \\ x-y-mz=1 \\ 2x+y+z=2m \end{cases}$ **به ازاء چه مقدار m دارای بی‌شمار جواب است؟**

۱) $\frac{8}{5}$ ۲) $-\frac{8}{5}$ ۳) 4 ۴) غیرممکن

**حل :**

برای داشتن بی‌شمار جواب، اولاً؛ لازم است:

$$\Delta=0 \quad \to \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -m \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \to \quad -1(-1+m)-2(1+2m)+3(1+2)=0$$

$$\to \quad -5m+8=0 \quad \to \quad m=\frac{8}{5}$$

اما، شاید به ازاء این مقدار از m، دستگاه، غیرممکن باشد؛ لذا، علاوه بر موضوع فوق باید، مثلاً:

$$\Delta_z=0 \quad \to \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2m \end{vmatrix}=0 \quad \to \quad -1(-2m-1)-2(2m-2)+1(1+2)=0$$

$$\to \quad -2m+8=0 \quad \to \quad m=4$$

و چون جواب‌های پیدا شده برای m با هم تطابق ندارند؛ گزینه چهارم صحیح است. (در حقیقت برای $m=\frac{8}{5}$ دستگاه فاقد جواب است).

**۱۴ ـ برای آنکه دستگاه معادلات** $\begin{cases} 2x-y+z+w=1 \\ x+2y-z+2w=3 \\ \alpha x-y+2z+5w=\beta \end{cases}$ **فاقد جواب باشد؛ باید:**

۱) $\alpha=7$ و $\beta\neq 6$ ۲) $\alpha=6$ و $\beta=7$ ۳) $\alpha\neq 7$ و $\beta=6$ ۴) $\alpha\neq 7$ و $\beta\neq 6$

**حل :**

دستگاه موجود دارای سه معادله و چهار مجهول است؛ لذا، اگر بخواهیم فاقد جواب باشد، باید معادلات در تناقض با هم قرار گیرند.

با کمی دقت روی سمت چپ معادلات و بررسی ضرایب y، z و w مشاهده می‌شود اگر سه برابر سمت چپ معادله اول را با سمت چپ معادله دوم جمع کنیم، حاصل کار دقیقاً برای ضریب y، z و w با سمت چپ معادله سوم مطابق است؛ لذا، برای آنکه دستگاه فاقد جواب باشد، باید همین اتفاق روی ضرایب x برقرار باشد؛ ولی، روی سمت راست معادلات نباید برقرار باشد؛ یعنی،

$$3(2)+1=\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=7$$
$$3(1)+3\neq\beta \quad \Rightarrow \quad \beta\neq6$$

**۱۵ ـ اگر رتبه ماتریس** $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1\\ 4 & 1 & 12 & 22 & a\\ 6 & -1 & b & 23 & -2\end{pmatrix}$ **دو باشد، $a-b$ کدام است؟**

۱) -11 ۲) -16 ۳) -13 ۴) -14

**حل :**

چون رتبه ماتریس 2 فرض شده تمام دترمینان‌های $3\times3$ قابل استخراج از داخل آن باید حاصل صفر داشته باشند؛ لذا:

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 12\\ 6 & -1 & b\end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; -1(4b-72)+2(-4-6)=0 \;\rightarrow\; -4b+52=0 \;\rightarrow\; b=13$$

$$\begin{vmatrix}3 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 12 & 22 & a\end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; 3(4a+22)-5(2a+12)=0 \;\rightarrow\; 2a+6=0 \;\rightarrow\; a=-3$$

پس:

$$a-b=-16$$

# فصل دوم

# بردارها و معادلات صفحه و خط در فضا

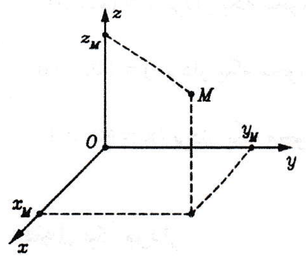
تعریف بردار
مختصات در فضای سه بعدی
توصیف بردار در فضا و نکات وتعاریف اولیه
جمع و تفریق دو بردار و مفهوم هندسی آن
ضرب یک عدد در بردار
زوایای یک بردار با محورها و بردار یکه یک بردار
انواع ضرب بردارها (داخلی، خارجی، مخلوط)
استقلال خطی و وابستگی خطی در بردارها
معادله صفحه در فضا
معادله خط در فضا
مجموعه تست بردار، صفحه و خط

یادداشت:

## تعریف بردار

بردار، پاره خطی است جهت دار که برای مشخص کردن آن طول، راستا، جهت و مبدا آن را معین می‌کنیم (اگرچه در ریاضی مبدا بردار می‌تواند حائز اهمیت نباشد).

## مختصات در فضای سه بعدی




هر نقطه در فضا از طریق سه مختصه مشخص می‌شود. در دستگاه مختصات دکارتی سه مختصه نقطه همان طول، عرض و ارتفاع آن نقطه می‌باشد که در شکل مقابل نشان داده شده است و اصطلاحاً می‌نویسیم $M(x, y, z)$.

**توجه:** اگر نقطه A با مختصات $(a,b,c)$ مفروض باشد؛ طبیعی است:

- تصویر نقطه A روی صفحه xoy نقطه $(a,b,0)$ است.
- تصویر نقطه A روی محور zها نقطه $(0,0,c)$ است.
- قرینه نقطه A نسبت به صفحه xoy نقطه $(a,b,-c)$ است.
- قرینه نقطه A نسبت به محور zها نقطه $(-a,-b,c)$ است.
- قرینه نقطه A نسبت به مبدا مختصات $(-a,-b,-c)$ است.
- فاصله نقطه A تا مبدا مختصات برابر $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ است.
- فاصله نقطه A تا صفحه xoy برابر $|c|$ است.
- فاصله نقطه A تا محور zها برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ است.

## توصیف بردار در فضا و نکات و تعاریف اولیه

دو نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ را در نظر بگیرید، برداری که ابتدای آن در A و انتهای آن در B باشد، به صورت $\overrightarrow{AB}$ نوشته می‌شود که مؤلفه‌های آن عبارتند از:

$$\overrightarrow{AB} : (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

در حقیقت $x_2 - x_1$، $y_2 - y_1$ و $z_2 - z_1$، به ترتیب مؤلفه‌های این بردار روی محورهای x، y و z می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

که در آن $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ بردارهای یکه محورهای z , y ,x می‌باشند؛ یعنی، داریم:

$\vec{i}=(1,0,0)$ بردار یکه محور xها

$\vec{j}=(0,1,0)$ بردار یکه محور yها

$\vec{k}=(0,0,1)$ بردار یکه محور zها

### طول یک بردار

طول بردار $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{A}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

### بردار صفر

برداری را که هر سه مؤلفه آن صفر باشد (طول آن صفر باشد) بردار صفر نامیده، با $\vec{o}$ نمایش می‌دهیم.

### تساوی دو بردار

دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را مساوی می‌گویند هرگاه تک تک مؤلفه‌های نظیرشان با هم برابر باشد.

## جمع و تفریق دو بردار و مفهوم هندسی آن

برای انجام جمع یا تفریق دو بردار، کافی است عمل مورد نظر را روی مؤلفه‌های نظیر به نظیر دو بردار انجام دهیم.

### مفهوم هندسی جمع و تفریق دو بردار

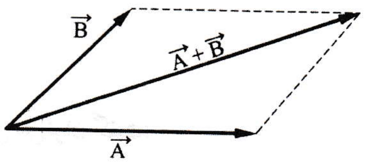
دو بردار $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ و $\vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ را در نظر بگیرید. همان‌طوری که گفتیم، جمع و تفریق این دو بردار از نظر محاسباتی به فرم زیر به‌دست می‌آیند:

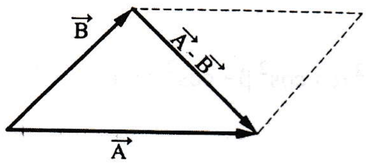
$$\vec{A}+\vec{B}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}+(a_3-b_3)\vec{k}$$

اما از نظر هندسی می‌توان گفت:

برای مشخص کردن جمع و تفریق دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ کافی است مبدا آنها را در یک نقطه مشترک قرار داده و سپس روی این دو بردار یک متوازی الاضلاع بسازیم، حال دو قطر این متوازی الاضلاع مطابق شکل توصیف کننده $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ خواهند بود.

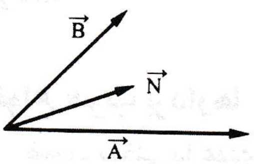



و به سادگی می‌توان نشان داد اگر زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر $\alpha$ باشد، داریم:

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2-2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$




**نکته:** اگر نیمساز داخلی زاویه ساخته شده روی دو بردار $\vec{B}$ و $\vec{A}$ ترسیم گردد، امتداد این نیمساز به صورت $\vec{N}=\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}+\dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ مشخص می‌گردد.

## ضرب یک عدد در بردار

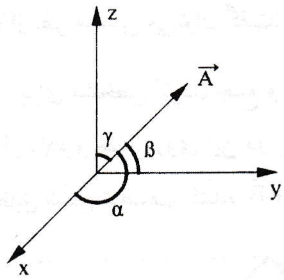
اگر $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ و $K$ عددی دلخواه باشد؛ داریم:

$$K\vec{A}=Ka_1\vec{i}+Ka_2\vec{j}+Ka_3\vec{k}$$

دقت کنید $K\vec{A}$ برداری است هم راستا با $\vec{A}$ که طول آن $K$ برابر طول $\vec{A}$ بوده و بسته به آنکه $K>0$ یا $K<0$ باشد، جهت آن مانند $\vec{A}$ یا برعکس $\vec{A}$ خواهد بود.

## زوایای یک بردار با محورها و بردار یکه یک بردار

اگر بردار $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ با جهت مثبت محورهای $x, y, z$ به ترتیب زوایای $\alpha, \beta, \gamma$ بسازد، همواره داریم:




$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\vec{A}|} \quad و \quad \cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{A}|} \quad و \quad \cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{A}|}$$

و لذا:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

بنابراین می‌توان گفت:

$$\vec{A}=|\vec{A}|\left(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}\right)$$

که در آن $\vec{\lambda}_A=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ را بردار یکه بردار $\vec{A}$ می‌گوییم:

(بردار یکه هر بردار، برداری است هم‌راستا و هم‌جهت با بردار موردنظر که دارای طول واحد می‌باشد).

## انواع ضرب بردارها

### ضرب داخلی یا عددی دو بردار

دو بردار $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ و $\vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ را در نظر بگیرید. ضرب داخلی این دو بردار که حاصل آن یک عدد می‌باشد؛ به یکی از دو فرم معادل زیر قابل تعریف است:

$$\begin{cases}\vec{A}.\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\ \vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\;.\;\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\;\cos\theta\end{cases}$$

که در آن $\theta$ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد.

**چند نکته**

۱ـ ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد و داریم: $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

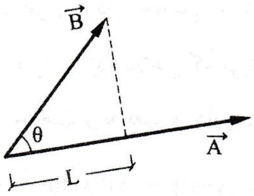
۲ـ با توجه به روش دوم محاسبه ضرب داخلی، می‌توان زاویه بین دو بردار را از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\;\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

۳ـ بدیهی است شرط عمود بودن دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ آن است که ضرب داخلی آنها صفر باشد؛ یعنی:

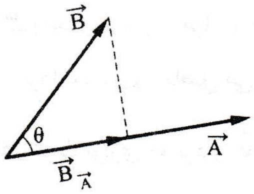
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

٤ـ برای محاسبه طول تصویر بردار $\vec{B}$ بر روی بردار $\vec{A}$ می‌توان نوشت:



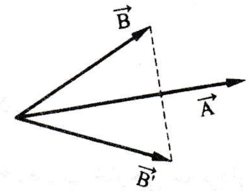

$$L = \left|\, |\vec{B}|\cos\theta \,\right| = \left|\vec{B}\cdot\lambda_{\vec{A}}\right|$$

که در آن $\theta$ زاویه بین دو بردار و $\lambda_{\vec{A}}$ بردار یکه در جهت بردار $\vec{A}$ است.




۵ ـ برای محاسبه تصویر بردار $\vec{B}$ بر روی بردار $\vec{A}$ بدیهی است که باید، طول تصویر را در بردار یکه بردار $\vec{A}$ ضرب کنیم؛ یعنی:

$$\vec{B}_{\vec{A}} = |\vec{B}|\cos\theta\cdot\vec{\lambda}_A$$




٦ـ قرینه بردار $\vec{B}$ نسبت به بردار $\vec{A}$ به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\vec{B}' = 2\vec{B}_{\vec{A}} - \vec{B}$$

۷ـ همواره داریم:

$$\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|^2$$

## ضرب خارجی یا برداری دو بردار

دو بردار $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ , $\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ را در نظر بگیرید. ضرب خارجی این دو بردار که حاصل آن یک بردار است به صورت زیر و از بسط یک دترمینان تعریف می‌شود:

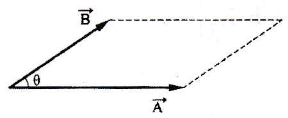
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

## چند نکته

۱ـ ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد؛ ولی، داریم:

$$\vec{A}\times\vec{B}=-(\vec{B}\times\vec{A})$$

۲ـ طول بردار حاصل از $\vec{A}\times\vec{B}$ برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که می‌توان بر روی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ساخت و به تعبیری داریم:




$S=|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ : مساحت متوازی الاضلاع

۳ـ راستای بردار حاصل از $\vec{A}\times\vec{B}$ بر هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است و به تعبیری از ضرب خارجی دو بردار، برداری حاصل می‌شود که بر صفحه گذرنده از دو بردار مذکور عمود است.

٤ـ شرط توازی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ آن است که ضرب خارجی آنها صفر شود؛ یعنی، داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

۵ـ $\vec{A}\times\vec{A}=\vec{0}$

۶ـ ضرب خارجی سه بردار $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ که حاصل آن یک بردار است به صورت زیر قابل بیان است:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

### ضرب مخلوط سه بردار

سه بردار $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ ، $\vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ ، $\vec{C}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ را در نظر بگیرید. ضرب مخلوط این سه بردار که حاصل آن یک عدد است، به‌صورت زیر و از بسط یک دترمینان تعریف می‌شود:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{A} & \vec{B} & \vec{C}\end{bmatrix}$$

**نکته:** بردارهای $\vec{A}$، $\vec{B}$، $\vec{C}$ و $\vec{D}$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد:

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$$

$$[\vec{A}\times\vec{B}\quad \vec{B}\times\vec{C}\quad \vec{C}\times\vec{A}]=[\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}]^2$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=[\vec{A}\ \vec{C}\ \vec{D}]\vec{B}-[\vec{B}\ \vec{C}\ \vec{D}]\vec{A}$$

**چند نکته**

۱ـ قدر مطلق عدد به‌دست آمده از ضرب مخلوط سه بردار، حجم متوازی السطوحی را نشان می‌دهد که بر روی آن سه بردار قابل ساختن است و $\frac{1}{6}$ حجم متوازی‌السطوح، حجم هرم قابل ساخت روی این سه بردار را می‌دهد.

۲ـ شرط هم صفحه بودن سه بردار $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ آن است که ضرب مخلوط آنها صفر باشد.

## استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها

می‌گوییم، بردارهای $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\ldots,\vec{V}_n$ وابستگی خطی دارند، هرگاه بتوانیم اعداد ثابتی؛ مانند، $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n$ (که تواماً صفر نمی‌باشند) پیدا کنیم به‌طوری که:

$$\ell_1\vec{V}_1+\ell_2\vec{V}_2+\ldots+\ell_n\vec{V}_n=\vec{0}$$

و در غیر این صورت بردارهای مذکور را مستقل خطی می‌نامند.

**چند نکته**

۱) دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ وابستگی خطی دارند، اگر و فقط اگر، یکی از آنها مضرب دیگری باشد (به تعبیری دو بردار مذکور موازی باشند).

۲) سه بردار زیر را که در فضا تعریف شده‌اند، در نظر بگیرید:

$$\vec{V}_1=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\qquad \vec{V}_2=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\qquad \vec{V}_3=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$$

شرط لازم و کافی برای آنکه سه بردار مذکور وابستگی خطی داشته باشند، آن است که در یک صفحه واقع باشند (به تعبیری ضرب مخلوط آنها صفر شود).

۳) در فضا هر چهار بردار دلخواهی، وابستگی خطی دارند.

## معادله صفحه در فضا

برای مشخص کردن معادله یک صفحه باید یک نقطه از صفحه و برداری عمود بر آن صفحه معلوم باشد. معادله صفحه‌ای که از نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ گذشته و بردار $\vec{N}=(a,b,c)$ بر آن عمود باشد، چنین نوشته می‌شود:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

( $\vec{N}$ را اصطلاحاً بردار نرمال صفحه می گوییم).

### حالات خاص معادله صفحه

معادله صفحه گذرنده از مبدا مختصات: $ax+by+cz=0$

| | | |
|---|---|---|
| معادله صفحه موازی محور z<br>$ax+by+d=0$ | معادله صفحه موازی محور y<br>$ax+cz+d=0$ | معادله صفحه موازی محور x<br>$by+cz+d=0$ |
| معادله صفحه موازی صفحه xoy:<br>$cz+d=0$ | معادله صفحه موازی صفحه xoz:<br>$by+d=0$ | معادله صفحه موازی صفحه yoz:<br>$ax+d=0$ |

### تعیین معادله صفحه عمود بر یک خط گذرنده از یک نقطه معلوم

اگر $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$ بردار هادی خطی معلوم باشد، برای نوشتن معادله صفحه‌ای که بر این خط عمود بوده و از نقطه $(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد، کافی است توجه کنیم که بردار هادی خط همان بردار نرمال صفحه مورد نظر است و لذا، با دانستن بردار نرمال صفحه و یک نقطه از آن می‌توان معادله صفحه مطلوب را نوشت.

### تعیین معادله صفحه‌ای که از سه نقطه معلوم می گذرد

معادله صفحه گذرنده از سه نقطه $A(x_1,y_1,z_1)$ , $B(x_2,y_2,z_2)$ , $C(x_3,y_3,z_3)$ چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

توجه کنید، اندازه بردار $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$ مساحت مثلثی را نشان می‌دهد که روی سه نقطه A ، B و C ساخته می‌شود.

**نکته:** بدیهی است معادله صفحه گذرنده از سه نقطه به مختصات $(0,0,c)$، $(0,b,0)$ و $(a,0,0)$ از رابطه $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ به دست می‌آید.

## تعیین معادله صفحه گذرنده از یک نقطه معلوم و موازی دو خط غیرموازی

اگر $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$ بردارهای هادی دو خط معلوم باشند؛ معادله صفحه‌ای که با دو خط مذکور موازی بوده و از نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد، چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

دقت کنید، اگر نخواهیم از فرمول فوق استفاده کنیم، می‌توانیم با انجام ضرب خارجی $\vec{A}\times\vec{B}$ برداری که بر هر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود می‌باشد و به طبع همان نرمال صفحه مورد نظر است را مشخص کرده و با دانستن نرمال و یک نقطه از صفحه معادله صفحه مطلوب را بنویسیم.

## تعیین معادله صفحه‌ای که بر صفحه‌ای معین عمود است و از دو نقطه معلوم می‌گذرد

اگر دو نقطه معلوم، A و B فرض شوند و بردار نرمال صفحه معین را $\vec{N}$ بنامیم، طبیعی است از ضرب خارجی $\overrightarrow{AB}\times\vec{N}$ نرمال صفحه مورد نظر به دست می‌آید و لذا، با داشتن یک نقطه از این صفحه (A یا B) می‌توان معادله آن را نوشت.

## تعیین معادله صفحه‌ای که شامل دو خط موازی است

برای این منظور، کافی است دو نقطه دلخواه از یک خط و یک نقطه دلخواه از خط دیگر را پیدا کرده و معادله صفحه گذرنده از این سه نقطه را بنویسیم.

### تعیین معادله صفحه‌ای که از دو نقطه معلوم به یک فاصله است

اگر دو نقطه معلوم، A و B باشند، بردار $\overrightarrow{AB}$؛ یعنی، $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$ نرمال صفحه مورد نظر و نقطه وسط B و A؛ یعنی، $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ نقطه‌ای از آن صفحه می‌باشد؛ لذا، معادله صفحه قابل نوشتن است.

### تعیین معادله صفحه‌ای که بر دو صفحه معین عمود و از یک نقطه معلوم می‌گذرد

اگر $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ نرمال‌های دو صفحه معلوم باشند، بردار نرمال صفحه‌ای که بر دو صفحه مذکور عمود است، از طریق رابطه $\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ مشخص می‌شود؛ لذا، با دانستن یک نقطه از این صفحه می‌توان معادله آن را به سادگی نوشت.

### تصویر یک نقطه روی یک صفحه و قرینه یک نقطه نسبت به آن

فرض کنید مختصات نقطه‌ای معلوم؛ مانند، A و معادله صفحه‌ای؛ مانند، P در دست باشد. اگر معادله خط گذرنده از A و عمود بر صفحه P را بنویسیم (طبیعی است بردار هادی این خط همان نرمال صفحه P است)، محل تقاطع این خط با صفحه تصویر نقطه A را روی آن نشان می‌دهد.

اگر $A'$ قرینه نقطه A نسبت به صفحه P و H تصویر نقطه A روی صفحه P باشد، باید H وسط $AA'$ قرار گیرد؛ یعنی،

$$x_H=\frac{x_A+x_{A'}}{2}\qquad y_H=\frac{y_A+y_{A'}}{2}\qquad z_H=\frac{z_A+z_{A'}}{2}$$

و از اینجا مختصات نقطه $A'$ قابل محاسبه است.

**نکته:** برای یافتن راستای تصویر خط $\Delta$ بر صفحه P کافی است، ابتدا بردار هادی خط را در بردار نرمال صفحه ضرب خارجی نموده و سپس بردار حاصل را مجدداً در بردار نرمال صفحه ضرب خارجی نماییم.

### معادله یک دسته صفحه

اگر خط $\Delta$ از طریق فصل مشترک دو صفحه $\begin{cases}P: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ Q: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ توصیف شده باشد، معادله کلیه صفحات گذرنده از خط $\Delta$ به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+K(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

که به ازا هر K دلخواه معادله یکی از صفحات مورد نظر مشخص خواهد شد.

## چند نکته

۱) دو صفحه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

الف) شرط توازی دو صفحه مذکور موازی بودن نرمال‌هایشان است؛ یعنی، باید:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

ب) شرط تعامد دو صفحه مذکور عمود بودن نرمال‌هایشان است؛ یعنی، باید:

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

ج) زاویه بین دو صفحه مذکور زاویه بین نرمال‌هایشان است؛ یعنی، داریم:

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

د) مکان هندسی نقاط متساوی الفاصله از دو صفحه مذکور از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

۲) فاصله نقطه $A(x_0,y_0,z_0)$ تا صفحه به معادله $ax+by+cz+d=0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

**توجه:** برای محاسبه فاصله نقطه $P$ از صفحه‌ای با نرمال $\vec{N}$ که از نقطه $P_0$ می‌گذرد، می‌توان از رابطه زیر نیز استفاده کرد:

$$\frac{|\overrightarrow{PP_0}.\vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

۳) فاصله دو صفحه موازی که معادله آنها به صورت $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax+by+cz+d'=0 \end{cases}$ بیان شده، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

همچنین، معادله صفحه ای که موازی دو صفحه مذکور بوده و فاصله یکسانی از این دو صفحه داشته باشد $ax+by+cz+\frac{d+d'}{2}=0$ خواهد بود.

### وضعیت سه صفحه نسبت به همدیگر

سه صفحه متمایز زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

اگر $\Delta\neq 0$ باشد، دستگاه فوق دارای یک دسته جواب برای مجهولات $x,y,z$ بوده و به تعبیری سه صفحه در یک نقطه متقاطعند.

اگر $\Delta=0$ و $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ مخالف صفر باشند، دستگاه فاقد جواب است و به تعبیری سه صفحه نقطه تقاطعی مشترک ندارند.

اگر $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ باشد، دستگاه دارای بی‌شمار دسته جواب است و به تعبیری سه صفحه در یک خط مشترکند.

(دقت کنید $\Delta$ دترمینان ضرایب دستگاه و $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ دترمینان‌های محذوفند).

## معادله خط در فضا

برای مشخص کردن معادله یک خط در فضا باید یک نقطه از خط و برداری موازی با آن خط معلوم باشد. معادله خطی که از نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ گذشته و بردار $\vec{U}=(p,q,r)$ با آن موازی است، چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$ (فرم استاندارد معادله خط)

$$\begin{cases} x=pt+x_0 \\ y=qt+y_0 \\ z=rt+z_0 \end{cases}$$ (فرم پارامتری معادله خط)

( $\vec{U}$ را اصطلاحاً بردار هادی خط می‌گوییم).

**نکته:** دقت کنید فرم پارامتری معادله خط دارای این ویژگی است که به ازا هر مقدار دلخواه پارامتر t یکی از نقاط خط مشخص خواهد شد.

### حالات خاص معادله خط:

| معادله خط موازی محور z | معادله خط موازی محور y | معادله خط موازی محور x |
|---|---|---|
| $x=x_0, y=y_0$ | $x=x_0, z=z_0$ | $y=y_0, z=z_0$ |
| معادله خط موازی صفحه xoy | معادله خط موازی صفحه xoz | معادله خط موازی صفحه yoz |
| $\begin{cases} z=z_0 \\ \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q} \end{cases}$ | $\begin{cases} y=y_0 \\ \frac{x-x_0}{p}=\frac{z-z_0}{r} \end{cases}$ | $\begin{cases} x=x_0 \\ \frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r} \end{cases}$ |

که در آن $(x_0, y_0, z_0)$ مختصات یکی از نقاط خط مورد نظر است.

### تعیین معادله خطی که از دو نقطه معلوم می‌گذرد

معادله خطی که از دو نقطه $B(x_1, y_1, z_1)$ و $A(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد چنین نوشته می‌شود:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}}$$

توجه داریم $(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ توصیف کننده بردار $\vec{AB}$ است که البته با خط مورد نظر موازی می‌باشد.

### تعیین معادله خطی عمود بر یک صفحه گذرنده از نقطه ای معلوم

اگر $\vec{N}=(a,b,c)$ بردار نرمال صفحه‌ای معلوم باشد، برای نوشتن معادله خطی که بر این صفحه عمود بوده و از نقطه $(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد، کافی است توجه کنیم که بردار نرمال صفحه همان بردار هادی خط مورد نظر است و لذا، با دانستن بردار هادی و یک نقطه از خط می‌توان معادله خط مطلوب را نوشت.

### تعیین معادلهٔ خط گذرنده از نقطه ای معلوم که با دوصفحه معین موازی است

طبیعی است، اگر نرمال دو صفحه $P_1$ و $P_2$ به صورت $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ باشند، $\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ برداری عمود بر $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ را نشان می‌دهد که مبین بردار هادی خط موازی با دو صفحه $P_1, P_2$ می‌باشد و لذا، معادله خط مورد نظر با داشتن یک نقطه و بردار هادی آن قابل نوشتن است.

### تعیین معادله خطی عمود بر یک خط معین و گذرنده از نقطه‌ای معلوم در خارج از آن

فرض کنید، بخواهیم معادله خطی را که از نقطه معلوم B می‌گذرد و بر خط $\Delta$ عمود است، بنویسیم. برای این منظور نخست نقطه A را روی خط $\Delta$ در فرم پارامتری مشخص کرده و بردار $\overrightarrow{AB}$ را تعیین می‌کنیم، AB بر خط $\Delta$ عمود است؛ لذا، اگر $\vec{u}$ بردار هادی $\Delta$ فرض شود باید $\overrightarrow{AB}\perp\vec{\Delta}$ $(\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0)$ و بدین ترتیب A مشخص شده و معادله خط مورد نظر قابل نوشتن است.

### وضعیت یک خط و یک صفحه

خط $\Delta: \dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ و صفحه $P: ax+by+cz+d=0$ را در نظر بگیرید. طبیعی است $(p,q,r)$ بردار هادی خط $\Delta$ و $(a,b,c)$ بردار نرمال صفحه P است.

۱ـ اگر بردار هادی خط با بردار نرمال صفحه موازی باشد $\left(\dfrac{p}{a}=\dfrac{q}{b}=\dfrac{r}{c}\right)$، خط $\Delta$ بر صفحه P عمود است.

۲ـ اگر بردار هادی خط بر بردار نرمال صفحه عمود باشد $(ap+bq+cr=0)$، خط $\Delta$ با صفحه P موازی است.

۳ـ اگر خط $\Delta$ با صفحه P موازی نباشد، خط و صفحه متقاطعند؛ در این‌صورت، به دو بحث زیر توجه کنید:

الف) زاویه بین خط و صفحه $\frac{\pi}{2}-\theta$ خواهد بود که $\theta$ زاویه بین بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه می‌باشد.

ب) برای یافتن محل تقاطع، معادله خط را در فرم پارامتری نوشته و با قرار دادن آن در معادله صفحه، $t$ ای را که متناظر با نقطه تلاقی خط و صفحه می‌باشد به دست می‌آوریم.

**تذکر:** دقت داریم اگر معادله مذکور فاقد جواب باشد؛ یعنی، خط و صفحه با هم موازیند و اگر این معادله به ازای هر $t$ ای ارضاء شود؛ یعنی، خط مورد نظر داخل صفحه مورد بحث می‌باشد.

## وضعیت دو خط در فضا نسبت به همدیگر

دو خط در فضا نسبت به هم می‌توانند، سه حالت داشته باشند:

۱ـ متقاطع باشند: اگر دو خط متمایز متقاطع باشند، در یک نقطه اشتراک دارند؛ یعنی، نقطه ای وجود دارد که مختصات آن در معادله هر دو خط صادق است. (بدیهی است زاویه بین دو خط متقاطع همان زاویه بین بردارهای هادی آن دو خط می‌باشد).

۲ـ موازی باشند: اگر دو خط متمایز موازی باشند، در هیچ نقطه‌ای اشتراک ندارند و در این حالت بردارهای هادی دو خط با هم موازی است.

۳ـ متنافر باشند: دو خط را که در یک صفحه گنجانده نمی‌شوند، متنافر می‌گوییم، به عبارتی دیگر، اگر دو خط متمایز نه متقاطع باشند و نه موازی، متنافرند.

می‌توان نشان داد دو خط با معادلات:

$$\Delta: \frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1} \quad و \quad \Delta': \frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$$

متنافرند، اگر و فقط اگر، داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

به طور کلی، برای تعیین وضعیت دو خط کافی است اول بردارهای هادی آنها را با هم مقایسه کنیم. اگر با هم موازی نبودند، برای تشخیص آنکه دو خط متقاطعند یا متنافر، فرم پارامتری آنها را

نوشته و با مساوی قرار دادن نظیر به نظیر $x,y,z$ های آنها، دستگاه سه معادله و دو مجهول (که همان پارامترهای موجود در دو خط هستند) را حل می‌کنیم. اگر دستگاه سازگار بود، دو خط در یک نقطه متقاطعند و اگر دستگاه ناسازگار بود، دو خط متنافرند.

### بیان یک خط به صورت فصل مشترک دو صفحه متقاطع

خط $\Delta = \dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q} = \dfrac{z-z_0}{r}$ را در نظر بگیرید. بدیهی است بی نهایت جفت صفحه متقاطع را در فضا می‌توان مد نظر قرار داد که از فصل مشترک آنها خط مذکور ایجاد شود و البته یکی از این جفت صفحات عبارتند از:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q} \\ \dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{z-z_0}{r} \end{cases}$$

### فاصله یک نقطه از یک خط

فاصله نقطه معلوم P از خط $\Delta$ را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\frac{\left|\overrightarrow{PP_0} \times \vec{U}\right|}{|\vec{U}|}$$

که در آن $P_0$ نقطه ای دلخواه روی خط مورد نظر و U بردار هادی خط مذکور می‌باشد.

**تذکر:** برای تعیین فاصله نقطه P از خط $\Delta$، می‌توانیم معادله خط را در فرم پارامتری نوشته و با در نظر گرفتن یک نقطه دلخواه از خط؛ مانند، A به‌صورت پارامتری کاری کنیم که طول پاره خط AP حداقل شود (استفاده از مشتق) و یا کاری کنیم که بردار هادی خط بر بردار $\overrightarrow{AP}$ عمود شود. از اینجا t مورد نظر که مبین نقطه‌ای روی خط است که کمترین فاصله را تا نقطه P دارد مشخص می‌شود.

### تصویر یک نقطه روی یک خط و قرینه یک نقطه نسبت به آن

فرض کنید مختصات نقطه‌ای معلوم؛ مانند، P و معادله خطی؛ مانند، $\Delta$ در دست باشد. با نوشتن معادله خط در فرم پارامتری، مختصات پارامتری نقطه‌ای؛ مانند، H را در نظر می‌گیریم. اگر H همان تصویر

P بر خط $\Delta$ باشد؛ باید $\overrightarrow{PH}$ بر بردار هادی خط $\Delta$ عمود باشد. شرط عمود بودن $\overrightarrow{PH}$ بر بردار هادی خط $\Delta$، مختصات نقطه H را نشان می‌دهد. اگر $P'$ قرینه P نسبت به خط $\Delta$ باشد، باید H وسط $PP'$ قرار گیرد؛ یعنی:

$$x_H = \frac{x_P + x_{P'}}{2} \qquad y_H = \frac{y_P + y_{P'}}{2} \qquad z_H = \frac{z_P + z_{P'}}{2}$$

و از اینجا مختصات نقطه $P'$ قابل محاسبه است.

### تعیین عمود مشترک و فاصله دو خط متنافر

فرض کنید $\Delta'$ و $\Delta$ دو خط متنافر باشند، پاره خطی که بر هر دوی این خطوط عمود باشد عمود مشترک و طول آن فاصله این دو خط نامیده می‌شود.

اگر A و B دو نقطه دلخواه روی خطوط $\Delta'$ و $\Delta$ (با پارامترهای $t, t'$) باشند، ما دنبال $t'$ و $t$ ای هستیم که:

$$AB \perp \Delta \quad , \quad AB \perp \Delta'$$

از اینجا نقاط A و B مشخص می‌شوند و به سادگی می‌توان معادله خط AB (عمود مشترک) و طول پاره‌خط AB (فاصله دو خط) را به دست آورد.

### تعیین معادله خط فصل مشترک دو صفحه معلوم

اگر دو صفحه متقاطع $P_1$ و $P_2$ معلوم باشند، از ضرب خارجی نرمال‌های این دو صفحه برداری حاصل می‌شود که با هر دو صفحه مذکور موازی است و طبیعتاً بردار هادی خط فصل مشترک را نشان می‌دهد؛ لذا، اگر یک z دلخواه در معادله دو صفحه قرار دهیم و دستگاه حاصل را برای y و x حل کنیم، یکی از نقاط این خط نیز پیدا شده و می‌توانیم معادله آن را بنویسیم.

همچنین می‌توانیم یکی از متغیرها را در دو صفحه برابر t فرض کرده و معادلات دو صفحه را برحسب t حل نماییم تا بدین ترتیب معادله پارامتری فصل مشترک دو صفحه به دست آید.

## مجموعه تست بردار، صفحه و خط

**۱ـ طول تصویر بردار $\vec{U}=3i+2k$ در امتداد بردار $\vec{V}=3j-4k$ کدام است؟**

۱) $8$ ۲) $\frac{8}{5}$ ۳) $\frac{8}{\sqrt{13}}$ ۴) $5\sqrt{13}$

**حل :**

می‌دانیم، طول تصویر بردار $\vec{U}$ روی امتداد بردار $\vec{V}$ از رابطه $L=\left|\vec{U}\cdot\vec{\lambda}_{\vec{V}}\right|$ به دست می‌آید؛ لذا، در این مثال داریم:

$$\vec{\lambda}_{\vec{V}}=\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}=\frac{3j-4k}{\sqrt{9+16}}=\frac{3j-4k}{5}$$

$$\vec{U}.\vec{\lambda}_{\vec{V}}=(3i+2k).\left(\frac{3j-4k}{5}\right)=\frac{(3)(0)+(0)(3)+(2)(-4)}{5}=\frac{-8}{5}$$

بنابراین:

$$L=\frac{8}{5}$$

**۲ـ مقدار k چقدر باشد که چهار نقطه زیر در یک صفحه واقع شوند؟**

$A=(1,2,-1)\ ,\ B=(3,2,1)\ ,\ C=(0,1,-1)\ ,\ D=(4,k,3)$

۱) $k=1$ ۲) $k=0$ ۳) غیر ممکن ۴) $k=-1$

**حل :**

$$\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}2\\0\\2\end{vmatrix}\quad,\quad\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-1\\-1\\0\end{vmatrix}\quad,\quad\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3\\k-2\\4\end{vmatrix}$$

بدیهی است، شرط هم صفحه بودن چهار نقطه مورد نظر آن است که روی سه بردار فوق متوازی السطوحی قابل ساختن نباشد و این می‌طلبد که:

$$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=0\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}2&0&2\\-1&-1&0\\3&k-2&4\end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow\ 2(-4-0)+2(-k+2+3)=0\ \rightarrow\ -8-2k+10=0\ \rightarrow\ k=1$$

**۳ـ اگر $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=7$ باشد؛ به ازای کدام مقدار m دو بردار $\vec{V}=\vec{a}-2m\vec{b}$ و $\vec{U}=\vec{a}+m\vec{b}$ بر هم عمود می‌شوند؟ (زاویه بین دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ فرض شده است).**

۱) $m\simeq 0.36\ ,\ m\simeq 0.25$ ۲) $m\simeq 0.36\ ,\ m\simeq -0.25$

۳) $m\simeq -0.36\ ,\ m\simeq -0.25$ ۴) $m\simeq -0.36\ ,\ m\simeq 0.25$

**حل :**

شرط تعامد دو بردار، صفر شدن ضرب داخلی آنها می‌باشد؛ پس، باید:

$$\vec{U}.\vec{V}=0 \;\rightarrow\; \left(\vec{a}+m\vec{b}\right).\left(\vec{a}-2m\vec{b}\right)=0 \;\rightarrow\; \vec{a}.\vec{a}-2m\vec{a}.\vec{b}+m\vec{b}.\vec{a}-2m^2\vec{b}.\vec{b}=0$$

$$\rightarrow\; \left|\vec{a}\right|^2-m\vec{a}.\vec{b}-2m^2\left|\vec{b}\right|^2=0 \;\rightarrow\; \left|\vec{a}\right|^2-m\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)-2m^2\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$$\rightarrow\; 9-m(3)(7)\left(\frac{1}{2}\right)-2m^2(49)=0 \;\rightarrow\; -98m^2-\frac{21}{2}m+9=0$$

$$\rightarrow\; m\simeq-0.36\ ,\ 0.25$$

**۴ـ اگر $\vec{V_2}$ و $\vec{V_1}$ بر هم عمود بوده و $\vec{V_1}\times\vec{V_2}=(-6,3,1)$ و $\vec{V_1}=(1,1,3)$ مؤلفه اول $\vec{V}_2$ کدام است؟**

۱) $\frac{8}{11}$ ۲) $\frac{7}{11}$ ۳) $\frac{6}{11}$ ۴) $\frac{5}{11}$

**حل :**

اگر فرض کنیم $\vec{V_2}=(a,b,c)$، داریم:

$$\vec{V_1}\times\vec{V_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 3\\ a & b & c\end{vmatrix}=i(c-3b)-j(c-3a)+k(b-a)$$

و چون $\vec{V_1}\times\vec{V_2}=(-6\ ,\ 3\ ,\ 1)$ فرض شده، باید:

$$i\,(c-3b)-j(c-3a)+k(b-a)\equiv(-6\ ,\ 3\ ,\ 1) \;\Rightarrow\; \begin{cases} c-3b=-6\\ 3a-c=3\\ b-a=1\end{cases}$$

از طرفی چون $\vec{V_2}$ و $\vec{V_1}$ عمود بر هم فرض شده‌اند؛ باید: $\vec{V_1}.\vec{V_2}=0 \;\rightarrow\; a+b+3c=0$

از حل دستگاه شامل معادلات فوق به دست می‌آید:

$$a=\frac{8}{11}\ \text{و}\ b=\frac{19}{11}\ \text{و}\ c=-\frac{9}{11}$$

**۵ـ فصل مشترک دو صفحه $\begin{cases} P\ :x+y+2z+2=0\\ P'\ :-x+2y+z+1=0\end{cases}$ صفحه xoz را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟**

۱) $(0,0,1)$ ۲) $(-1,0,1)$ ۳) $(0,0,-1)$ ۴) $(1,0,-1)$

**حل :**

دو نقطه دلخواه از خط مورد نظر را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$z=0 \rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ -x+2y+1=0 \end{cases} \rightarrow y=-1 \ , \ x=-1$$

$$z=1 \rightarrow \begin{cases} x+y+4=0 \\ -x+2y+2=0 \end{cases} \rightarrow y=-2 \ , \ x=-2$$

یعنی، خط مذکور از دو نقطه $(0,-1,-1)$ , $(1,-2,-2)$ می‌گذرد و معادله آن چنین است:

$$\frac{x+1}{-1+2}=\frac{y+1}{-1+2}=\frac{z-0}{0-1} \rightarrow \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$$

جایی که این خط صفحه xoz را قطع می‌کند، داریم $y=0$ و لذا:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{0+1}{1}=\frac{z}{-1} \rightarrow x=0 \ , \ z=-1$$

یعنی، نقطه مورد بحث $(0,0,-1)$ است.

**۶ـ وضعیت سه صفحه** $\begin{cases} 2x-y-z+2=0 \\ 7x+4y+7z+1=0 \\ x+2y+3z-1=0 \end{cases}$ **نسبت به هم چگونه است؟**

۱) در یک نقطه متقاطعند.　　۲) دست‌کم دوتایشان باهم موازی است.

۳) در یک خط مشترکند.　　۴) هیچ‌کدام

**حل :**

طبیعی است از سه صفحه مذکور هیچ‌کدام با دیگری موازی نیست؛ زیرا، نرمال‌های هیچ دوتایی از آنها با هم موازی نیستد؛ اما، اگر به دستگاه حاصل از تقاطع سه صفحه مذکور توجه کنیم، داریم:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2(12-14)+1(21-7)-1(14-4)=0$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-2(12-14)+1(-3-7)-1(-2-4)=0$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 7 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=2(-3-7)+2(21-7)-1(7+1)=0$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&-1&-2\\7&4&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=2(4+2)+1(7+1)-2(14-4)=0$$

لذا، طبق روش کرامر دستگاه بی‌شمار جواب داشته و به تعبیری سه صفحه مورد نظر از یک خط می‌گذرند.

**۷ ـ شعاع کره‌ای که صفحات** $3x+y+z=1\,,\ x+y+3y=15$ **بر آن مماس بوده و مرکز آن روی خط** $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3}$ **می‌باشد، کدام است؟**

۱) $\frac{5.5}{\sqrt{11}}\,,\ \frac{66}{\sqrt{11}}$ (دوجواب)
۲) $\frac{1}{\sqrt{11}}\,,\ \frac{17}{\sqrt{11}}$ (دوجواب)
۳) $\frac{5}{\sqrt{11}}$
۴) $\frac{33}{\sqrt{11}}$

**حل :**

چون مرکز کره روی خط $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3}$ است؛ مختصات آن، به فرم کلی زیر است:

$$O\begin{cases}x=2t+2\\y=2t+2\\z=3t+4\end{cases}$$

و چون دو صفحه داده شده بر کره مورد نظر مماسند، فاصله نقطه O تا این دو صفحه باید برابر باشد (که البته این فاصله همان شعاع کره مورد بحث است)؛ پس، باید داشته باشیم:

$$\frac{|3(2t+2)+(2t+2)+(3t+4)-1|}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{|(2t+2)+(2t+2)+3(3t+4)-15|}{\sqrt{1+1+9}}$$

$$\Rightarrow\ |11t+11|=|13t+1|\ \Rightarrow\ \begin{cases}11t+11=13t+1\ \rightarrow\ 2t=10\ \rightarrow\ t=5\\11t+11=-(13t+1)\ \rightarrow\ 24t=-12\ \rightarrow\ t=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

یعنی، مساله دو جواب دارد و داریم:

$$r_1=\frac{|11(5)+11|}{\sqrt{11}}=\frac{66}{\sqrt{11}}\quad,\quad r_2=\frac{\left|11\left(\frac{-1}{2}\right)+11\right|}{\sqrt{11}}=\frac{5.5}{\sqrt{11}}$$

**۸ ـ دو خط** $x=y-1=\frac{z-2}{2}\,,\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{5}=1-z$:

۱) متنافرند.
۲) موازیند.
۳) متقاطعند.
۴) متعامدند.

**حل :**

$$x = y-1 = \frac{z-2}{2} = m \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = m \\ y = m+1 \\ z = 2m+2 \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5} = 1-z = n \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 2n-1 \\ y = 5n+2 \\ z = 1-n \end{cases}$$

بدیهی است دو خط مذکور موازی نمی‌باشند؛ زیرا، بردارهای هادی آنها؛ یعنی، $(1,1,2)$ و $(2,5,-1)$ با هم موازی نیستند.

اگر دو خط مورد نظر متقاطع باشند باید دستگاه زیر جواب داشته باشد (سازگار باشد).

$$\begin{cases} m = 2n-1 \\ m+1 = 5n+2 \\ 2m+2 = 1-n \end{cases}$$

از دو معادله اول دستگاه فوق به دست می‌آید:

$$m = \frac{-7}{3}\ ,\ n = \frac{-2}{3}$$

اما، به سادگی ملاحظه می‌شود این مقادیر معادله سوم را ارضاء نمی‌کنند؛ لذا، دو خط مورد نظر متقاطع نیز نبوده و در نتیجه متنافرند.

**۹ـ طول عمود مشترک دو خط** $\begin{cases} D: x = y+1 = z-1 \\ D': x = 2y = z-1 \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) هیچ‌کدام

**حل :**

نقاط $A \begin{cases} t \\ t-1 \\ t+1 \end{cases}$ روی خط D و $B \begin{cases} m \\ \frac{m}{2} \\ m+1 \end{cases}$ روی خط 'D را در نظر گرفته و داریم:

$$\overrightarrow{AB} = (m-t)i + \left(\frac{m}{2} - t + 1\right)j + (m-t)k$$

شرط عمود بودن $\overrightarrow{AB}$ بر خطوط D و 'D می‌طلبد: (دقت داریم اگر $\overrightarrow{AB}$ بر هر دو خط عمود باشد در حقیقت AB عمود مشترک دو خط است).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_D}=0 \rightarrow (m-t)(1)+\left(\frac{m}{2}-t+1\right)(1)+(m-t)(1)=0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{D'}}=0 \rightarrow (m-t)(1)+\left(\frac{m}{2}-t+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)+(m-t)(1)=0$$

$$\begin{cases}\frac{5m}{2}-3t=-1\\ \frac{9m}{4}-\frac{5t}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases} \rightarrow m=2\ ,\ t=2$$

لذا، داریم:

$$\text{طول عمود مشترک}=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(2-2)^2+\left(\frac{2}{2}-2+1\right)^2+(2-2)^2}=0$$

یعنی در حقیقت دو خط مذکور متقاطعند.

دقت کنید ما از ابتدا نیز می‌توانستیم متقاطع بودن دو خط را مشخص کنیم؛ اما، چون دنبال طول عمود مشترک بودیم با چنین روالی به حل پرداختیم. (و البته وقتی دو خط همدیگر را قطع کنند، صفر بودن طول عمود مشترک دیده می‌شود).

**۱۰ ـ معادله صفحه گذرنده از فصل مشترک دو صفحه** $\begin{cases}P_1: x+2y-z=3\\ P_2: 2x-y+z=1\end{cases}$ **گذرنده از نقطه** $A(4, 2, 1)$ **کدام است؟**

۱) $x+3y+z=11$

۲) $x-2y+3z-3=0$

۳) $x-8y+5z+7=0$

۴) $3x-5y+z-3=0$

**حل :**

معادله کلیه صفحات گذرنده از دو صفحه $P_2$ و $P_1$ چنین است:

$$(x+2y-z-3)+k(2x-y+z-1)=0 \Rightarrow (1+2k)x+(2-k)y+(k-1)z-3-k=0$$

شرط گذشتن این صفحه از نقطه $A(4, 2, 1)$ می‌طلبد که:

$$(1+2k)(4)+(2-k)(2)+(k-1)(1)-3-k=0 \rightarrow k=-\frac{2}{3}$$

پس، معادله صفحه مورد نظر چنین است:

$$\left(1+2\left(-\frac{2}{3}\right)\right)x+\left(2-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)y+\left(\left(-\frac{2}{3}-1\right)\right)z-3-\left(-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow x-8y+5z+7=0$$

**۱۱ ـ بردار هادی خط گذرنده از نقطه $A(1,2,2)$ که بر خط $\Delta: x=y-1=\frac{z}{3}$ عمود و با صفحه $P: 2x-y+z-1=0$ موازی است، کدام می‌باشد؟**

۱) $(-4,-5,3)$ ۲) $(-4,7,3)$ ۳) $(4,5,3)$ ۴) $(-4,-7,3)$

**حل :**

ملاحظه می‌شود

$\vec{N}=(2,-1,1)$: بردار نرمال صفحه P و $\vec{u}=(1,1,3)$: بردارهادی خط $\Delta$

اگر بردار هادی خط مورد نظر را $\vec{T}(\alpha,\beta,\gamma)$ بنامیم؛

- شرط عمود بودن خط مذکور بر خط $\Delta$ می‌طلبد:

$$\vec{u}\perp\vec{T} \Rightarrow (1)(\alpha)+(1)(\beta)+(3)(\gamma)=0 \Rightarrow \alpha+\beta+3\gamma=0$$

- شرط موازی بودن خط مذکور با صفحه P می‌طلبد:

$$\vec{N}\perp\vec{T} \Rightarrow (2)(\alpha)+(-1)(\beta)+(1)(\gamma)=0 \Rightarrow 2\alpha-\beta+\gamma=0$$

از حل دو معادله فوق به دست می‌آید:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0\\ 2\alpha-\beta+\gamma=0\end{cases} \rightarrow 3\alpha+4\gamma=0 \rightarrow \alpha=-\frac{4\gamma}{3}\ ,\ \beta=-\frac{5\gamma}{3}$$

پس بردار هادی خط مورد بحث چنین است:

$$\left(-\frac{4\gamma}{3},-\frac{5\gamma}{3},\gamma\right)=\gamma(-4,-5,3)$$

**راه دوم:** بردار مذکور باید هم بر بردار نرمال صفحه و هم بر بردار هادی خط $\Delta$ عمود باشد؛ پس، مختصات این بردار مطلوب $(\vec{T})$ از ضرب خارجی $\vec{u}$، $\vec{N}$ حاصل می‌شود:

$$\vec{T}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=4i+5j-3k$$

پس گزینهٔ اول صحیح است.

**۱۲ ـ فاصله نقطه $A(1,2,2)$ از خط $\Delta: x+1=\frac{y}{2}=z$ کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ۴) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

**حل :**

خط $\Delta$ در فرم پارامتری $\left|\begin{array}{l} x=t-1\\ y=2t\\ z=t\end{array}\right.$ بوده و فاصله هر نقطه از آن تا $A\left|\begin{array}{l}1\\2\\2\end{array}\right.$ چنین است:

$$d=\sqrt{(t-1-1)^2+(2t-2)^2+(t-2)^2}=\sqrt{6t^2-16t+12}$$

برای min بودن d باید داشته باشیم:

$$d'(t)=0 \Rightarrow \frac{12t-16}{2\sqrt{6t^2-16t+12}}=0 \Rightarrow t=\frac{4}{3}$$

و لذا:

$$d_{min}=\sqrt{6\left(\frac{4}{3}\right)^2-16\left(\frac{4}{3}\right)+12}=\frac{\sqrt{12}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**راه دوم:**

یک نقطه دلخواه از خط $\Delta$ در فرم پارامتری $H\begin{vmatrix}x=t-1\\y=2t\\z=t\end{vmatrix}$ بوده و داریم $\overrightarrow{AH}\begin{vmatrix}t-2\\2t-2\\t-2\end{vmatrix}$ حال برای اینکه $|\overrightarrow{AH}|$ حداقل باشد، باید $\overrightarrow{AH}$ بر خط $\Delta$ عمود گردد و این می‌طلبد $\overrightarrow{AH}$ بر بردار هادی خط؛ یعنی، $(1,2,1)$ عمود شود؛ یعنی:

$$(t-2)(1)+(2t-2)(2)+(t-2)(1)=0 \rightarrow 6t-8=0 \Rightarrow t=\frac{4}{3}$$

و لذا فاصله نقطه A تا خط $\Delta$ عبارت است از:

$$|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-2\right)^2+\left(\frac{8}{3}-2\right)^2+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{12}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

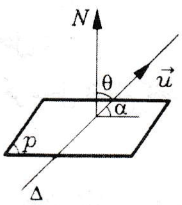
**تذکر:** برای حل این سؤال می‌توانید از رابطه گفته شده در درس نیز استفاده نمایید.

**۱۳ ـ زاویه خط** $\Delta:\frac{x-1}{2}=y+1=z-1$ **و صفحه** $P:x+2y-z-3=0$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

**حل :**

مشاهده می‌شود:




$\vec{N}=(1,2,-1)$ : بردار نرمال صفحه p

$\vec{u}=(2,1,1)$: بردار هادی خط $\Delta$

از آنجا که:

$\theta$: زاویه بین $\vec{u}$ و $\vec{N}$ $\alpha$: زاویه بین خط $\Delta$ و صفحه p $\rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$

داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{N}.\vec{u}}{|\vec{N}||\vec{u}|}=\frac{(1)(2)+(2)(1)+(-1)(1)}{\sqrt{1+4+1}\ \sqrt{4+1+1}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

**تذکر:** در واقع می‌توانیم مستقیماً از رابطه زیر استفاده نماییم:

$$\sin\alpha=\frac{\vec{N}\cdot\vec{u}}{|\vec{N}||\vec{u}|}$$

**۱۴ - ارتفاع نقطه محل تقاطع خط $\Delta:\frac{x-1}{2}=y+1=z-1$ و صفحه $x+2y-z-3=0$ کدام است؟**

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$

**حل :**

$$\begin{cases}x=2t+1\\y=t-1\\z=t+1\end{cases}$$: معادله خط $\Delta$ درفرم پارامتری

ما دنبال نقطه‌ای از خط $\Delta$ هستیم که مختصات آن در صفحه $p$ صدق می‌کند؛ لذا، می‌نویسیم:

$$(2t+1)+2(t-1)-(t+1)-3=0\ \Rightarrow\ t=\frac{5}{3}$$

یعنی، مختصات نقطه تقاطع چنین است:

$$x=2\left(\frac{5}{3}\right)+1=\frac{13}{3}\ ,\quad y=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}\ ,\quad z=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$$

**۱۵ - از نقطه $A(1,2,3)$ خطی بر صفحه $x+2y-z=6$ عمود کرده‌ایم و مختصات پای قائم را $(\alpha,\beta,\gamma)$ نامیده‌ایم، $\alpha$ کدام است؟**

۱) $\alpha=-\frac{5}{3}$ ۲) $\alpha=\frac{2}{3}$ ۳) $\alpha=-\frac{2}{3}$ ۴) $\alpha=\frac{5}{3}$

**حل :**

اگر محل تقاطع خط عمود و صفحه را نقطه $B$ بنامیم، داریم:

$$\overrightarrow{AB}=(1-\alpha)i+(2-\beta)j+(3-\gamma)k$$

و چون $\overrightarrow{AB}$ بر صفحه $x+2y-z=6$ عمود است، $\overrightarrow{AB}$ باید موازی بردار نرمال صفحه؛ یعنی، $(1,2,-1)$ شود و این می‌طلبد:

$$\frac{1-\alpha}{1}=\frac{2-\beta}{2}=\frac{3-\gamma}{-1}=t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1-\alpha=t \rightarrow \alpha=1-t \\ 2-\beta=2t \rightarrow \beta=2-2t \\ 3-\gamma=-t \rightarrow \gamma=3+t \end{cases}$$

و البته چون $(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطه‌ای از صفحه $x+2y-z=6$ است، باید مختصات آن در معادله صفحه صدق کند:

$$(1-t)+2(2-2t)-(3+t)=6 \quad \rightarrow \quad -6t=4 \quad \rightarrow \quad t=-\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha=1-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

یادداشت: