۱- معادله مدل زیر داده شده است. با استفاده از روش دوفورت-فرانکل برای این معادله دیفرانسیل پاره‌ای، تحلیل پایداری ون-نیومن را برای آن انجام دهید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حل:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha\frac{u_{i+1}^n - 2\frac{u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{2} + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\left[1 + \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right]u_i^{n+1} = \left[1 - \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right]u_i^{n-1} + \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}[u_{i+1}^n + u_{i-1}^n]$$

بر حسب عدد انتشار خواهیم داشت:

$$[1 + 2d]u_i^{n+1} = [1 - 2d]u_i^{n-1} + 2d[u_{i+1}^n + u_{i-1}^n]$$

$$[1 + 2d]U^{n+1}e^{I\theta i} = [1 - 2d]U^{n-1}e^{I\theta i} + 2d[U^n e^{I\theta(i+1)} + U^n e^{I\theta(i-1)}]$$

$$[1 + 2d]U^{n+1} = [1 - 2d]U^{n-1} + 2d[U^n e^{I\theta} + U^n e^{-I\theta}]$$

$$[1 + 2d]\frac{U^{n+1}}{U^n} = [1 - 2d]\frac{U^{n-1}}{U^n} + 4d\cos\theta \ \rightarrow [1 + 2d]G^2 - 4dG\cos\theta - 1 + 2d = 0$$

$$G = \frac{2d\cos\theta \pm \sqrt{4d^2\cos^2\theta + 1 - 4d^2}}{1 + 2d} = \frac{2d\cos\theta \pm \sqrt{1 - 4d^2\sin^2\theta}}{2d + 1}$$

مقدار $2d\cos\theta$ همواره از $2d$ کوچکتر است و همچنین مقدار $\sqrt{1 - 4d^2\sin^2\theta}$ همواره از یک کوچکتر است پس صورت این عبارت همواره از مخرج آن کوچکتر و ضریب تقویت از یک کوچکتر بوده و بنابراین عبارت پایدار خواهد بود.

۲- معادله مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x}$$

یک روش عددی با فرمولبندی زیر برای این معادله دیفرانسیل پیشنهاد شده است.

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = u_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_i^n + u_i^{n+\frac{1}{2}}\right) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}})$$

با استفاده از تحلیل پایداری ون-نیومن، شرایط پایداری این روش را به دست آورید.

راهنمایی: با جایگزین کردن گام زمانی $(n+\frac{1}{2})$ از معادله اول در معادله دوم، این گام را حذف کنید. معادله حاصل دارای گام‌های n و $n+1$ خواهد بود. حال از تحلیل پایداری ون- نیومن استفاده کنید.

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = u_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \rightarrow u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i-1}^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(2u_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n)\right) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) - u_{i-1}^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n))$$

$$\rightarrow u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(2u_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n)\right) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n))$$

$$U^{n+1}e^{I\theta i} = \frac{1}{2}\left(2U^n e^{I\theta i} + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(U^n e^{I\theta(i+1)} - U^n e^{I\theta i})\right) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(U^n e^{I\theta i} - U^n e^{I\theta(i-1)} + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(U^n e^{I\theta(i+1)} - U^n e^{I\theta(i-1)}))$$

$$\rightarrow U^{n+1} = \frac{1}{2}\left(2U^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(U^n e^{I\theta} - U^n)\right) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(U^n - U^n e^{-I\theta} + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(U^n e^{I\theta} - U^n e^{-I\theta}))$$

$$\rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^n} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(e^{I\theta} - 1)\right) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(1 - e^{-I\theta} + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(e^{I\theta} - e^{-I\theta}))$$

$$\rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^n} = \left(1 + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(e^{I\theta} - 1)\right) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(1 - e^{-I\theta} + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(e^{I\theta} - e^{-I\theta}))$$

$$\rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^n} = \left(1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(I\sin\theta + \frac{a\Delta t}{\Delta x}(I\sin\theta)\right)\right)$$

مقدار ضریب تقویت برابر جذر مجموع توان دوم قسمن حقیقی به علاوه قسمت موهومی می‌باشد که چون قسمت حقیقی آن همواره یک است، همواره بزرگتر از یک است و این عبارت ناپایدار خواهد بود.

۳- با استفاده از تحلیل پایداری ون – نیومن، شرط پایداری معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر را به دست آورید.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\ , \quad a > 0$$

به ازای اعداد کورانت ۰.۵ ، ۰.۷۵ ، ۱ و ۱.۱ ضریب تقویت را رسم کنید.

حل:

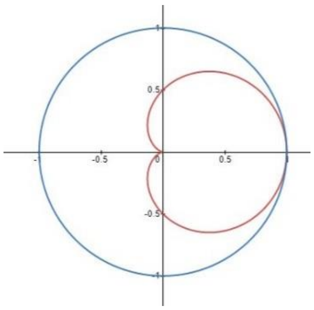
$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = \left(1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_i^n + a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{i-1}^n$$

$$U^{n+1}e^{I\theta i} = \left(1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)U^n e^{I\theta i} + a\frac{\Delta t}{\Delta x}U^n e^{I\theta(i-1)}$$

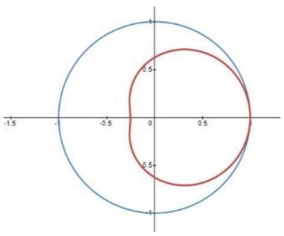
$$\frac{U^{n+1}}{U^n} = \left(1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + a\frac{\Delta t}{\Delta x}e^{-I\theta} = 1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}(\cos\theta - i\sin\theta - 1)$$

$$a\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.5\ \rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^{n}}=1+0.5(\cos\theta-i\sin\theta-1)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta-i\sin\theta)\rightarrow\left|\frac{U^{n+1}}{U^{n}}\right|^{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$$



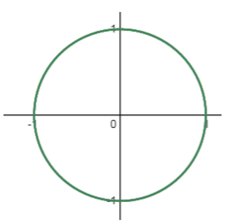
همواره پایدار

$$a\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.75\ \rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^{n}}=1+0.75(\cos\theta-i\sin\theta-1)=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{3}{4}i\sin\theta\right)\rightarrow\left|\frac{U^{n+1}}{U^{n}}\right|^{2}$$
$$=\frac{10}{16}+\frac{3}{8}\cos\theta$$

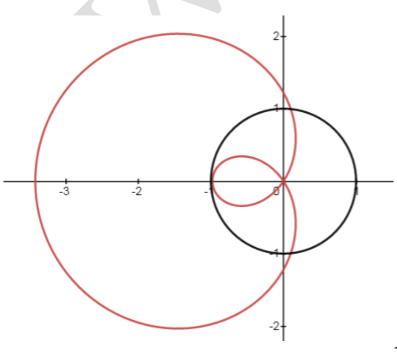


همواره پایدار

$$a\frac{\Delta t}{\Delta x}=1\ \rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^{n}}=1+1(\cos\theta-i\sin\theta-1)=\cos\theta-i\sin\theta\rightarrow\left|\frac{U^{n+1}}{U^{n}}\right|=1$$



$$a\frac{\Delta t}{\Delta x}=1.1\ \rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^{n}}=1+1.1(\cos\theta-i\sin\theta-1)=-0.1+1.1\cos\theta-1.1i\sin\theta\rightarrow\left|\frac{U^{n+1}}{U^{n}}\right|^{2}$$
$$=1.22-2.2\cos\theta$$



در غالب شرایط ناپایدار

۴- معادله مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

با تعریف $K=\frac{\nu}{a}$

الف- با استفاده از تعریف تفاضل پیشروی مرتبه اول در جهت x و تفاضل مرکزی مرتبه دوم در جهت y، فرمولبندی صریحی بنویسید.

ب- از تحلیل پایداری ون-نیومن، شرایط پایداری این روش را به دست آورید.

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\rightarrow\frac{U_{i+1,j}-U_{i,j}}{\Delta x}=k\frac{U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$U_{i+1,j}-U_{i,j}=k\frac{\Delta x}{\Delta y^2}\left(U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}\right)=d\left(U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}\right)$$

$$U_{i+1,j}=(1-2d)U_{i,j}+d\left(U_{i,j+1}+U_{i,j-1}\right)$$

$$u_{i,j}=U^ie^{I\theta j}\rightarrow U^{i+1}e^{I\theta j}=(1-2d)U^ie^{I\theta j}+d\left(U^ie^{I\theta(j+1)}+U^ie^{I\theta(j-1)}\right)$$

$$\frac{U^{i+1}}{U^i}=(1-2d)+d\left(e^{I\theta}+e^{-I\theta}\right)=(1-2d)+2d(\cos\theta)=1+2d(\cos\theta-1)=1-4d\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$1-4d\le 1-4d\sin^2\frac{\theta}{2}\le 1\rightarrow 1-4d\ge -1\rightarrow d\le 0.5$$

۵- معادله هدایت حرارتی غیردائم سه بعدی را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

الف- با استفاده از تفاضل پیشرو برای زمان و تفاضل مرکزی مرتبه دو $O[\Delta t,(\Delta x)^2,(\Delta y)^2,(\Delta z)^2]$ ، یک معادله تفاضل محدود صریح به دست آورید.

ب- تحلیل پایداری ون-نیومن را در این معادله تفاضل محدود به کار ببرید.

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1}-u_{i,j,k}^n}{\Delta t}=\alpha\left[\frac{u_{i+1,j,k}^n-2u_{i,j,k}^n+u_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i,j+1,k}^n-2u_{i,j,k}^n+u_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2}+\frac{u_{i,j,k+1}^n-2u_{i,j,k}^n+u_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2}\right]$$

$$d_x=\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}\,,\qquad d_y=\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2}\,,\quad d_z=\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta z)^2}$$

$$u_{i,j,k}^{n+1}=u_{i,j,k}^n+d_x\left(u_{i+1,j,k}^n-2u_{i,j,k}^n+u_{i-1,j,k}^n\right)+d_y\left(u_{i,j+1,k}^n-2u_{i,j,k}^n+u_{i,j-1,k}^n\right)+d_z\left(u_{i,j,k+1}^n-2u_{i,j,k}^n+u_{i,j,k-1}^n\right)$$

$u_{i,j,k}^n = U^n e^{IP(\Delta x)i} e^{IQ(\Delta y)j} e^{IR(\Delta z)k}\,,\ \ \theta = P\Delta x\,,\ \ \emptyset = Q\Delta y\,,\ \ \varphi = R\Delta z$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} u_{i,j,k}^n = U^n e^{I(\theta i+\emptyset j+\varphi k)} \\ u_{i\pm1,j,k}^n = U^n e^{I(\theta(i\pm1)+\emptyset j+\varphi k)} \\ u_{i,j\pm1,k}^n = U^n e^{I(\theta i+\emptyset(j\pm1)+\varphi k)} \\ u_{i,j,k\pm1}^n = U^n e^{I(\theta i+\emptyset j+\varphi(k\pm1))} \end{Bmatrix}$$

$$U^{n+1} e^{I(\theta i+\emptyset j+\varphi k)} = U^n e^{I(\theta i+\emptyset j+\varphi k)} + d_x\left(U^n e^{I(\theta(i+1)+\emptyset j+\varphi k)} - 2U^n e^{I(\theta i+\emptyset j+\varphi k)} + U^n e^{I(\theta(i-1)+\emptyset j+\varphi k)}\right) + d_y\left(U^n e^{I(\theta i+\emptyset(j+1)+\varphi k)} - 2U^n e^{I(\theta i+\emptyset j+\varphi k)} + U^n e^{I(\theta i+\emptyset(j-1)+\varphi k)}\right) + d_z\left(U^n e^{I(\theta i+\emptyset j+\varphi(k+1))} - 2U^n e^{I(\theta i+\emptyset j+\varphi k)} + U^n e^{I(\theta i+\emptyset j+\varphi(k-1))}\right)$$

$U^{n+1} = U^n[1 + d_x\left(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}\right) + d_y\left(e^{i\emptyset} - 2 + e^{-i\emptyset}\right) + d_z(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi})$

$U^{n+1} = U^n[1 + 2d_x(\cos\theta - 1) + 2d_y(\cos\emptyset - 1) + 2d_z(\cos\varphi - 1)]$

$G = 1 + 2d_x(\cos\theta - 1) + 2d_y(\cos\emptyset - 1) + 2d_z(\cos\varphi - 1)$

$|G| \le 1 \rightarrow \left|1 + 2d_x(\cos\theta - 1) + 2d_y(\cos\emptyset - 1) + 2d_z(\cos\varphi - 1)\right| \le 1$

$\rightarrow 2d_x(\cos\theta - 1) + 2d_y(\cos\emptyset - 1) + 2d_z(\cos\varphi - 1) \le 0$ همواره برقرار

$\rightarrow 2d_x(\cos\theta - 1) + 2d_y(\cos\emptyset - 1) + 2d_z(\cos\varphi - 1) \ge -2 \ \rightarrow d_x(1 - \cos\theta) + d_y(1 - \cos\emptyset) + d_z(1 - \cos\varphi) \le 1$

$\max(1 - \cos\alpha) = 2 \ \rightarrow d_x + d_y + d_z \le 0.5$

۶- معادله مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

الف- با استفاده از تفاضل پیشروی مرتبه اول برای زمان و تفاضل پس‌روی مرتبه اول برای مکان در عبارت جا به جایی و تفاضل مرکزی مرتبه دوم برای عبارت انتشار، فرمول‌بندی ضمنی معادله فوق را به دست آورید.

ب- ضریب تقویت G را به دست آورید.

حل:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = \alpha\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) + \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$\rightarrow U^{n+1}e^{I\theta i} = U^n e^{I\theta i} - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U^n e^{I\theta i} - U^n e^{I\theta(i-1)}\right) + \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(U^n e^{I\theta(i+1)} - 2U^n e^{I\theta i} + U^n e^{I\theta(i-1)})$$

$$\rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^n} = G = 1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1 - e^{-I\theta}\right) + \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(2\cos\theta - 2) = 1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(1 - \cos\theta + i\sin\theta) - \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(4\sin^2\frac{\theta}{2})$$

۷- معادله موج را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,\qquad a > 0$$

الف- فرمولبندی تفاضل محدود صریحی را بنویسید که از تقریب تفاضل پیشروی مرتبه اول برای زمان و تفاضل مرکزی مرتبه دوم برای مکان استفاده کند.

ب- شرایط پایداری روش را به دست آورید.

حل:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+a\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}=0$$

$$\rightarrow u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n)$$

$$\rightarrow U^{n+1}e^{I\theta i}=U^n e^{I\theta i}-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(U^n e^{I\theta(i+1)}-U^n e^{I\theta(i-1)})$$

$$\rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^n}=1-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(e^{I\theta}-e^{I\theta}\right)=1-\frac{a\Delta t}{\Delta x}(i\sin\theta)$$

اندازه عدد مختلط به دست آمده همواره از یک بیشتر بوده پس این روش همواره ناپایدار است.

۸- معادله انتشار زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

الف- فرمولبندی ضمنی کرانک-نیکولسون را به دست آورید.

ب- با استفاده از تحلیل پایداری ون نیومن، شرایط پایداری را بررسی کنید.

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}+\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right)$$

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}((u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n)+(u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}))$$

$$\rightarrow U^{n+1}e^{I\theta i}=U^n e^{I\theta i}+\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}((U^n e^{I\theta(i+1)}-2U^n e^{I\theta i}+U^n e^{I\theta(i-1)})+(U^{n+1}e^{I\theta(i+1)}-2U^{n+1}e^{I\theta i}+U^{n+1}e^{I\theta(i-1)}))$$

$$\rightarrow \frac{U^{n+1}}{U^n}=1+\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}((e^{I\theta}-2+e^{-I\theta})+(\frac{U^{n+1}}{U^n}e^{I\theta}-2\frac{U^{n+1}}{U^n}+\frac{U^{n+1}}{U^n}e^{-I\theta}))$$

$$\rightarrow \left(1-\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(cos\theta-1)\right)\frac{U^{n+1}}{U^n}=1+\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(cos\theta-1)\rightarrow G=\frac{1+\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(cos\theta-1)}{1-\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(cos\theta-1)}$$

مقدار $cos\theta-1$ همواره منفی یا صفر می‌باشد پس ثورت عبارت فوق همواره از مخرج آن کوچکتر یا مساوی آن بوده و این روش پایدار است.

۹- نشان دهید که با استفاده از روش صریح $FTCS$ برای معادله زیر

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\alpha\frac{\partial u}{\partial x}$$

لزجت مصنوعی $\alpha_e=-\frac{a^2\Delta t}{2}$ را ایجاد می‌کند.

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+a\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(\frac{\Delta t^2}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\cdots$$

$$\rightarrow u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t+\left(\frac{(\Delta t)^2)}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(\frac{(\Delta t)^3)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\Delta t)^4$$

$$u_{i+1}^n=u_i^n+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\left(\frac{(\Delta x)^2)}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{(\Delta x)^3)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4$$

$$u_{i-1}^n=u_i^n-\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\left(\frac{(\Delta x)^2)}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{(\Delta x)^3)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4$$

$$\rightarrow u_i^n+\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t+\left(\frac{(\Delta t)^2)}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(\frac{(\Delta t)^3)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\Delta t)^4$$
$$=u_i^n-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}((u_i^n+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\left(\frac{(\Delta x)^2)}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{(\Delta x)^3)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4)-(u_i^n$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\left(\frac{(\Delta x)^2)}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{(\Delta x)^3)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4))$$

$$\rightarrow\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\left(\frac{\Delta t)}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(\frac{(\Delta t)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\Delta t)^3\right)(\Delta t)=-\frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\left(\frac{(\Delta x)^3)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4\right)$$

با تقسیم کردن دو طرف معادله بر Δt و مرتب کردن آن خواهیم داشت:

$$\rightarrow\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\left(\frac{\Delta t)}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(\frac{(\Delta t)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\Delta t)^3\right)=-a\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{(\Delta x)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4\right)$$

$$\rightarrow\left(\frac{\partial u}{\partial t}=-\left(\frac{\Delta t)}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{(\Delta t)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\Delta t)^3\right)-a\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{(\Delta x)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4\right)$$

$$\rightarrow\left(\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=-\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{(\Delta t)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\Delta t)^3\right)-a\left(\left(\frac{(\Delta x)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4\right)*$$

ابتدا از معادله ❋ نسبت به t مشتق می گیریم:

$$\rightarrow\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=-\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\left(\frac{(\Delta t)^2)}{6}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)-a\left(\left(\frac{(\Delta x)^2)}{6}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial t\partial x^3}\right)+\cdots(1)$$

از معادله * نسبت به x مشتق می گیریم و آن را در a ضرب می کنیم.

$$\rightarrow \left(a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-a\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}-a\left(\frac{(\Delta t)^2)}{6}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial t^3}\right)-a^2\left(\left(\frac{(\Delta x)^2)}{6}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)+\cdots(2)$$

دو معادله حاصله را از هم کم می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\left(-\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+a\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}+O(\Delta t)\right)+\frac{(\Delta x)^2}{6}\left(-a\frac{\partial^4 u}{\partial t\partial x^3}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(\Delta x^2)\right),(3)$$

سه ترم قرمز رنگ باقی منده که با مشتق گیری از معادله سوم بر حسب t و مشتق گیری مکرر معادله دوم بر حسب x و مشتق گیری معادله سوم بر حسب x به دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=a^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+O(\Delta t,\Delta x^2)\ =-a^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t,\Delta x^2)(4)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial t}=-a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(\Delta t,\Delta x^2)\ (5)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}=-a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O\left(\Delta t,\Delta x^2\right),(6)$$

با جایگزاری در روابط ۳ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\left(-\left(-a^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+a\left(-a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+O(\Delta t)\right)$$
$$+\frac{(\Delta x)^2}{6}\left(-a\left(-a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O(\Delta x^2)\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\left(\left((a^3-a^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\right)+\frac{(\Delta x)^2}{6}\left(2a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)+O(\Delta t,\Delta x^2)$$

حال عبارات به دست آمده را در معادله پیراسته اولیه جایگذاری می کنیم:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=-\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{(\Delta t)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\Delta t)^3\right)-a\left(\left(\frac{(\Delta x)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=-\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\left((a^3-a^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)+\frac{(\Delta x)^2}{6}\left(2a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)\right)$$
$$-\left(\frac{(\Delta t)^2)}{6}\right)\left(-a^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)-a\left(\left(\frac{(\Delta x)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 (a^2 - a^3)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left(\frac{(\Delta t)^2)}{6}\right)\left(a^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) - a\left(\frac{(\Delta x)^2)}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^2}{3}\left(a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)$$

طبق تعریف کتاب مقدار لزجت ساختگی برابر با ضریب $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در عبارت خطا می‌باشد که در اینجا برابر $\left(-\frac{a^2 \Delta t}{2}\right)$ شد.