* تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

A: دامنه شکل موج

ω: فرکانس زاویه ای $\left(\frac{Rad}{S}\right)$; $\omega = 2\pi f$

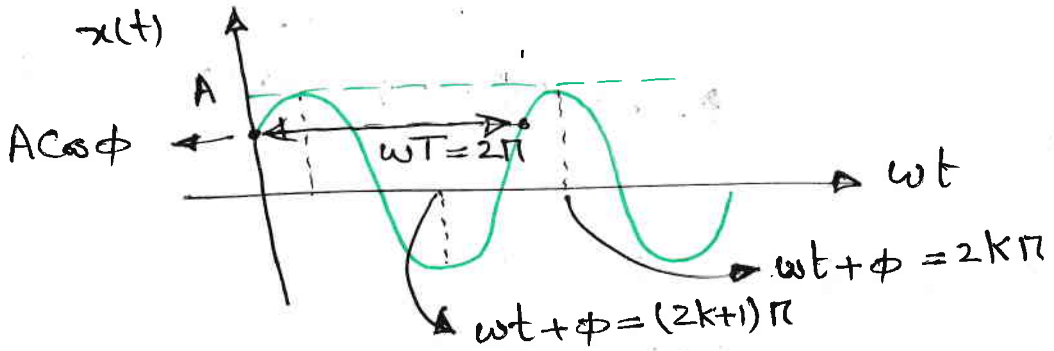
f: فرکانس بر حسب (HZ)

ϕ: فاز اولیه (Rad)

$$\phi^{\circ} = \frac{180}{\pi}\,\phi^{(Rad)}$$

T: دوره تناوب (Sec)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad f = \frac{1}{T}$$



$$x(t) = x(t+T)$$ برای شکل موجهای تناوب

در مدارهای الکتریکی در حالت دائمی سینوسی :

$$\begin{cases} v(t) = V_m \cos(\omega t + \measuredangle V) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \measuredangle I) \end{cases}$$

توان لحظه ای $p(t) = v(t)\, i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \measuredangle V)\cos(\omega t + \measuredangle I)$

$$= \frac{V_m I_m}{2}\left[\cos(2\omega t + \measuredangle V + \measuredangle I) + \cos(\measuredangle V - \measuredangle I)\right]$$

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{\omega T}\int_0^{\omega T} p(t)\,d(\omega t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\,d(\omega t)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{V_m I_m}{2}\right)\int_0^{2\pi} \cos(2\omega t + \measuredangle V + \measuredangle I)}$$

$$P_{av}(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{V_m I_m}{2}\right)\left[\int_0^{2\pi} \cancel{\cos(2\omega t + \measuredangle V + \measuredangle I)\, d(\omega t)}\right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(\measuredangle V - \measuredangle I)}_{\text{وابسته به زمان نیست و از انتگرال خارج می‌شود}}\, d(\omega t)\right]$$

$$\rightarrow \cos(\measuredangle V - \measuredangle I)\int_0^{2\pi} d(\omega t)$$

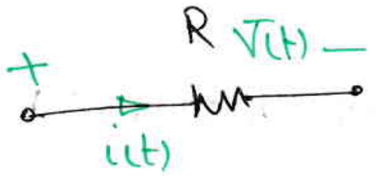
$$\rightarrow 2\pi\left(\cos(\measuredangle V - \measuredangle I)\right)$$

$$\cancel{P_{av}(t)} =$$

$$\boxed{P_{av}(t) = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\measuredangle V - \measuredangle I)}$$

$$\phi = \measuredangle V - \measuredangle I \qquad \cos\phi = P.F.$$

ضریب توان : Power Factor ← تولیدکننده یا مصرف‌کننده بودن نیز المان از روی علامت P.F مشخص می‌شود



$$v(t) = R\,i(t)$$

$$\rightarrow \boxed{V_m \cos(\omega t + \measuredangle V) = R I_m \cos(\omega t + \measuredangle I)} \rightarrow \begin{cases} \measuredangle V = \measuredangle I \\ V_m = R I_m \end{cases}$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t)\, i(t)\, d(\omega t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\, i^2(t)\, d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R I_m^2 \cos^2(\omega t + \measuredangle I)\, d(\omega t)$$

$$p(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{RI_m^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[1+\underbrace{\cos(2\omega t+2\angle I)}_{0}\right]d(\omega t)$$

$$p(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{RI_m^2}{2}\int_0^{2\pi}d(\omega t)=\frac{1}{2}RI_m^2=\frac{1}{2}\frac{V_m^2}{R}=\frac{1}{2}V_mI_m$$

تعریف جریان موثر برای سیگنال

تعریف مقدار موثر برای سیگنالهای متناوب :

$$P_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,i(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T R\,i^2(t)\,dt=R\underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt\right]}_{\cancel{R}\,I_{rms}^2}=R\,I_{rms}^2$$

$$P_{av}=RI_{rms}^2$$

جریان موثر →
$$\boxed{I_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}}$$

بطور مشابه
$$P_{av}=\frac{1}{R}\underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt\right]}_{V_{rms}^2}\qquad P_{av}=\frac{V_{rms}^2}{R}$$

ولتاژ موثر
$$\boxed{V_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt}}$$

$$\frac{1}{2}RI_m^2=RI_{rms}^2\;\rightarrow\;I_{rms}^2=\frac{I_m^2}{2}\qquad I_{rms}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$P(t)=\frac{1}{2}RI_m^2=\frac{1}{2}\frac{V_m^2}{R}\;\rightarrow\;\begin{cases}I_{rms}=\dfrac{I_m}{\sqrt{2}}\\[2ex] V_{rms}=\dfrac{V_m}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

برای سیگنالها سینوسی

$$\rightarrow P_{av} = R I_{rms}^2 = \frac{V_{rms}^2}{R} = V_{rms} \cdot I_{rms}$$

مقدار V_{rms} برق شهری 220^V است.

از قبل $P_{av} = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\measuredangle V - \measuredangle I)$

$$\boxed{P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos\phi}$$

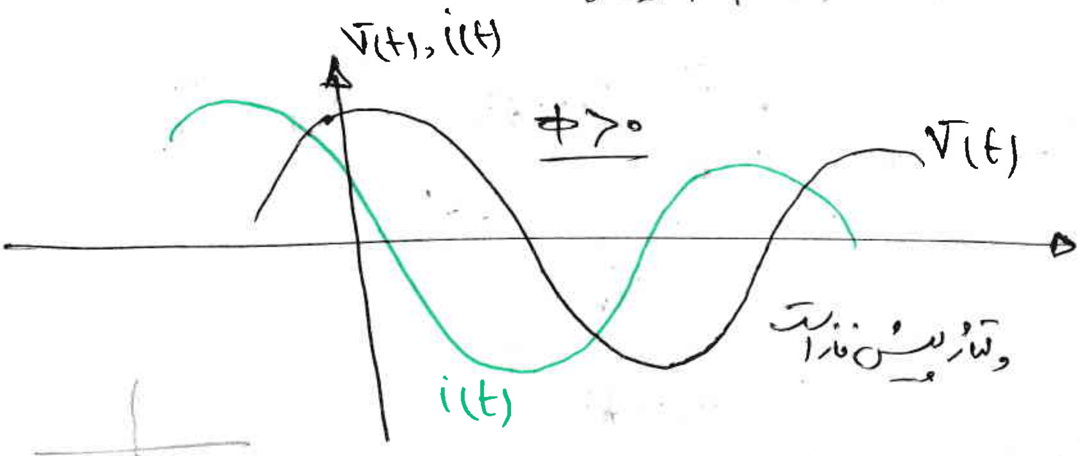
برای کلیه مقاومت $\phi = 0$ است

یعنی ولتاژ و جریان اختلاف فازی با هم ندارد

$\cos\phi = 1$

$$\phi = \measuredangle V - \measuredangle I$$

- if $\phi > 0$ → ولتاژ نسبت به جریان پیش فاز است (تقدم فاز دارد)
- if $\phi < 0$ → جریان نسبت به ولتاژ پیش فاز است
  یا ولتاژ نسبت به جریان پس فاز است



85
۳

در مورد سیگنالهای زیر $i_2(t)$ چقدر پیش فاز تر از $i_1(t)$ است؟

$$i_1(t) = 120\cos(100\pi t + 30^\circ)$$

$$i_2(t) = 20\sin(100\pi t - 50^\circ) = 20\cos(100\pi t - 140^\circ)$$

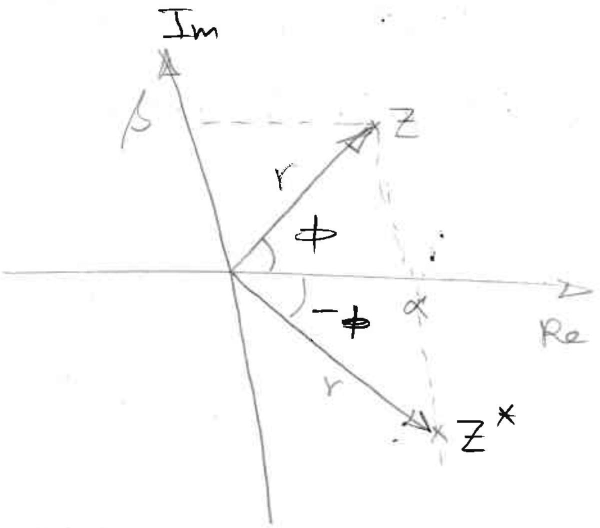
$$\measuredangle I_2 - \measuredangle I_1 = -140^\circ - 30^\circ = -170^\circ$$

i_2 ، -170° پیش فازتر است

یا i_2 $-170+360 = 190^\circ$ پیش فازتر است

یا i_2 $+170^\circ$ پس فازتر از i_1 است

نمایش فازوری سیگنالهای سینوسی:



نمایش دکارتی عدد مختلط:

$$Z = \underbrace{\alpha}_{\text{حقیقی}} + j\underbrace{\beta}_{\text{موهومی}}$$

نمایش قطبی عدد مختلط

$$Z = \alpha + i\beta = re^{j\phi}$$

r: اندازه ϕ: زاویه

اویلر $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$

تبدیل دکارتی به قطبی
$$\begin{cases} Z = \alpha + j\beta = r\cos\phi + jr\sin\phi \\ r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad \phi = \tan^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

تبدیل قطبی به دکارتی
$$\begin{cases} \alpha = r\cos\phi \\ \beta = r\sin\phi \end{cases}$$

$$Z^* = \bar{Z} = \alpha - j\beta = re^{-j\phi} = r\measuredangle -\phi$$

$$Z_1 \pm Z_2 = (\alpha_1 \pm \alpha_2) + j(\beta_1 \pm \beta_2)$$

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)} = r_1 r_2 \measuredangle(\phi_1+\phi_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\phi_1-\phi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\measuredangle(\phi_1-\phi_2)$$

$$z^n = r^n e^{jn\phi} = r^n \angle n\phi = r^n(\cos n\phi + j\sin n\phi)$$

روابط کاربردی:

$$\begin{cases} j\alpha = \alpha \angle 90^\circ \\ -j\alpha = \alpha \angle -90 \\ \alpha = \alpha \angle 0^\circ \\ -\alpha = \alpha \angle 180^\circ \end{cases}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha + j\beta} \times \frac{\alpha - j\beta}{\alpha - j\beta} = \frac{\alpha - j\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - j\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

نمایش فازوری سینوسیهای ورودی:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha)$$

فرکانس مجهول نیست چون مدارهای خطی

و تغییرناپذیر با زمان فرکانس تغییر نمی‌کند ولی فاز اولیه

و دامنه مجهولند

برای هر ۲ نماد یکسان است.

$\cos(\omega t+\phi)$ قسمت حقیقی $e^{j(\omega t+\phi)}$ است

$$v(t) = V_m \mathrm{Re}(e^{j(\omega t+\phi)}) = \mathrm{Re}(V_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\phi})$$

$$v(t) = \mathrm{Re}(\underbrace{V_m e^{j\phi}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}})$$

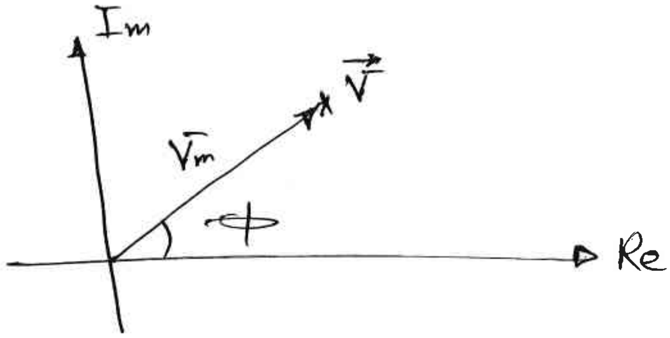
مجهول است و با $\vec{V}$ نمایش می‌دهیم

وابسته به فرکانس است و مشخص است

$\vec{V}$: فازور ولتاژ

$$\vec{V} = V_m e^{j\phi} = V_m\cos\phi + jV_m\sin\phi$$

فازور ولتاژ $\vec{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \cos\phi + j\, V_m \sin\phi$



بدون اینکه بدانیم فرکانس چقدر است می‌توانیم مجموع دو ولتاژ را بدست آوریم به کمک فازور

$$v_1(t) = V_{m_1}\cos(\omega t + \angle V_1) = Re\left(V_{m_1} e^{j\angle V_1} \cdot e^{j\omega t}\right)$$

$$v_2(t) = V_{m_2}\cos(\omega t + \angle V_2) = Re\left(V_{m_2} e^{j\angle V_2} \cdot e^{j\omega t}\right)$$

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = Re\left(V_{m_1} e^{j\angle V_1} \cdot e^{j\omega t}\right) + Re\left(V_{m_2} e^{j\angle V_2} \cdot e^{j\omega t}\right)$$

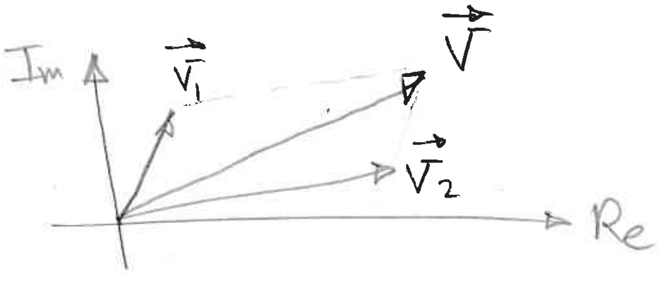
$$= Re\Big(\big(\underbrace{V_{m_1} e^{j\angle V_1}}_{V_1 \text{ فازور } \vec{V}_1} + \underbrace{V_{m_2} e^{j\angle V_2}}_{V_2 \text{ فازور } \leftarrow \vec{V}_2}\big) e^{j\omega t}\Big)$$

$$V(t) = Re\Big(\underbrace{V_m e^{j\angle V}} \cdot e^{j\omega t}\Big)$$

$\vec{V}$: فازور حاصل جمع

نتیجه) جمع دو سیگنال سینوسی هم فرکانس معادل جمع فازورهای آنها است)

جمع فازوری : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$



با سیگنال‌های سینوسی مثل اعداد مختلط برخورد می‌کنیم و این حالت‌ها حالت‌های دائمی است که داریم بررسی می‌کنیم و حالت گذرای آن مثل میرایی شدید و گذرا و بحرانی است.

$KCL: \quad i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_m(t) = 0$

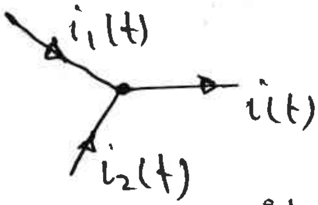
در جریان تناوب $\longrightarrow$ $\quad \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \cdots + \vec{I}_3 = 0$: جمع فازوری (در جریان سینوسی)

$KVL: \quad \vec{V}_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + \cdots + V_m(t) = 0$

اگر جریان سینوسی باشد $\longrightarrow$ $\quad \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \cdots + \vec{V}_m = 0$: جمع فازوری ولتاژها

مثال : در یک مدار الکتریکی در صورتی که جریان‌های وارد شونده به یک گره شامل 3 شاخه برابر با روابط زیر باشد جریان سوم خارج شونده از آن گره را بدست آورید.

$$\begin{cases} i_1(t) = 3\cos(200t + 50^\circ) \\ i_2(t) = 7\cos(200t + 30^\circ) \end{cases}$$



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 3\cos(200t + 50^\circ) + 7\cos(200t + 30^\circ)$$

$$i(t) = I_m \cos(200t + \phi)$$

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \longrightarrow I_m \angle \phi = \underbrace{3\angle 50^\circ}_{3e^{j50^\circ}} + \underbrace{7\angle 30^\circ}_{7e^{j30^\circ}}$$

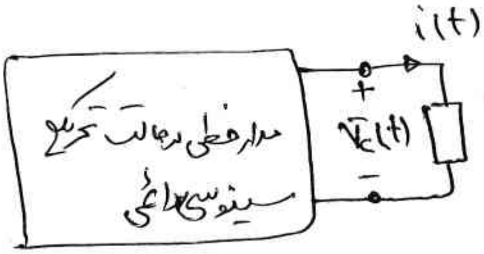
$$= 3\cos 50 + j\sin 50 + 7\cos 30 + j7\sin 30$$

$$= (3\cos 50 + 7\cos 30) + j(3\sin 50 + 7\sin 30) = 8 + j5.8 = 9.88\angle 36^\circ$$

$$\rightarrow I_m \angle \phi = 9.88\angle 36^\circ \longrightarrow I_m = 9.88 \quad \phi = 36^\circ$$

$$\rightarrow \boxed{i(t) = 9.88\cos(200t + 36^\circ)}$$

روابط فازوری اجزاء RLC :



عنصر مورد بررسی

$$v(t) = \underbrace{\sqrt{2}\, V_{rms}}_{V_m} \cos(\omega t + \measuredangle V)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I_{rms} \cos(\omega t + \measuredangle I)$$

فازور $\vec{V} = V_{rms} \measuredangle V$

$$\vec{I} = I_{rms} \measuredangle I$$

چون $\sqrt{2}$ را از هر دو حذف کردیم
مشکلی پیش نمی آید

$$v(t) = Re(\sqrt{2}\, V_{rms}\, e^{j\measuredangle V} \cdot e^{j\omega t})$$

$$i(t) = Re(\sqrt{2}\, I_{rms}\, e^{j\measuredangle I} \cdot e^{j\omega t})$$

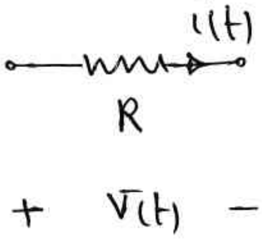
$$v(t) = \sqrt{2}\, V_{rms} \cos(\omega t + \measuredangle V)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, I_{rms} \cos(\omega t + \measuredangle I)$$

$$\cancel{v(t)=} \quad v(t) = \sqrt{2}\, Re(\vec{V}_e\, e^{j\omega t})$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, Re(\vec{I}_e\, e^{j\omega t})$$

۱) مقاومت :



$$v(t) = R\, i(t)$$

$$\rightarrow \cancel{\sqrt{2} Re(\vec{V}_e}$$

$$Re(\vec{V} e^{j\omega t}) = R \cdot Re(\vec{I} e^{j\omega t}) = Re(R \vec{I} e^{j\omega t})$$

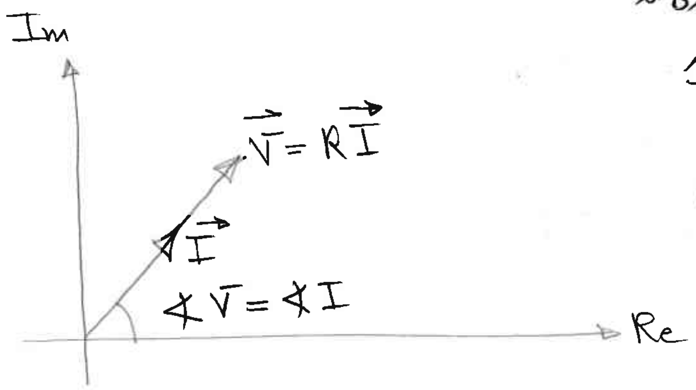
$$\rightarrow \boxed{\vec{V} = R\vec{I}}$$: رابطه فازوری $\longrightarrow \vec{I} = \dfrac{\vec{V}}{R}$

۹۰/۳

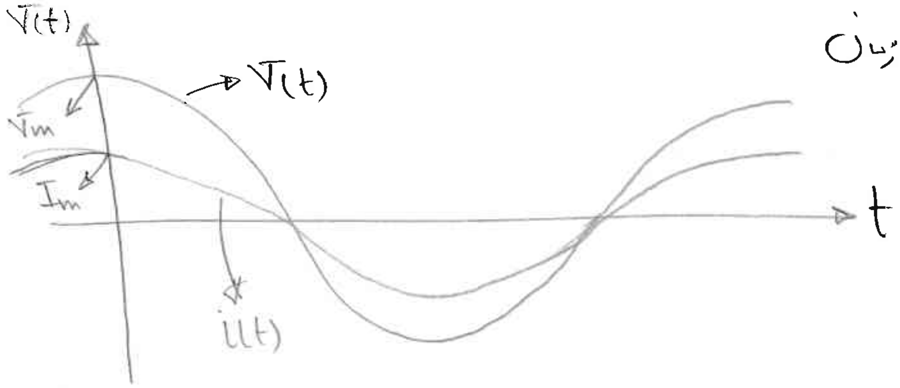
نتیجه: از رابطه فازوری

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{max} = R\, I_{max} \\ \measuredangle V = \measuredangle I \end{cases} \rightarrow V_m \measuredangle V = R\, I_m \measuredangle I$$

هنگامی که جریان سینوسی از مقاومت عبور می‌کند
اختلاف فازی بین ولتاژ و جریان آن بوجود نمی‌آید



درحوزه مکان



درحوزه زمان

مثال: درصورتی که جریان عبوری از یک مقاومت $5\,\Omega$، $10\sin(100t+30^\circ)$ باشد ولتاژ دو سر مقاومت را بدست آورید

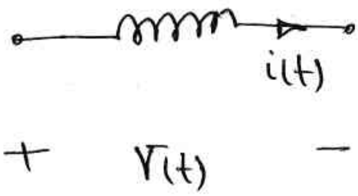
$$i(t) = 10\sin(100t+30^\circ)$$

$$R = 5\,\Omega \qquad V(t) = R\, i(t) = 50\sin(100t+30^\circ)$$

حالت فازوری $\quad \vec{V} = R\vec{I} = 5\,(10 \measuredangle 30) = 50 \measuredangle 30^\circ$

$$V(t) = 50\sin(100t+30^\circ)$$

2) سلف:



$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$Re(\vec{V}e^{j\omega t}) = L\frac{d}{dt}Re(\vec{I}e^{j\omega t}) = Re\left(L\vec{I}\frac{d}{dt}(e^{j\omega t})\right)$$

وابسته به زمان نیست نه دامنه‌اش وابسته به زمان است نه زاویه‌اش

عبارت وابسته به زمان

$$Re(L\vec{I}.\,j\omega.\,e^{j\omega t})$$

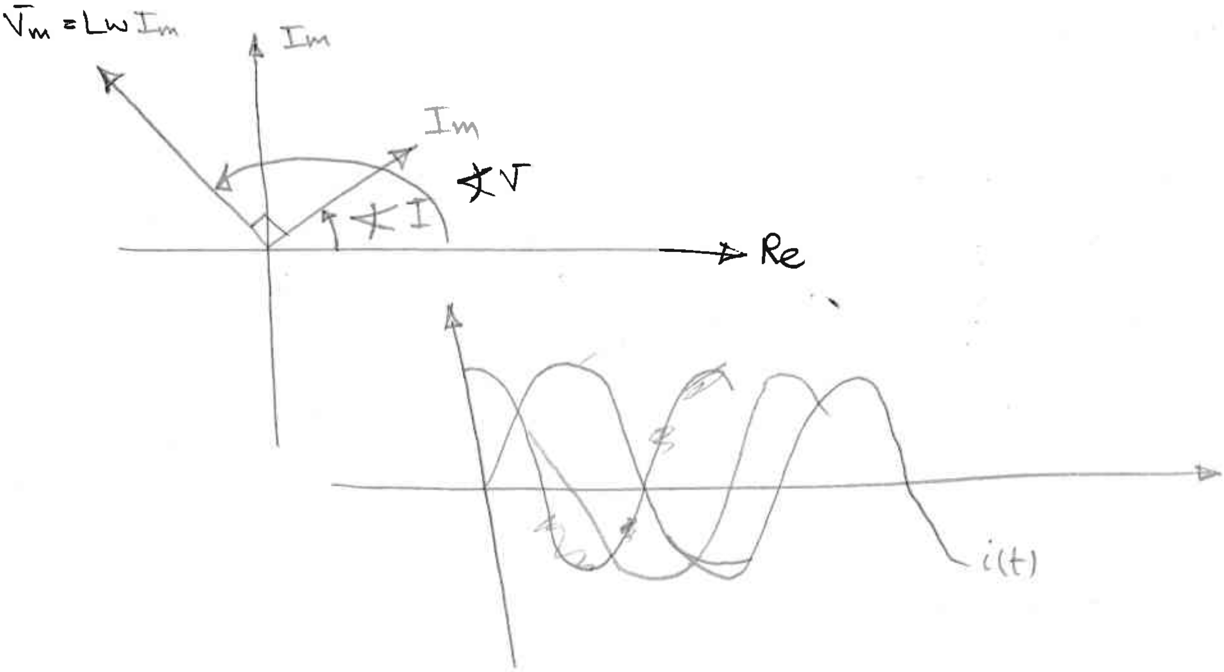
$$\boxed{Z_L = j\omega L}$$

نتیجه (1) $\Longrightarrow$ $\boxed{\vec{V} = j\omega L\vec{I}}$ رابطه فازوری: $\rightarrow$ $\vec{I} = \dfrac{\vec{V}}{j\omega L}$

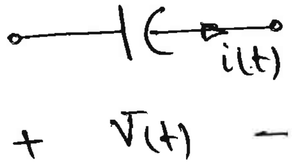
نتیجه (2) : $V_m \angle V = L\omega I_m \angle I + 90$

$$\begin{cases} V_m = L\omega I_m \\ V_{rms} = L\omega I_{rms} \\ \angle V = \angle I + 90 \end{cases}$$

نتیجه: اگر عبور کنیم جریان سینوسی از هر سلف ولتاژ آن نسبت به جریان عبوری از آن $\pi/2$ پیش فاز است:



فازور. 3



$$i(t) = C \frac{dV(t)}{dt}$$

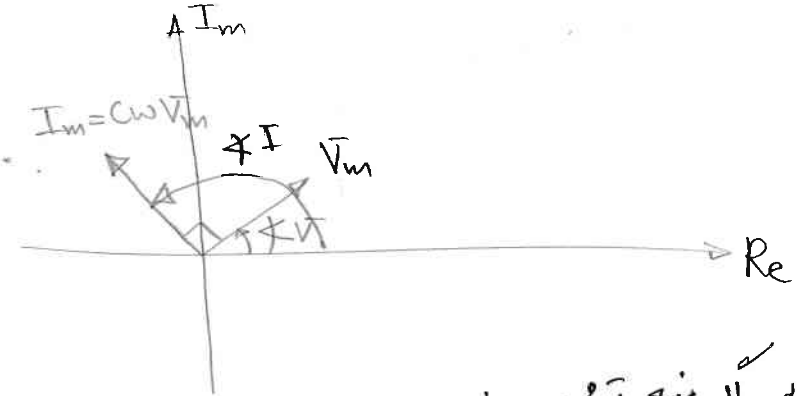
$$\mathrm{Re}\left(\vec{I} e^{j\omega t}\right) = C \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}\left(\vec{V} e^{j\omega t}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(C\vec{V} \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(j\omega C \vec{V} e^{j\omega t}\right)$$

$$\boxed{\vec{I} = j\omega C \vec{V}} \rightarrow \vec{V} = \frac{1}{j\omega C} \vec{I} \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\begin{cases} I_m = C\omega V_m \\ \measuredangle I = \measuredangle V + 90 \end{cases}$$

جریان به اندازه $\pi/2$ پیش فاز از ولتاژ است



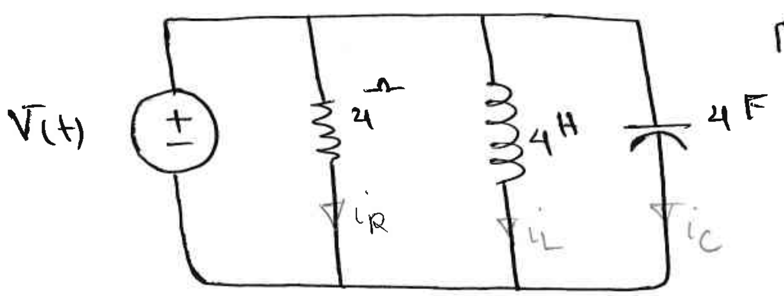
مثال: در مدار RLC موازی شکل زیر اگر منبع ولتاژ سینوسی برابر با

$8\sqrt{2}$

$V(t) = 8\sqrt{2} \cos(100t - 50^\circ)$

باشد آنگاه جریان عبوری از مقاومت ـ سلف و خازن را بدست آورید

فازورها را برحسب مقدار موثر نوشتیم



$$\vec{V} = 8 \measuredangle -50$$

براساس ولتاژ موثر

$$\vec{I}_R = \frac{\vec{V}}{R} = \frac{8 \measuredangle -50}{4} = 2 \measuredangle -50^\circ$$

$$i_R(t) = 2\sqrt{2} \cos(100t - 50^\circ)$$

$\frac{93}{۲}$

$$\vec{I}_L = \frac{\vec{V}}{j\omega L} = \frac{8 \angle -50}{400j} = \frac{8 \angle -50}{400 \angle 90} = 0.02 \angle -140^\circ$$

~~$i_L(t) = 2\sqrt{2}\cos(100t$~~ $\quad i_L(t) = 0.02\sqrt{2}\cos(100t - 140^\circ)$

$$\vec{I}_C = j\omega C \vec{V} \to \vec{I}_C = 400j \times 8 \angle -50^\circ = 3200 \angle 40^\circ$$

$$\to i_C(t) = 3200\sqrt{2}\cos(100t + 40^\circ)$$

تعریف مفاهیم امپدانس و ادمیتانس :

امپدانس : برای یک عنصر الکتریکی نسبت فازور ولتاژ به فازور جریان امپدانس نامیده می‌شود ($\vec{Z}$) (نسبت دو عدد مختلط)

ادمیتانس : برای یک عنصر الکتریکی نسبت فازور جریان به فازور ولتاژ ادمیتانس نامیده می‌شود

$$\vec{Z} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{V_m}{I_m} \angle (V - I)$$

واحد $\vec{Z}$ اهم (Ω)

$$\vec{Y} = \frac{\vec{I}}{\vec{V}} = \frac{I_m}{V_m} \angle (I - V)$$

واحد $\vec{Y}$ مهو ($\mho$)

$$\boxed{\vec{Z} = \frac{1}{\vec{Y}}}$$

امپدانس‌های سری باهم جمع می‌شوند (مثل مقاومت)

عناصر موازی ادمیتانس‌هایشان باهم جمع می‌شود رسانایی

	R	L	C
$\vec{Z}$ (Ω)	R	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$
$\vec{Y}$ ($\mho$)	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$	$j\omega C$

$\frac{1}{j} = -j$

$\vec{Z}$, $\vec{Y}$ تابعی از $j\omega$ است

۹۴/۳

$\vec{Z} = R + jX$

قسمت حقیقی امپدانس : R : مقاومت

قسمت موهومی امپدانس : X : راکتانس

$\vec{Y} = G + jB$

قسمت حقیقی ادمیتانس : G : هدایت

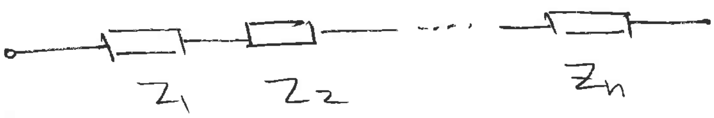
" موهومی " B : سوسپتانس

$\vec{Y}_c = j\omega C$: سوسپتانس خازنی

$\vec{X}_L = j\omega L$ راکتانس سلف

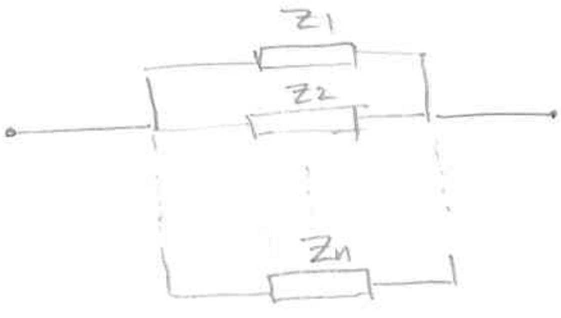
امپدانس حقیقی ناشی از مقاومت است و قسمت موهومی آن مربوط به مقاومت خازن و سلف است

امپدانس‌های سری:



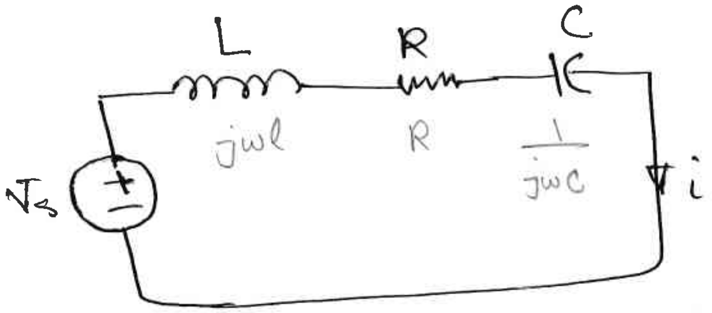
$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

ادمیتانس‌های موازی:



$$Y_{eq} = \sum_i Y_i = \sum_i \frac{1}{Z_i}$$

مثال: در مدار زیر رابطه جریان را در حالت دائمی سینوسی بدست آورید !



امپدانس‌های خازن مقاومت سلف

$j\omega l \qquad R \qquad \frac{1}{j\omega C}$

$$V_S = |V_S| \cos(\omega t + \measuredangle V_S)$$

$$i(t) = |I| \cos(\omega t + \measuredangle I)$$

$$kvl: \; V_S = L\frac{di}{dt} + Ri + V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

فازور $\quad \vec{V_S} = |V_S| \measuredangle V_S \qquad \vec{I} = |I| \measuredangle I$

kl $\quad$ kvl را در حوزه فازورها بنویسیم

فازورها kvl:

$$-|V_S| \measuredangle V_S + j\omega l |I| \measuredangle I + R|I| \measuredangle I + \frac{1}{j\omega C}|I| \measuredangle I = 0$$

$$\rightarrow |V_S| \measuredangle V_S = \left(j\omega l + R + \frac{1}{j\omega C}\right)|I| \measuredangle I$$

$$\rightarrow |I| \measuredangle I = \frac{|V_S| \measuredangle V_S}{R + j\left(\omega l - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$$|I| = \frac{|V_S|}{\sqrt{R^2 + \left(l\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \qquad \measuredangle I = \measuredangle V_S - \tan^{-1}\left(\frac{l\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

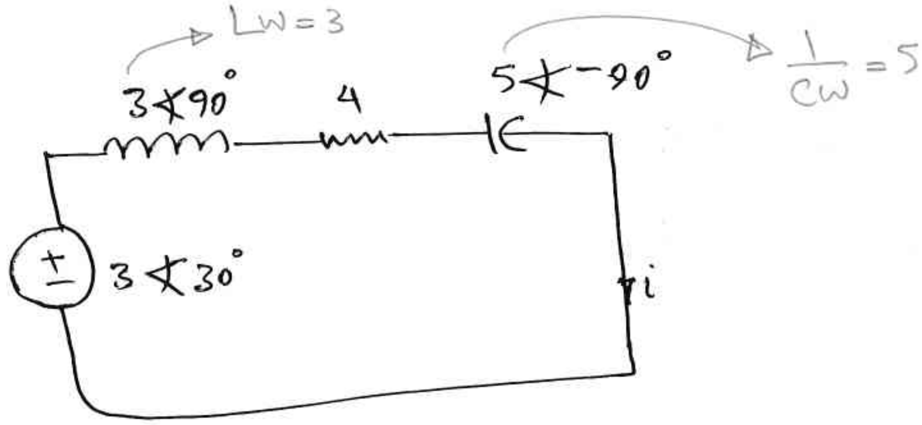
صورت دیگر $\quad -\vec{V} + j\omega l \vec{I} + R\vec{I} + \frac{1}{j\omega C}\vec{I} = 0$

۹۶/۳

تبدیل رابطه از حوزه زمان به حوزه فازوری : $\frac{d}{dt} \to j\omega$ $\qquad \int \cdot dt \to \frac{1}{j\omega}$

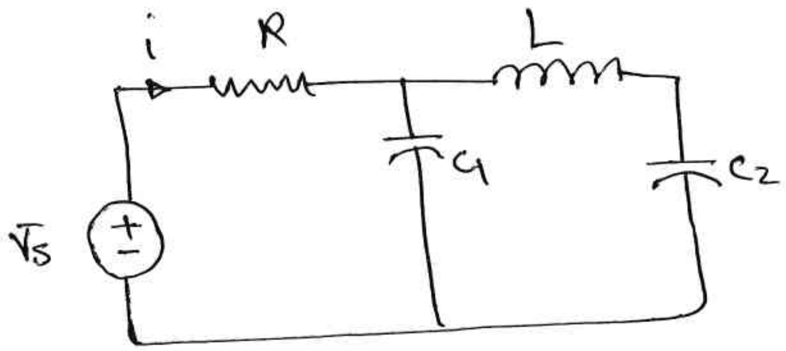
از تساوی kvl اولیه به kvl فازوری ، به نتیجه بالا رسیدیم

مثال :

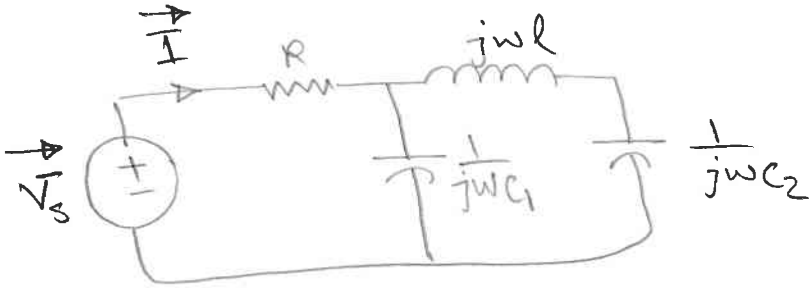


$$\vec{I} = \frac{3\angle 30^\circ}{4+j(3-5)} = \frac{3\angle 30}{\sqrt{4^2+2^2}\ \angle \tan^{-1}\frac{-2}{4}}$$

جریان i را در مدار زیر بدست آورید
(در حالت دائمی سینوسی)



$$\vec{V}_s(t) \to |\vec{V}_s| \angle \vec{V}_s$$



$$\vec{I} = \frac{\vec{V}_s}{R + \left(\frac{1}{j\omega C_1} \,\Big\|\, \left(j\omega l + \frac{1}{j\omega C_2}\right)\right)}$$

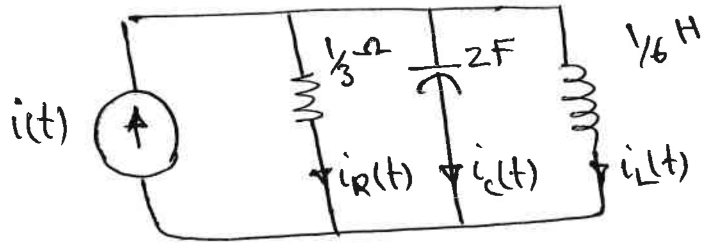
۹۷/۳

سؤال: در مدار زیر $i(t) = 15\sqrt{2}\cos 3t$ (در دائمی سینوسی)

الف) ادمیتانس دیده شده از دو سر منبع جریان

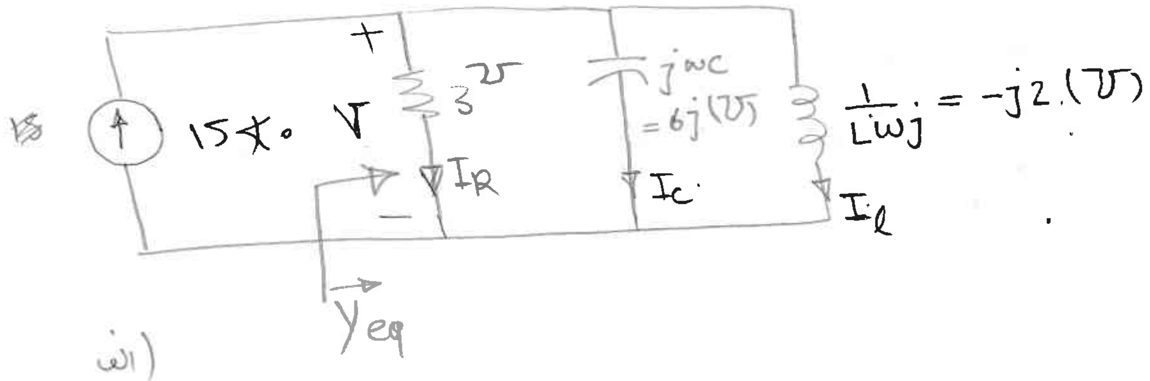
ب) فازور ولتاژ دو سر همه عناصر

ج) فازور جریان هر یک از عناصر مقاومت، خازن و سلف را بدست آورید



$\omega = 3\ Rad/s$

در حالت ادمیتانس:



الف)

$$\vec{Y}_{eq} = 3 + 6j - 2j = 3 + 4j\ (℧) = 5 \angle 53^\circ\ (℧)$$

ب)
$$V = \frac{\vec{I}}{\vec{Y}_{eq}} = \frac{15\angle 0}{5\angle 53^\circ} = 3\angle -53^\circ$$

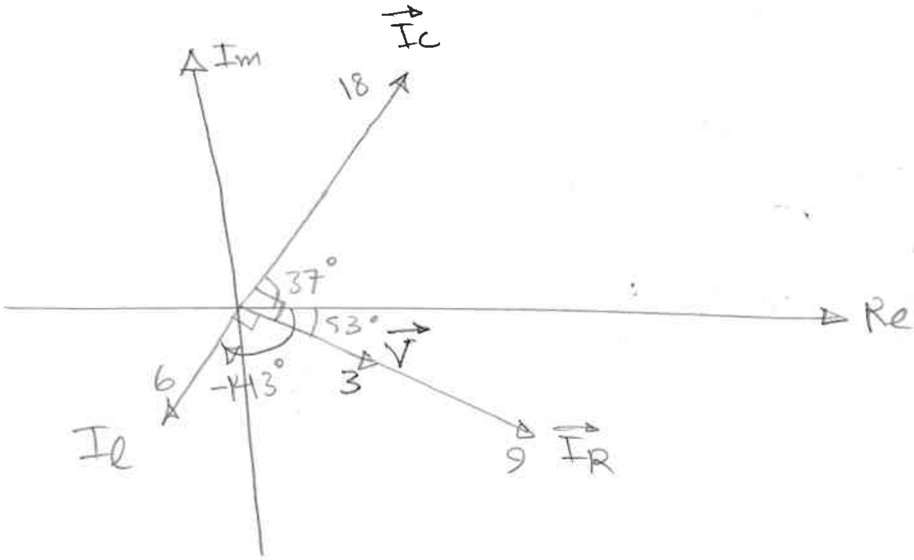
ولتاژ 53° پس فاز از جریان است

ج)
$$I_R = \frac{\vec{V}}{R} = \frac{3\angle -53}{\frac{1}{3}} = 9\angle -53$$

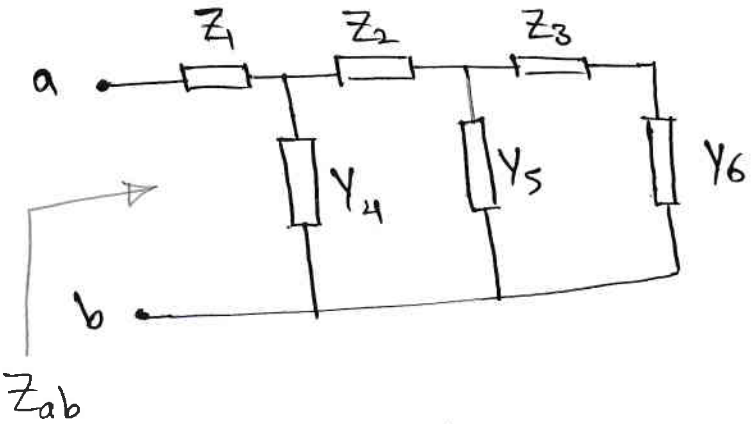
$$\vec{I}_c = Y_c \vec{V} = 6j \times 3 \angle -53 = 18 \angle 37^\circ$$

جریان خازن نسبت به ولتاژش پیش فاز است

$$\vec{I}_l = Y_L \vec{V} = -2j \times 3 \angle -53^\circ = 6 \angle -143^\circ$$



سوال: امپدانس ورودی از AB را بدست آورید.

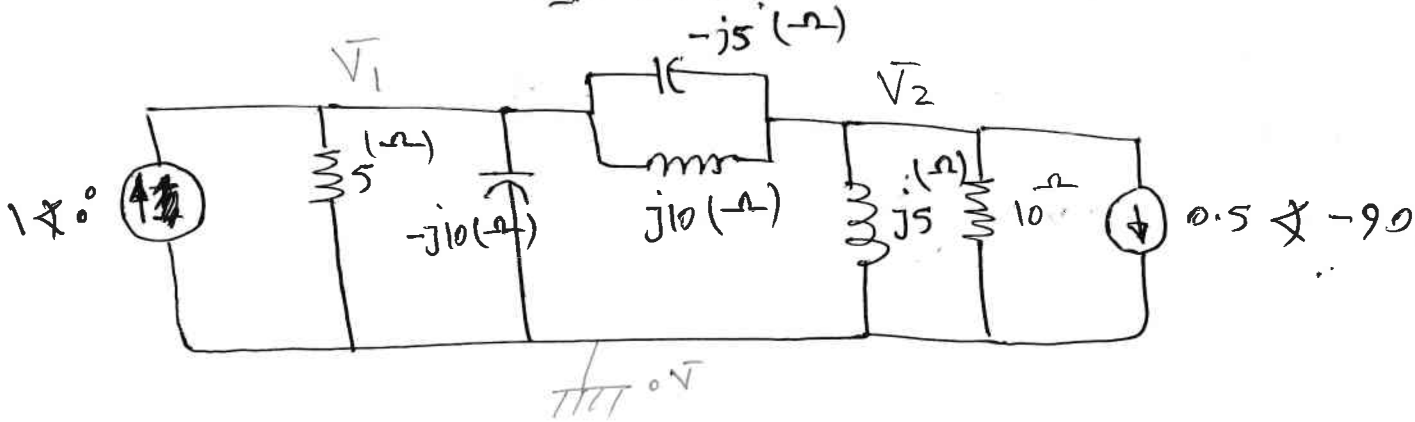


$$Z_{ab} = Z_1 + \cfrac{1}{Y_4 + \cfrac{1}{Z_2 + \cfrac{1}{Y_5 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_6}}}}}$$

تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی:

روش گره که در مورد شبکه‌های مقاومتی مطرح شد، دقیقاً به همان شکل در حالت دائمی سینوسی نیز برقرار است

مثال: با استفاده از تحلیل گره، ولتاژ دو گره را نسبت به گره مبنا بیابید



$$\frac{V_1}{5}+\frac{V_1}{-j10}-1+\frac{V_1-V_2}{-j10}=0$$

$$\frac{-5\times 10}{10-5}=\frac{-50}{5}=-10$$

$$\frac{V_2}{j5}+\frac{V_2}{10}+\frac{V_2-V_1}{-j10}+0.5\angle-90=0$$

$$(0.2+j0.2)V_1-j0.1\,V_2=1\angle 0^\circ$$

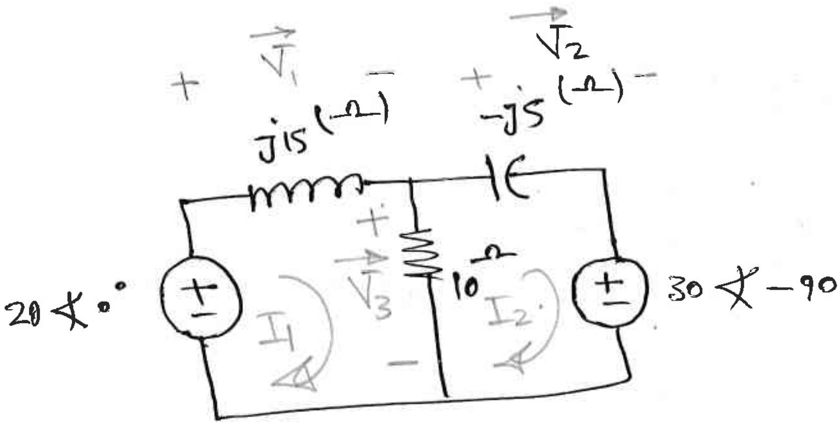
$$-j0.1\,V_1+(0.1-0.1j)V_2=-0.5\angle-90=0.5\angle 90^\circ$$

$$V_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & -0.1j\\ 0.5j & 0.1-0.1j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0.2+j0.2 & -j0.1\\ -j0.1 & 0.1-0.1j\end{vmatrix}}=\frac{0.1-0.1j-0.05}{----}$$

* تحلیل حلقه در حالت دائمی سینوسی:

مثال: برای مدار زیر ولتاژهای فازوری $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_3$ را با استفاده از روش تحلیل حلقه بدست آورید.

فرکانس دو منبع با یکدیگر یکسان است.



$$\begin{cases} 20\angle 0^\circ = j15\vec{I}_1 + 10(\vec{I}_1 - \vec{I}_2) \\ 30\angle +90 = 10(\vec{I}_2 - \vec{I}_1) - j5\vec{I}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (10+j15)\vec{I}_1 - 10\vec{I}_2 = 20 \\ -10\vec{I}_1 + (10-j5)\vec{I}_2 = j30 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -10 \\ j30 & 10-j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10+j15 & -10 \\ -10 & 10-j5 \end{vmatrix}} = \frac{200 - j100 + j300}{100 - j50 + j150 + 75 - 100} = \frac{200+200j}{75+100j} = \frac{8+8j}{3+4j}$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{8\sqrt{2}\angle 45}{5\angle 53} = 1.6\sqrt{2}\angle -8^\circ$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10+j15 & 20 \\ -10 & j30 \end{vmatrix}}{75+100j}$$

$$\vec{V}_1 = j15 \times I_1 = 15\angle 90 \times 1.6\sqrt{2}\angle -8 = 15\times 1.6\sqrt{2}\angle 82^\circ = 33.9\angle 82^\circ$$

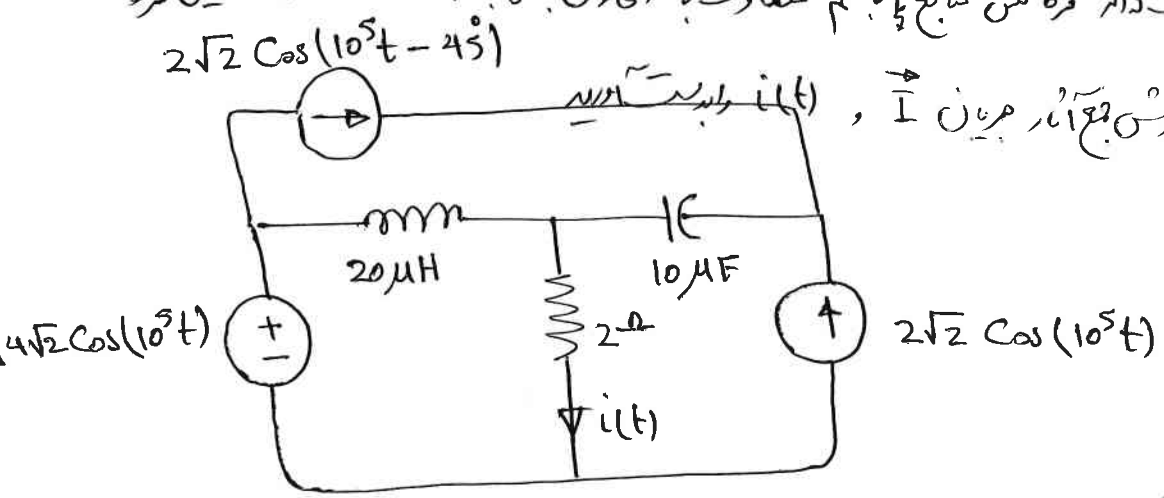
$$\vec{V}_2 = -j5\, I_2 = \cdots = 15.62\angle -13^\circ$$

$$\vec{V}_3 = 10(\vec{I}_1 - \vec{I}_2) = \cdots = 36.9\angle -65$$

* تجزیه و تحلیل جمع آثار در حالت دائمی سینوسی:

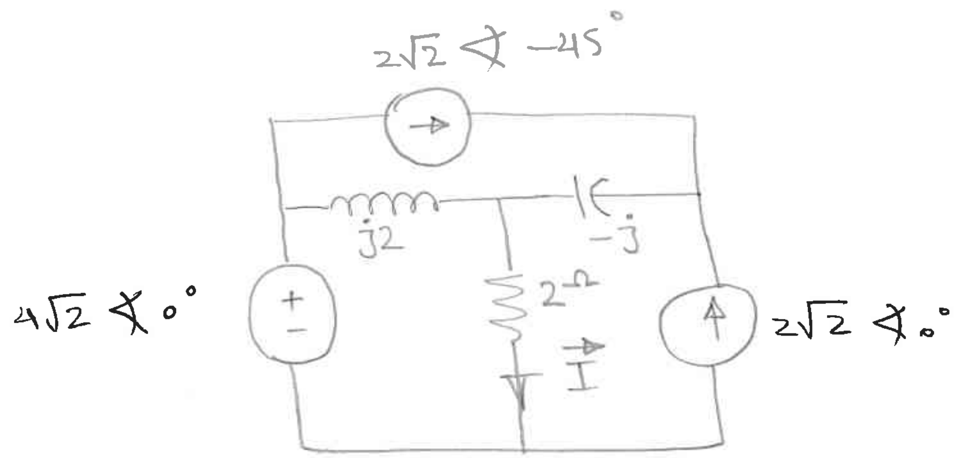
زمانی این روش استفاده گردد اگر فرکانس منابع با هم متفاوت باشند می‌توان با محاسبه جداگانه اثر آنها مدار را تحلیل کرد

* مثال با استفاده از روش جمع آثار جریان $\vec{I}$, $i(t)$ را بدست آورید

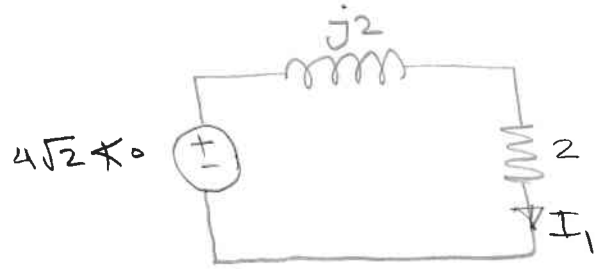


$$Z_L = \underbrace{j \times 10^5 \times 20 \times 10^{-6}}_{j\omega L} = j2 \ (\Omega)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \times 10^5 \times 10^{-5}} = -j \ (\Omega)$$

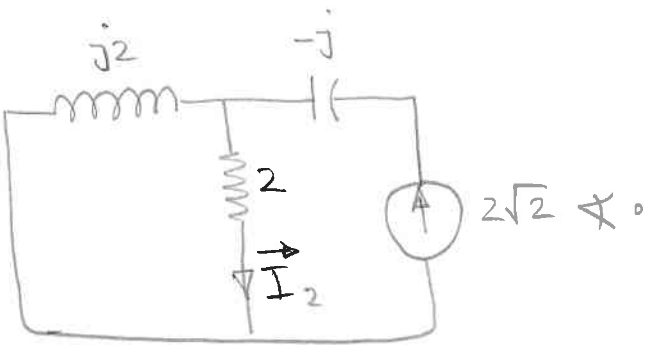


۱) اثر $4\sqrt{2}\measuredangle 0$:



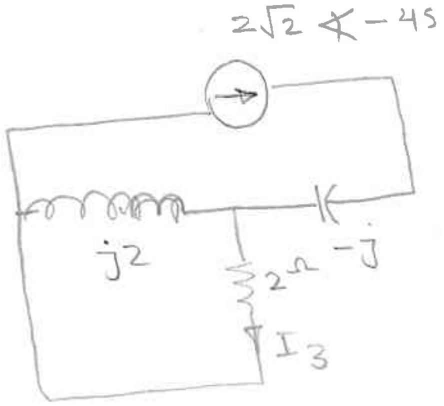
$$\vec{I}_1 = \frac{4\sqrt{2}\measuredangle 0}{2+j2} = 2\measuredangle -45^\circ$$

۲) اثر $2\sqrt{2}\measuredangle 0$:



تقسیم جریان در شاخه موازی

$$I_2 = \frac{j2}{2+j2} \times 2\sqrt{2}\measuredangle 0 = 2\measuredangle 45^\circ$$



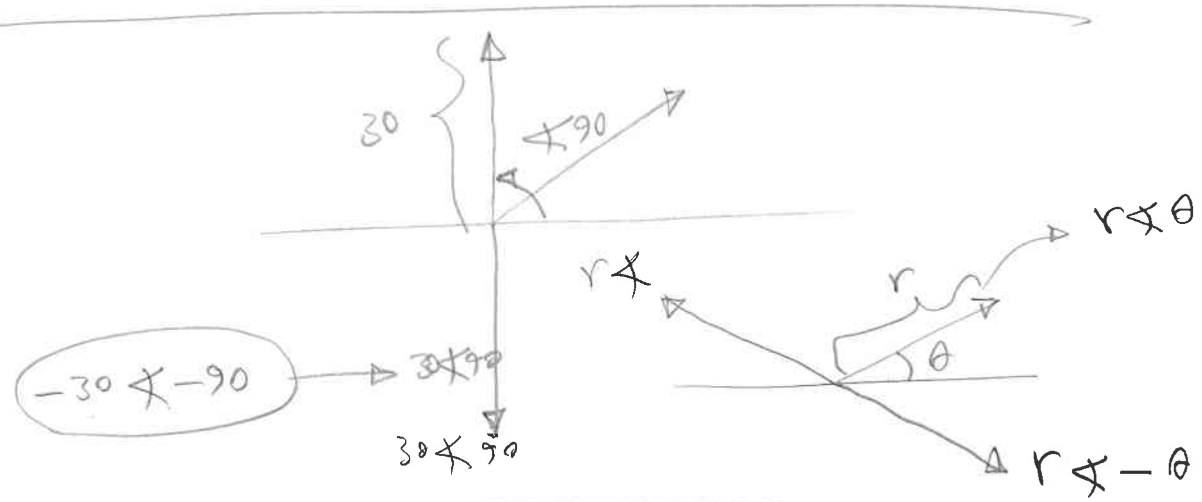
3) اگر $2\sqrt{2}\angle -45$

$$\vec{I}_3 = \frac{j2}{2+j2} \times 2\sqrt{2}\angle -45 = 2\angle 0^\circ$$

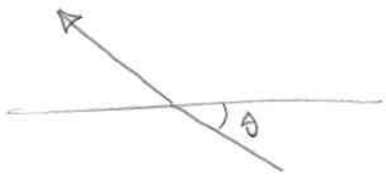
$$\rightarrow \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = 2\angle -45 + 2\angle 45 + 2$$

$$\rightarrow \vec{I} = \sqrt{2} - j\sqrt{2} + \sqrt{2} + j\sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2} + 2 \angle 0^\circ$$

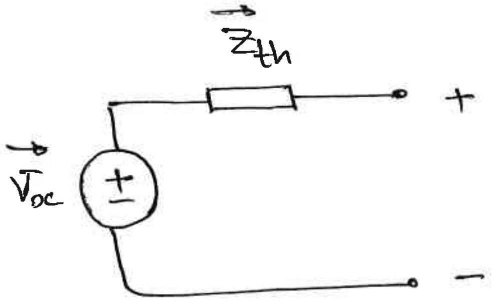
$$\rightarrow \boxed{i(t) = (2\sqrt{2}+2)\cos(10^5 t + 0^\circ)}$$



$-r\angle -\theta = r$



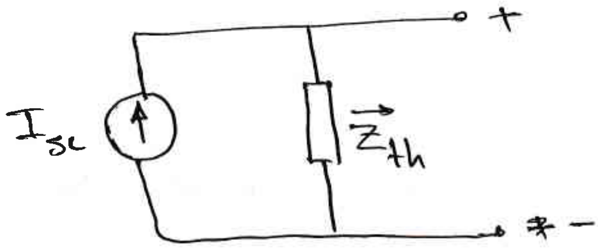
* تجزیه و تحلیل مدار با استفاده از معادل تونن - نورتن:



* مدار معادل تونن در حالت دائمی سینوسی:

$$\vec{Z}_{th} = \frac{\vec{V}_{oc}}{I_{sc}}$$

* مدار معادل نورتن در حالت دائمی سینوسی:

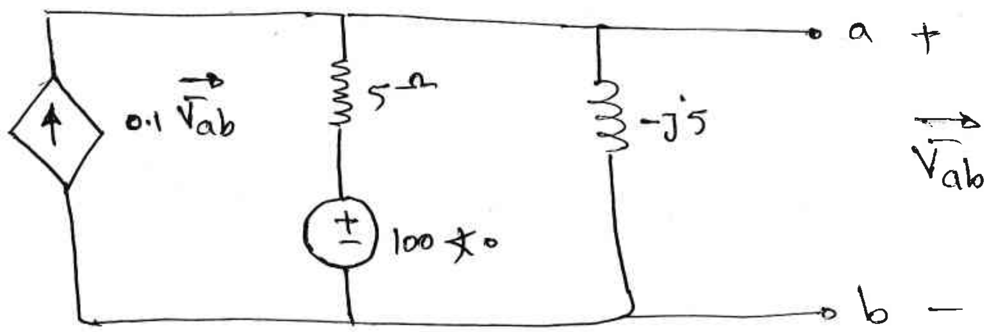


$\vec{V}_{oc}$: فازور ولتاژ اتصال باز

$\vec{I}_{sc}$: فازور جریان اتصال کوتاه

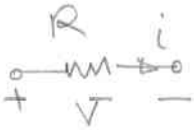
$\vec{Z}_{th}$: امپدانس دیده شده از ترمینال

مثال: مدار معادل تونن - نورتن را از دو سر ab بدست آورید:



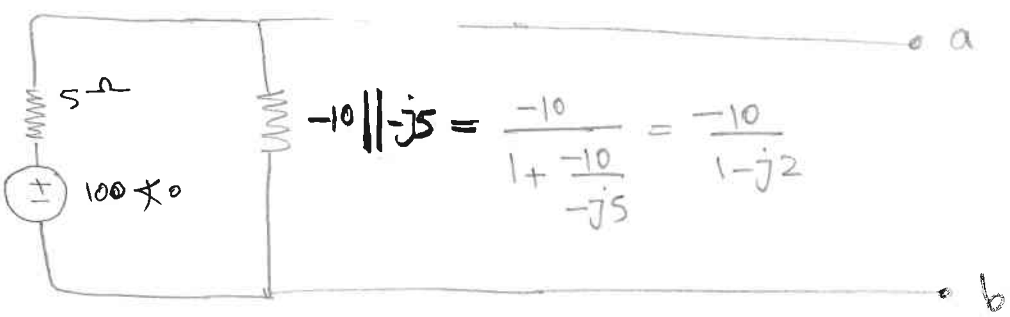
جریان وابسته: عنصری است که جریان عبوری از آن وابسته به ولتاژ دو سر آن است پس معادل است

$$R = \frac{V_{ab}}{-0.1V_{ab}} = -10\Omega$$



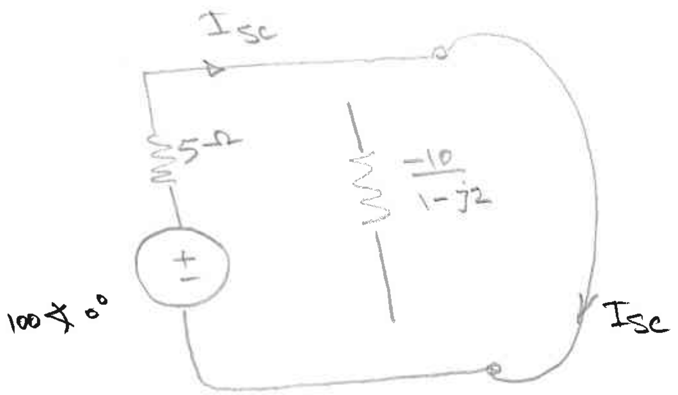
$$R_1 \| R_2 = \frac{R_1}{1+\frac{R_1}{R_2}}$$

⇒



$$-10 \| -j5 = \frac{-10}{1+\frac{-10}{-j5}} = \frac{-10}{1-j2}$$

$$\vec{V}_{oc} = \frac{\frac{-10}{1-j2}}{5 - \frac{10}{1-j2}} \times 100 = \frac{\frac{-10}{1-j2}}{\frac{5-10j-10}{1-j2}} \times 100 = \frac{-10}{-5-10j} \times 100 = \frac{2}{1+j2} \times 100$$



$$\vec{I}_{sc} = \frac{100\measuredangle 0^\circ}{5} = 20\measuredangle 0^\circ$$

$$Z_{th} = \frac{\vec{V}_{oc}}{I_{sc}}$$

* توان متوسط دائمی سینوسی :

$$\begin{cases} V(t) = V_m \cos(\omega t + \measuredangle V) = \sqrt{2}\, V_{rms} \cos(\omega t + \measuredangle V) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \measuredangle I) = \sqrt{2}\, I_{rms} \cos(\omega t + \measuredangle I) \end{cases}$$

$$p(t) = V(t)\, i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \measuredangle V)\cos(\omega t + \measuredangle I)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}\left(\cos(2\omega t + \measuredangle V + \measuredangle I) + \cos(\measuredangle V - \measuredangle I)\right)$$

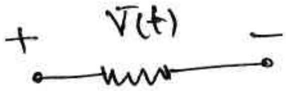
$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\measuredangle V - \measuredangle I) = V_{rms} I_{rms} \cos\phi$$

$\cos\phi : PF :$ ضریب توان

$\phi = \measuredangle V - \measuredangle I$ زاویه ضریب توان : اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان

$$V_{rms} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \qquad I_{rms} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

ادامه توان در مدارهای الکتریکی در حالت دائمی سینوسی:



توان در مقاومت:

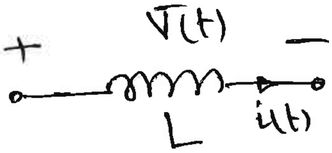
یک مقاومت الکتریکی همواره توان را مصرف می‌کند (در حالت دائمی سینوسی) R ← $P.F=1$

$$R=\frac{V}{I}=\frac{V_{rms}}{I_{rms}} \qquad P_{av}=V_{rms}\times\frac{V_{rms}}{R}\times 1=\frac{V_{rms}^2}{R}$$

$$\measuredangle V=\measuredangle I \qquad =R I_{rms}\times I_{rms}\times 1=R I_{rms}^2$$

$$P.F=\cos\phi=1$$

* توان در یک بار سلفی با تحریک سینوسی:



$$V(t)=L\frac{d\,i(t)}{dt}$$

$$\vec{V}=j\omega L\,\vec{I}$$

$$\begin{cases} V_{rms}=L\omega I_{rms} \\ \measuredangle V=\measuredangle I+90 \end{cases} \qquad P_{av}=V_{rms}\cdot I_{rms}\times\cos 90=0$$

سلف یک ذخیره کننده انرژی است نه مصرف کننده انرژی

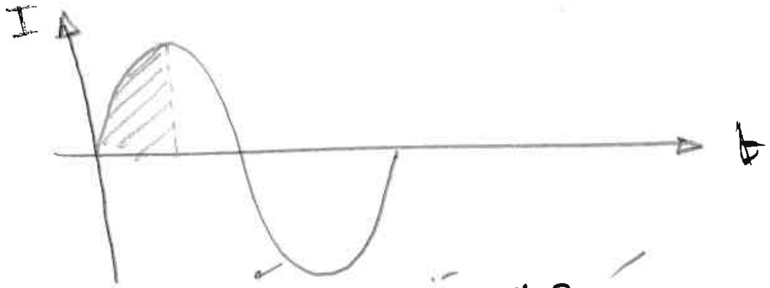
* P_{av} توان اکتیو گوییم (توان حقیقی) برحسب Watt

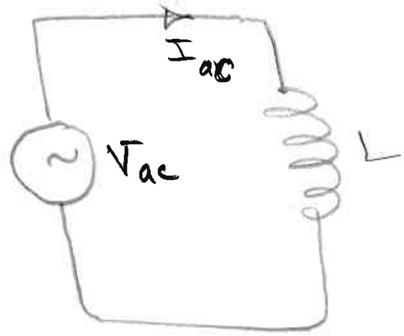
تعریف: توان راکتیو: توان موهومی برحسب VAR ← (Volt Amper Reaktive)

$$Q\triangleq V_{rms}I_{rms}\sin\phi$$

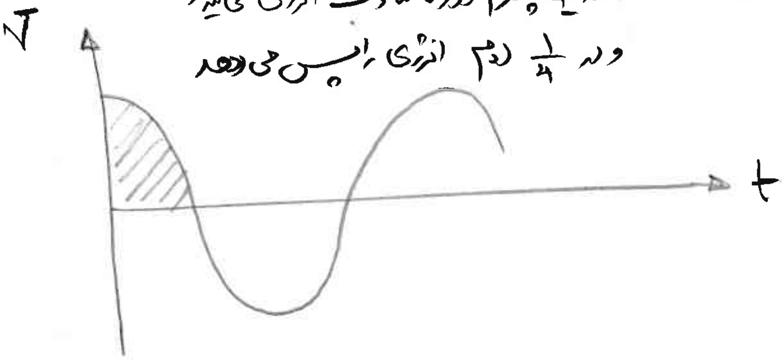
سلف $Q=L\omega I_{rms}\times I_{rms}\times 1=L\omega I_{rms}^2$

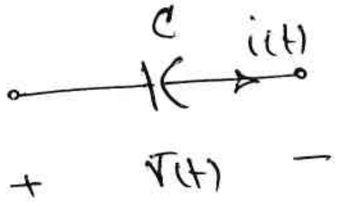
$$=V_{rms}\times\frac{V_{rms}}{L\omega}=\frac{V_{rms}^2}{L\omega}$$





در یک چهارم دوره تناوب انرژی می‌گیرد
و در $\frac{1}{4}$ دوم انرژی را پس می‌دهد





* توان لحظه‌ای بار خازنی خالص با تحریک سینوسی:

$$\vec{I} = j\omega C \vec{V}$$

$$\begin{cases} I_{rms} = C\omega V_{rms} \\ \measuredangle I = \measuredangle V + 90 \longrightarrow \underline{\phi = -90^\circ} \end{cases}$$

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos\phi = 0 \quad (W)$$

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin\phi = -V_{rms} I_{rms} = -C\omega V_{rms}^2 = -\frac{I_{rms}^2}{C\omega}$$

خازن نیز مانند سلف یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی است

اگر سلف را مصرف‌کننده توان راکتیو فرض کنیم خازن تولیدکننده توان راکتیو است.

یعنی رفتار خازن و سلف از لحاظ گرفتن و پس دادن انرژی مخالف یکدیگر است

در $\frac{1}{4}$ سیکلی که سلف انرژی می‌گیرد. خازن انرژی پس می‌دهد

* ارتباط میان توان حقیقی، موهومی و ظاهری:

بنابراین سلف انرژی از مدار نمی کشد ولی ۳ سیم کشی که باعث

$$S = V_{rms} I_{rms}$$

$$P_{av} = S \cos\phi$$

$$Q = S \sin\phi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

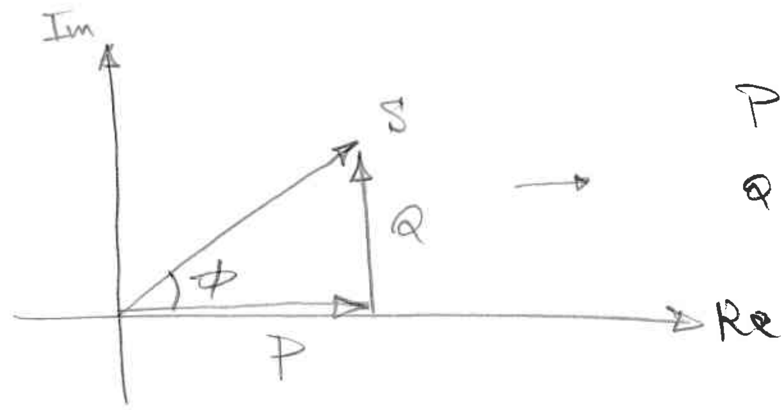
$$\vec{S} = \vec{V}\,\vec{\bar{I}} \qquad \bar{I} : I_{Conjucate}$$

$$\vec{S} = \vec{V}\,\vec{I}^{*}$$

$$\vec{S} = \vec{V}_{rms}\,\vec{\bar{I}}_{rms} \qquad \vec{S} = \vec{V}_{rms}\,\vec{I}^{*}_{rms}$$

$$\vec{S} = (V_{rms} \angle V)(I_{rms} \angle -I) = V_{rms} I_{rms} \angle V - I = V_{rms} I_{rms} \angle \phi$$

$$= \underbrace{V_{rms} I_{rms} \cos\phi}_{P} + j\,\underbrace{V_{rms} I_{rms} \sin\phi}_{Q}$$



$$\rightarrow \quad P = |S| \cos\phi$$

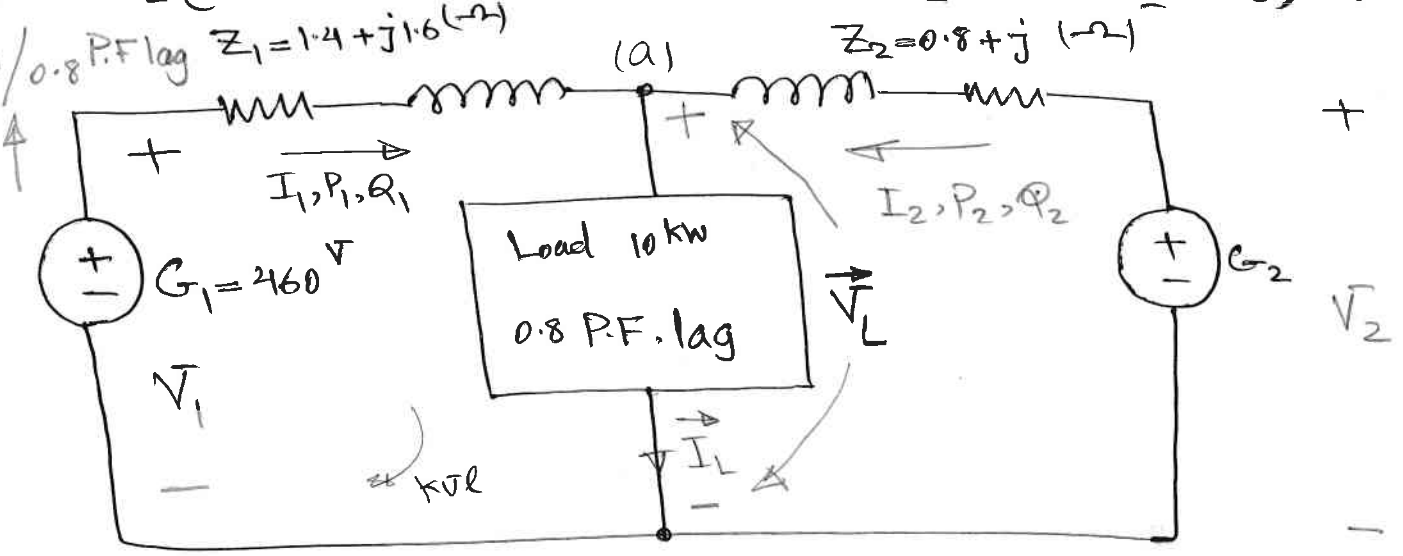
$$Q = |S| \sin\phi$$

$$|S| = V_{rms} I_{rms}$$

$$\angle S = \phi$$

$$\tan\phi = \frac{Q}{P} \rightarrow Q = P \tan\phi$$

مثال، در شکل زیر دو مولد G_1 و G_2 به عنوان دو منبع ولتاژ موازی، بار را تغذیه می کنند در شرایطی که بار توان 10^{kW} با ضریب قدرت 0.8 پس فاز دریافت می کند منبع 460^V توان 5kW را با ضریب قدرت 0.8 پس فاز تولید می کند. فازور $\vec{V}_L$ و $\vec{V}_2$ و توان حقیقی و موهومی تولیدی توسط منبع G_2 را حساب کنید



lag : پس فاز ← ولتاژ جلوتر از جریان است منظور این است که بار، بار سلفی است

0.8 P.F. lag : بار سلفی با ضریب توان 0.8

تفاوت حقیقی ، تفاوت موهومی دار

$\alpha + j\beta$

مدل خط انتقال

$\vec{V}_1 = 460\angle 0 \qquad P_1 = V_1 I_1 \cos\phi \rightarrow I_1 = \frac{P_1}{V_1\cos\phi} = \frac{5000}{460\times 0.8} = 13.6^A$

$\vec{I}_1 = 13.6\angle -\cos^{-1}(0.8) = 13.6\angle -36.87°$

بخاطر lag بودن جریان به ولتاژ منفی گذاشتیم

KVL: $\vec{V}_L = \vec{V}_1 - Z_1\vec{I}_1 = 460\angle 0° - (1.4+j1.6)(13.6\angle -36.87)$

$\rightarrow \vec{V}_l = 431.76\angle -0.79°$

$\frac{109}{۲}$

$$P_L = |\vec{V}_L||\vec{I}_L| \cos\phi \Rightarrow |\vec{I}_L| = \frac{10000\ \cancel{8000}}{431.76 \times 0.8} = 28.95\ A$$

$$\measuredangle I_L = \measuredangle V_L - \cos^{-1} 0.8 = -0.79^\circ - 36.87^\circ = -37.66^\circ$$

$$\vec{I}_L = 28.95 \measuredangle -37.66^\circ$$

$$\text{kcl (a)}: \vec{I}_L = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \rightarrow \vec{I}_2 = \vec{I}_L - \vec{I}_1 = 28.95 \measuredangle -37.66 - (13.6 \measuredangle -36.87)$$

$$\rightarrow \vec{I}_2 = 15.35 \measuredangle -38.36^\circ$$

بدست آوردن V_2 : در حلقه سمت راست KVL می‌زنیم

$$\text{kvl}: \vec{V}_2 = \vec{V}_L + Z_2 \vec{I}_2 = 431.76 \measuredangle -0.79 + (0.8 + j)(15.35 \measuredangle -38.36^\circ)$$

$$\vec{V}_2 = 450.88 \measuredangle -0.19^\circ$$

P_2 و Q_2 به دو روش بدست می‌آید: روش دوم:

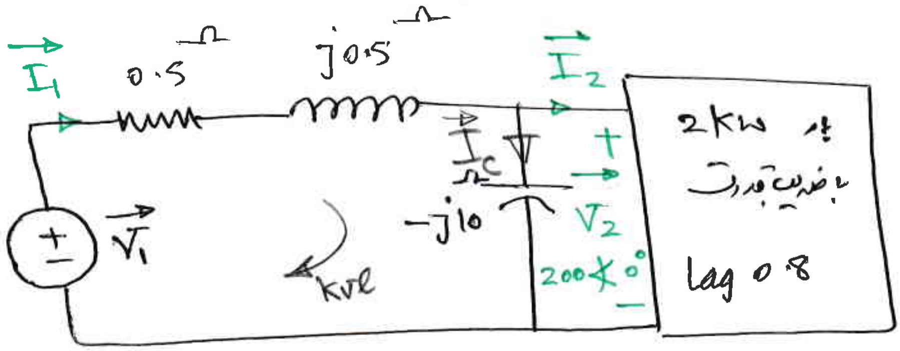
$$\vec{S}_2 = \vec{V}_{rms} \times \vec{I}^*_{rms} \qquad I^*_{rms} : I \text{ Conjucate}$$

$$\vec{S}_2 = (450.88 \measuredangle -0.19) \times (15.35 \measuredangle 38.36) = 6921 \measuredangle 38.17^\circ$$

$$\vec{S}_2 = 5441 + j\,4277.16 \rightarrow \begin{cases} P_2 = 5441\ (W) \\ Q_2 = 4277.16\ VAR \end{cases}$$

مثال: در مدار شکل زیر* فازور جریان I_2 را پیدا کنید فازور جریان I_1 و ولتاژ V_1 را نیز محاسبه کنید

توان حقیقی موهومی و ظاهر تولید شده توسط منبع را بدست آورید



$$P_2 = |\vec{V_2}||I_2| \cos\phi \Rightarrow 2000 = 200\,|\vec{I_2}| \times 0.8$$

$$\rightarrow |\vec{I_2}| = \frac{2000}{200 \times 0.8} = 12.5\,A$$ → مقدار موثر در نظر می‌گیریم چون نگفته

$$\angle I_2 = \angle V_2 - \cos^{-1} 0.8 = -36.86^\circ$$ جریان از ولتاژ عقب‌تر است.

(0)

$$\vec{I_2} = 12.5 \angle -36.86^\circ$$

$$I_c = j0.1 \times 200\angle 0 = 20 \angle 90^\circ$$

ادمیتانس خازن $(j\omega c \times \vec{V_c})$

$$kcl:\ \vec{I_1} = \vec{I_c} + \vec{I_2} = 20\angle 90^\circ + 12.5 \angle -36.86 = 16 \angle 51^\circ$$

$$kvl.\ \vec{V_1} = \underbrace{(0.5 + j0.5)}_{0.5\sqrt{2}\angle 45^\circ} I_1 + \vec{V_2} = 0.5\sqrt{2}\angle 45^\circ \times 16\angle 51^\circ + 200\angle 0^\circ$$

$$\rightarrow \vec{V_1} = 199 \angle 3^\circ$$

توان ظاهری $\vec{S_1} = \vec{V_1} \times \vec{I_1}^* = 199\angle 3^\circ (16\angle -51^\circ) = 3184 \angle -48^\circ\ (VA)$

$$= 2130 - j2366$$

$S = 3184 \ (VA)$

$P = 2130 \ Watt$

$Q = -2366 \ (VAR)$

سلف مصرف کننده توان راکتیو است

علت مصرف کننده بودن توان موهومی که تولید کننده بودن توان موهومی خازن است.

$$\vec{S}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{I}_2^{\,*} = 200 \angle 0^\circ \times 12.5 \angle 36.86 = 2500 \angle 36.86^\circ$$

$$= 2000 + j\,1499$$

$$\left.\begin{array}{l} P_2 = 2000 \ Watt \\ Q_2 = 1500 \ VAR \end{array}\right\} \text{توان های استفاده شده توسط بار}$$

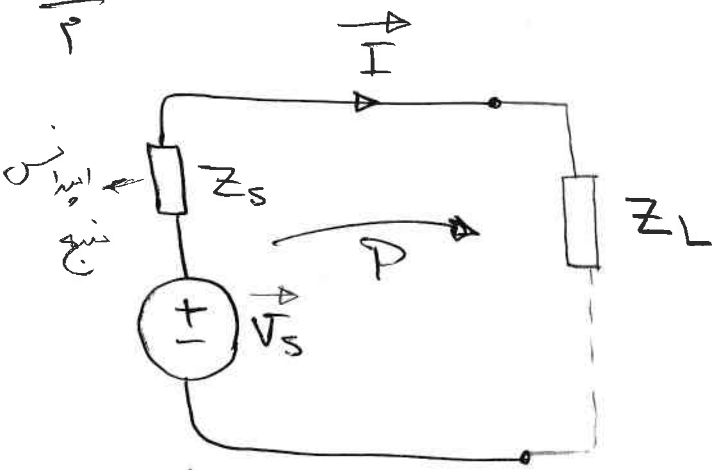
$$\vec{S}_c = \vec{V}_2 \vec{I}_c^{\,*} = 200 \angle 0 \times 20 \angle -90^\circ = 4000 \angle -90^\circ$$

$$\rightarrow Q_c = 4000 \ VAR$$

از 4000^{VAR} توان موهومی تولید شده توسط خازن 1500^{VAR} توسط بار مصرف می‌شود و 2366^{VAR} آن توسط منبع تولید مصرف می‌شود و مابقی آن توسط سلف مدل شده در منبع جریان یا به عبارتی خط تولید مصرف می‌شود

مسئله قبل را برای حالتی که امپدانس خازن ~~...~~ $-j30$ باشد حل نموده و نتایج را (بخصوص جریان‌ها) با مسئله قبل مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید ← انتظار که خازن $\frac{1}{3}$ قبل شده است.

قضیه انتقال توان حداکثر :



$$Z_s = R_s + jX_s$$

$$Z_L = R_L + jX_L$$

$$P_L = R_L I_{rms}^2$$

$$\vec{I} = \frac{\vec{V_s}}{Z_s + Z_L} \qquad \cancel{\vec{I}_{rms}} =$$

$$\vec{I} = \frac{\vec{V_s}}{R_s + R_L + j(X_s + X_L)} \longrightarrow I_{rms} = \frac{|\vec{V_s}|}{\sqrt{(R_s+R_L)^2 + (X_s+X_L)^2}}$$

$$P_L = \frac{R_L |\vec{V_s}|^2}{(R_s+R_L)^2 + (X_s+X_L)^2}$$

برای max کردن P_L باید $X_L = -X_s$ بشه

$$P_L = \frac{R_L |\vec{V_s}|^2}{(R_s+R_L)^2} \longrightarrow \frac{dP_L}{dR_L} = 0$$ تا P_L، Max شود.

$$\longrightarrow \frac{|\vec{V_s}|^2 (R_s+R_L)^2 - 2(R_s+R_L) R_L |\vec{V_s}|^2}{(R_s+R_L)^4} = 0$$

$$(R_s+R_L)^2 - 2(R_s+R_L)R_L = 0$$

$$\longrightarrow (R_s+R_L)(R_s-R_L) = 0 \quad \begin{cases} R_L = -R_s & \text{※ تناقض} \\ R_L = R_s & \checkmark \end{cases}$$

113/۳

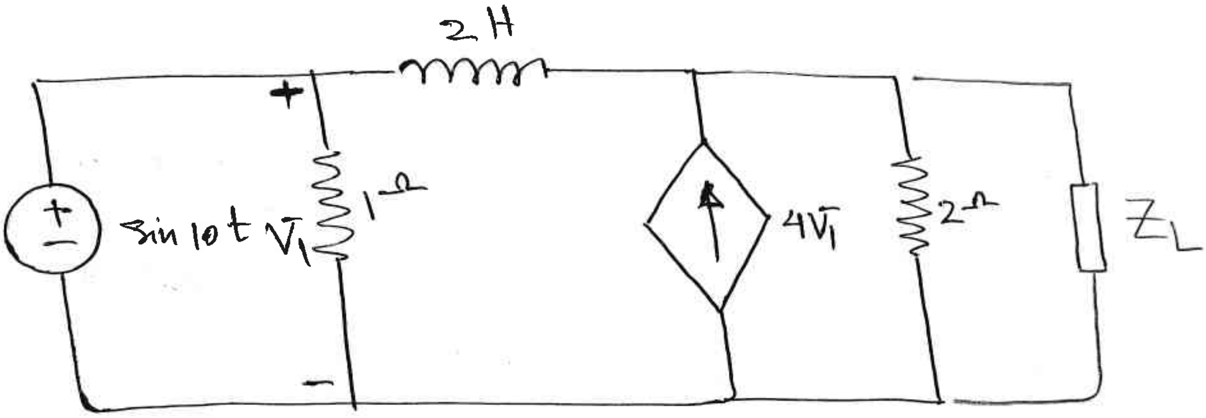
$$\longrightarrow P_{L_{max}} = \frac{R_L|\vec{V}_s|^2}{4R_L^2} = \frac{|\vec{V}_s|^2}{4R_L} = \frac{|\vec{V}_s|^2}{4R_s}$$

$$\longrightarrow \vec{Z}_L = \vec{Z}_S^*$$ تا بیشترین توان به Z_L منتقل شود

$$\vec{I} = \frac{\vec{V}_s}{Z_s + Z_L} = \frac{\vec{V}_s}{2R_s} = \frac{\vec{V}_s}{2R_L}$$

به منظور انتقال توان حداکثر منبع به بار باید امپدانس بار را مزدوج مختلط امپدانس منبع قرار دهیم

مثال: در مدار روبرو Z_L را طوری تعیین کنید که توان انتقالی به آن حداکثر شود.



کل مقاومت ساده شده منبع جریان با اندازه $1\frac{V}{R}$ است

$$\omega = 10 \ \frac{Rad}{s}$$

$\cancel{i = L\frac{dv}{dt}}$

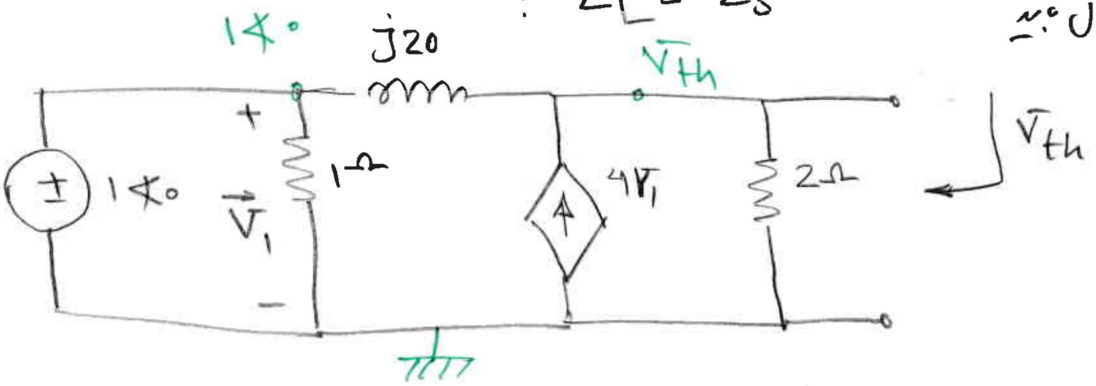
$\cancel{V = L\frac{di}{dt}}$

$\cancel{i = \frac{1}{L}\int v\,dt}$

در مدار معادل تونن دیده شده از دو سر Z_L را بدست می‌آوریم مقدار بدست آمده Z_s است

باشد $\vec{Z}_L = \vec{Z}_S^*$

حال باید



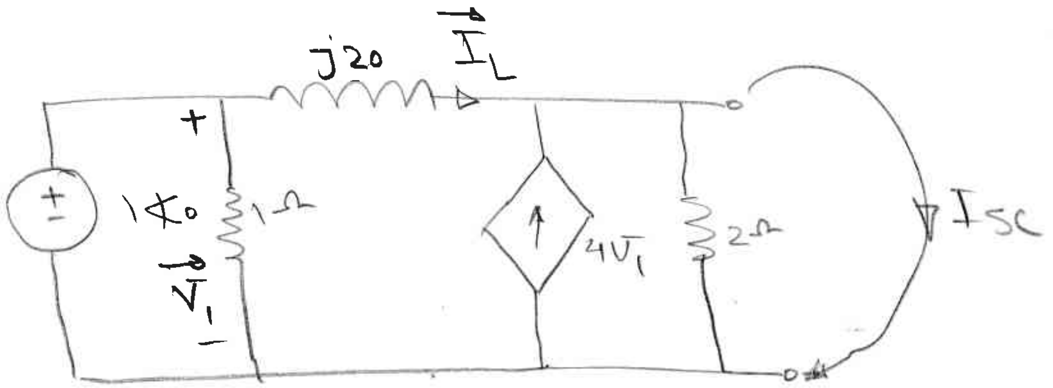
114 / ٢

~~V_{th}~~ $\vec{V}_1 = 1\angle 0° \rightarrow 4\vec{V}_1 = 4\angle 0°$

$$\frac{\vec{V}_{th} - 1}{j20} + \frac{\vec{V}_{th}}{2} = 4\angle 0°$$

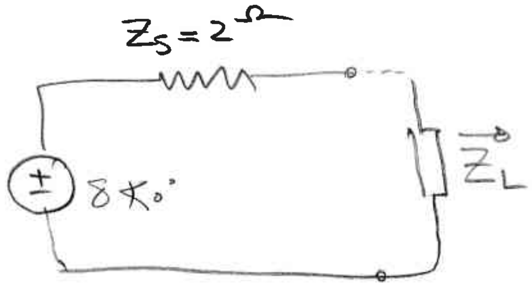
$$(0.5 - j0.05)\,\vec{V}_{th} + j0.05 = 4\angle 0°$$

$$\rightarrow \underline{\vec{V}_{th} = \frac{4 - j0.05}{0.5 - j0.05} = 8\angle 0°} \qquad \frac{4\angle -0.71}{0.5\angle -5.7} = \underline{8\angle 4.99}$$



$$I_{sc} = 4\vec{V}_1 + \frac{\vec{V}_1}{j20} = (4 - j0.05)\,\vec{V}_1 \simeq 4\vec{V}_1 = 4\angle 0°$$

$$Z_{th} = \frac{\vec{V}_{th}}{\vec{I}_{sc}} = 2\Omega$$



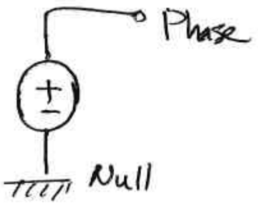
$$\vec{Z}_L = \vec{Z}_s^{\,*} = 2\Omega$$

فصل ٧ : ١ – ٣ – ٤ – ٥ – ٧ – 9 – 16 – 18 – 20

فصل ۱۱ مدارهای متقارن ۳ فاز

Phase(P) $V_{rms} = 220^V$ +

Null(N) $0V$



زمین منبع (انباشتی) الکترون است
هم می‌توانیم از آن الکترون بگیریم
هم به آن الکترون بدهیم

منابع 3 فاز

در ژنراتور ۳ سیم پیچ هر کدام 120° با هم اختلاف فاز دارند

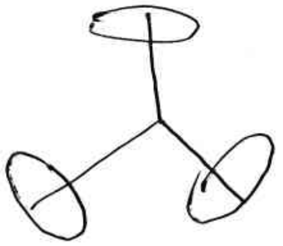
و هر سه فاز در همه جا با هم مشابه هستند غیر از اختلاف فازشان که هر کدام 120° با هم اختلاف فاز دارند

وقتی یکی از ولتاژها صفر ولت است
دو ولتاژ دیگر در نصف مقدار ماکزیممشان
قرار می‌گیرند

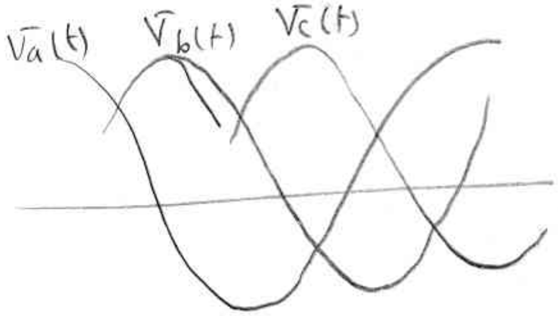
$$V_a(t) = \sqrt{2}\, V_{rms} \cos \omega t$$

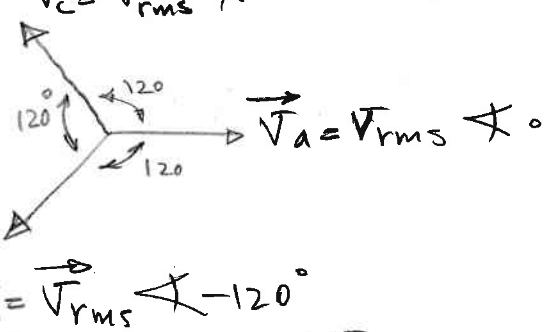
$$V_b(t) = \sqrt{2}\, V_{rms} \cos(\omega t - 120)$$

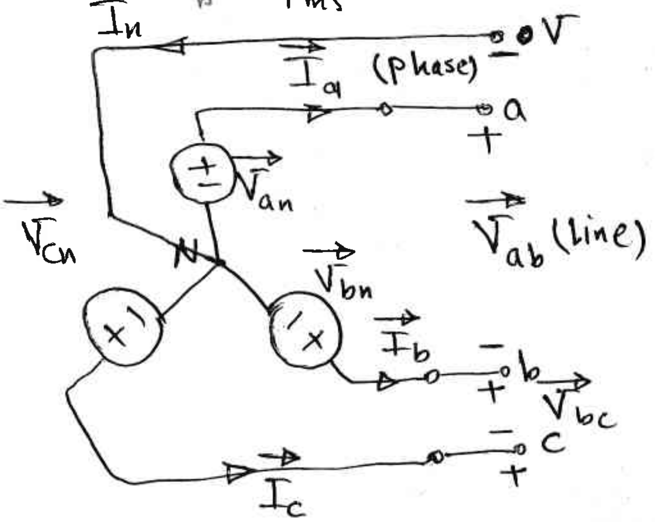
$$V_c(t) = \sqrt{2}\, V_{rms} \cos(\omega t - 240) = \sqrt{2}\, V_{rms} \cos(\omega t + 120)$$



حالت قرارگیری ۳ سیم پیچ‌ها
در ژنراتور







تولید انرژی 3 فاز:

به دو روش اتصال ۳ منبع تک فاز امکان پذیر است

الف: اتصال ستاره:

فازهای a، b، c

ولتاژ فاز (Phase) ولتاژ نسبت به زمین است

ولتاژ خط ولتاژ یکی از فازها نسبت به دیگری است. $\vec{V}_{ab}$ (Line)

روابط مربوط به اتصال ستاره:

۱) جریان‌های فاز با جریان‌های خط برابرند.

$$\begin{cases} \vec{I}_{a(ph)} = \vec{I}_{a(L)} \\ \vec{I}_{b(ph)} = \vec{I}_{c(L)} \\ \vec{I}_{c(ph)} = \vec{I}_{c(L)} \end{cases}$$

phase ← $\vec{I}_{a(ph)}$ ، $\vec{I}_{a(L)} \rightarrow$ Line

۲) ولتاژهای فاز متفاوت از ولتاژهای خط هستند

$$V_{Line}\begin{cases} \vec{V}_{ab} = \vec{V}_a - \vec{V}_b = \vec{V}_{an} - \vec{V}_{bn} \\ \vec{V}_{bc} = \vec{V}_{bn} - \vec{V}_{cn} = \vec{V}_b - \vec{V}_c \\ \vec{V}_{ca} = \vec{V}_c - \vec{V}_a \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{V}_a = V_{rms} \angle 0 \\ \vec{V}_b = V_{rms} \angle -120 \\ \vec{V}_c = V_{rms} \angle 120 \end{cases}$$

$$\text{Line}\begin{cases} \vec{V}_{ab} = V_{rms} \angle 0^\circ - V_{rms} \angle -120 = \sqrt{3}\, V_{rms} \angle 30^\circ \\ \vec{V}_{bc} = V_{rms} \angle -120 - V_{rms} \angle 120 = \sqrt{3}\, V_{rms} \angle -90^\circ \\ \vec{V}_{ca} = V_{rms} \angle 120 - V_{rms} \angle 0 = \sqrt{3}\, V_{rms} \angle 150^\circ \end{cases}$$

در تعادل ولتاژ خط در سیستم ستاره $\sqrt{3}$ برابر ولتاژ موثر فاز است:

ولتاژ $\vec{V}_{ab}$ ، 30° از ولتاژ $\vec{V}_a$ جلوتر است

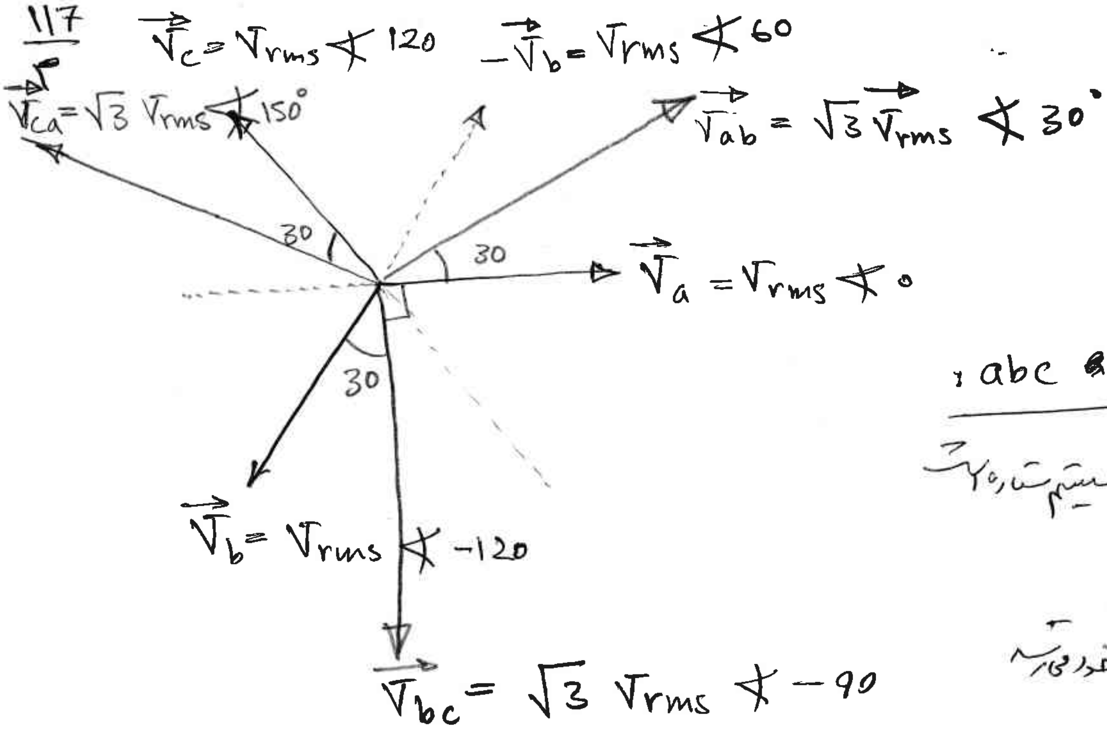
ولتاژ $\vec{V}_{bc}$ 30° از ولتاژ $\vec{V}_b$ (-120) جلوتر است $(\angle -90^\circ)$

(*): در اتصال ستاره

V_{Line} $\sqrt{3}$ phase

$$V_{Line} = \sqrt{3} \angle 30 \times V_{phase}$$

117



سیستم سه فاز با توالی abc :

منظور همان سیستم ستاره است

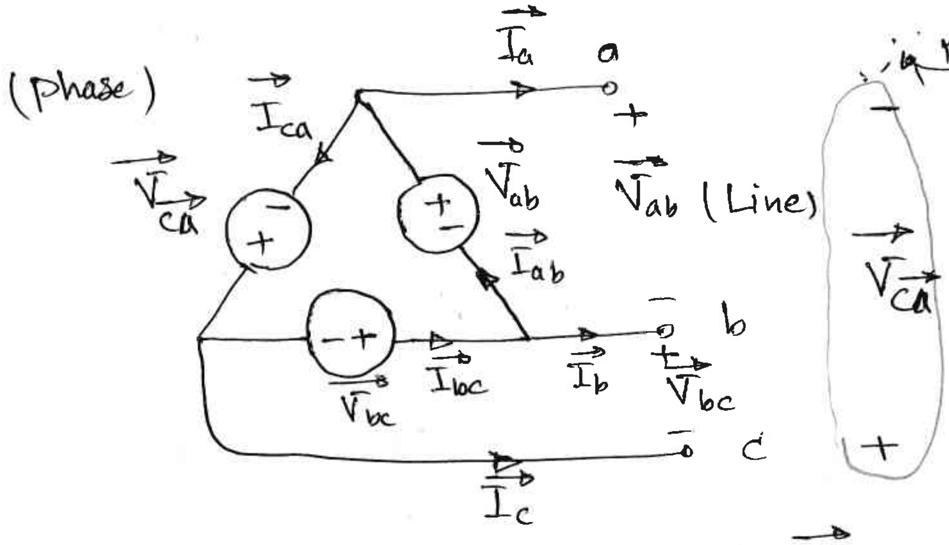
توالی abc :

اول V_a به میزان ماکزیمم خود می رسد

بعد b و بعد c

ب) اتصال مثلث در منبع — سه فاز

در این حالت Null نداریم



V_{Line} در این حالت ولتاژ فاز با ولتاژ خط برابر است.

$$\vec{V}_{ab}(ph) = \vec{V}_{ab}(L)$$
$$\vec{V}_{bc}(ph) = \vec{V}_{bc}(L)$$
$$\vec{V}_{ca}(ph) = \vec{V}_{ca}(L)$$

در این حالت

اگر داشته باشیم:

$$\vec{I}_{ab} = I_{rms} \angle 0°$$
$$\vec{I}_{bc} = I_{rms} \angle -120$$
$$\vec{I}_{ca} = I_{rms} \angle -240$$

$$I_a = \sqrt{3}\, I_{rms} \angle -30$$
$$I_b = \sqrt{3}\, I_{rms} \angle -150$$
$$I_c = \sqrt{3}\, I_{rms} \angle 90$$

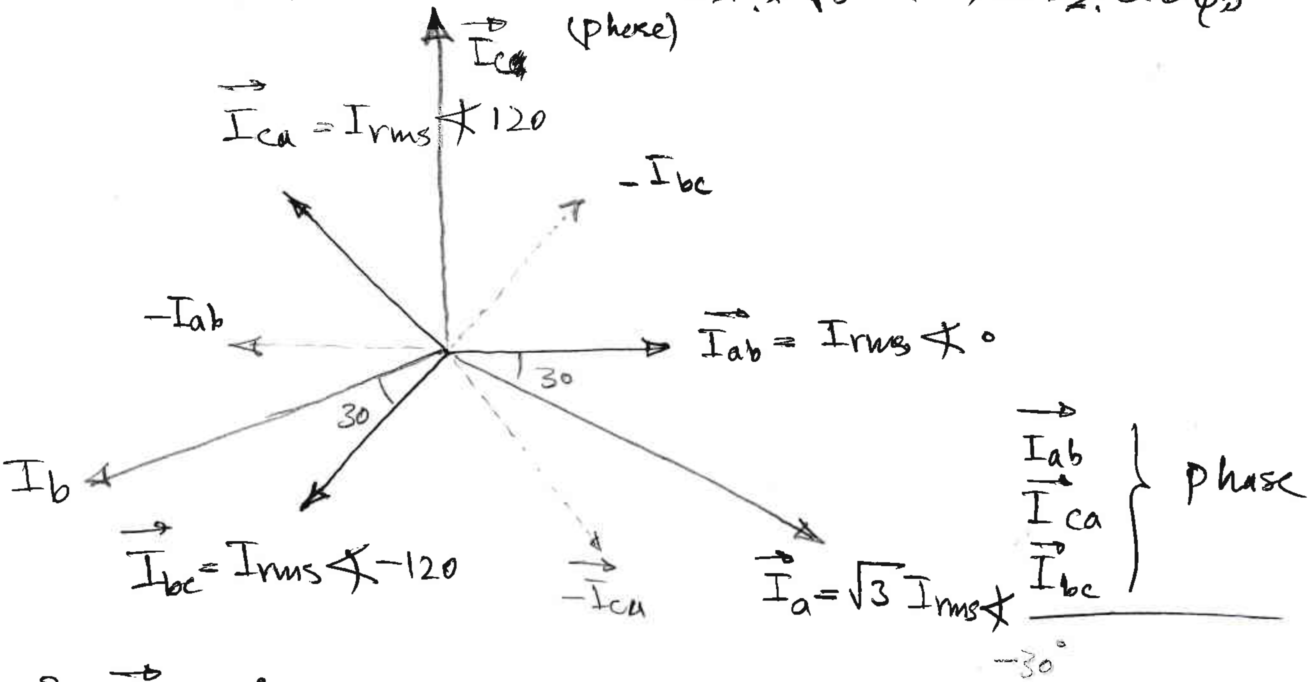
در اتصال Δ :

$$I_{Line} = \sqrt{3} \angle -30\, I_{phase}$$

118 / ۳

$$\begin{cases} \vec{I}_a = \vec{I}_{ab} - \vec{I}_{ca} \rightarrow \vec{I}_a = I_{rms}\angle 0 - I_{rms}\angle -240 = \sqrt{3}\, I_{rms}\angle -30^\circ \\ \vec{I}_b = \vec{I}_{bc} - \vec{I}_{ab} \rightarrow \vec{I}_b = \sqrt{3}\, I_{rms}\angle -150^\circ \\ \vec{I}_c = \vec{I}_{ca} - \vec{I}_{bc} \rightarrow \vec{I}_c = \sqrt{3}\, I_{rms}\angle 90^\circ \end{cases}$$

در این حالت جریان خط (Line) $\sqrt{3}$ برابر جریان فاز (phase) بوده و 30° از آن عقب تر است



تمرین: یک منبع سه فاز * با توالی به صورت abc بوده $\vec{V}_{bn} = 120\angle 0^\circ$ می‌باشد $\vec{V}_{ab}, \vec{V}_{ac}$, $\vec{V}_{ca}$ را محاسبه کنید

$$\vec{V}_{bn} = 120\angle 0^\circ$$

$$\begin{cases} \vec{V}_{an} = 120\angle 120^\circ \\ \vec{V}_{cn} = 120\angle -120 \end{cases}$$

$$\vec{V}_{ab} = \vec{V}_a - \vec{V}_b = \sqrt{3}\,|\vec{V}_a|\angle 30 \quad \text{یا} \quad \sqrt{3}\angle 30 \times \vec{V}_a = 120\sqrt{3}\angle 150^\circ$$

$$\vec{V}_{bc} = \vec{V}_b - \vec{V}_c = 120\sqrt{3}\angle 30$$

$$\vec{V}_{ca} = \vec{V}_c - \vec{V}_a = 120\sqrt{3}\angle -90$$

$\frac{119}{3}$ $\vec{V}_{an}$

مثال: اگر یک منبع ۳ فاز مثلث اگر توالی فازها بصورت abc بوده و $\vec{V}_{ab}=1733\angle 0$ باشد ،

مفروض:

$\vec{V}_{bn}$ و $\vec{V}_{cn}$ را بدست آورید.

$$\cancel{1733\angle 0 = \vec{V}_a - \vec{V}_b = \frac{1733}{\sqrt{3}}\angle 0 - \frac{1733}{\sqrt{3}}\angle -120}$$

$$\vec{V}_{ab} = 1733\angle 0 = \vec{V}_{an} - \vec{V}_{bn} = V_{rms}\angle\alpha - V_{rms}\angle \alpha-120$$

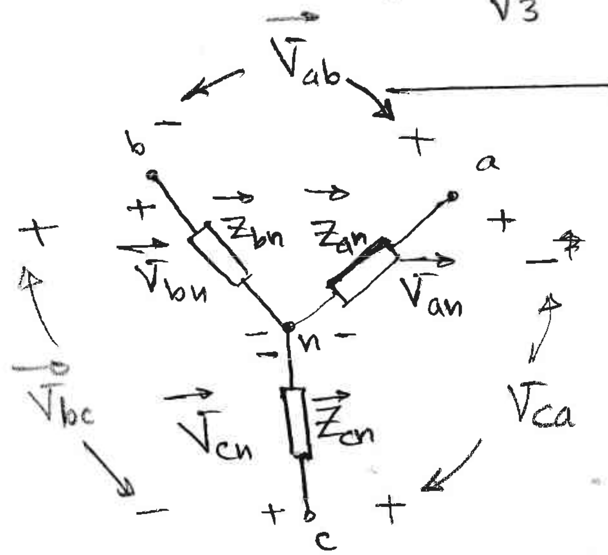
$$\vec{V}_{bc} = 1733\angle -120$$

$$\vec{V}_{ca} = 1733\angle 120$$

$$V_{rms} = \frac{1733}{\sqrt{3}} \quad , \quad \alpha = -30$$

$$\rightarrow \cancel{\vec{V}_{ab}=} \rightarrow \vec{V}_{an} = \frac{1733}{\sqrt{3}}\angle -30 \qquad \vec{V}_{bn} = \frac{1733}{\sqrt{3}}\angle -150$$

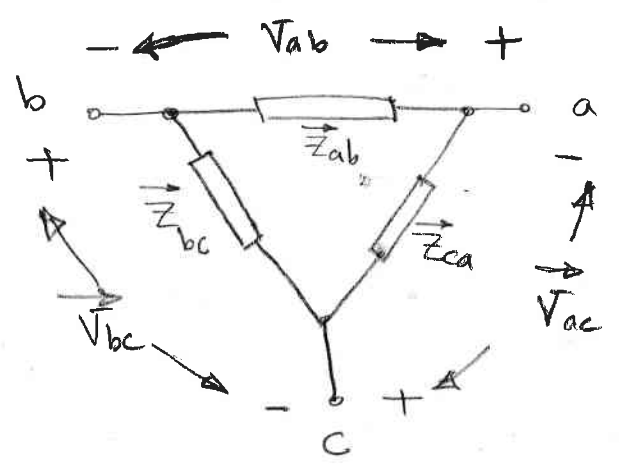
$$\vec{V}_{cn} = \frac{1733}{\sqrt{3}}\angle 90$$



* بارهای ۳ فاز متعادل: $\vec{Z}_{an} = \vec{Z}_{bn} = \vec{Z}_{cn} = \vec{Z}_Y$

$$I_n = I_a + I_b + I_c = 0$$

اگر از n یک سیم به طرف GND بکشیم در آن سیم جریانی وجود نخواهد داشت.



$$\vec{Z}_{ab} = \vec{Z}_{bc} = \vec{Z}_{ba} = \vec{Z}_\Delta$$

ممکن است منابع ستاره باشند ولی بار مثلث باشد و بالعکس و ستاره یا مثلث بودن منابع در صورت تعادل قابل تشخیص نیست

$\frac{120}{3}$

$\vec{Z}_\Delta = 3\vec{Z}_\lambda$

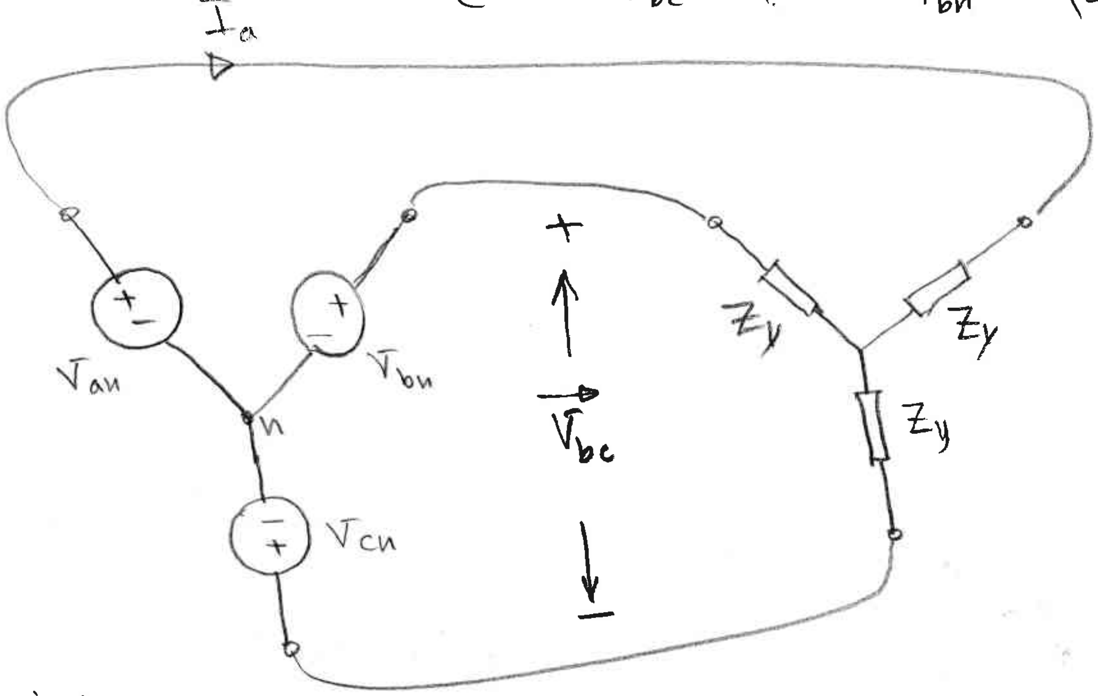
برای معادل سازی بارهای * و Δ باید شرط زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} |\vec{Z}_\Delta| = 3|\vec{Z}_\lambda| \\ \measuredangle Z_\Delta = \measuredangle Z_y \end{cases}$$

معادل بودن به این معناست که در ورودی هیچ گونه اندازه‌گیری به منظور یافتن تمایز نمی‌توان داشت.

مثال: در یک سیستم ۳ فاز متعادل $\vec{V}_{an}$ $\vec{V}_{an} = 240\measuredangle -90^\circ$ در منبع به صورت λ متصل شده و توالی abc و سرعت $W = 500 \frac{Rad}{S}$ دارد. این منبع به یک بار ۳ فاز با اتصال λ متصل شده و در هر فاز خازن $50\,\mu F$ و مقاومت $50\,\Omega$ و یک سلف $50\,mH$ موازی شده است.

مطلوب است الف) $\vec{V}_{bn}$ ب) $\vec{V}_{bc}$ ج) $\vec{I}_a$



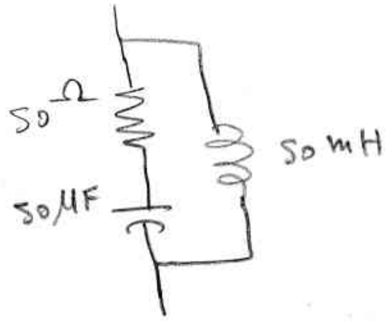
الف)

$$\begin{cases} \vec{V}_{an} = 240\measuredangle -90^\circ \\ \vec{V}_{bn} = 240\measuredangle \cancel{-240} -210 \\ \vec{V}_{cn} = 240\measuredangle 30^\circ \end{cases}$$

ب) $\vec{V}_{bc} = \vec{V}_{bn} - \vec{V}_{cn} =$

$\sqrt{3}\measuredangle 30 \times \vec{V}_{bn} = 240\sqrt{3}\measuredangle -180$

ج) $\vec{I}_a = \frac{\vec{V}_{an}}{Z_y}$



$$Z_L = jwl = j500 \times 50 \times 10^{-3} = j25\,\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{jwC} = \frac{1}{j500 \times 50 \times 10^{-6}} = -j40$$

$$\vec{Z}_y = (R + Z_C) \,||\, Z_l = (50 - j40) \,||\, j25$$

$$= \frac{50 - j40}{1 + \frac{50 - j40}{j25}} = 42 \angle -47^\circ$$

$$\frac{64 \angle -38.65}{25 \angle 90}$$

$$1\angle 0 + 2.56 \angle 51.35$$

$$3.279 \angle 37$$

$$\vec{I}_a = \frac{\vec{V}_{an}}{Z_y} = \frac{240 \angle -90}{42 \angle -47} = \underline{5.6 \angle -43^\circ}$$

<u>توان در سیستم‌های ۳ فاز:</u>

در حالت دائمی سینوسی:

$$\begin{cases} \vec{V} = V_{rms} \angle \alpha \\ \vec{I} = I_{rms} \angle \beta \end{cases}$$

$$\vec{S} = \vec{V} \vec{I}^* = V_{rms} I_{rms} \angle \alpha - \beta$$

$$= V_{rms} I_{rms} \angle \phi$$

$$= \underbrace{V_{rms} I_{rms} \cos\phi}_{P \text{ توان حقیقی}} + j \underbrace{V_{rms} I_{rms} \sin\phi}_{Q \text{ توان موهومی}}$$

<u>در حالت سه فاز با آرایش ستاره:</u>

$$\vec{S}_{an} = \vec{S}_{bn} = \vec{S}_{cn} = \vec{S}_{1ph}$$

$\vec{S}_{1ph}$ ، توان ظاهری تک فاز (در هر فاز)

توان ظاهری در حالت مثلث:

هر فاز بین ولتاژ خط قرار گرفته، بنابراین هر کدام از فازها بین دو خط قرار دارد

$$\vec{S}_{ab} = \vec{S}_{bc} = \vec{S}_{ca} = \vec{S}_{1ph}$$

توان ۳ فاز:

$$\vec{S}_{3ph} = 3\vec{S}_{1ph} = 3 V_{rms} I_{rms} \angle \phi$$
$$= 3 V_{1ph} I_{1ph} \angle \phi$$

$$\begin{cases} V_{1ph}: & \text{ولتاژ موثر دو سر عناصر هر شاخه} \\ I_{1ph}: & \text{جریان عبوری از عناصر هر شاخه} \end{cases}$$

* در اتصال ستاره:

$$\begin{cases} \vec{I}_L = \vec{I}_{1ph} & |I_l| = |I_{1ph}| \\ \vec{V}_L = (\sqrt{3} \angle 30)\, \vec{V}_{1ph} & |\vec{V}_L| = \sqrt{3}\, |\vec{V}_{1ph}| \end{cases}$$

$$\vec{S}_{3ph} = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \angle \phi$$

ϕ: اختلاف فاز ولتاژ و جریان فاز ۱ است

$$\rightarrow \vec{S}_{3ph} = \sqrt{3}\, V_L I_L \angle \phi$$

* در اتصال مثلث:

$$\begin{cases} \vec{V}_l = \vec{V}_{1ph} \rightarrow |\vec{V}_l| = |\vec{V}_{1ph}| \\ \vec{I}_L = (\sqrt{3} \angle -30)\, \vec{I}_{1ph} \end{cases}$$

$$|\vec{I}_L| = \sqrt{3}\, |\vec{I}_{1ph}|$$

$\frac{123}{۳}$

$$\vec{S}_{3ph} = 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \angle \phi = \sqrt{3} \; V_L I_L \angle \phi$$

ϕ : اختلاف فاز ولتاژ و جریان هر فاز

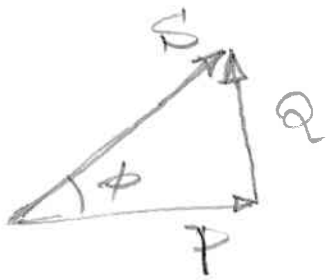
$$\begin{cases} \vec{S}_{3ph} = \sqrt{3} \; \vec{V}_L \vec{I}_L^{*} \\ \vec{S}_{3ph} = \sqrt{3} \; V_L I_L \cos\phi + j\sqrt{3} \; V_L I_L \sin\phi \end{cases}$$

توان ظاهری حالت سه فاز :

$$P_{3ph} = 3P_{1ph} = \sqrt{3} \; V_L I_L \cos\phi \cdot (\text{Watt})$$

$$Q_{3ph} = 3Q_{1ph} = \sqrt{3} \; V_L I_L \sin\phi \; (\text{VAR})$$

$$S_{3ph} = \sqrt{3} \; V_L I_L$$



$$P_{3ph} = S_{3ph} \cos\phi$$

$$Q_{3ph} = S_{3ph} \sin\phi$$

یک بار ۳ فاز با ولتاژ خط $V_L = 2400^V$ ، توان 500 KVA را در ضریب توان 0.8 پس فاز دریافت می‌کند.

الف : ولتاژ خط ب : جریان خط ج : توان حقیقی ، موهومی و ظاهری ۳ فاز را بدست آورید

$$V_L I_L \times 0.8 = 500 \times 10^3 \rightarrow 2400 \times I_L = \frac{500 \times 10^3}{0.8} \quad I_L = 260^A$$

$$\vec{S}_{3ph} = \underbrace{\sqrt{3} \; V_L I_L \cdot 0.8}_{P} + j \underbrace{\sqrt{3} \; V_L I_L \times 0.6}_{Q}$$

$$S_{3ph} = \sqrt{3} V_L I_L = 1080799^{(VA)}$$

$$\vec{S}_{3ph} = \underbrace{864639}_{Watt} + j \underbrace{648479}_{VAR}$$

$\frac{124}{۲}$

$|V_L| = 2400\,V$

$|S_{3ph}| = 500\,kVA$

$P.F. = 0.8$

الف) $\vec{V}_L = 2400 \angle 0$

ب) $S_{3ph} = \sqrt{3}\, V_L I_L \rightarrow |\vec{I}_L| = \frac{500 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 2400} = 120\,A$

$$\vec{I}_L = 120 \angle \underbrace{-\cos^{-1} 0.8}_{\text{پس‌فاز}} = 120 \angle -36.8^\circ$$

$$\vec{S}_{3ph} = \sqrt{3}\, \vec{V}_L \vec{I}_L^{*} = \sqrt{3} \times 2400 \angle 0^\circ \times 120 \angle 36.8 = 500\,kVA \angle 36.8$$

$$= P_{3ph} + j\, Q_{3ph}$$

$S_{3ph} = 500\,kVA$

$P_{3ph} = 400\,kW$

$Q_{3ph} = 300\,kVAR$

در اینجا هر دو طرف را تبدیل به ستاره می‌کنیم (منبع تولید و بار) و سیگنال‌ها را بدست می‌آوریم

با تبدیل هر دو به ستاره مسئله ۳ فاز تبدیل به تک فاز می‌شود و هر کدام از فازها 120 درجه با دیگری

تفاوت دارد.