

فصل ۲

انشعابات و خانوادگی لجستیک

در سال میلادی ۱۹۷۶، یک زیست‌شناس جمعیت به نام رابرت می^۱، یک مقاله‌ی مروری در مورد مدل‌های ریاضی ساده با دینامیک‌های بسیار پیچیده نوشت. او در مقاله‌اش گزارشی اصولی از آنچه که در آن زمان در مورد دینامیک نگاشت‌های لجستیک و معادلات تفاضلی نظیر آن‌ها شناخته شده بود، ارائه و همچنین چندین مسئله‌ی باز در مورد آنها مطرح کرد. مقدمه‌ی او با این عبارت به پایان رسید: «این بررسی را با یک درخواست برای معرفی این معادلات تفاضلی در دروس ریاضیات مقدماتی به پایان می‌رسانم. درک شهودی دانشجویان با دیدن رفتار غیرقابل باوری که معادلات غیرخطی ساده می‌توانند از خود بروز دهند، می‌تواند غنی‌تر شود.»

در این فصل به‌طور مفصل به بسیاری از ویژگی‌های نگاشت‌های لجستیک که در مقاله‌ی او ارائه شده است، می‌پردازیم. بحث را با بررسی دامنه جذب نقاط ثابت این نگاشت‌ها شروع می‌کنیم؛ یعنی برای یک μ معین و نقطه ثابت $x = c$ ، مجموعه‌ای از $x \in [0, 1]$ ها را جستجو می‌کنیم که تحت تکرارهای نگاشت $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ به c همگرا می‌شوند. این نگاشت‌ها برای نشان دادن بسیاری از ایده‌هایی که در فصل قبل با آن‌ها آشنا شدیم و همچنین برای ایجاد انگیزه در معرفی مفاهیم جدید در این فصل استفاده می‌شوند. مطالعه‌ی چگونگی تغییر ماهیت دینامیک چنین نگاشت‌هایی، هنگامی که پارامتر تغییر می‌کند، نظریه انشعاب نامیده می‌شود. نکته‌ی جالب در سراسر این بحث، این است که چگونه رفتار دینامیکی خانواده نگاشت‌هایی مانند L_μ هنگامی که μ در محدوده‌ای از مقادیر افزایش می‌یابد، تغییر می‌کند.

دامنه جذب

فرض کنیم $f : I \rightarrow I$ تابعی تعریف شده بر بازه‌ی I باشد. در این صورت

تعریف. دامنه جذب نقطه ثابت c از نگاشت $f(x)$ را که با $B_f(c)$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای از $x \in I$ هاست که برای آنها دنباله‌ی $x_n = f^n(x)$ به c همگرا باشد؛ یعنی

$$B_f(c) = \{x \in I \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = c\}.$$

بزرگترین بازه‌ی شامل c و مشمول در دامنه جذب را دامنه جذب بلافاصل c می‌نامیم و آن را با $W_f(c)$ نشان می‌دهیم.

¹Robert M. May

ابتدا نشان می‌دهیم که اگر c یک نقطه ثابت جاذب باشد، آنگاه $W_f(c)$ به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از I باز است. شایان ذکر است که اگر I یک بازه‌ی بسته یا نیمه باز با نقاط انتهایی a و b باشد که $a < b$ ، آنگاه زیربازه‌ی $J \subseteq I$ به‌عنوان یک زیرمجموعه از I باز است هرگاه تمام I یا یک بازه‌ی باز و یا برای عددی مانند d که $a < d < b$ ، به‌صورت $(a, d]$ یا $[d, b)$ باشد.

گزاره ۳. فرض کنیم $f : I \rightarrow I$ تابعی پیوسته بر زیر بازه‌ی I از اعداد حقیقی، شامل نقطه ثابت جاذب c از f باشد. در این صورت $W_f(c)$ به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از I ، باز است.

اثبات. ابتدا فرض کنیم I یک بازه‌ی باز باشد. از آنجا که c یک نقطه ثابت جاذب است، عدد $\varepsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = c, x \in I_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ طبق تعریف $W_f(c)$ بزرگترین زیربازه از I شامل c است که برای هر $x \in W_f(c)$ داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = c$. فرض کنیم $W_f(c) = [a, b]$ یک بازه‌ی بسته باشد. در این صورت عدد طبیعی r موجود است به‌طوری که $f^r(a) \in I_\varepsilon$. تابع f^r نیز پیوسته است. بنابراین نقاطی که در همسایگی a هستند نیز به I_ε نگاشته می‌شوند که منجر به تناقض می‌شود. به بیان دقیق‌تر، برای

$$\eta = \min\{|f^r(a) - (c - \varepsilon)|, |(c + \varepsilon) - f^r(a)|\},$$

عدد $\delta > 0$ چنان موجود است که اگر $|x - a| < \delta$ ، آنگاه $|f^r(x) - f^r(a)| < \eta$. بنابراین نقاطی نظیر $x < a$ در همسایگی a وجود دارند که $f^r(x) \in I_\varepsilon$ ، یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{rn}(x) \rightarrow c$ ، که تناقض است. پس $a \notin W_f(c)$. برهان مشابه نشان می‌دهد که $b \notin W_f(c)$ و از این رو $W_f(c)$ یک بازه‌ی باز است.

اگر I یک بازه‌ی بسته مانند $I = [a, b]$ با $a < b$ باشد و $c \in (a, b)$ ، آنگاه استدلال بالا هنوز معتبر است با این تفاوت که نمی‌توانیم این احتمال که a یا b (یا هر دو) به دامنه جذب بلافاصله تعلق دارند را رد کنیم. هنگامی که $c = a$ ، دامنه جذب بلافاصله به شکل $[a, d)$ ($a < d < b$)، یا $I = [a, b]$ است. برهان مشابه زمانی که $c = b$ و همچنین زمانی که I یک بازه‌ی نیمه‌باز است، به کار برده می‌شود. $\square$

دامنه جذب یک نقطه ثابت، ویژگی جالب دیگری دارد که برای بیان آن به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف. مجموعه‌ی $J \subset I$ یک مجموعه‌ی پایا برای دستگاه دینامیکی (f, I) است هرگاه داشته باشیم $f(J) \subseteq J$.

در گزاره‌ی بعد نشان می‌دهیم دامنه جذب نقطه ثابت c از f ، یک مجموعه‌ی پایا تحت f است.

گزاره ۴. فرض کنیم $f : I \rightarrow I$ تابعی پیوسته تعریف شده بر بازه‌ی I با نقطه ثابت $c \in I$ باشد.

(آ) دامنه جذب $B_f(c)$ تحت f پایاست.

(ب) اگر c یک نقطه ثابت جاذب از f باشد، آنگاه $W_f(c)$ تحت f پایاست.

اثبات. (آ) فرض کنیم $x \in B_f(c)$. بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = c$. بنا به پیوستگی f داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = f(c) = c$. به عبارت دیگر، $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(f(x)) = c$. پس $f(x) \in B_f(c)$.

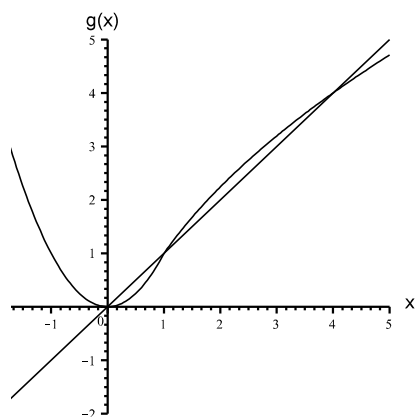
ب) اثبات قسمت دوم را به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌کنیم (راهنمایی: کافیت دقت کنید که تصویر هر بازه تحت یک تابع پیوسته، یک بازه خواهد بود). $\square$

مثال. گیریم $f(x) = x^2$. در این صورت $c = 0$ و $c = 1$ نقاط ثابت این نگاشت هستند. از آنجا که $f'(0) = 0$ و $f'(1) = 2$ هر دو نقطه ثابت هذلولوی اند که $c = 0$ مجانبی پایدار و $c = 1$ ناپایدار است. به وضوح $B_f(0) = (-1, 1)$ و $B_f(1) = \{-1, 1\}$. اغلب $c = \infty$ را به عنوان نقطه ثابت جاذب از f در نظر می‌گیریم. بنابراین $B_f(\infty) = [-\infty, -1) \cup (1, \infty]$ (این مطلب در فصل‌های بعد بیشتر توضیح داده خواهد شد).

مثال. نگاشت $g : [-2, 4] \rightarrow [-2, 4]$ را با ضابطه‌ی

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1, \\ 3\sqrt{x} - 2 & 1 < x \leq 4, \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم (شکل ۱.۲). نگاشت g دارای سه نقطه ثابت $c_1^* = 0$ ، $c_2^* = 1$ و $c_3^* = 4$ است. به سادگی می‌توان نشان داد که $B_g(0) = (-1, 1)$ و $B_g(4) = [-2, -1) \cup (1, 4]$. همچنین $W_g(0) = B_g(0) = (-1, 1)$ و $W_g(4) = (1, 4]$ در حالی که $W_g(1) = \{1\}$.



شکل ۱.۲: نمودار g .

تذکر. ملاحظه کنید که در مثال قبل دامنه جذب دو نقطه ثابت $c_1^* = 0$ و $c_3^* = 4$ جدا از هم هستند که یک اتفاق تصادفی نیست و در حالت کلی با توجه به یکتایی حد یک دنباله درست است.

شایان ذکر است که یافتن دامنه جذب یک نقطه ثابت در حالت کلی کار ساده‌ای نیست. مؤثرترین روش برای تعیین دامنه جذب، روش تابع لیپانوف^۲ است که در فصل‌های بعد شرح داده خواهد شد.

^۲Liapunov

مثال. نگاشت $f: I \rightarrow I$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + 1/4$ را در نظر می‌گیریم. تنها نقطه ثابت این نگاشت $c = \frac{1}{2}$ است که یک نقطه ثابت غیرهذلولوی نیمه پایدار از چپ است. چون $c = \frac{1}{2}$ جاذب نیست، گزاره‌ی ۳ را نمی‌توان برای آن به کار برد. برای یافتن دامنه جذب این نقطه ثابت، به روش زیر عمل می‌کنیم.

اگر $x \neq \frac{1}{2}$ ، آنگاه $f(x) > x$ (این نامعادله متناظر با $(2x-1)^2 > 0$ است) و در چنین حالتی بنا به استقرا خواهیم دید که $f^n(x)$ یک دنباله‌ی صعودی است. به‌علاوه اگر $x < \frac{1}{2}$ ، آنگاه $f(x) < \frac{1}{2}$ و بنا به استقرا برای هر عدد طبیعی n داریم $f^n(x) < \frac{1}{2}$. پس نتیجه می‌شود برای $x < \frac{1}{2}$ ، دنباله‌ی تکرارهای $f^n(x)$ صعودی و از بالا کراندار است. پس به یک نقطه ثابت نگاشت همگراست. از آنجا که $c = \frac{1}{2}$ تنها نقطه ثابت نگاشت است برای $x < \frac{1}{2}$ داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{1}{2}$. بنابراین از آنجا که f در سمت راست نقطه ثابت ناپایدار است، نتیجه می‌گیریم $B_f(\frac{1}{2}) = (-\infty, \frac{1}{2}]$.

مثال. نگاشت لجستیک $L_\mu: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را با ضابطه‌ی $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای $\mu = 1$ ، $x = 0$ یک نقطه ثابت است که از راست مجانبی پایدار و از چپ ناپایدار است. در این حالت همچنان گزاره‌ی ۳ را می‌توان به کار برد و از آن نتیجه گرفت که دامنه جذب بلافاصل $c = 0$ ، برای عددی مانند $0 < d < 1$ ، بازه‌ای به‌صورت $[0, d]$ و یا برابر با $[0, 1]$ است. در بخش بعد نشان می‌دهیم که برای این مثال، دامنه جذب بلافاصل $c = 0$ ، دقیقاً بازه‌ی $[0, 1]$ است.

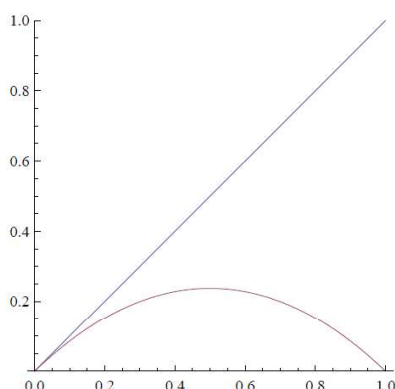
۱.۲ خانواده‌ی نگاشت‌های لجستیک

نگاشت‌های لجستیک $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ توابعی از دو متغیر حقیقی x و μ هستند که x را به بازه‌ی $[0, 1]$ و μ را به بازه‌ی $(0, 4]$ محدود می‌کنیم تا یک دستگاه دینامیکی بر $[0, 1]$ به‌دست آوریم. پارامتر μ را تغییر می‌دهیم و سپس تابع L_μ را برای مقدار ثابت و معین از پارامتر مطالعه می‌کنیم. هنگامی که پارامتر μ تغییر می‌کند، شاهد تغییر در ماهیت تابع L_μ متناظر خواهیم بود که به آن انشعاب می‌گوییم. برای مثال اگر $0 < \mu \leq 1$ ، آنگاه L_μ دقیقاً یک نقطه ثابت در $[0, 1]$ دارد که نقطه‌ی $c = 0$ و مجانبی پایدار است. هنگامی که μ افزایش می‌یابد و مقادیر بزرگتر از یک را اختیار می‌کند، یک نقطه ثابت جدید $c = 1 - 1/\mu$ ، در $[0, 1]$ ایجاد می‌شود. بنابراین اکنون L_μ دو نقطه ثابت دارد که نقطه ثابت $c = 0$ ناپایدار و $c = 1 - 1/\mu$ برای $1 < \mu \leq 3$ پایدار است. در $\mu = 3$ ، ماهیت نقاط ثابت تغییر می‌کند. در این بخش، دامنه جذب نقاط ثابت را با افزایش μ از 0 تا 3 تعیین می‌کنیم. خواهیم دید که دینامیک (رفتار طولانی مدت) تکرارهای $L_\mu(x)$ برای این محدوده از مقادیر μ کاملاً خوش رفتار است.

تابع $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، ماکسیم مقدارش را که برابر با $\mu/4$ است، در $x = \frac{1}{2}$ اختیار می‌کند. در نتیجه، برای $0 < \mu \leq 4$ ، L_μ بازه‌ی واحد $[0, 1]$ را بر خودش می‌نگارد. بعداً آنچه را که به ازای $\mu > 4$ اتفاق می‌افتد، بررسی خواهیم کرد. با نشان دادن این که دامنه جذب L_μ ، برای $0 < \mu \leq 1$ کل دامنه‌ی L_μ ، یعنی $[0, 1]$ است، شروع می‌کنیم. در این حالت $\circ$ را جاذب سراسری می‌نامیم.

قضیه. نگاشت لجستیک $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ ، را برای $0 \leq x \leq 1$ در نظر می‌گیریم. اگر $0 < \mu \leq 1$ ، آنگاه $B_{L_\mu}(0) = [0, 1]$ و اگر $1 < \mu \leq 3$ ، آنگاه $B_{L_\mu}(1 - 1/\mu) = (0, 1)$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $0 < \mu \leq 1$. برای $\mu \in (0, 1)$ دیدیم که تنها نقطه ثابت L_μ در $[0, 1]$ ، $x = 0$ است (نقطه ثابت دیگر $1 - 1/\mu$ در $[0, 1]$ واقع نمی‌شود) که مجانبی پایدار است (به‌طور دقیق‌تر فقط در سمت راست مجانبی پایدار است، اما چون L_μ را به $[0, 1]$ محدود کردیم، این نقطه ثابت را مجانبی پایدار در نظر می‌گیریم). از سوی دیگر برای $0 < x < 1$ داریم $0 < 1 - x < 1$ و از آنجا که $0 < \mu \leq 1$ پس $0 < \mu(1 - x) < 1$ و در نتیجه $0 < L_\mu(x) = \mu x(1 - x) < x < 1$. به روشی مشابه، $L_\mu^2(x) < L_\mu(x)$ و با ادامه‌ی این روند درمی‌یابیم که دنباله‌ی $(L_\mu^n(x))$ نزولی و از پائین به صفر کراندار است. در نتیجه باید به تنها نقطه ثابت نگاشت یعنی 0 همگرا شود. حال چون $L_\mu(1) = 0$ ، پس $B_{L_\mu}(0) = [0, 1]$.



شکل ۲.۲: برای $0 < \mu < 1$ نقطه‌ی $x = 0$ تنها نقطه ثابت نگاشت L_μ است.

حال فرض می‌کنیم $1 < \mu \leq 3$. دیدیم که برای $\mu > 1$ ، نقطه ثابت $x = 0$ ناپایدار است، اما نقطه ثابت $c = 1 - 1/\mu$ درون بازه‌ی $[0, 1]$ قرار می‌گیرد و برای $1 < \mu \leq 3$ مجانبی پایدار است. توجه کنید که $0, 1 \notin B_\mu(1 - 1/\mu)$ ، چون $L_\mu(0) = 0$ و $L_\mu(1) = 0$. بنابراین $B_\mu(1 - 1/\mu) \neq [0, 1]$ و در این صورت بنا بر گزاره‌های ۳ و ۴، دامنه جذب بلافاصله این نقطه، بازه‌ای چون $I = (a, b)$ شامل نقطه‌ی ثابت c خواهد بود با این ویژگی که $L_\mu(I) \subseteq I$.

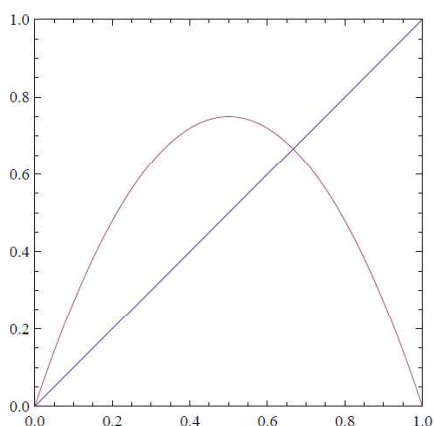
فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در (a, b) با $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ باشد. از پیوستگی L_μ داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} L_\mu(x_n) = L_\mu(a)$. از آنجایی که برای هر $x_n \in (a, b)$ ، $n \in \mathbb{N}$ پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $L_\mu(x_n) \in (a, b)$. حال چون $L_\mu(a) \notin (a, b)$ ، پس تنها حالات ممکن $L_\mu(a) = a$ یا $L_\mu(a) = b$ است. این استدلال به‌طور مشابه برای b نیز برقرار است. بنابراین یکی از حالت‌های زیر را می‌توان برای a و b متصور شد.

(آ) a و b نقاط ثابت نگاشت باشند؛ یعنی $L_\mu(a) = a$ و $L_\mu(b) = b$ ؛

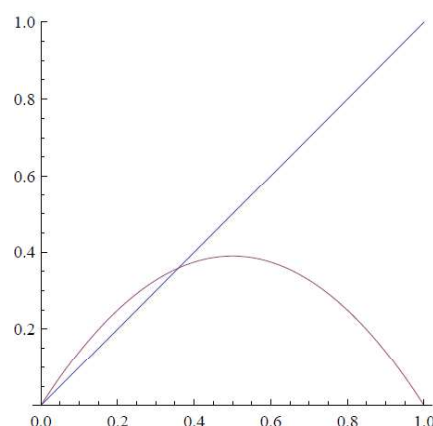
(ب) $L_\mu(a) = b$ و $L_\mu(b) = a$ (در این حالت $\{a, b\}$ یک ۲-دور نامیده می‌شود)؛

(پ) a و b نقاط در نهایت ثابت هستند؛ یعنی $L_\mu(a) = a$ ، $L_\mu(b) = a$ یا $L_\mu(a) = b$ ، $L_\mu(b) = b$.

به وضوح (آ) برقرار نیست و نشان خواهیم داد که (ب) نیز نمی‌تواند اتفاق بیفتد. بنابراین (پ) باید برقرار باشد و این منجر به این نتیجه خواهد شد که $a = 0$ و $b = 1$ ، زیرا هیچ نقطه ثابت یا نقطه‌ی در نهایت ثابت دیگری در $[0, 1]$ وجود ندارد که بتواند این شرایط را برآورده کند. در نتیجه، باید داشته باشیم $B_\mu(1 - 1/\mu) = (0, 1)$.



(ب) اگر $2 \leq \mu \leq 3$ ، آنگاه $c = 1 - \frac{1}{\mu} \geq \frac{1}{2}$.



(آ) اگر $1 < \mu < 2$ ، آنگاه $c = 1 - \frac{1}{\mu} < \frac{1}{2}$.

شکل ۳.۲: نگاشت لجستیک برای $1 < \mu \leq 3$.

فرض کنیم (ب) برای a و b برقرار باشد. می‌توان نشان داد که

$$L_{\mu}^2(x) - x = x(\mu^2 x^2 - \mu(\mu+1)x + \mu+1)(\mu x - \mu+1).$$

a و b باید در این معادله صدق کنند (چرا؟). برای تعیین a و b ، می‌توانیم عوامل خطی را نادیده بگیریم، چون عوامل خطی دو نقطه ثابت نگاشت را می‌دهند. مبین عامل درجه دوم برای $1 < \mu < 3$ برابر است با

$$\mu^2(\mu+1)^2 - 4\mu^2(\mu+1) = \mu^2(\mu+1)(\mu-3) < 0.$$

بنابراین برای $1 < \mu < 3$ ، معادله $L_{\mu}^2(x) - x = 0$ جواب ندارد (به ویژه a یا b ریشه‌ی $L_{\mu}^2(x) - x = 0$ نیستند). همچنین برای $\mu = 3$ ، مبین برابر صفر و ریشه‌ی عامل درجه دوم نقطه ثابت $c = 2/3$ است و ریشه‌ی دیگری وجود ندارد. بنابراین برای $\mu = 3$ هم هیچ ۲-دوری وجود ندارد. بنابراین (ب) نمی‌تواند برقرار باشد. □

تذکر. زیست‌شناسان جمعیت نگاشت لجستیک را به‌عنوان مدلی برای رشد انواع مختلف جمعیت پیشنهاد کرده‌اند. برای $0 < \mu \leq 1$ ، نتایج این بخش نشان می‌دهد که اگر یک جمعیت اولیه $x_0 \in (0, 1)$ داشته باشیم، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} L_{\mu}^n(x_0) = 0$ و بنابراین جمعیت به سرعت از منقرض می‌شود. از سوی دیگر، اگر $1 < \mu \leq 3$ ، جمعیت به نقطه ثابت $c = 1 - 1/\mu$ می‌رسد، که در آن c جواب معادله $L_{\mu}(x) = x$ ، یعنی نقطه ثابت L_{μ} است. در بخش‌های بعد، آنچه را که وقتی $\mu > 3$ ، برای جمعیت رخ می‌دهد، بررسی خواهیم کرد.

۲.۲ نقاط تناوبی

در مطالعه‌ی دستگاه‌های دینامیکی نقاطی که مدارهای متناهی دارند، بسیار حائز اهمیت هستند. دیدیم که نقاط ثابت از یک دستگاه دینامیکی ممکن است رفتار بلند مدت دستگاه را تعیین کنند. اگر یک نگاشت پیوسته تعداد متناهی نقطه ثابت داشته باشد (نقاط ثابت را می‌توان تناوبی با دوره تناوب یک در نظر گرفت) و نقاطی با تناوب‌های بالاتر نداشته باشد، به نظر می‌رسد که تکرارها به یکی از نقاط ثابت همگرا

می‌شوند و بنابراین مطالعه‌ی رفتار بلندمدت بدون پیچیدگی خواهد بود (اغلب ∞ را نیز به‌عنوان یک نقطه ثابت در نظر می‌گیریم). همین امر ممکن است برای نقاطی با دوره تناوب 2 یا نقاطی با تناوب بالاتر نیز صادق باشد. معمولاً رفتار آشوبناک یا غیرقابل پیش‌بینی در طولانی مدت زمانی رخ می‌دهد که نگاشت بی‌نهایت نقطه‌ی تناوبی با تناوب‌های متفاوت داشته باشد.

تعریف. فرض کنیم $f: I \rightarrow I$ یک دستگاه دینامیکی باشد و $c \in I$.

(آ) گوئیم c نقطه‌ی تناوبی $f(x)$ با دوره تناوب $r \in \mathbb{N}$ است، هرگاه $f^r(c) = c$ و برای هر $0 < k < r$ ، $f^k(c) \neq c$ (به عبارت دیگر، c نقطه ثابت f^r است). در این صورت مجموعه‌ی

$$\mathcal{O}(c) = \{c, f(c), f^2(c), \dots, f^{r-1}(c)\},$$

یک دور r -دور برای f نامیده می‌شود. تعریف می‌کنیم

$$Per_r(f) := \{x \in I \mid f^r(x) = x\}.$$

در این صورت برای هر عدد طبیعی n ، $Fix(f) \subseteq Per_n(f)$. زیرا اعضای $Per_n(f)$ ممکن است از دوره تناوب n نبوده و دوره تناوب کمتری داشته باشند.

(ب) گوئیم c نقطه‌ی در نهایت تناوبی f است، هرگاه c نقطه تناوبی نباشد اما $m \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که $f^m(c)$ نقطه‌ی تناوبی f باشد.

(پ) گیریم c یک نقطه‌ی r -تناوبی f باشد. در این صورت c پایدار است، هرگاه به‌عنوان نقطه ثابت f^r پایدار باشد (به همین ترتیب مجانبی پایدار، ناپایدار و ...).

قضیه‌ی زیر محکی برای پایداری نقاط متناوب ارائه می‌دهد که بلافاصله از قضایایی که پیش از این داشتیم به‌دست می‌آید.

قضیه. فرض کنیم c یک نقطه‌ی r -تناوبی f باشد و $f'(x)$ در $x = c$ پیوسته باشد. اگر برای $i = 0, 1, \dots, r-1$ قراردسیم $c_i = f^i(c)$ ، آنگاه

(آ) نقطه‌ی c مجانبی پایدار است هرگاه

$$|f'(c_0)f'(c_1)f'(c_2) \cdots f'(c_{r-1})| < 1.$$

(ب) نقطه‌ی c ناپایدار است هرگاه

$$|f'(c_0)f'(c_1)f'(c_2) \cdots f'(c_{r-1})| > 1.$$

اثبات. به‌عنوان نمونه حالت $r = 3$ را اثبات می‌کنیم. در این حالت $f^3(c) = c$ و

$$\mathcal{O}(c) = \{c, f(c), f^2(c)\} = \{c_0, c_1, c_2\}.$$

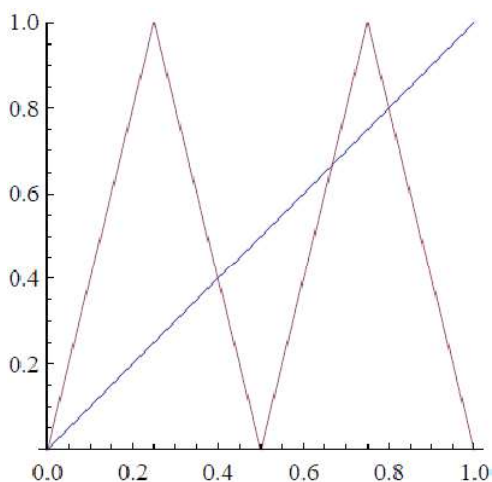
$$\frac{d}{dx}(f^3(x)) = \frac{d}{dx}(f(f^2(x))) = f'(f^2(x))(f^2(x))' = f'(f^2(x))f'(f(x))f'(x)|_{x=c} = f'(c_2)f'(c_1)f'(c_0).$$

برای تعیین نقاط ۲-تناوبی، معادله $f^2(x) = x$ یا به‌طور معادل $f^2(x) - x = 0$ را حل می‌کنیم. حل این معادله از آنجا که می‌دانیم نقاط ثابت جواب‌هایی از آن هستند، چندان دشوار نیست. زیرا $(x+1)(x-2)$ عاملی از معادله مذکور است و بنابراین

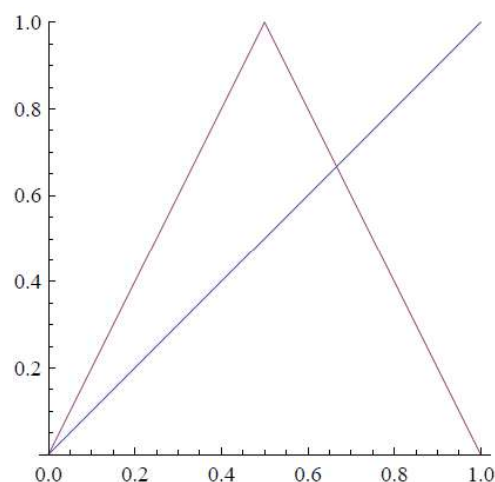
$$f^2(x) - x = x^4 - 4x^2 - x + 2 = (x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1).$$

$$|f'(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})f'(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})| = |(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})| = |1-5| = 4 > 1,$$
$$T^2(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 2(1-2x) & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4(x-\frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x) & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
$$Per_3(f) = \{x \in I | f^3(x) = x\} = \{0, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}.$$

۳۴



(ب) مجموعه‌ی $\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$ تنها ۲-دور نگاشت چادر است.



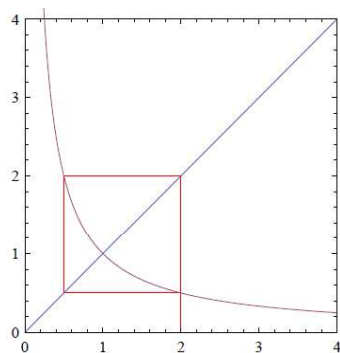
(آ) نگاشت چادر دو نقطه ثابت در $c = \frac{2}{3}$ و $c = 0$ دارد.

شکل ۴.۲: نقاط ثابت و ۲-تناوبی نگاشت چادر

مثال. نگاشت $f(x) = 1/x$ را برای $x \neq 0$ در نظر می‌گیریم. برای هر $x \neq \pm 1$ از آنجا که $f^2(x) = x$ و $f(x) \neq x$ ، پس چنین مقادیری از x ، باعث ایجاد ۲-دور $\{x, 1/x\}$ می‌شود. در این حالت

$$|f'(x) f'(1/x)| = |(-1/x^2)(-x^2)| = 1,$$

بنابراین از قضیه‌ی ۲.۲ برای بررسی پایداری ۲-دوره‌های مذکور نمی‌توان استفاده کرد. با این حال، از تکرارهای ترسیمی می‌بینیم که این نقاط تناوبی، پایدار هستند اما جاذب و یا دافع نیستند. این‌ها نمونه‌هایی از ۲-دوره‌های غیرهذلولی $\{c_0, c_1\}$ هستند به‌طوری که $(f^2)'(c_0) = f'(c_0) f'(c_1) = 1$ یا $(f^2)'(c_0) = f'(c_0) f'(c_1) = -1$. پس تعریف زیر را داریم.



شکل ۵.۲: هر $x \neq 0, \pm 1$ نقطه‌ی ۲-تناوبی نگاشت $f(x) = \frac{1}{x}$ است.

تعریف. n -دور $\{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$ از تابع مشتق‌پذیر f را هذلولوی گوئیم هرگاه $|f'(c_0)f'(c_1)f'(c_2)\dots f'(c_{n-1})| \neq 1$. این معادل است با این که بگوئیم هر عضو از مجموعه‌ی $\{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$ یک نقطه ثابت هذلولی از f^n است. اگر یک n -دور هذلولی نباشد، آنگاه آن را غیرهذلولوی می‌نامیم.

مثال. فرض کنیم $f(x) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} + 1$. در این صورت از آنجا که $f(0) = 1$ و $f(1) = 0$ ، $\{0, 1\}$ یک ۲-دور برای f است که چون $f'(1)f'(0) = 1$ غیرهذلولوی است. توجه داریم که اگر

$$g(x) = f^2(x) - x = \frac{1}{16}x^2(x-1)^2(x^2+2x+3)(x^3+3x-2),$$

آنگاه $g(x)$ در $x=0$ و $x=1$ ریشه‌ی مضاعف دارد. این حالت همیشه زمانی که مانند همین مثال، یک ۲-دور غیر هذلولوی داشته باشیم، اتفاق می‌افتد.

تذکره. ۱. نقاط تناوبی می‌توانند پایدار باشند اما جاذب نباشند (همانطور که برای نگاشت $f(x) = 1/x$ در $x \neq 1$ دیدیم). همچنین می‌توانند جاذب باشند اما مانند مثال ۵.۱، پایدار نباشند.

۲. تابعی مانند $f(x) = \sin x$ نمی‌تواند هیچ نقطه‌ای از دوره تناوب ۲ یا بالاتر داشته باشد، چون وجود چنین نقاطی با این واقعیت که دامنه جذب نقطه ثابت $x=0$ تمام $\mathbb{R}$ است، در تضاد خواهد بود. به‌طور مشابه، نگاشت لجستیک L_μ برای $0 < \mu \leq 3$ ، نمی‌تواند نقاطی با دوره تناوب n برای $n > 1$ داشته باشد.

۳.۲ نقاط تناوبی نگاشت لجستیک

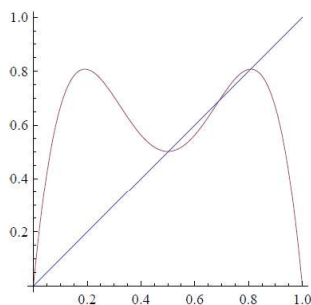
با بررسی نمودار L_μ^2 برای مقادیر مختلف μ در نزدیکی ۳، می‌توانیم ببینیم که نقاطی با دوره تناوب ۲ چطور ایجاد می‌شوند. برای μ نزدیک اما کمتر از ۳، نمودار $L_\mu^2(x)$ خط $y=x$ را علاوه بر $x=0$ ، فقط در نقطه ثابت $c = 1 - 1/\mu$ از L_μ قطع می‌کند و شیب خط مماس در این نقطه برابر $\mu - 2$ است که قدر مطلق آن کمتر از یک است. پس واضح است که نقطه‌ای با دوره تناوب ۲ وجود ندارد. برای $\mu = 3$ ، نمودار L_μ^2 در نقطه ثابت c بر $y=x$ مماس است، $L'_\mu(c) = -1$ و باز هم نقطه‌ای با دوره تناوب ۲ وجود ندارد. با افزایش μ به مقادیر بیش‌تر از ۳، نمودار L_μ^2 مارپیچ‌وار در اطراف c حرکت می‌کند و به این ترتیب دو نقطه ثابت جدید $\{c_1, c_2\}$ برای نگاشت L_μ^2 ایجاد می‌شود که باید یک ۲-دور برای L_μ باشد. توجه کنید که در نقطه ثابت c داریم

$$(L_\mu^2)'(c) = L'_\mu(c) L'_\mu(L_\mu(c)) = (2 - \mu)^2 > 1.$$

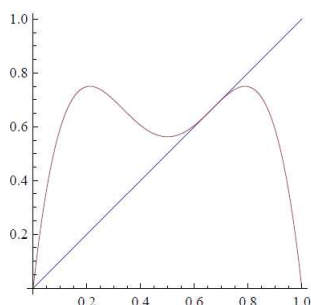
بنابراین شیب L_μ^2 در c از کمتر از ۱ به بیش‌تر از ۱ افزایش یافته و این باعث ایجاد ۲-دور شده است. این نمونه‌ای از انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب است.

برای تعیین ۲-دوره‌های نگاشت لجستیک $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ برای $0 \leq x \leq 1$ معادله‌ی $L_\mu^2(x) = x$ یا به‌طور معادل

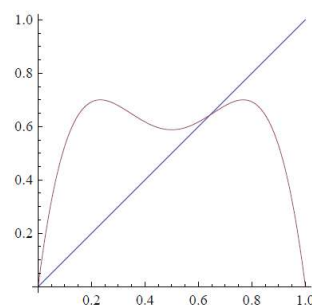
$$-\mu^3 x^4 + 2\mu^3 x^3 - (\mu^3 + \mu^2)x^2 + \mu^2 x - x = 0,$$



(ج) نمودار L_μ^2 برای $\mu > 3$.



(ب) نمودار L_μ^2 برای $\mu = 3$.



(آ) نمودار L_μ^2 برای $\mu < 3$.

شکل ۶.۲: نمودار L_μ^2 برای μ در نزدیکی ۳.

را حل می‌کنیم. از آنجا که $X = 1 - 1/\mu$ و $X = 0$ نقاط ثابت نگاشت $L_\mu(x)$ هستند، x و $(x - (1 - 1/\mu))$ باید عامل‌هایی از معادله‌ی اخیر باشند. بنابراین می‌توان نوشت

$$L_\mu^2(x) - x = -x(\mu x - \mu + 1)(\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1).$$

عامل درجه دوم معادله یعنی $\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1 = 0$ برای $\mu < 3$ ریشه حقیقی ندارد. درواقع از حل این معادله داریم

$$c = \frac{\mu(\mu + 1) \pm \sqrt{\mu^2(\mu + 1)^2 - 4\mu^2(\mu + 1)}}{2\mu^2} = \frac{(1 + \mu) \pm \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu}.$$

این ریشه‌ها فقط برای $\mu \geq 3$ حقیقی مقدار هستند. این ریشه‌های وابسته به μ را c_1 و c_2 می‌نامیم. ۲-دور $\{c_1, c_2\}$ مجانبی پایدار است هرگاه $1 < |L_\mu'(c_1)| = |L_\mu'(c_2)| < 1$ که معادل است با $-1 < \mu^2(1 - 2c_1)(1 - 2c_2) < 1$ یا

$$-1 < (-1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3})(-1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}) < 1.$$

در نتیجه ۲-دور $\{c_1, c_2\}$ مجانبی پایدار است هرگاه $-1 < 1 - (\mu^2 - 2\mu - 3) < 1$ که دو نامساوی $\mu^2 - 2\mu - 5 < 0$ و $\mu^2 - 2\mu - 3 > 0$ را نتیجه می‌دهد. با تعیین علامت این دو درمی‌یابیم که بازه‌ی $1 + \sqrt{6} < \mu < 3$ مقادیری از پارامتر را شامل می‌شود که به ازای آنها، مجانبی پایدار بودن ۲-دور $\{c_1, c_2\}$ نتیجه می‌شود.

اگر $\mu = 1 + \sqrt{6}$ ، آنگاه $L_\mu'(c_1) L_\mu'(c_2) = -1$ و $SL_\mu^2(c_1) < 0$. بنابراین از قضیه‌ی ۱.۶.۱، نتیجه می‌شود که برای $\mu = 1 + \sqrt{6}$ ۲-دور $\{c_1, c_2\}$ مجانبی پایدار است. همچنین، ۲-دور به ازای $\mu > 1 + \sqrt{6}$ ناپایدار است. در مجموع با توجه به نتایجی که به دست آوردیم قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه. نگاشت لجستیک $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ برای $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$ یک ۲-دور مجانبی پایدار دارد. این ۲-دور برای $\mu > 1 + \sqrt{6}$ ناپایدار است.

مباحث بالا نشان می‌دهد که در $\mu = 3$ ، یک انشعاب رخ می‌دهد و یک ۲-دور ایجاد می‌شود که پیش از این وجود نداشت. انشعاب دیگری در $\mu = 1 + \sqrt{6}$ اتفاق می‌افتد. این بدین معناست که برای $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$ ، وقتی از تکرار گرافیکی نقاط در همسایگی c_1 و c_2 استفاده می‌کنیم، تکرارها به مدار ۲-تناوبی نزدیک می‌شوند، نه به نقطه ثابت (که اکنون ناپایدار است). در واقع، می‌توان نشان داد که برای

این محدوده از مقادیر پارامتر μ ، دامنه جذب ۲- دور شامل تمام بازه‌ی $(0, 1)$ (به جز نقطه ثابت $1 - 1/\mu$ و نقاط در نهایت ثابت، مثلاً $1/\mu$) است. هنگامی که μ از $1 + \sqrt{6} = 3.449499 \dots$ بیشتر شود، نقاط ۲-تناوبی ناپایدار می‌شوند. در عوض در $\mu = 1 + \sqrt{6}$ ، یک انشعاب دیگر داریم که با تولد یک ۴- دور مجانبی پایدار همراه است (باز هم انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب).

۴.۲ مضاعف‌سازی دوره تناوب، راهی به سوی آشوب

در این بخش، آنچه را که تاکنون در مورد نگاشت لجستیک مطالعه کرده‌ایم، جمع‌بندی و سپس در مورد آنچه که با افزایش μ از صفر تا حدود 3.57 اتفاق می‌افتد، صحبت خواهیم کرد.

برای $0 < \mu \leq b_1$ (که در آن $b_1 = 1$)، $c = 0$ تنها نقطه ثابت نگاشت است که برای این مقادیر از μ مجانبی پایدار است. یک انشعاب در $b_1 = 1$ رخ می‌دهد که در طی آن نقطه ثابت ناصفر $1 - 1/\mu$ ایجاد می‌شود. این نقطه ثابت برای $1 < \mu \leq 3$ مجانبی پایدار و در $\mu = s_1 = 2$ آبرجاذب است (در این فاصله $c = 0$ دیگر جاذب نیست). انشعاب دوم زمانی رخ می‌دهد که $\mu = b_2 = 3$. در این زمان نقطه ثابت $c = 1 - 1/\mu$ ناپایدار شده و یک ۲- دور مجانبی پایدار برای $b_3 = 1 + \sqrt{6} < \mu < 3$ ایجاد می‌شود.

۱.۴.۲ یک دو دور آبرجاذب

به سادگی می‌توان دید که به ازای $\mu = 2$ ، $c = \frac{1}{2}$ یک نقطه ثابت آبرجاذب برای L_μ است. حال برای $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ به دنبال یک ۲- دور آبرجاذب برای L_μ تحت یک روش کلی هستیم که می‌تواند برای تعیین محل نقاطی با دوره تناوب سه از نگاشت نیز استفاده شود. فرض کنید که $\{x_1, x_2\}$ یک ۲- دور آبرجاذب برای نگاشت L_μ باشد. در این صورت

$$x_1 = \mu x_2 (1 - x_2), \quad x_2 = \mu x_1 (1 - x_1). \quad (۱.۲)$$

از ضرب کردن طرفین تساوی‌های بالا در هم و سپس حذف عامل مشترک $x_1 x_2$ خواهیم داشت

$$\mu^2 (1 - x_1) (1 - x_2) = 1. \quad (۲.۲)$$

به علاوه از آنجا که ۲- دور آبرجاذب است باید داشته باشیم $(L_\mu^2)'(x_1) = L_\mu'(x_1)L_\mu'(x_2) = 0$ که نتیجه می‌دهد $\mu^2 (1 - 2x_1) (1 - 2x_2) = 0$. پس $x_1 = \frac{1}{2}$ یا $x_2 = \frac{1}{2}$. فرض کنیم $x_1 = \frac{1}{2}$. در این صورت از (۱.۳) نتیجه می‌شود $x_2 = \frac{\mu}{4}$ و بنابراین از (۲.۳) داریم $\mu^2 (1 - \frac{1}{2}) (1 - \mu/4) = 1$ یا به‌طور معادل $\mu^3 - 4\mu^2 + 8 = 0$. از آنجا که $\mu - 2$ عاملی از این معادله درجه‌ی سوم است، پس

$$\mu^3 - 4\mu^2 + 8 = (\mu - 2)(\mu^2 - 2\mu - 4) = 0,$$

که $\mu = 1 + \sqrt{5}$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین قضیه‌ی زیر را داریم.

قضیه. برای $\mu = s_2 = 1 + \sqrt{5}$ ، $\mu = s_2 = 1 + \sqrt{5}$ ، یک ۲- دور آبرجاذب برای نگاشت L_μ است.

هنگامی که μ از $b_3 = 1 + \sqrt{6}$ بیشتر شود، ۲- دور مذکور پایداری خود را از دست داده و ناپایدار می‌شود. علاوه بر این، یک ۴- دور ایجاد می‌شود که برای $b_4 < \mu < b_3$ جاذب است. زمانی که μ از مقدار b_4 تجاوز کند، ۴- دور مذکور ناپایدار شده و یک ۸- دور پایدار ایجاد

می‌شود. این نوع از دو برابر شدن دوره تناوب ادامه می‌یابد به‌طوری‌که هر بار وقتی μ از b_n عبور می‌کند، یک 2^{n-1} -دور پایدار ایجاد می‌شود تا زمانی که μ به b_{n+1} برسد. این دورها در برخی از مقادیر s_n آبرجاذب می‌شوند ($b_n < s_n < b_{n+1}$). این رفتار تا ایجاد 2^n -دور برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، ادامه می‌یابد، تا زمانی که μ به مقدار b_∞ یعنی تقریباً 3.57 برسد. به عبارت دیگر، برای $b_n < \mu < b_{n+1}$ ، یک 2^n -دور پایدار دارد. می‌توان نشان داد که تقریباً $b_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3.57$.

اگرچه $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = 0$ ، عدد ثابت δ را که به نام عدد فایگنهام^۳ شناخته می‌شود، می‌توان به‌صورت

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n+1} - b_n} = 4.6692016 \dots,$$

تعریف کرد. فایگنهام نشان داد که ثابت δ را می‌توان برای هر خانواده f_μ از نگاشت‌های تک‌کوهان به‌دست آورد. شایان ذکر است که $f_\mu(x)$ نگاشت تک‌کوهانه نامیده می‌شود هرگاه $f_\mu(0) = f_\mu(1) = 0$ ، f_μ بر $[0, 1]$ پیوسته بوده و یک نقطه بحرانی یکتا بین 0 و 1 داشته باشد.

۲.۴.۲ دیاگرام انشعاب و ۳-دورهای نگاشت لجستیک

رفتار تشریح شده در بخش قبل را می‌توان به‌صورت ترسیمی با استفاده از نموداری موسوم به دیاگرام انشعاب نشان داد. برای رسم یک دیاگرام انشعاب، مقادیر $0 \leq \mu \leq 4$ را در امتداد محور x و مقادیر $L_\mu^n(x)$ را در امتداد محور y در نظر می‌گیریم. برای هر مقدار از μ ، به‌عنوان مثال 5° تکرار اول نگاشت لجستیک را با شروع از مقدار x_0 که به طور دلخواه در $(0, 1)$ انتخاب شده، محاسبه می‌کنیم. سپس 45° تکرار اول را نادیده گرفته و 5° مورد بعدی را رسم می‌کنیم. بنابراین برای مثال، اگر $1 < \mu < 3$ ، از آنجایی که در این فاصله نقطه ثابت $1 - 1/\mu$ جاذب است، تکرارها به آن نزدیک می‌شوند و برای n بزرگ، آنچه که در نمودار ترسیم می‌شود، خیلی نزدیک به مقدار $1 - 1/\mu$ خواهد بود. در دیاگرام انشعاب، منحنی $y = 1 - 1/\mu$ را برای $1 \leq \mu \leq 3$ خواهیم دید. برای $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ نقطه ثابت $1 - 1/\mu$ ناپایدار شده و بنابراین دیگر نشان داده نمی‌شود. اما در این فاصله یک ۲-دور پایدار داریم. پس نقاطی با دوره تناوب دو از ۲-دور را رسم می‌کنیم. این روند با ۴-دورها، ۸-دورها و ... ادامه می‌یابد. این روند «مضاعف‌سازی دوره تناوب، راهی به سوی آشوب» نامیده می‌شود. می‌توانیم با استفاده از یک برنامه‌ی رایانه‌ای مانند مَتَمَتیکا^۴ یا مَپل^۵ یک نمودار انشعاب برای L_μ به‌صورت شکل ۲.۷ رسم کنیم.

۳.۴.۲ نقاط ۳-تناوبی نگاشت لجستیک کجا رخ می‌دهد؟

با بررسی نمودار L_μ^3 برای μ نزدیک به 3.8، تصویری نسبت به مقادیری از μ که به ازای آنها یک ۳-دور برای نگاشت L_μ وجود دارد، به‌دست می‌آوریم.

بنا داریم نشان دهیم که یک ۳-دور برای اولین بار در $\mu = 1 + \sqrt{8}$ رخ می‌دهد. برای مقادیر μ کمی کوچکتر از $1 + \sqrt{8}$ ، تقاطع خط $y = x$ با نمودار L_μ^3 تنها در دو نقطه است که همان نقاط ثابت نگاشت L_μ هستند. برای $\mu = 1 + \sqrt{8}$ می‌بینیم که نمودار L_μ^3 بر خط $y = x$ در سه نقطه‌ی مختلف مماس است. اینها نقاط ۳-تناوبی نگاشت L_μ هستند و تشکیل یک ۳-دور می‌دهند. برای مقادیر بزرگتر μ ، دو ۳-دور می‌بینیم. در محدوده‌ی کوچکی از مقادیر $1 + \sqrt{8} \leq \mu$ ، ۳-دورها جاذب هستند.

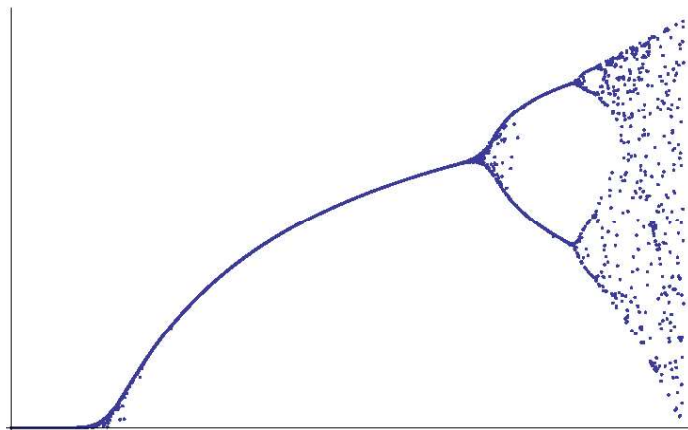
برای اثبات وقوع انشعاب در $\mu = 1 + \sqrt{8}$ ، استدلال فنگ^۶ را دنبال می‌کنیم.

³Feigenbaum

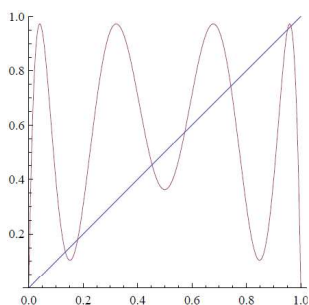
⁴Mathematica

⁵Maple

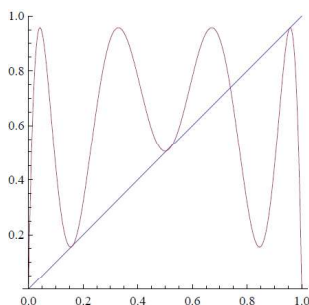
⁶Feng



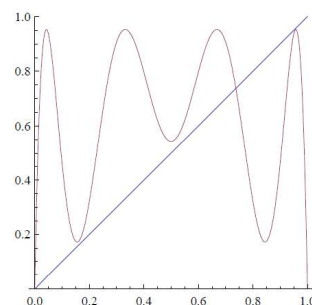
شکل ۷.۲: دیاگرام انشعاب برای نگاشت لجستیک.



(ج) نمودار L_μ^3 برای $\mu > 1 + \sqrt{8}$.



(ب) نمودار L_μ^3 برای $\mu = 1 + \sqrt{8}$.



(آ) نمودار L_μ^3 برای $\mu < 1 + \sqrt{8}$.

شکل ۸.۲: نمودار L_μ^3 برای μ در نزدیکی $1 + \sqrt{8}$.

نقاط ۳-تناوبی نگاشت L_μ در $L_\mu^3(x) = x$ صدق می‌کنند. بنابراین معادله‌ی $L_\mu^3(x) - x = 0$ را در نظر می‌گیریم. برای حذف نقاط ثابت نگاشت L_μ از ریشه‌های این معادله، قرار می‌دهیم

$$g_\mu(x) = \frac{L_\mu^3(x) - x}{L_\mu(x) - x}.$$

در این صورت با انجام محاسبات جبری (که به راحتی با برنامه‌های رایانه‌ای صورت می‌پذیرد) به صورت

$$g_\mu(x) = \mu^6 x^6 - (\mu^5 + 3\mu^6) x^5 + (\mu^4 + 4\mu^5 + 3\mu^6) x^4 - (\mu^3 + 3\mu^4 + 5\mu^5 + \mu^6) x^3 \\ + (\mu^2 + 3\mu^3 + 3\mu^4 + 2\mu^5) x^2 - (\mu + 2\mu^2 + 2\mu^3 + \mu^4) x + 1 + \mu + \mu^2,$$

ساده می‌شود. قرار می‌دهیم $\lambda = 7 + 2\mu - \mu^2$ و فرض می‌کنیم $h_\mu(z) := g_\mu(-z/\mu)$. در این صورت

$$h_\mu(z) = z^6 + (3\mu + 1) z^5 + (3\mu^2 + 4\mu + 1) z^4 + (\mu^3 + 5\mu^2 + 3\mu + 1) z^3 \\ + (2\mu^3 + 3\mu^2 + 3\mu + 1) z^2 + (\mu^3 + 2\mu^2 + 2\mu + 1) z + \mu^2 + \mu + 1.$$

پس اگر

$$k_{\mu}(z) = \left(z^3 + \frac{3\mu+1}{2} z^2 + \left(2\mu+3 - \frac{\lambda}{2} \right) z + \frac{\mu+5}{2} - \frac{\lambda}{2} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (z+1)^2 (z+\mu)^2,$$

آنگاه با استفاده‌ی مجدد از برنامه‌های محاسباتی می‌توان دید که برای هر z ، $k_{\mu}(z) = h_{\mu}(z)$. توجه کنید که اگر $\mu < 1 + \sqrt{8}$ ، آنگاه $\lambda > 0$ و اگر $\mu > 1 + \sqrt{8}$ ، آنگاه $\lambda < 0$. همچنین $\mu = 1 + \sqrt{8}$ معادل با $\lambda = 0$ است. این بدین معناست که برای $\mu < 1 + \sqrt{8}$ ، h_{μ} مثبت معین است (یعنی برای هر z ، $h_{\mu}(z) > 0$)، بنابراین ریشه ندارد. پس معادله‌ی $g_{\mu}(x) = 0$ هیچ جوابی ندارد و از این رو در این حالت L_{μ} نمی‌تواند ۳-دور داشته باشد. نتایج را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه. (آ) اگر $0 < \mu < 1 + \sqrt{8}$ ، آنگاه $h_{\mu}(z)$ مثبت معین است و معادله‌ی $h_{\mu}(z) = 0$ ، ریشه‌ی حقیقی ندارد. در نتیجه، نگاشت لجستیک L_{μ} دارای ۳-دور نیست.

(ب) اگر $\mu = 1 + \sqrt{8}$ ، آنگاه معادله‌ی $h_{\mu}(z) = 0$ سه ریشه‌ی متمایز دارد که هر کدام دوبار تکرار می‌شوند. این سه ریشه یک ۳-دور برای نگاشت لجستیک L_{μ} تشکیل می‌دهند.

(پ) اگر $\mu > 1 + \sqrt{8}$ (برای $\mu - (1 + \sqrt{8})$ به اندازه‌ی کافی کوچک)، آنگاه معادله‌ی $h_{\mu}(z) = 0$ شش ریشه‌ی ساده دارد که منجر به دو ۳-دور برای نگاشت لجستیک L_{μ} می‌شود.

اثبات. (آ) اگر $0 < \mu < 1 + \sqrt{8}$ ، آنگاه از آنجا که $h_{\mu}(z)$ مثبت معین است (یعنی برای هر z ، $h_{\mu}(z) > 0$)، نتیجه حاصل می‌شود. (ب) اگر $\mu = 1 + \sqrt{8}$ ، آنگاه $\lambda = 0$ و در این صورت

$$k_{\mu}(z) = \left(z^3 + (2 + 3\sqrt{2}) z^2 + (5 + 4\sqrt{2}) z + 3 + \sqrt{2} \right)^2.$$

معادله‌ی حاصل را می‌توان به کمک فرمول ریشه برای معادلات درجه سه حل کرد و از سه ریشه‌ی حقیقی آن یعنی z_1 ، z_2 و z_3 برای تعیین جواب‌های معادله‌ی $g_{\mu}(x) = 0$ متناظر با ۳-دور نگاشت $L_{\mu}(x)$ استفاده کرد. داریم

$$z_k = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{1}{2\sqrt{7}} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right) - \frac{2 + 3\sqrt{2}}{3}, \quad k = 0, 1, 2,$$

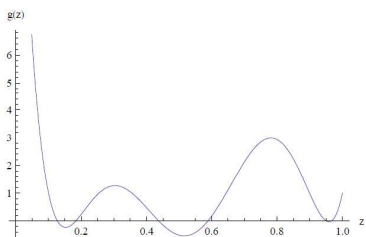
(پ) برای $\lambda < 0$ ، ابتدا به کمک اتحاد مزدوج $h_{\mu}(z)$ را به صورت $h_{\mu}(z) = h_1(z)h_2(z)$ بازنویسی می‌کنیم. سپس با به کارگیری قضیه‌ی مقدار میانی برای هر یک از توابع $h_1(z)$ و $h_2(z)$ درمی‌یابیم که هر کدام سه ریشه‌ی متمایز دارند که متناظر به دو ۳-دور از نگاشت L_{μ} هستند (برای جزئیات به مراجع درس مراجعه کنید). □

۴.۴.۲ یک ۳-دور آبرجاذب برای نگاشت لجستیک

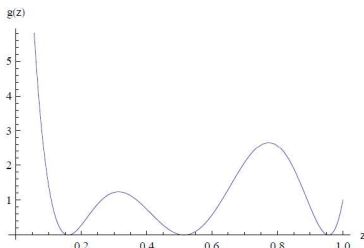
یادآوری می‌کنیم که نقاط تناوبی آبرجاذب در جایی که مشتق صفر شود رخ می‌دهند. پس برای یک ۳-دور آبرجاذب $\{c_1, c_2, c_3\}$ ، داریم

$$(L_{\mu}^3)'(c_1) = L'_{\mu}(c_1)L'_{\mu}(c_2)L'_{\mu}(c_3) = 0.$$

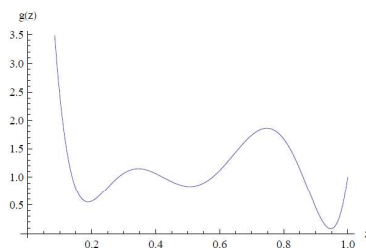
بنابراین $(1 - 2c_1)(1 - 2c_2)(1 - 2c_3) = 0$. بدون کم شدن از کلیتی می‌توانیم فرض کنیم $c_1 = \frac{1}{2}$. این بدان معنی است که $x = \frac{1}{2}$ جوابی از معادله‌ی $L_{\mu}^3(x) = x$ است. پس $L_{\mu}^3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. اما اگر μ در معادله‌ی $L_{\mu}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ صدق کند، آنگاه در معادله‌ی تکرار سوم نیز



(ج) نمودار $g_\mu(x)$ برای $\mu > 1 + \sqrt{8}$.



(ب) نمودار $g_\mu(x)$ برای $\mu = 1 + \sqrt{8}$.



(آ) نمودار $g_\mu(x)$ برای $\mu < 1 + \sqrt{8}$.

شکل ۹.۲: نمودار $g_\mu(x)$ برای μ در نزدیکی $1 + \sqrt{8}$.

صدق خواهد کرد. بنابراین به جای معادله $L_\mu^3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ، معادله $g_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ را که در آن $g_\mu(x) = \frac{L_\mu^3(x)-x}{L_\mu(x)-x}$ ، حل می‌کنیم (این معادله ریشه $\mu = 2$ را که باعث ایجاد نقطه ثابت ابرجاذب در $x = \frac{1}{2}$ می‌شود، حذف می‌کند). از این معادله خواهیم داشت

$$\frac{1}{64}(64 + 32\mu + 16\mu^2 - 24\mu^3 - 4\mu^4 + 6\mu^5 - \mu^6) = 0.$$

اگر قرار دهیم

$$p(a) = a^6 - 6a^5 + 4a^4 + 24a^3 - 16a^2 - 32a - 64,$$

آنگاه محاسبات جبری نشان می‌دهد که $p(a)$ یک ریشه‌ی حقیقی μ_0 بزرگتر از $1 + \sqrt{8}$ با مقدار دقیق

$$\mu_0 = \frac{1}{6} \left(6 + 2\sqrt{3(11 + 2.2^{2/3}(25 - 3\sqrt{69})^{1/3} + 2.2^{2/3}(25 + 3\sqrt{69})^{1/3})} \right),$$

دارد. در واقع می‌توان $p(a) = 0$ را به یک معادله‌ی درجه سه کاهش داد و سپس از فرمول ریشه‌های معادله‌ی درجه سه استفاده کرد. بدین منظور اگر a را با $1 + a$ جایگزین کنیم، داریم

$$p(a+1) = a^6 - 11a^4 + 35a^2 - 89 = b^3 - 11b^2 + 35b - 89.$$

در این صورت $p(a+1)$ یک چندجمله‌ای درجه سه بر حسب $b = a^2$ است که می‌توان آن را دقیقاً برای b و سپس برای a از معادله‌ی اصلی حل کرد. خواهیم دید که $\mu_0 = 3.8318740552 \dots$.

حال می‌توانیم ۳-دور ابرجاذب را نیز محاسبه کنیم که به صورت زیر است:

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = L_{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu_0}{4} = 0.95796 \dots, \quad c_3 = L_{\mu_0}^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu_0^2}{4}\left(1 - \frac{\mu_0}{4}\right) = 0.15248 \dots.$$

۵.۴.۲ ۳-دور برای $\mu = 4$

برای $\mu = 4$ ، نگاشت $L_4(x) = 4x(1-x)$ ، بازه‌ی $[0, 1]$ را به روی $[0, 1]$ می‌نگارد. در این حالت می‌توان یک فرمول بسته برای تکرارهای L_μ^4 به دست آورد و به طور متناظر فرمول صریحی برای n -دوره‌های این نگاشت تعیین کرد. در این حالت

$$g_4(x) = 4096x^6 - 13312x^5 + 16640x^4 - 10048x^3 + 3024x^2 - 420x + 21,$$

و می‌توان نشان داد که $g_4(\frac{x}{4})$ حاصل ضربی از دو چندجمله‌ای درجه سه به صورت زیر است:

$$g_4(\frac{x}{4}) = x^6 - 13x^5 + 65x^4 - 157x^3 + 189x^2 - 105x + 21 = (x^3 - 7x^2 + 14x - 7)(x^3 - 6x^2 + 9x - 3).$$

ریشه‌های عبارت اخیر دو ۳-دور برای L_4 را نتیجه می‌دهند. اما در اینجا با یک روش متفاوت به صورت زیر عمل می‌کنیم.

قضیه. برای نگاشت لجستیک $L_4(x) = 4x(1-x)$

(آ) ۲-دور عبارت است از $\{\sin^2(\pi/5), \sin^2(2\pi/5)\}$.

(ب) ۳-دورها به صورت $\{\sin^2(\pi/7), \sin^2(2\pi/7), \sin^2(3\pi/7)\}$ و $\{\sin^2(\pi/9), \sin^2(2\pi/9), \sin^2(4\pi/9)\}$ هستند.

اثبات. بنابر مثال ۲.۱ معادله‌ی تفاضلی $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$ جوابی به صورت

$$x_n = \sin^2(2^n \arcsin \sqrt{x_0}),$$

دارد. یادآوری می‌کنیم که با جایگذاری $x_n = \sin^2(\theta_n)$ برای مقادیر $\theta_n \in (0, \pi/2]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) در معادله‌ی تفاضلی اخیر داریم:

$$\sin^2(\theta_{n+1}) = 4 \sin^2(\theta_n)(1 - \sin^2(\theta_n)) = 4 \sin^2(\theta_n) \cos^2(\theta_n) = \sin^2(2\theta_n).$$

حال با استفاده از این فرمول می‌توان نشان داد که $\sin^2(\theta_{n+1}) = \sin^2(4\theta_{n-1})$ و در حالت کلی

$$x_n = \sin^2(\theta_n) = \sin^2(2^n \theta_0),$$

که در آن $\theta_0 = \arcsin(\sqrt{x_0})$ به‌ویژه

$$\theta_1 = \arcsin(\sqrt{\sin^2 2\theta_0}) = \begin{cases} 2\theta_0 & 0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{4} \\ \pi - 2\theta_0 & \frac{\pi}{4} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

در شرایطی که $\{c_0, c_1\}$ یک ۲-دور باشد که $c_i = \sin^2(\theta_i)$ ، آنگاه θ_0 برابر با یکی از مقادیر $4\theta_0 - \pi$ ، $4\theta_0 - \pi$ ، $2\pi - 4\theta_0$ یا $\pi - 4\theta_0$ خواهد بود که از آن $\theta = 0$ یا $\theta = \frac{\pi}{3}$ (متناظر با نقاط ثابت نگاشت L_4) و $\theta_0 = \frac{\pi}{5}$ یا $\theta_0 = \frac{2\pi}{5}$ متناظر با ۲-دور مذکور به دست می‌آیند. تجزیه و تحلیلی مشابه برای یافتن ۳-دور نیز کارآمد است. $\square$

تذکر. البته می‌توانستیم با جاگذاری ۲-دور و ۳-دور مورد ادعا در نگاشت، مستقیم درستی حکم قضیه را ثابت کنیم، اما برهان اخیر نشان می‌دهد که این نتایج از کجا آمده‌اند.

برای یافتن نقاط n -تناوبی نگاشت L_4 ، می‌توانیم به منظور حل معادله‌ی $L_4^n(x) = x$ از ایده‌های بالا استفاده کنیم. اگر $x = \sin^2(\theta)$ ، آنگاه $\sin^2(\theta) = \sin^2(2^n \theta)$ که دو معادله‌ی

$$\pm \theta = 2^n \theta + 2k\pi, \quad \pm \theta = (2k+1)\pi - 2^n \theta,$$

را که در آن $k \in \mathbb{Z}$ ، نتیجه می‌دهد. البته می‌توان هر دو معادله‌ی اخیر را در یک معادله به شکل $\pm \theta = 2^n \theta + k\pi$ خلاصه کرد. پس برای

در نتیجه $\theta = \frac{k\pi}{2^n \pm 1}$ داریم $k \in \mathbb{Z}$ و $n = 1, 2, 3, \dots$

$$Per_n(L_4) = \{\sin^2(\frac{k\pi}{2^n - 1}) | 0 \leq k < 2^{n-1}\} \cup \{\sin^2(\frac{k\pi}{2^n + 1}) | 0 < k \leq 2^{n-1}\}.$$

بنابراین L_4 دارای نقاط تناوبی از تمام تناوب‌های ممکن است. خواهیم دید که مجموعه‌ی تمام نقاط تناوبی L_4 یک زیرمجموعه‌ی چگال از $[0, 1]$ است و هر نقطه‌ی تناوبی از این نگاشت ناپایدار است.

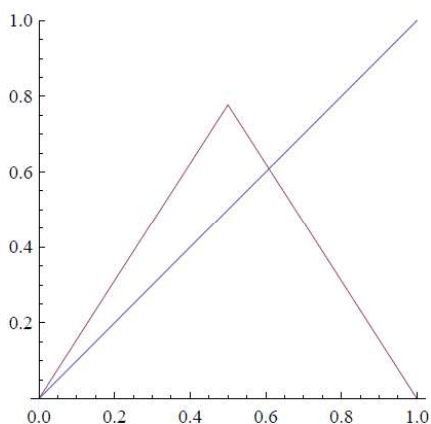
۵.۲ خانواده نگاشت چادر T_μ

خانواده نگاشت چادر که آن را با T_μ نمایش می‌دهیم، یک خانواده‌ی پارامتری مرتبط با خانواده نگاشت‌های لجستیک است و به صورت قطعه‌ای خطی تعریف می‌شود. برای $0 < \mu \leq 2$ ، $T_\mu : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ به صورت

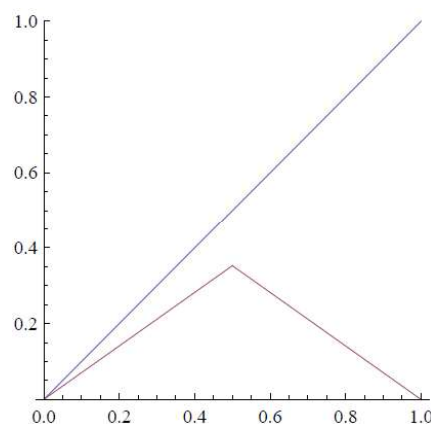
$$T_\mu(x) = \begin{cases} \mu x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \mu(1-x) & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

تعریف می‌شود. برای $\mu = 2$ ، نگاشت چادر $T = T_2$ همان نگاشتی است که پیش‌تر هم دیده بودیم. حال نگاشت چادر را به ازای $0 < \mu \leq 2$ مطالعه می‌کنیم.

اگر $0 < \mu < 1$ ، آنگاه $c = 0$ تنها نقطه ثابت نگاشت T_μ است. برای $\mu = 1$ ، همه‌ی مقادیر $c \in [0, \frac{1}{2}]$ نقاط ثابت T_μ هستند و در حالتی که $1 < \mu \leq 2$ ، دو نقطه‌ی ثابت برای نگاشت T_μ داریم. هر یک از این حالت‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم.



(ب) نمودار T_μ برای $1 < \mu < 2$.



(آ) نمودار T_μ برای $0 < \mu < 1$.

شکل ۵.۲: نمودار T_μ .

حالت اول) اگر $0 < \mu < 1$ ، آنگاه صفر تنها نقطه ثابت نگاشت T_μ است. در این حالت برای $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ داریم

$$0 \leq T_\mu(x) = \mu x < x,$$

و برای $\frac{1}{2} < x \leq 1$ ،

$$0 \leq T_\mu(x) = \mu(1-x) < 1-x < \frac{1}{2} < x.$$

با ادامه‌ی این روند می‌بینیم که دنباله‌ی $(T_\mu^n(x))$ نزولی و از پایین به 0 کراندار است. بنابراین باید به نقطه ثابت نگاشت یعنی 0 همگرا شود. از این رو $B_{T_\mu}(0) = [0, 1]$.

حالت دوم) اگر $\mu = 1$ و $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ، آنگاه $T_1(x) = x$ و بنابراین x یک نقطه ثابت نگاشت است. اگر $\frac{1}{2} < x \leq 1$ ، آنگاه از آنجا که

$$T_1^2(x) = T_1(1-x) = x,$$

x یک نقطه‌ی در نهایت ثابت نگاشت است. نقاط ثابت در این حالت پایدارند اما جاذب نیستند.

حالت سوم) اگر $1 < \mu < 2$ ، علاوه بر $x = 0$ نگاشت T_μ نقطه ثابت دیگری نیز خواهد داشت که از حل معادله‌ی $T_\mu(x) = \mu(1-x) = x$ حاصل می‌شود. بنابراین $c = \frac{\mu}{1+\mu}$. از آنجا که در این حالت $|T'_\mu(x)| = \mu > 1$ ، نقاط ثابت ناپایدار هستند.

حالت چهارم) به ازای $\mu = 2$ ، نگاشت چادر $T = T_2$ همان نگاشتی است که پیش‌تر هم دیده بودیم. نقاط ثابت $c = 0$ و $c = \frac{2}{3}$ برای این نگاشت ناپایدار هستند. برد T تمام بازه‌ی $[0, 1]$ است. اثر نگاشت T به این صورت است که ابتدا بازه‌ی $[0, \frac{1}{2}]$ را روی تمام $[0, 1]$ می‌نگارد و سپس بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ را روی بازه‌ی $[0, 1]$ برمی‌گرداند. این کشش و چین‌خوردگی است که ماهیت آشوبناک نگاشت T را نتیجه می‌دهد، که آن را بعداً بررسی خواهیم کرد. دینامیک پیچیده برای بسیاری از تحولات معمولاً از همین طریق ایجاد می‌شود. نقاط تناوبی T را در بخش بعدی بررسی خواهیم کرد.

۱.۵.۲ ۲-دور و ۳-دورهای خانوادگی نگاشت تن T_μ

به ازای $\mu \geq 1$ یک ۲-دور برای نگاشت T_μ ایجاد می‌شود. استفاده از یک برنامه‌ی محاسبات رایانه‌ای برای تکرارهای دینامیکی T_μ ، نشان خواهد داد که چطور این اتفاق می‌افتد. برای $\mu > 1$ ، می‌توان نشان داد که

$$T_\mu^2(x) = \begin{cases} \mu^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2\mu} \\ \mu(1-\mu x) & \frac{1}{2\mu} < x \leq \frac{1}{2} \\ \mu(1-\mu+\mu x) & \frac{1}{2} < x \leq 1 - \frac{1}{2\mu} \\ \mu^2(1-x) & 1 - \frac{1}{2\mu} < x \leq 1. \end{cases}$$

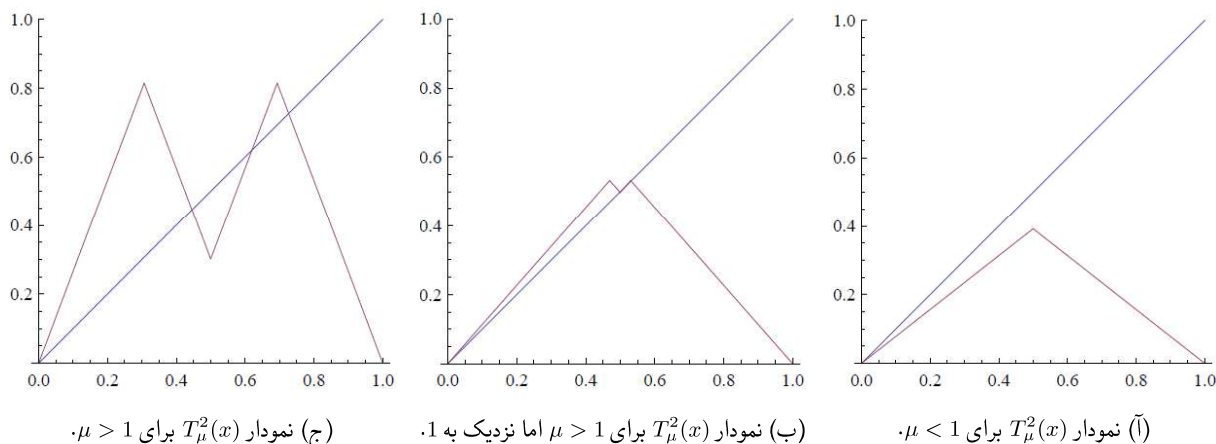
هایدل^۷ در سال ۱۹۹۰ میلادی، با مطالعاتی که روی نگاشت چادر داشت نشان داد که کوچکترین مقدار μ که به ازای آن یک مدار تناوبی از دوره تناوب k وجود دارد، دقیقاً مقداری از μ است که در آن $x = \frac{1}{2}$ نقطه‌ی k -تناوبی باشد. بنابراین ۲-دور هنگامی ایجاد می‌شود که $T_\mu^2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. بنابراین $\mu(1-\mu/2) = \frac{1}{2}$ و در نتیجه $\mu = 1$. پس می‌توان گفت ۲-دور برای $\mu > 1$ به وجود می‌آید و برای $\mu \leq 1$ نگاشت هیچ نقطه‌ی ۲-تناوبی ندارد.

بنابراین در تعیین نقاط تناوبی با دوره تناوب دو، اگر معادله‌ی $x = \mu(1-\mu x)$ را حل کنیم به $c_1 = \frac{\mu}{1+\mu^2}$ و از حل معادله‌ی $x = \mu^2(1-x)$ به $c_2 = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}$ می‌رسیم. حل معادله‌ی $x = \mu(1-\mu+\mu x)$ نقطه‌ی $c = \frac{\mu}{1+\mu}$ را نتیجه می‌دهد که همان نقطه ثابت غیرصفر نگاشت T_μ است و حل معادله‌ی $x = \mu^2 x$ نقطه ثابت صفر نگاشت T_μ را به دست می‌دهد. به وضوح ۲-دور $\{c_1, c_2\}$ ناپایدار است زیرا

$$|(T_\mu^2)'(c_1)| = |T_\mu'(c_1)T_\mu'(c_2)| = \mu^2 > 1.$$

حال به دنبال کوچکترین مقدار μ هستیم که متناظر با آن یک ۳-دور برای T_μ موجود باشد. به روشی مشابه با حالت ۲-دور، به دنبال

⁷Heidel



شکل ۱۱.۲: نمودار $T_\mu^2(x)$ برای μ در نزدیکی 1.

مقداری از μ هستیم که $T_\mu^3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ و بزرگترین ریشه‌ی این معادله را محاسبه می‌کنیم. چون همانطور که گفتیم، در حالت کلی کوچکترین مقدار μ که به ازای آن یک مدار k -تناوبی برای نگاشت چادر وجود دارد، دقیقاً مقداری از μ است که در آن $x = \frac{1}{2}$ نقطه‌ی k -تناوبی باشد. با استفاده از $T_\mu^2(\frac{1}{2}) = \mu(1 - \mu/2)$ و از آنجایی که برای هر مقدار از μ ، $\mu(1 - \mu/2) \leq \frac{1}{2}$ ، پس $T_\mu^3(\frac{1}{2}) = \mu^2(1 - \mu/2) = \frac{1}{2}$ که معادل است با $0 = (\mu - 1)(\mu^2 - \mu - 1)$. ریشه‌ی $\mu = 1$ را نادیده می‌گیریم. در این صورت ریشه‌ی عامل درجه دوم $\mu = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ خواهد بود که کوچکترین مقدار μ است که اولین نقطه‌ی ۳-تناوبی در آن رخ می‌دهد.



شکل ۱۲.۲: ۳-دور T_μ برای $\mu \geq \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$.

به‌طور کلی، می‌توان نشان داد که برای $k > 3$ و فرد، اولین مدار k -تناوبی زمانی رخ می‌دهد که μ بزرگترین ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی

$$P_k(\mu) = \mu^k - 2\mu^{k-1} + 2\mu^{k-3} - 2\mu^{k-4} + \dots - 2\mu + 1 \\ = (\mu - 1)(\mu^{k-1} - \mu^{k-2} - \mu^{k-3} + \mu^{k-4} - \mu^{k-5} + \mu^{k-6} + \dots + \mu - 1) = 0,$$

باشد. عبارت $(\mu - 1)$ همواره عاملی از معادله‌ی بالاست. بعداً باز هم به مطالعه‌ی خانواده‌ی نگاشت‌های چادر باز خواهیم گشت.