بسم الله الرحمن الرحیم

۶

# روش های انتگرال گیری

۱

مهدی مردی

mahdimardi@gmail.com

۲

با توجه به قضیه اصلی حساب، انتگرال توابعی را می توانیم محاسبه کنیم که یک پاد مشتق برای آن می شناسیم و انتگرال نامعین نامیده می شد. در زیر خلاصه ای از انتگرال های مهم که تاکنون یاد گرفته ایم را می آوریم.

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

# انتگرال گیری به روش جزء به جزء

هر قاعده مشتق گیری یک قاعده متناظر انتگرال گیری دارد.

روش جانشانی برای انتگرال گیری متناظر با قاعده زنجیری مشتق است.

قاعده انتگرال گیری متناظر با قاعده مشتق ضرب، روش جزء به جزء نامیده می شود.

فرض کنیم $u$ و $v$ دو تابع مشتق پذیر از $x$ باشند، در این صورت با استفاده از مشتق ضرب دو تابع $u$ و $v$ داریم

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$uv' = (uv)' - u'v \Rightarrow \int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

مثال

۱) $\int x\sin x dx$

$$\begin{cases} x = u \\ dx = du \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x dx = dv \\ -\cos x = v \end{cases}$$

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$$\int x\sin x dx = \int u dv = uv - \int v du = x(-\cos x) - \int (-\cos) dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

---

۲) $\int x^{۲} \ln x dx$

$$\begin{cases} \ln x = u \\ \frac{۱}{x} dx = du \end{cases} \quad \begin{cases} x^{۲} dx = dv \\ \frac{x^{۳}}{۳} = v \end{cases}$$

۵

$$\int x^{۲} \ln x dx = \frac{x^{۳}}{۳} \ln x - \int \frac{x^{۳}}{۳}\left(\frac{۱}{x} dx\right)$$

$$= \frac{x^{۳}}{۳} \ln x - \frac{۱}{۳}\int x^{۲} dx \quad = \frac{x^{۳}}{۳} \ln x - \frac{x^{۳}}{۹} + C$$

---

۳) $\int x^{۳} e^{-x^{۲}} dx$

$$\begin{cases} x^{۲} = u \\ ۲x dx = du \end{cases} \quad \begin{cases} x e^{-x^{۲}} dx = dv \\ -\frac{۱}{۲} e^{-x^{۲}} = v \end{cases}$$

$$\int x^{۳} e^{-x^{۲}} dx = x^{۲}\left(-\frac{۱}{۲} e^{-x^{۲}}\right) - \int \left(-\frac{۱}{۲} e^{-x^{۲}}\right) ۲x dx$$

$$= -\frac{۱}{۲} x^{۲} e^{-x^{۲}} - \frac{۱}{۲}\int -۲x e^{-x^{۲}} dx$$

$$= -\frac{۱}{۲} x^{۲} e^{-x^{۲}} - \frac{۱}{۲} e^{-x^{۲}} + C$$

۶

۴) $\int \ln x dx$

$$\begin{cases} \ln x = u \\ \frac{1}{x} dx = du \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = dv \\ x = v \end{cases}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \left( \frac{1}{x} dx \right) = x \ln x - x + C$$

---

تمرین:

۱) $\int x e^x dx$

۲) $\int x^2 e^x dx$

۳) $\int e^x \sin x dx$

۴) $\int \cos \sqrt{x} dx$

۵) $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$

۶) $\int \sin(\ln x) dx$

۷) $\int x \ln(1+x) dx$

۸) $\int_0^1 (x^2+1) e^{-x} dx$

۹) $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}} dy$

۱۰) $\int \cos x \ln(\sin x) dx$

٧

## مثال

با استفاده از روش جزء به جزء فرمول بازگشتی انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\mathrm{I} = \int \cos^{n} x dx$$

$$\begin{cases} \cos^{n-1} x = u \\ (n-1)\cos^{n-2} x\left(-\sin x\right)dx = du \end{cases} \quad \begin{cases} \cos dx = dv \\ \sin x = v \end{cases}$$

$$\mathrm{I} = \cos^{n-1} x \sin x - \int \sin x\left((n-1)\cos^{n-2} x\left(-\sin x\right)dx\right)$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^{2} x \cos^{n-2} x dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1-\cos^{2} x)\cos^{n-2} x dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x dx - (n-1)\int \cos^{n} x dx$$

۸

$$I=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)I$$

$$I+(n-1)I=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx$$

$$I=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$$

$$\int\cos^{n}x\,dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$$

به همین صورت

$$\int\sin^{n}x\,dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$$

مثال

$$\int\cos^{2}x\,dx=\frac{1}{2}\cos x\sin x+\frac{1}{2}\int 1\,dx=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C$$

## انتگرال توابع مثلثاتی

محاسبه $\int \sin^n x dx$ و $\int \cos^n x dx$

الف) اگر عدد طبیعی $n$ فرد باشد:

$$\sin^n x = \sin^{n-۱} x \sin x$$

$$\sin^{n-۱} x = \sin^{۲k} x = \left(\sin^۲ x\right)^k = \left(۱-\cos^۲ x\right)^k$$

$$\int \sin^n x dx = \int \left(۱-\cos^۲ x\right)^k \sin x dx \qquad \begin{Bmatrix} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \end{Bmatrix}$$

$$= \int -\left(۱-u^۲\right)^k du$$

---

مثال

۱) $\int \sin^۵ x dx$ ۲) $\int \cos^۵ x dx$

## انتگرال توابع مثلثاتی

محاسبه $\int \sin^n x dx$ و $\int \cos^n x dx$

ب) اگر عدد طبیعی $n$ زوج باشد:

$$\sin^n x = \sin^{۲k} x = \left(\sin^۲ x\right)^k$$

$$\cos^n x = \cos^{۲k} x = \left(\cos^۲ x\right)^k$$

$$\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x \qquad \begin{cases} \cos^۲ x = \dfrac{۱+\cos ۲x}{۲} \\ \sin^۲ x = \dfrac{۱-\cos ۲x}{۲} \end{cases}$$

مثال

۱) $\int \sin^۲ x dx$

۲) $\int \cos^۴ x dx$

# انتگرال توابع مثلثاتی

محاسبه $\int \sin^m x \cos^n x dx$

الف) اگر عدد طبیعی $n$ و $m$ زوج باشند

$$\sin^m x \cos^n x = \sin^{۲k} x \cos^{۲t} x = \left(\sin^۲ x\right)^k \left(\cos^۲ x\right)^t$$

$$\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x \qquad \begin{cases} \cos^۲ x = \dfrac{۱+\cos ۲x}{۲} \\ \sin^۲ x = \dfrac{۱-\cos ۲x}{۲} \end{cases}$$

---

مثال

۱) $\int \sin^۲ x \cos^۲ x dx$

## انتگرال توابع مثلثاتی

محاسبه $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

الف) اگر عدد طبیعی $n$ یا $m$ فرد باشند

مثلا $n$ فرد باشد $\qquad \sin^m x \cos^n x = \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x$

$$\cos^{n-1} x = \cos^{2k} x = \left(\cos^2 x\right)^k = \left(1-\sin^2 x\right)^k$$

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x\, dx = du \end{array}\right\} = \int u^m \left(1-u^2\right)^k du$$

---

مثال

۱) $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx \qquad$ ۲) $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$

## انتگرال توابع مثلثاتی

محاسبه $\int \tan^m x \sec^n x dx$

الف) اگر عدد طبیعی $n$ زوج باشد

$$\sec^n x = \sec^{n-۲} x \sec^۲ x \qquad \{\sec^۲ x = ۱ + \tan^۲ x\}$$

$$\sec^n x = \left(\sec^۲ x\right)^k \sec^۲ x = \left(۱ + \tan^۲ x\right)^k \sec^۲ x$$

$$\int \tan^m x \sec^n x dx = \int \tan^m x \left(۱ + \tan^۲ x\right)^k \sec^۲ x dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} \tan x = u \\ \sec^۲ x dx = du \end{array}\right\} = \int u^m \left(۱ + u^۲\right)^k du$$

---

مثال

۱) $\int \tan^۳ x \sec^۴ x dx$

## انتگرال توابع مثلثاتی

محاسبه $\int \tan^m x \sec^n x dx$

ب) اگر عدد طبیعی $m$ فرد باشد

$$\tan^m x \sec^n x = \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \tan x \sec x$$

$$= \left(\tan^2 x\right)^k \sec^{n-1} x \tan x \sec x$$

$$\left\{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x\right\} \qquad = \left(\sec^2 x - 1\right)^k \sec^{n-1} x \tan x \sec x$$

$$\int \tan^m x \sec^n x dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right)^k \sec^{n-1} x \tan x \sec x dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sec x = u \\ \sec x \tan x dx = du \end{array}\right\} \qquad = \int \left(u^2 - 1\right)^k u^{n-1} du$$

مثال

۱) $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$ ۲) $\int \sec^3 x dx$

۱۵

پ) اگر $n$ فرد و $m$ زوج باشد، روشهای دیگری مانند روش جزء به جزء را به کار می بریم

محاسبه $\int \sin mx \cos nx \; dx$ ، $\int \cos mx \cos nx \; dx$ و $\int \sin mx \sin nx \; dx$

از فرمولهای زیر استفاده می کنیم.

$$\sin u \cos v = \frac{۱}{۲}[\sin(u+v)+\sin(u-v)]$$

$$\cos u \cos v = \frac{۱}{۲}[\cos(u+v)+\cos(u-v)]$$

$$\sin u \sin v = \frac{۱}{۲}[\cos(u-v)-\cos(u+v)]$$

---

مثال

۱) $\int \sin ۳x \; \cos ۲x dx$

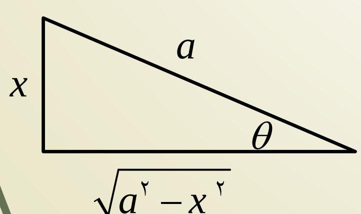
۲) $\int \cos ۵x \; \cos ۳x dx$

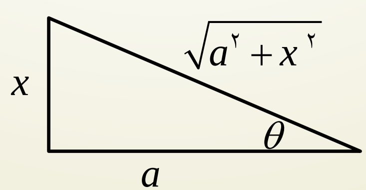
## انتگرال گیری به روش جانشانی مثلثاتی

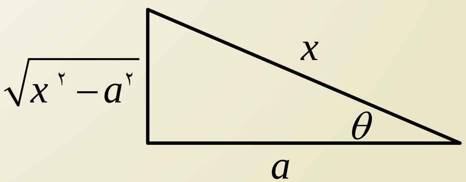
در محاسبه مساحت دایره یا بیضی انتگرالهایی به وجود می آیند که برای محاسبه

این انتگرالها از جانشانی مثلثاتی استفاده می کنیم

| عبارت زیر انتگرال | جانشانی | استفاده از فرمول |
| --- | --- | --- |
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a\sin\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ | $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ | $x = a\tan\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ | $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a\sec\theta \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ or $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ | $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ |



در حالت کلی می توانیم از جانشانی به صورت $x = g(t)$ استفاده کنیم در این حالت فرض می کنیم که $g(t)$ وارون پذیر باشد.

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \qquad \begin{Bmatrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{Bmatrix}$$

این نوع جانشانی را جانشانی معکوس می نامیم.

---

مثال

۱) $\int \frac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{x^{۲}}dx$

۲) مساحت ناحیه محصور بوسیله بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$

۳) $\int \frac{۱}{x^{۲}\sqrt{x^{۲}+۴}}dx$

۴) $\int \frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۴}}dx$

# انتگرال گیری به روش تجزیه به کسرهای جزئی



انگرال توابع کسری $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله ای هستند.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

$Q(x)$ را می توان به صورت ضرب عامل های خطی $(ax+b)$ و عامل های درجه دوم تحویل ناپذیر ( $b^2-4ac<0$ , $ax^2+bx+c$) تجزیه کرد.

بنابراین $\frac{R(x)}{Q(x)}$ را می توان به صورت مجموع کسرهای جزئی $\frac{A}{(ax+b)^m}$

یا $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ نوشت( $ax^2+bx+c$ ریشه ندارد( $b^2-4ac<0$ )) و

سپس انتگرال گرفت، انتگرال گیری به این روش را روش تجزیه به کسرهای جزئی می نامیم.

مثال

۱) $\int \frac{x^{۳}+x}{x-۱}dx$    ۲) $\int \frac{x^{۳}-۲x^{۲}+۲x+۳}{x^{۲}-۱}dx$

---

## تجزیه به کسرهای جزئی

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

$Q(x)$ را به حاصلضرب عامل های تجزیه ناپذیر درجه یک و دو تجزیه می کنیم.

سپس قاعده های زیر را به کار می بریم.

قاعده ۱) برای هر عامل $(ax+b)^m$ از $Q(x)$ عبارت $\frac{R(x)}{Q(x)}$ شامل مجموع کسرهای جزئی به صورت زیر است. $(A_i \in \mathbb{R})$

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

مثال

۱) $\int \frac{x^{۴}-۲x^{۲}+۴x+۱}{x^{۳}-x^{۲}-x+۱}dx$

**قاعده ۲)** برای هر عامل $(ax^2+bx+c)^n$ از $Q(x)$ عبارت $\frac{R(x)}{Q(x)}$ شامل مجموع کسرهای جزئی به صورت زیر است. $(A_i, B_i \in \mathbb{R})$

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

---

مثال

۱) $$\frac{x^۳+x^۲+۱}{x(x-۱)(x^۲+x+۱)(x^۲+۱)^۳}$$

---

مثال

۱) $$\int\frac{۲x+۳}{x^۳+۲x^۲+x}dx$$

۲) $$\int\frac{dx}{x(x^۲+۱)^۲}$$

۳) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}}$$

۴) $$\int\frac{x^۳}{x^۳-۱}dx$$

۵) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[۴]{x}+\sqrt[۵]{x^۲}}$$

پایان فصل ۶

موفق باشید

مهدی مردی