مسائل حل شده

ریاضیات مهندسی پیشرفته

دکتر شید فر

مباحث:

سری فوریه

سری فوریه سینوسی

سری فوریه کسینوسی

صورت مختلط سری فوریه

انتگرال گیری از سری فوریه

ضرایب سری فوریه

انتگرال سینوسی فوریه

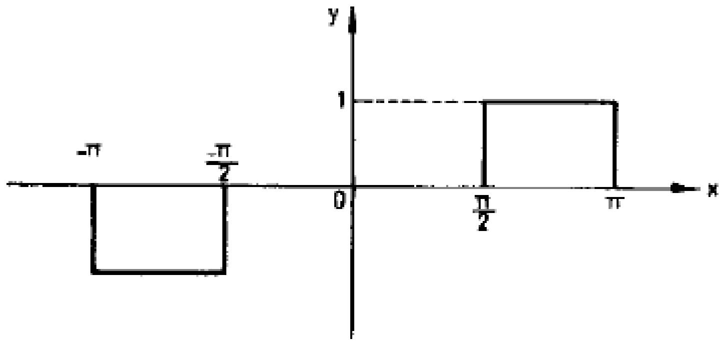
تبدیل فوریه

انتگرال فوریه

تنظیم: ابراهیم شهنازی

۶.۱. مسائل حل شده

مثال ۱. سری فوریه تابع با نمودار زیر را بیابید.



نظر به اینکه تابع فرد است $a_n = ۰$ و

$$b_n = \frac{۲}{\pi} \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{۲}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{۲} - \cos n\pi\right)$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{۲}{\pi} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{۲} - \cos n\pi\right) \sin nx$$

مثال ۲. سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi + x & ; \quad -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2}\pi - x & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

را بیابید

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \left(\frac{1}{2}\pi + x\right) \cos nx \, dx + \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\pi - x\right) \cos nx \, dx \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2n} \sin nx + \frac{x \sin nx}{n} + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_{-\pi}^{0} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\pi}{2n} \sin nx - \frac{x \sin nx}{n} - \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_{0}^{\pi} \right\} = \frac{2}{n^2 \pi} \left(1 + (-1)^{n+1}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} \left(\frac{1}{2}\pi + x\right) dx + \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx \right] = 0$$

چون تابع زوج است داریم

$$b_n = 0$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left((-1)^{n+1} + 1\right) \cos nx$$

مثال ۳. سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$, $f(x) = x + \sin x$ را بیابید.

$$f(-x) = -f(x) \; ; \; a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + \sin x)\sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} \left[\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx \right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x\cos nx}{n} \Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Bigg|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \; ; \; n \neq 1$$

$$b_1 = 2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = 3$$

بنابراین

$$f(x) = 3 \sin x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

مثال ۴. سری فوریه تابع

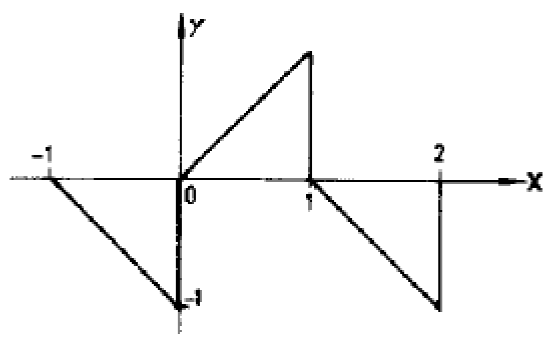
$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0<x<1 \\ 1-x & ; \quad 1<x<2 \end{cases} \qquad ; \quad p = 2$$

را بیابید.

$$a_n = \int_0^1 x\cos n\pi x\, dx + \int_1^2 (1-x)\cos n\pi x\, dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_0 = 0 \ , \ b_n = \int_0^1 x \sin n\pi x dx + \int_1^2 (1-x)\sin n\pi x dx = \frac{1}{n}\left((-1)^{n+1} + 1\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos n\pi x + \frac{1}{n}\left((-1)^{n+1} - 1\right)\sin n\pi x \right]$$



مثال ۵. سری فوریه تابع $f(x) = e^x \;;\; -\pi<x<\pi$ را بیابید.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{e^x \sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big\{\frac{e^x \sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\Big[\frac{-e^x \cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx\Big]\Big\}$$

$$= \frac{2(-1)^n}{n^2\pi}\left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}\right) - \frac{1}{n^2} a_n$$

بنابراین

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{(1+n^2)\pi} \sinh \pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{-e^x \cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\Big(-\frac{\cos n\pi}{n}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) - \frac{1}{n^2} b_n\Big)\Big]$$

$$b_n = \frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi(1+n^2)} \sinh \pi$$

در نتیجه

$$f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi}\Big\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n \sin nx)\Big\}$$

مثال ۶. صورت حقیقی سری فوریه تابع $-l<x<l$ ، $f(x) = x^2$ را بیابید و با توجه به آن مقادیر هر یک از سریهای عددی $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ و $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - + \dots$ را به دست آورید.

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{2}{l} \left[- \frac{2l}{n\pi} \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi} \; \frac{l}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \Bigg|_0^l = \frac{4l^2}{n^2\pi^2} (-1)^n \quad , \quad n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{2l^2}{3}$$

$$f(x) = x^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

حال اگر در این تساوی چنین قرار دهیم $l = \pi$ و $x = \pi$ می‌یابیم

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

حال اگر قرار دهیم $l = \pi$ و $x = 0$ داریم

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

مثال ۷. سری فوریه تابع $f(x) = \sin \pi x \; ; \quad 0<x<1 \, , \, p = 1$ را بیابید.

$$a_n = 2\int_0^1 \sin\pi x \cos 2n\pi x \, dx = \int_0^1 [\sin(2n+1)\pi x - \sin(2n-1)\pi x] \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{(2n+1)}\cos(2n+1)\pi + \frac{1}{(2n-1)}\cos(2n-1)\pi + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right] =$$

$$\frac{-4}{\pi} \times \frac{1}{4n^2-1}$$

$a_0 = \frac{4}{\pi}$ و می‌توان ثابت کرد $b_n = 0$ بنابراین

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos n\pi x$$

مثال ۸ سری فوریه تابع $f(x) = x^3 \; ; \quad -2<x<2$ را بیابید.

$a_n = 0$ و

$$b_n = \int_0^2 x^3 \sin\frac{n\pi}{2} x \, dx = \left[-\frac{2x^3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right|_0^2 + \frac{6}{n\pi}\int_0^2 x^2 \cos\frac{n\pi x}{2} dx]$$

$$= \frac{16(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{6}{n\pi}\left[-\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2} dx\right] = \frac{16(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{96(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}$$

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{16n^2\pi^2 - 96}{n^3\pi^3}$$

بنابراین

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{16n^2\pi^2 - 96}{n^3\pi^3} \sin\frac{n\pi x}{2}$$

مثال ۹. سری فوریه تابع $f(x) = e^{-x} \; ; \; 0<x<2\pi$ را بیابید.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi(n^2+1)}\left[e^{-x}(-\cos nx + n\sin nx\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\frac{1}{n^2+1} \; ; \; a_0 = \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi(n^2+1)}\left[e^{-x}(-\sin nx + n\cos nx)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\cdot\frac{n}{n^2+1}$$

بنابراین

$$e^{-x} = \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{5}\cos 2x+\frac{1}{10}\cos 3x+\dots\right)+\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{2}{5}\right.\right.$$

$$\left.\left.\sin 2x+\frac{3}{10}\sin 3x+\dots\right)\right\}$$

مثال ۱۰. سری فوریه سینوسی تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x \;; & 0<x<\frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4} \;; & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$$

را بیابید.

$$b_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

$$= 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x\right) \sin n\pi x \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{3}{4}\right) \sin n\pi x \, dx\right)$$

$$= 2\left[-\left(\frac{1}{4} - x\right) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + 2\left[-\left(x - \frac{3}{4}\right) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\left[1-(-1)^n\right] - \frac{4\sin n\pi/2}{n^2\pi^2}$$

بنابراین

$$f(x) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) \sin\pi x + \left(\frac{1}{3\pi} + \frac{4}{3^2\pi^2}\right) \sin 3\pi x + \left(\frac{1}{5\pi} - \frac{4}{5^2\pi^2}\right) \sin 5\pi x + \ldots$$

مثال ۱۱. سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \sin 3x \;;\; 0<x<\pi$ را بیابید.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 3x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin 3x \sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{3}{n}\int_0^{\pi}\cos 3x \sin nx \, dx\right]$$

$$= \frac{-6}{n\pi}\left[\frac{-\cos 3x \cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{3}{n}\frac{\pi}{2}a_n\right] = \frac{-6}{\pi n^2}\left[1+(-1)^n\right] + \frac{9}{n^2}a_n$$

$$a_n = \frac{6}{\pi(9-n^2)}\left(1+(-1)^n\right) \;;\; n\neq 3$$

$$a_3 = 0 \;;\; a_0 = \frac{4}{3\pi}$$

$$f(x) = \frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1,\, n\neq 3}^{\infty} \frac{6}{\pi(9-n^2)}\left(1+(-1)^n\right)\cos nx$$

مثال ۱۲. صورت مختلط سری فوریه تابع $f(x) = \cosh x$ و $-\pi<x<\pi$ به دست آورید.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh x \, e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[e^{-inx}\sinh x\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi}\sinh x\, e^{-inx}\,dx\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\sinh\pi + \frac{in}{2\pi}\left[e^{-inx}\cosh x\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\cosh x\,dx\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\sinh\pi + \frac{in(-1)^n\cosh\pi}{\pi} - n^2 c_n$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\sinh\pi + \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\, in\cosh\pi$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)}\left[\sinh\pi + in\cosh\pi\right]e^{-inx}$$

مثال ۱۳. صورت مختلط سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ ; & -\pi<x<0 \\ \cos x \ ; & 0<x<\pi \end{cases}$$

را بیابید.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos x\, e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2\pi n i}\, e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}(e^{ix}+e^{-ix})\,e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{-i}{2n\pi}(e^{-in\pi}-1) + \frac{i}{4\pi}\left[\frac{1}{n-1}e^{i\pi(1-n)} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}e^{-i\pi(1+n)} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= \frac{i}{2n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{i}{4\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n-1} - \frac{1}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= \frac{i}{2n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{in}{2\pi} - \frac{((-1)^{n+1}-1)}{n^2-1} \quad ; \quad n\neq 0\,,1$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-ix}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x\, e^{-ix}\,dx = \frac{i}{\pi} + \frac{1}{4}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi}\cos x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{i}{\pi} + \frac{1}{4}\right)e^{ix} + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0,1}}^{\infty} i\left[\frac{(1-(-1)^n)}{n} - \frac{n}{n^2-1}\,((-1)^{n+1}-1)\right]e^{inx}$$

مثال ۱۴. با انتگرالگیری از سری فوریه

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=f(x)=\begin{cases}-1 & ; \ -\pi<x<0\\ 1 & ; \ 0<x<\pi\end{cases}$$

به سری فوریه تابع $|x|$ برسید. ابتدا از طرفین انتگرال نامعین می‌گیریم :

$$\int\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\int f(x)\,dx=\begin{cases}-x & ; \ -\pi<x<0\\ x & ; \ 0<x<\pi\end{cases}$$

$$c-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\begin{cases}-x & ; \ -\pi<x<0\\ x & ; \ 0<x<\pi\end{cases}$$

با انتگرالگیری از طرفین تساوی فوق در فاصله π تا $-\pi$ می‌یابیم $c=\frac{\pi}{2}$ بنابراین :

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\begin{cases}-x & ; \ -\pi<x<0\\ x & ; \ 0<x<\pi\end{cases}$$

مثال ۱۵. فرض کنید f و g در فاصله $[-\pi , \pi]$ پیوسته تکه‌ای و متناوب با دوره 2π باشند و (a_n , b_n) و (c_n , d_n) به ترتیب ضرایب فوریه f و g باشند آنگاه ثابت کنید که :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f.g\,dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n + c_n d_n)$$

چنانچه فرض کنیم $h = f+g$ آنگاه تابع h دارای سری فوریه است. هرگاه A_n و B_n ضرایب فوریه این تابع باشند آنگاه داریم :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g \cos nx\,dx$$

بنابراین

$$A_n = a_n + c_n$$

و همینطور

$$A_0 = a_0 + c_0 \qquad \text{و} \qquad B_n = b_n + d_n$$

ولی می‌توان ثابت کرد که (تمرین ۱۰)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

که به تساوی پارسوال موسوم است با استفاده از تساوی پارسوال برای f و g و h و با توجه به اتحاد $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$ می‌یابیم :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f+g)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg dx$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f+g)^2\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2\,dx$$

$$= \frac{(a_0+c_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n+c_n)^2+(b_n+d_n)^2] = -\frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) - \frac{c_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+d_n^2)$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+d_n^2) + a_0c_0$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n + b_nd_n) - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) - \frac{c_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(c_n^2+d_n^2)$$

یا

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx = \frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n + b_nd_n)$$

مثال ۱۶. تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & ; \quad x > \pi \end{cases}$$

را به صورت یک انتگرال سینوسی فوریه بنویسید و با توجه به آن انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi x}{x} \sin\pi x \, dx$$

را محاسبه کنید.

$$b(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin wx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin wx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos wx}{w} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1-\cos w\pi}{w}$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1-\cos w\pi}{w} \sin wx \, dx$$

و به ازای $x=\pi$ داریم.

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos w\pi}{w} \sin w\pi \, dw = \frac{\pi}{4} \left[f(\pi-) + f(\pi+) \right] = \frac{\pi}{4}$$

با تغییر w به x می‌یابیم :

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi x}{x} \sin\pi x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۱۷. تبدیل فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ; \quad |x| < ۱ \\ ۰ & ; \quad |x| > ۱ \end{cases}$$

را بیابید و با توجه به آن $\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ را محاسبه کنید

$$\bar{f}(w) = F\{f\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-۱}^{۱} e^{-iwx} dx = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{\sqrt{۲\pi} iw} = ۲\frac{\sin w}{\sqrt{۲\pi} w} \; ; w \neq ۰$$

و به ازای $w = ۰$ داریم $\bar{f}\{w\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}$ حال با استفاده از فرمول تبدیل معکوس

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(w) \, e^{iwx} \, dw$$

داریم

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۲\sin w}{w} e^{iwx} \, dw = \begin{cases} ۱ & ; \quad |x| < ۱ \\ ۰ & ; \quad |x| > ۱ \end{cases}$$

با قرار دادن $x = ۰$ نتیجه می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \pi \qquad \text{و یا} \qquad \int_{۰}^{\infty} \frac{\sin w}{w} dw = \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۱۸. به ازای هر عدد طبیعی n نشان دهید که $F\{\frac{d^n u}{dx^n}\} = (iw)^n F\{u\}$

به ازای هر تابع u داریم

$$F\{u\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-iwx}\, dx\,,\ F\{u'\} = iwF\{u\}$$

$F\{u''\} = iw\, F\{u'\} = (iw)^2 F\{u\}$ و به استقرا می‌توان ثابت کرد

$$F\{u^{(n)}\} = (iw)^n F\{u\}$$

مثال ۱۹. نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx + w \sin wx}{1 + w^2}\, dw = \begin{cases} 0 & ; \ x<0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \ x=0 \\ \pi e^{-x} & ; \ x>0 \end{cases}$$

تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x<0 \\ \pi e^{-x} & ; \ x>0 \end{cases}$$

مثال ۱۹. نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx + w \sin wx}{1+w^2}\,dw = \begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad x=0 \\ \pi e^{-x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ \pi e^{-x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم و انتگرال فوریه آن را می‌یابیم

$$a(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \pi e^{-x} \cos wx\,dx = \left[\frac{e^{-x}}{1+w^2}(-\cos wx + w \sin wx)\right]_0^\infty = \frac{1}{1+w^2}$$

یا

$$a(w) = \frac{1}{1+w^2}$$

$$b(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \pi e^{-x} \sin wx\,dx = \left[\frac{e^{-x}}{1+w^2}(-\sin wx - w \cos wx)\right]_0^\infty = \frac{w}{1+w^2}$$

و از آنجا داریم

$$\int_0^\infty \left(\frac{\cos wx}{1+w^2} + \frac{w}{1+w^2}\sin wx\right)dw = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \begin{cases} 0 & ; \quad x<0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad x=0 \\ \pi e^{-x} & ; \quad x>0 \end{cases}$$