ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

math-teacher.blog.ir

کاربرد :

۱) معین :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(نکته: وقتی تغییر متغیر می‌دهیم بازه‌ی انتگرال هم تغییر می‌کند)

۲) حد :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \overset{\text{فرمول}}{=} \int_0^1 f(x)\,dx$$

$\frac{i}{n} \to x$

۱) نوشتن حد داده شده به صورت $\sum$
۲) ایجاد $\frac{1}{n}$ و $\frac{i}{n}$
۳) تبدیل $f(\frac{i}{n})$ به $f(x)$ و سپس انتگرال

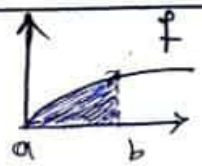
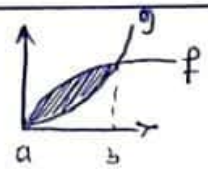
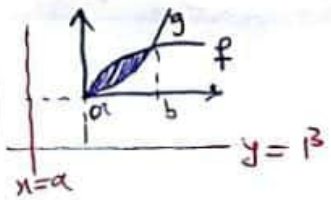
۳) مشتق :

$$y = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt \longrightarrow y' = u' f(u) - v' f(v)$$

۴) مساحت :

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

۵) حجم :

$V = \pi r^2 h$ (دوران حول محور x ها) $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$	$V = \pi \int_a^b (f^2 - g^2)\,dx$	$V = \pi \int_a^b (f-\beta)^2 - (g-\beta)^2\,dx$ (دوران موازی محور x ها حول خط $y=\beta$)
$V = 2\pi r h$ (دوران حول محور y ها) $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$	$V = 2\pi \int_a^b x(f-g)\,dx$	$V = 2\pi \int_a^b (x-\alpha)(f-g)\,dx$
		

۶) طول منحنی :

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

۷) همگرایی و واگرایی :

۱) نامسره نوع اول (∞ بودن کران) $\begin{cases} p>1 \leftarrow \text{همگرا} \\ p<1 \leftarrow \text{واگرا} \end{cases}$

۲) نامسره نوع دوم (∞ شدن باز ای کران) $\begin{cases} p<1 \leftarrow \text{همگرا} \\ p>1 \leftarrow \text{واگرا} \end{cases}$

عدد $= \frac{1}{\infty}$

$\int \frac{1}{x^p}$

① استفاده از تعریف حد
② محی سه استرال

روش‌های حل

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مثال ۱) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$ می‌شود؟

$$=\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i)^2}\right) \quad \text{فاکتور } n(1+\frac{i}{n}) \qquad =\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2(1+\frac{i}{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}\to f(\tfrac{i}{n})$$

بنابراین $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

دیفرانسیل $=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=\frac{-1}{1+x}\Big|_0^1=-1\left(\frac{1}{2}-1\right)$

$$=\boxed{\frac{1}{2}}$$

مثال ۲) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{(n^2+1)^2}+\frac{n^3}{(n^2+4)^2}+\cdots+\frac{n^3}{16n^4}\right)$ می‌شود

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n^3}{(n^2+i^2)^2}\right) \quad \text{فاکتور } n^2(1+\frac{i^2}{n^2}) \qquad =\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n^3}{n^4(1+(\frac{i}{n})^2)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+(\frac{i}{n})^2)^2}\to f(\tfrac{i}{n})$$

بنابراین $f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$

دیفرانسیل $=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ $\begin{cases}x=\tan\theta\\ dx=\sec^2\theta\,d\theta\end{cases}$

بازه را هم عوض کنید $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$\sec^4\theta$

$$=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-(0+0)\right)=\boxed{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}}$$

مثال) $y=\frac{1}{3}(x^2-2)^{3/2}$ $\quad x=2 \quad x=4$

الف) طول خم (طول قوس)
ب) حجم - حول محور y

الف)
$$\ell=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad y'=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)(2x)(x^2-2)^{1/2}=x(x^2-2)^{1/2}$$

$$\ell=\int_2^4 \sqrt{1+x^2(x^2-2)}\,dx=\int_2^4 \sqrt{x^4-2x^2+1}\,dx=\int_2^4 \sqrt{(x^2-1)^2}\,dx$$

$$=\int_2^4 (x^2-1)\,dx=\frac{1}{3}x^3-x\Big|_2^4=\left(\frac{1}{3}4^3-4\right)-\left(\frac{1}{3}2^3-2\right)=\frac{50}{3}$$ (الف)

ب)
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx \longrightarrow V=\pi\int_2^4 \frac{1}{9}(x^2-2)^3\,dx$$

$$V=\frac{\pi}{9}\int_2^4 (x^6-3(2)x^4+3(2^2)x^2-8)\,dx$$
$6x^4$ $\quad 12x^2$

$$V=\frac{\pi}{9}\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{6}{5}x^5+4x^3-8x\right)\Big|_2^4$$ ← خودت حساب کن

مثال ۲) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x^3 \end{cases}$ حجم محصور

الف) دوران حول x
ب) دوران حول y

برای $x^2=x^3 \Rightarrow x=0, x=1$

الف)
$$V=\pi\int (f^2-g^2)\,dx$$
$$=\pi\int_{x=0}^{1}((x^3)^2-(x^3)^2)\,dx \quad =\pi\int_0^1 (x^4-x^6)\,dx$$
$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{2}{35}\right)$$

ب)
$$V=2\pi\int x(f-g)\,dx$$
$$=2\pi\int_{x=0}^{1} x(x^2-x^3)\,dx \quad =2\pi\int_0^1 (x^3-x^4)\,dx$$
$$=2\pi\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1}{10}\right)$$

---

math-teacher.blog.ir
مدرس تخصصی
ریاضی۱و۲
معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی

c) دوران حول خط $y=1$
d) دوران حول خط $x=1$

c)
$$V=\pi\int (f-\beta)^2-(g-\beta)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^1 (x^2-1)^2-(x^3-1)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^1 (x^4-2x^2+1)-(x^6-2x^3+1)\,dx$$
$$=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1=$$ خودت حساب کن

---

d)
$$V=2\pi\int (x-\alpha)(f-g)\,dx$$
$$=2\pi\int_0^1 (x-1)(x^2-x^3)\,dx$$
$$=2\pi\int_0^1 (x^3-x^4-x^2+x^3)\,dx$$
$$=2\pi\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=$$ خودت حساب کن

math-teacher.blog.ir

مسئله ۲. طول قوس منحنی بسته با معادلات پارامتری زیر را بیابید(۱۵نمره)

$$x = a\cos^{۳} t, \qquad y = a\sin^{۳} t,$$

مسئله ۳. مقدار حد زیر را تعیین کنید(۱۵نمره)

$$\lim_{x\to ۰^{+}} \frac{\int_{x}^{\sqrt{x}} e^{t^{۲}}\, dt}{۲\sqrt{x}}$$

مسئله ۴. از دو قسمت زیر فقط به یک مورد پاسخ دهید(۲۰نمره)

الف) حد زیر را به دست آورید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^{۲}} \left(\sin\frac{\pi}{n} + ۲\sin\frac{۲\pi}{n} + \ldots + (n-۱)\sin\frac{(n-۱)\pi}{n} \right)$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

math-teacher.blog.ir

مدرس تخصصی
ریاضی۱و۲
معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی

$\begin{cases} x = a\cos^3 t \xrightarrow{\text{به توان } \frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t \\ y = a\sin^3 t \xrightarrow{\text{به توان } \frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t \end{cases}$ جمع بزنید $\longrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t + \sin^2 t)^1$

$\longrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \longrightarrow y = \pm\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{3/2}$

طول منحنی: $\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}$

$y' = \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = -x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$l = \int$ $\quad l = 4\int_0^a \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{x^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}}$ (تقارن)

$x^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} - 1$

$= 4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}\,dx = 4\frac{a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_0^a = 6a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - 0\right) = \boxed{6a}$

سوال ۵:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt}{2\sqrt{x}} = \frac{\int_0^0 e^{t^2}dt}{0} = \frac{0}{0}$ فرم

$\xrightarrow{H\text{o}P} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(e^x) - (1)(e^{x^2})}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ تقسیم $= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}e^x - \sqrt{x}\,e^{x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

سوال ۶:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{\pi}{n} + 2\sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + (n-1)\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\sin\frac{i\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\sin\left(\frac{i\pi}{n}\right) \to f\left(\frac{i}{n}\right)$

$f(x) = x\sin(\pi x)$

فرمول $= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\sin(\pi x)$ (جزء به جزء)

روش سریع:

x	$\sin(\pi x)$
1	$-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$
0	$-\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$

$= -\frac{x}{\pi}\cos\pi x + \frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\Big|_0^1$

$= \left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi + 0\right) - (0 + 0) = \boxed{\frac{1}{\pi}}$

math-teacher.blog.ir