پاسخ: ابراهیم شاه ابراهیمی

ریاضیات (ریاضی عمومی (۱و۲)، معادلات دیفرانسیل، ریاضی مهندسی):

۳۱- اگر $A=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left(\frac{1+z}{2-z}\right)>1\}$ باشد، آنگاه A با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟ ($\mathbb{C}$ مجموعهٔ اعداد مختلط است.)

۱) $\{z\in\mathbb{C}: \left|z-2-\frac{3}{2}i\right|<\frac{3}{2}\}$ ✓

۲) $\{z\in\mathbb{C}: \left|z-2-\frac{3}{2}i\right|>\frac{3}{2}\}$

۳) $\{z\in\mathbb{C}: \left|z+2+\frac{3}{2}i\right|<\frac{3}{2}\}$

۴) $\{z\in\mathbb{C}: \left|z+2+\frac{3}{2}i\right|>\frac{3}{2}\}$

$z = x+iy \rightarrow Z=\frac{x+1+iy}{2-x-iy}$

$$Z=\frac{((x+1)+iy)((2-x)+iy)}{(2-x)^2+y^2}$$

$$\operatorname{Im}(Z)=\frac{(x+1)y+(2-x)y}{(2-x)^2+y^2}>1$$

$$\rightarrow 3y>4-4x+x^2+y^2$$

$$\rightarrow \left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2+(x-2)^2<\left(\tfrac{3}{2}\right)^2$$

۳۲- حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\frac{5}{2}\right]+\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]+\dots+\left[\left(\frac{5}{2}\right)^n\right]}{\left(\frac{5}{2}\right)^n}$، کدام است؟

۱) صفر

۲) ∞

۳) $\frac{5}{2}$

۴) $\frac{5}{3}$ ✓

با اطلاعات $\longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[x]+[x^2]+\dots+[x^n]}{x^n}=\dfrac{x}{x-1}\xrightarrow{x=5/2}=\dfrac{5/2}{3/2}=\dfrac{5}{3}$

۳۳- اگر $A=\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{8+x}}dx$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\frac{1}{10}\le A\le\frac{2}{19}$

۲) $\frac{1}{20\sqrt{2}}\le A\le\frac{1}{10}$

۳) $\frac{1}{30\sqrt{2}}\le A\le\frac{1}{30}$

۴) $\frac{1}{30}\le A\le\frac{1}{20\sqrt{2}}$ ✓

$$0<x<1 \xrightarrow{+8} 8<x+8<9$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{8}<\sqrt{x+8}<3$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{8+x}}<\frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\xrightarrow{\times x^9} \frac{x^9}{3}<\frac{x^9}{\sqrt{8+x}}<\frac{x^9}{\sqrt{8}}$$

$$\xrightarrow{\int} \frac{x^{10}}{30}\Big|_0^1<\text{جواب}<\frac{x^{10}}{20\sqrt{2}}\Big|_0^1 \rightarrow \frac{1}{30}<\text{جواب}<\frac{1}{20\sqrt{2}}$$

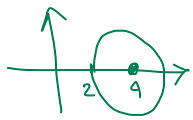
۳۴- حجم شکل حاصل از دوران دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز $(4\ ,\ 0)$ حول محور yها، کدام است؟

۱) 32π

۲) $32\pi^2$

۳) 16π

۴) $16\pi^2$



قضیه پاپوس →

$$\text{حجم} = (\text{مساحت مقطع}) \times 2\pi r$$
$$= \pi(2)^2 \times 2\pi(4)$$
$$= 4\pi \times 8\pi = 32\pi^2$$

۳۵- اگر $b \ge a > 0$ باشد، آنگاه فاصلهٔ همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ax+b)^n}{a^n+b^n}$ ، کدام است؟

۱) $\left(\frac{-1-b}{a}\ ,\ \frac{1-b}{a}\right)$

۲) $\left(\frac{-1-2b}{a}\ ,\ \frac{1-b}{a}\right)$

۳) $\left(\frac{-2b}{a}\ ,\ 0\right)$

۴) $\left(0\ ,\ \frac{2b}{a}\right)$

آزمون ریشه →

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|ax+b|^n}{a^n+b^n}} = \frac{|ax+b|}{b}$$

شرط همگرایی →

$$\frac{|ax+b|}{b} < 1 \to -b < ax+b < b$$
$$\to -2b < ax < 0 \to \frac{-2b}{a} < x < 0$$

۳۶- خط قائم بر بیضی‌گون $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ با محورهای مختصات زاویهٔ مساوی می‌سازد. اگـر $(a\ ,\ b\ ,\ c)$ نقطـهٔ گـذرای خط قائم از بیضی‌گون باشد، مقدار $a^2+b^2+c^2$، کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) $\frac{3}{2}$

۴) $\frac{3}{4}$

گرادیان →

$$\vec{\nabla} f = \left(2x, 2y, \frac{1}{2}z\right)$$

$$\to 2x = 2y = \frac{1}{2}z \xrightarrow{\text{جایگذاری}} x^2+x^2+4x^2=1 \to 6x^2=1 \to \boxed{x^2=\frac{1}{6}}$$

$$\to \boxed{y^2=\frac{1}{6}}\ ,\ \boxed{z^2=\frac{16}{6}} \to a^2+b^2+c^2 = \frac{1+1+16}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

۳۷- اگر $(t>0)$ $F(t) = \iint_{x^2+y^2\le t^2} \sin(x^2+y^2)^2\,dxdy$ باشد، $F'(t)$، کدام است؟

۱) $2\pi\sin(t^2)$

۲) $2\pi\sin(t^4)$

۳) $2\pi t\sin(t^2)$

۴) $2\pi t\sin(t^4)$

$$F(t) = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{t} \sin(r^2)^2\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^t \underbrace{\sin(r^4)\cdot r\,dr}_{\text{مشتق از انتگرال}}$$

مشتق →

$$F'(t) = 2\pi \cdot 1 \times \sin(t^4)\cdot t = 2\pi t \sin(t^4)$$

پاسخ : ابراهیم شاه ابراهیمی

۳۸- فرض کنید C_1 منحنی بستهٔ $x^2+y^2=25$ در جهت مثلثاتی و C_2 منحنی بستهٔ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. مقدار $\int_{C_1\cup C_2} xdy-ydx$ ، کدام است؟

① مسیر بسته ② F پیوسته ← گرین

$-ydx+xdy$

۱) 38π ✓
۲) 36π
۳) 31π
۴) 19π

$=\iint (1-(-1))\,dA$

$= 2\iint dA = 2(\text{مساحت بین}) = 2\left(\pi(5)^2-\pi(2)(3)\right) = 38\pi$

$25\pi - 6\pi$

۳۹- اگر S بخشی از رویهٔ $z=1-x^2$ ، $0\le x\le 1$ و $-2\le y\le 2$ و C مرز این رویه در جهت مثبت و $\vec F(x,y,z)=(y,y,z)$ باشد، آنگاه مقدار $\oint_C \vec F\cdot d\vec r$ کدام است؟

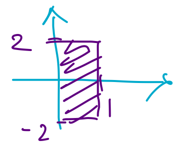
قضیه استوکس

$n\,ds = (2x,0,1)\,dA$

$\overrightarrow{curl F} = (0,0,-1)$

$\to \int F\cdot dr = \iint (2x,0,1)\cdot(0,0,-1)$

$= -\iint dA$



$= -\text{مساحت مستطیل}$

$-4 = -4\times 1$

۱) $-\frac{7}{3}$
۲) -4 ✓
۳) $-\frac{15}{4}$
۴) $-\frac{17}{4}$

۴۰- فرض کنید S سطح خارجی ناحیه‌ای باشد که توسط صفحهٔ $z=0$ رویهٔ $z=4-x^2-y^2$ محصور شده است. اگر $\vec F(x,y,z)=(x^3+\cos(y^3+z^3), y^3+\sin(x^3+z^3), x^3+y^3)$ باشد، شار گذرا از سطح S توسط نیروی $\vec F$ کدام است؟

قضیه دیورژانس $= \iiint \operatorname{div} F\, dV$ $\qquad \operatorname{div} F = 3x^2+3y^2+0$

$= 3\iiint (x^2+y^2)\,dV \xrightarrow[\text{استوانه‌ای}]{x^2+y^2=4} 3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{4-r^2} r^2\,dz\,r\,dr\,d\theta$

$\int_0^2 (4r^3-r^5)$

$=(3)(2\pi)\left(r^4-\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^2 = 3\times 2\pi\times 16\left(1-\frac{2}{3}\right)$

۱) 16π
۲) 17π
۳) 32π ✓
۴) 34π

۴۱- برای حل معادلهٔ دیفرانسیل
$$\begin{cases} y''-4xy'+4x^2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=\sqrt{2} \end{cases}$$
از تغییر متغیر $y=e^{x^2}u$ استفاده می‌کنیم. $y(\sqrt{2})$ کدام است؟

$y' = 2xe^{x^2}u + e^{x^2}u' = e^{x^2}(2xu+u')$

$y'' = 2xe^{x^2}(2xu+u') + e^{x^2}(2u+2xu'+u'')$

۱) $e^2\sin\sqrt{2}$
۲) $e^2\cos\sqrt{2}$
۳) $e^2\sin 2$ ✓
۴) $e^2\cos 2$

$\xrightarrow[\text{و ساده کردن}]{\text{جایگذاری}} e^{x^2}u'' + 2e^{x^2}u = 0 \to \boxed{u''+2u=0}$

مشخصه $t^2+2=0 \to t=\pm\sqrt{2}i \to u = c_1\sin(\sqrt{2}x)+c_2\cos(\sqrt{2}x)$

$\to y = e^{x^2}\left(c_1\sin(\sqrt{2}x)+c_2\cos(\sqrt{2}x)\right)$

$\xrightarrow{y(0)=0} 0 = c_2 \to y = c_1e^{x^2}\sin(\sqrt{2}x) \xrightarrow{x=\sqrt{2}} y(\sqrt{2}) = c_1\cdot e^2\sin(2)$

فقط در گزینه ۳ داریم سینوس ۲ بی ضریب c_1

پاسخ: ابراهیم شاه ابراهیمی

۴۲- مسیرهای متعامد به دسته منحنی‌های $r = c(1-\sin\theta)$، در مختصات قطبی، کدام است؟

۱) $r = c(1-\sin\theta)$

۲) $r = c(1+\sin\theta)$ ✓

۳) $r = c(1-\cos\theta)$

۴) $r = c(1+\cos\theta)$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} r' = -c\cos\theta \to r' = \frac{-r}{1-\sin\theta}\cos\theta$

تبدیل $r' \to \frac{-r^2}{r'} \to \frac{-r^2}{r'} = \frac{-r}{1-\sin\theta}\cos\theta \to \frac{dr}{r} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$

$\xrightarrow{\int} \ln(cr) = \ln(\sec\theta+\tan\theta) + \ln(\cos\theta)$

$\to \ln(cr) = \ln(1+\sin\theta)$

$\to cr = 1+\sin\theta$

۴۳- اگر y جواب معادلهٔ دیفرانسیل $\begin{cases} y''-4y'^2=3y \\ y'(0)=1 \\ y(0)=0 \end{cases}$ باشد، $y'^2(1)$ کدام است؟

معادله غیرخطی فاقد x

۱) $\frac{11e^{-2}+9}{8}$

۲) $\frac{11e^{2}-9}{8}$

۳) $\frac{35e^{-8}+27}{32}$

۴) $\frac{35e^{8}-27}{32}$ ✓

$\begin{cases} y'=u \\ y''=u\frac{du}{dy} \end{cases} \to u\frac{du}{dy} - 4u^2 = 3y \quad \begin{cases} u^2=t \\ 2uu'=t' \end{cases} \to \frac{t'}{2} - 4t = 3y$

$\to t' - 8t = 6y \to$ عامل $: e^{\int -8dy} = e^{-8y} \to (te^{-8y})' = 6ye^{-8y}$

$\xrightarrow{\int} te^{-8y} = \frac{-(24y+3)e^{-8y}}{32} + c_1$ ، $t = y'^2$ ، شرط $\to 1 = -\frac{3}{32} + c_1 \to c_1 = \frac{35}{32}$

$\to y'^2 e^{-8y} = -\frac{1}{32}(24y+3)e^{-8y} + \frac{35}{32}$

$\xrightarrow{y=1} y'^2(1) = -\frac{27}{32} + \frac{35}{32}e^8$

۴۴- تبدیل معکوس لاپلاس $F(s) = \tanh^{-1}\frac{1}{s}$، کدام است؟

۱) $\frac{\sin t}{t}$

۲) $t\sin t$

۳) $\frac{\sinh t}{t}$ ✓

۴) $t\sinh t$

$F'(s) = \frac{-1/s^2}{1-1/s^2} = \frac{-1}{s^2-1}$

$\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -\sinh t$

$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}(F'(s))$

$\to \mathcal{L}^{-1}(\tanh^{-1}\frac{1}{s}) = -\frac{1}{t}(-\sinh t)$

۴۵- ضریب x^3 در سری مکلورن جواب حاصل از مسئلهٔ $(2x+1)y'' - xy' + y = 0 , y(0)=1 , y'(0)=0$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ✓

۲) $\frac{1}{6}$

۳) $-\frac{1}{3}$

۴) $-\frac{1}{6}$

$x=0, y=1, y'=0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y'' - 0 + 1 = 0 \to y'' = -1$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2y'' + (2x+1)y''' - y' - xy'' + y' = 0$

$x=0, y=1, y'=0, y''=-1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -2 + y''' - 0 - 0 + 0 = 0 \to y''' = 2$

$a_3 = \frac{y'''}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$