مؤسسهٔ انتشارات علمی

بازی منصفانه

ریچارد ک. گای

دکتر سید عبادالله محمودیان

ترجمهٔ
آناهیتا آریاچهر

بازی منصفانه

ریچارد ک. گای

ترجمه
دکتر سید عبادالله محمودیان
آناهیتا آریاچهر

مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

مؤسسهٔ انتشارات علمی

دانشگاه صنعتی شریف

بازی منصفانه
تألیف ریچارد ک. گای
ترجمهٔ دکتر سیدعبادالله محمودیان، آناهیتا آریاچهر
ویراستهٔ مهندس مهران اخباریفر
چاپ اول : ۱۳۸۱
بها: ۹۰۰۰ ریال
شمارگان: ۲۰۰۰
لیتوگرافی، چاپ، و صحافی: چاپخانهٔ دانشگاه صنعتی شریف

شابک ۹۶۴-۶۳۷۹-۸۷-۷

Fair game
Richard K. Guy
Comap, Inc, 1989

ISBN 964-6379 -87-7

گای، ریچارد، ۱۹۱۶
Guy, Richard K.
بازی منصفانه | ریچارد ک. گای؛ ترجمه عبادالله محمودیان، آناهیتا آریاچهر. - تهران: دانشگاه صنعتی شریف، مؤسسهٔ انتشارات علمی، ۱۳۸۱.
شش، ۱۳۶ ص.:
بها: ۹۰۰۰ ریال.
ISBN 964-6379-87-7
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
عنوان اصلی:
Fair game: how to play impartial combinatorial games
۱. نظریه بازیها. ۲. آنالیز ترکیبی. الف. محمودیان، عبادالله، ۱۳۲۲، مترجم. ب. آریاچهر، آناهیتا مترجم. ج. دانشگاه صنعتی شریف. مؤسسهٔ انتشارات علمی. د. عنوان.
۲ب ۲گ QA۲۶۹
۵۱۹/۳
۱۳۸۱
کتابخانهٔ ملی ایران
م۸۰-۲۵۰۰۵

این کتاب با استفاده ازسهمیهٔ کاغذ تخصیص داده شدهٔ وزارت فرهنگ وارشاد اسلامی چاپ شده است.

بسم اللّه الرحمن الرحیم

فهرست

مقدمه مترجمان

بازیهای ترکیبیاتی شامل بازیهای دو نفری‌اند که در آنها حرکت شانسی و امکان بلوف زدن وجود ندارد. همچنین این بازیها در زمان متناهی پایان می‌یابند و یکی از دو بازیکن بر اساس قوانین بازی، برنده خواهد بود.

نظریهٔ بازیهای ترکیبیاتی به‌عنوان یک شاخهٔ علمی هنوز دوران نوزادی خود را طی می‌کند. تحلیل‌های زیادی از بازیهای متفاوت به چاپ رسیده‌اند که نقطهٔ آغاز آنها تحلیل بازی نیم توسط بوتون در سال ۱۹۰۲ بوده است. نظریهٔ منسجم بازیهای منصفانه در دههٔ ۱۹۳۰ به‌طور مستقل، توسط اسپراگو و گراندی شکل گرفت و کمی پس از آن توسط گای و اسمیت توسعه و گسترش یافت. پس از آن کانوی نظریهٔ بازیهای پارتیزانی را که پیشرفت شگرفی بود، ارائه و توسعه داد. علاوه بر جذابیت طبیعی این بازیها، این شاخه ارتباطهایی با دیگر شاخه‌های ریاضیات مانند نظریهٔ کدها، نظریهٔ گراف، ساختار اعداد، نظریهٔ پیچیدگی، منطق ریاضی، نظریهٔ مترویدها، نظریهٔ شبکه‌ها و جز آن دارد.

کتاب بازیهای منصفانه اثر ریچارد گای که خود از پدید آورندگان نظریهٔ بازیهای ترکیبیاتی است، کتابی کلاسیک در این زمینه است. این کتاب با زبانی ساده و قابل فهم، حتی برای دانش‌آموزان دبیرستانی، این نظریه را ارائه می‌دهد. ظرافت طبع پروفسور گای در استفاده از معانی کلمات که بیشتر به بازی با کلمات می‌ماند در این نوشته‌اش نیز کاملاً آشکار است و ترجمهٔ آن را بسیار دشوار می‌نمود. ما مترجمان با همکاری ویراستار محترم سعی کرده‌ایم این مهم را انجام دهیم. گرچه نتیجه را خالی از اشتباه نمی‌دانیم، ولی این اولین کتاب در این زمینه به زبان فارسی است.

برای واژه‌های فارسی از واژه‌نامه ریاضی و آمار که با همکاری علمی انجمن ریاضی ایران و مرکز نشر دانشگاهی منتشر شده است و واژه‌نامه پیشنهادی مهدی بهزاد و سید عباداله محمودیان (بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، ۱۳۷۳) استفاده

شده است. واژه‌های جدید را در آخر کتاب آورده‌ایم. از نظرات مفید آقای دکتر روزبه توسرکانی و آقای مجید هادیان بعد از ترجمهٔ اولیهٔ این کتاب بهره برده‌ایم.

در تولید فنی این کتاب از همهٔ امکانات رایانه‌ای کمک گرفته شده است و صورت نهایی آن که در پیش روی خواننده است در یک فایل رایانه‌ای به ناشر داده شده است. تایپ و صفحه‌آرایی توسط نرم‌افزار فارسی‌تک انجام گرفته است. این نرم‌افزار نسخهٔ فارسی شده از نرم‌افزار TeX هدیهٔ ریاضیدان معاصر دانلد کنوتث (Donald Knuth) به عالم علم است، که توسط گروه تحقیقاتی به سرپرستی آقای دکتر محمد قدسی در دانشگاه صنعتی شریف طراحی شده است و رایگان از طریق سایت اینترنتی آن دانشگاه در اختیار همگان قرار دارد. کلیه امور رایانه‌ای این کتاب اعّم از آماده‌سازی، صفحه بندی و طراحی سبک در کامپیوتر به‌طرز شایسته‌ای توسط آقای جعفر زیاری انجام گرفته است. و نیز تمامی شکلهای موجود در کتاب حاضر، برگرفته از کتاب اصلی است که با استفاده از سیستم عامل ویندوز، تغییرات لازم متناسب با متن فارسی به آنها داده شده است، که در این امر خانم سیده آزاده محمودیان ما را یاری کردند. بر همهٔ این امور بخش تولید مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف نظارت داشته و دستورهای لازم را جهت تطبیق کتاب با اصول و الگوهای خود داده است.

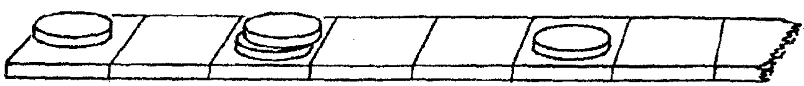
آناهیتا آریاچهر

سید عباداله محمودیان

دیماه ۱۳۸۰

نیمبِل

بازی ساده‌ای را در اینجا معرفی می‌کنیم که در آن می‌توانید دست‌کم تا وقتی‌که دوستانتان هم راز و رمز بازی را یاد بگیرند، آنها را شکست بدهید.



شکل ۱ یک بازی نیمبل.

چند سکه یا مهره را روی نواری که خانه‌بندی شده است قرار دهید. به نوبت، در هر حرکت فقط یک سکه را به سمت چپ حرکت دهید. محدودیت دیگری وجود ندارد؛ می‌توانید سکهٔ خود را روی سکهٔ دیگری قرار دهید یا از روی سکهٔ دیگری بپرید، حتی اگر با این پرش سکه از نوار بیرون برود. در هر خانه می‌توانید هر تعداد سکه که بخواهید بگذارید. در این بازی و همهٔ بازیهای دیگر این کتاب برنده بازیکنی است که آخرین حرکت را انجام می‌دهد.

آخرین بازیکن برنده است.
اگر نتوانید حرکت کنید،
می‌بازید!

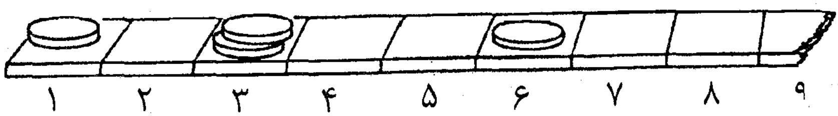
البته، آخرین بازیکن باید وجود داشته باشد! همهٔ بازیهای ما در شرط زیر صدق

می‌کنند:

شرط پایان‌پذیری

دنباله‌ای نامتناهی از حرکتها
وجود ندارد.

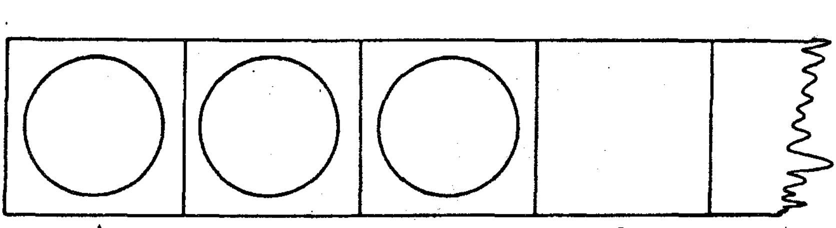
برای اینکه بفهمید در بازی نیمبل چه می‌گذرد، خانه‌ها را از چپ به راست شماره‌گذاری کنید:



شکل ۲ نیمبل شماره‌گذاری شده و آمادهٔ تحلیل است.

آیا متوجه شدید که چطور می‌توانید بازی که در شکل ۲ نشان داده‌ایم ببرید. سکهٔ خانهٔ ٦ را بردارید و آن را روی سکهٔ خانهٔ ۱ بگذارید. در این‌صورت دو جفت سکه دارید، و می‌توانید هر حرکتی را که رقیبتان انجام دهد تقلید کنید و مطمئن باشید که بازیکن آخر خواهید بود. این را **اصل مشابه‌سازی** می‌نامیم.

البته این مطلب را قبلاً هم می‌دانستید و راز بزرگی نیست. رقیبتان به زودی دستتان را می‌خواند و موقعیتهای زیادی هم هست که اصل مشابه‌سازی، هیچ کمکی به پیروزی شما نمی‌کند. به موقعیت ساده‌ای با سه سکه توجه کنید که در آن هر سکه در یکی از سه خانهٔ اول قرار گرفته است:



شکل ۳ وضعیت ساده‌ای از بازی نیمبل.

اگر نوبت شما باشد، هر حرکتی بکنید رقیبتان می‌تواند ترتیبی بدهد که بتواند با استفاده

از اصل مشابه‌سازی بازی را ببرد:

اگر شما	رقیب
سکهٔ ۱ را از نوار بیرون ببرید	سکهٔ ۳ را روی سکهٔ ۲ می‌گذارد
سکهٔ ۲ را روی سکهٔ ۱ بگذارید	سکهٔ ۳ را از نوار بیرون می‌برد
سکهٔ ۲ را از نوار بیرون ببرید	سکهٔ ۳ را روی سکهٔ ۱ می‌گذارد
سکهٔ ۳ را روی سکهٔ ۲ بگذارید	سکهٔ ۱ را از نوار بیرون می‌برد
سکهٔ ۳ را روی سکهٔ ۱ بگذارید	سکهٔ ۲ را از نوار بیرون می‌برد
سکهٔ ۳ را از نوار بیرون ببرید	سکهٔ ۲ را روی سکهٔ ۱ می‌گذارد

پس {۱, ۲, ۳} یک $\mathcal{P}$- **وضعیت** یعنی یک **وضعیت برد بازیکن قبلی** (یا برد بازیکن دوم) است. اولین مثال ما، {۱, ۳, ۳, ٦}، یک $\mathcal{N}$- **وضعیت**، یعنی یک **وضعیت برد بازیکن بعدی** (یا برد بازیکن اول) بود. (در اینجا برخلاف استفادهٔ معمول از نماد «مجموعه»، {۱, ۳, ۳, ٦} همان {۱, ۳, ٦} نیست.)

$\mathcal{N}$- وضعیت	$\mathcal{P}$- وضعیت
همواره، دست‌کم یک انتخاب وجود دارد که به یک $\mathcal{P}$- وضعیت منتهی شود.	هر انتخابی به یک $\mathcal{N}$- وضعیت منتهی می‌شود.

کلمهٔ **انتخاب** را به معنای «انتخاب حرکت»، یا «**بازی انتخابی**» به‌کار می‌بریم. توصیف $\mathcal{P}$- وضعیت و $\mathcal{N}$- وضعیت را به این دلیل در کادر گذاشته‌ایم، که نه فقط در بازی نیمبل بلکه در همهٔ بازیهای این کتاب به‌کار می‌روند.

تمرین ۱

وقتی می‌شمارید، آیا می‌گویید: یک، دو، سه ... یا اینکه از صفر شروع می کنید؟ فرض کنید که قاعده‌های بازی نیمبل را به این صورت تغییر دهیم که اجازه نداشته باشید سکه را از انتهای نوار بیرون ببرید. بازی وقتی تمام می‌شود که همهٔ سکه‌ها روی مربع اول انباشته شده باشند. آیا می‌توانید با تغییر ساده‌ای در بحث قبلی، این گونهٔ بازی را تحلیل کنید.

نیم

بازی اول را به این دلیل نیمبل نامیدیم، که یکی از شکلهای متنوع بازی نیم است. نیم با چند کپهٔ لوبیا بازی می‌شود. وقتی‌که نوبت حرکت شماست، یک کپه را انتخاب می‌کنید و هر چند تا لوبیا که بخواهید برمی‌دارید؛ می‌توانید حتی کل لوبیاهای یک کپه را بردارید، اما باید دست‌کم یک لوبیا را بردارید. در نیمبل سکه‌ای را که خانهٔ شمارهٔ ۶ است می‌توانید به هر یک از خانه‌های ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ و یا به بیرون نوار (خانهٔ ۰) ببرید. در نیم می‌توانید یک کپهٔ ۶تایی لوبیا را به کپه‌ای با ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ یا ۰ لوبیا تبدیل کنید. پس اگر بلد باشید که در نیم چطور برنده شوید، در نیمبل هم می‌توانید ببرید.

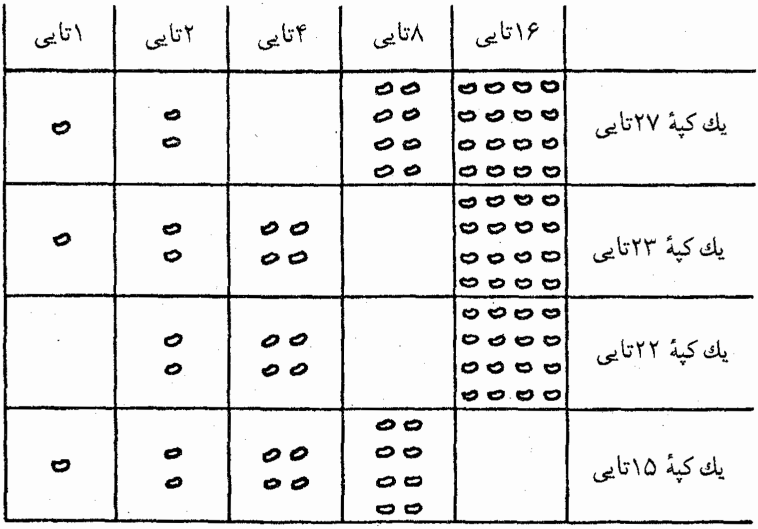
چگونه می‌توانیم $\mathcal{P}$ـ وضعیتها را در بازی نیم پیدا کنیم؟ و بهترین حرکتها زمانی که در $\mathcal{N}$ـ وضعیت هستید، چیست؟ ابتدا فرض کنید فقط یک کپه لوبیا داشته باشیم. مسلماً کل کپه را برمی‌دارید: طرف مقابل نمی‌تواند حرکتی انجام دهد و بنابراین می‌بازد! حال فرض کنید که دقیقاً دو کپه لوبیا داشته باشیم. اگر تعداد لوبیاهای دو کپه یکی نباشد، می‌توانید از کپهٔ بزرگتر بکاهید تا به اندازهٔ کپهٔ کوچکتر شود. آنگاه از اصل مشابه‌سازی استفاده کنید.

	$\mathcal{N}$ـ وضعیتها	$\mathcal{P}$ـ وضعیتها
نیمِ یک کپه‌ای	$\{n\},\ n > 0$	(کپهٔ خالی) $\{0\}$
نیمِ دو کپه‌ای	$\{m, n\},\ m \neq n$	(دو کپهٔ مساوی) $\{n, n\}$

(عددهای داخل آکلادها تعداد لوبیاهای کپه‌ها را مشخص می‌کنند.)

اگر بیش از دو کپه داشته باشیم، از ایدهٔ زیرکانهٔ سی. ال. بوتون [۷] که در ابتدای قرن بیستم [میلادی] به‌کار رفت، استفاده می‌کنیم. تصور کنید لوبیاهای هر کپه به توانهایی از دو افراز شده باشند، دقیقاً همان‌طور که یک کامپیوتر با عددهای نمایش داده شده

در مبنای دودویی کار می‌کند. برای مثال فرض کنید وضعیتی با چهار کپه شامل ۲۷، ۲۳، ۲۲ و ۱۵ لوبیا داریم؛ تجزیه‌ها به‌صورت زیر خواهند بود:



شکل ۴ چگونه به یک وضعیت بازی نیم نگاه کنیم؟

اگر دو کپهٔ هم‌اندازه داشته باشیم می‌توانیم با توجه به اصل مشابه‌سازی آنها را ندیده بگیریم. دو تا ۸ و چهارتا ۲ را ندیده بگیرید و روی ۱ها، ۴ها و ۱٦ها متمرکز شوید، یعنی ستونهایی با تعداد فردی از درایه‌ها. یک حرکت خوب می‌تواند برداشتن ۲۱ = ۱ + ۴ + ۱٦ لوبیا از کپهٔ ۲۳تایی باشد، زیرا

$\mathcal{P}$- وضعیت‌ها در بازی نیم

دقیقاً آنهایی هستند که
هر توانی از ۲،
به تعداد دفعات زوجی ظاهر می‌شود.

اگر رقیبتان را در چنین وضعیتی قرار دهید، او مجبور خواهد بود که دست‌کم در یک ستون، توازن را از زوج به فرد تغییر دهد و سپس شما می‌توانید دوباره آن را اصلاح کنید.

شاید کمی خوش‌شانس بودیم که کپهٔ ۲۳تایی را یافتیم که شامل نمایندگان همهٔ توانهایی

از دو است که به تعداد دفعات فرد رخ داده‌اند: ۱۶، ۴، ۱. بله! اما واقعاً به چنین شانسی نیاز نداریم! قبل از خواندن بقیه متن، تمرین زیر را حل کنید:

تمرین ۲

وضعیت نیم با ۵ کپهٔ حاوی ۲۳، ۱۹، ۱۳، ۱۲ و ۱۱ لوبیا، یک $\mathcal{N}$ـ وضعیت است. سه حرکت خوب متفاوت که آن را تبدیل به یک $\mathcal{P}$ـ وضعیت کند، بیابید.

آیا حرکتهای خوب دیگری در مثال {۲۷, ۲۳, ۲۲, ۱۵} وجود دارد؟ بله! به بزرگترین توان ۲ که به دفعات فرد ظاهر شده باشد، نگاه کنید (در این حالت، ۱۶). هر کپه‌ای که در آن یک ۱۶ وجود دارد (و حتماً یکی وجود دارد، زیرا تعداد فردی از آن موجود است!) می‌تواند حرکت خوبی را فراهم کند. یک ۱۶ را بردارید و سپس هر توان کوچکتر ۲ را که به دفعات فرد ظاهر شده است بردارید یا بگذارید. برای مثال، از کپهٔ ۲۷تایی، ۱۶ تا بردارید، ۴ تا بگذارید و یکی بردارید، یعنی برداشتن ۱۳ = ۱ + ۴ − ۱۶ لوبیا از کپهٔ ۲۷تایی، $\mathcal{P}$ـ وضعیت {۱۴, ۲۳, ۲۲, ۱۵} را ایجاد می‌کند. یا، برداشتن ۱۹ = ۱ − ۴ + ۱۶ لوبیا از کپهٔ ۲۲تایی، $\mathcal{P}$ـ وضعیت {۲۷, ۲۳, ۳, ۱۵} را ایجاد می‌کند. کاری که انجام می‌دهیم، این است که

جمع نیم

عمل جمع در مبنای دو **بدون رقم انتقالی**

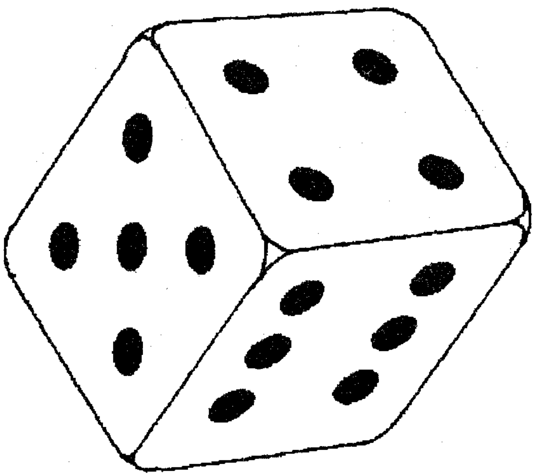
این یک عمل منطقی اساسی است که اغلب در کامپیوترهای خیلی کوچک و ماشین حسابها وجود دارد و آن را احتمالاً XOR یعنی **«یای انحصاری»** می‌نامند. آیا شما در ماشین حسابتان کلید XOR دارید؟

$\mathcal{P}$ـ وضعیتها در نیم

دقیقاً آنهایی هستند که **کپه‌های نیم در آنها اندازه‌هایی دارند** **که مجموع نیم‌شان صفر می‌شود.**

در بازی واقعی، برای اجتناب از نوشتن روی کاغذ یا استفاده از ماشین حساب و برای اجتناب از فاش کردن راز، توانهای ۲ را به روشی که پیشنهاد کرده‌ایم، در ذهن خود مجسم کنید. به‌زودی متوجه می‌شوید که می‌توانید با اعداد بسیار بزرگ نیز بر دوستانتان غلبه کنید.

روش خوبی برای به‌خاطر سپردن همهٔ $\mathcal{P}$- وضعیتها در نیم با کپه‌های حداکثر ۷تایی وجود دارد. این روش توسط مارتین رولر (Martin Roller) و جان کانوی (John Convey) توصیه شده است. یک تاس معمولی را بنگرید:



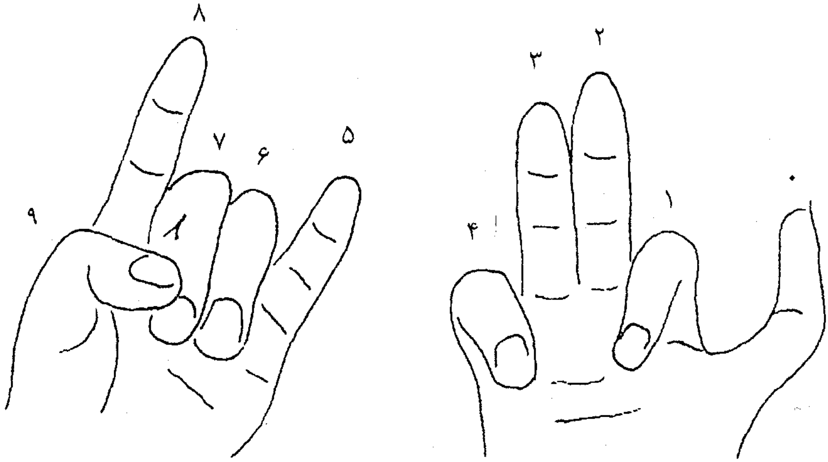
همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ {دو وجه مقابل هم یا
سه وجه مجاور در یک گوشه} از یک تاس را در نظر بگیرید.

در صورت لزوم برای زوج شدن مجموع، ۷ را به زیرمجموعه اضافه کنید:

۱۶۷, ۲۵۷, ۳۴۷, ۱۲۳۴۵۶۷	∅, ۱۲۵۶, ۱۳۴۶, ۲۳۴۵
۱۲۴۷, ۱۳۵۷, ۲۳۶۷, ۴۵۶۷	۱۲۳, ۱۴۵, ۲۴۶, ۴۵۶

بعضی از مردم قادرند با ده انگشتشان روی اعداد تا ۱۰۰۰ کار کنند! جمع نیم (یا تفریق نیم، که همان عمل جمع نیم است!) دقیقاً بالا و پایین بردن انگشتان است.

به‌خاطر داشته باشید که انگشتانتان را از صفر شماره‌گذاری کنید، به‌طوری که عدد نشان داده شده در شکل ۵، به‌وسیلهٔ انگشتان ۱، ۴، ۶، ۷ و ۹ (انگشت شصت) که خم



شکل ۵ اگر انگشتانتان فِرز باشند، عمل جمع نیم ساده است!

شده‌اند، مشخص شده است:

$$۲^{۱} + ۲^{۴} + ۲^{٦} + ۲^{۷} + ۲^{۹} = ۲ + ۱٦ + ٦۴ + ۱۲۸ + ۵۱۲ = ۷۲۲$$

حال فرض کنید می‌خواهیم ۷۵ رابا ۷۲۲ «جمع نیم» کنیم، توجه کنید که

$$۷۵ = ۲^{٦} + ۲^{۳} + ۲^{۱} + ۲^{۰}$$

موقعیتهای انگشتان ٦، ۳، ۱ و ۰ را انتخاب کنید: ٦ و ۱ بالا می‌روند، ۳ و ۰ پایین می‌آیند. حال رقهایی که باقی مانده‌اند ۰، ۳، ۴، ۷ و ۹ هستند و جواب

$$۲^{۰} + ۲^{۳} + ۲^{۴} + ۲^{۷} + ۲^{۹} = ۱ + ۸ + ۱٦ + ۱۲۸ + ۵۱۲ = ٦۵۵$$

است.

برای نشان دادن جمع نیم، از یک علامت جمع با ستاره‌ای که بالای آن قرار گرفته است، $\overset{*}{+}$، استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل ۳ متوجه شدیم که

$$۱ \overset{*}{+} ۲ \overset{*}{+} ۳ = ۰$$

این مجموع را می‌توانیم به صورتهای زیر نیز بنویسیم:

$$۳ \overset{*}{+} ۱ = ۲ \quad \text{یا} \quad ۲ \overset{*}{+} ۳ = ۱ \quad \text{یا} \quad ۱ \overset{*}{+} ۲ = ۳$$

در جدول ۱، جمع نیم- برای عددهای ۰ تا ۱۵ نشان داده شده است، اما خودتان را برای حفظ کردن آن به زحمت نیندازید!

جدول ۱ جدول جمع نیم تا $۱۵ \overset{*}{+} ۱۵ = ۰$.

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱	۰	۳	۲	۵	۴	۷	۶	۹	۸	۱۱	۱۰	۱۳	۱۲	۱۵	۱۴
۲	۳	۰	۱	۶	۷	۴	۵	۱۰	۱۱	۸	۹	۱۴	۱۵	۱۲	۱۳
۳	۲	۱	۰	۷	۶	۵	۴	۱۱	۱۰	۹	۸	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲
۴	۵	۶	۷	۰	۱	۲	۳	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۸	۹	۱۰	۱۱
۵	۴	۷	۶	۱	۰	۳	۲	۱۳	۱۲	۱۵	۱۴	۹	۸	۱۱	۱۰
۶	۷	۴	۵	۲	۳	۰	۱	۱۴	۱۵	۱۲	۱۳	۱۰	۱۱	۸	۹
۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۹	۸	۱۱	۱۰	۱۳	۱۲	۱۵	۱۴	۱	۰	۳	۲	۵	۴	۷	۶
۱۰	۱۱	۸	۹	۱۴	۱۵	۱۲	۱۳	۲	۳	۰	۱	۶	۷	۴	۵
۱۱	۱۰	۹	۸	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۳	۲	۱	۰	۷	۶	۵	۴
۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۸	۹	۱۰	۱۱	۴	۵	۶	۷	۰	۱	۲	۳
۱۳	۱۲	۱۵	۱۴	۹	۸	۱۱	۱۰	۵	۴	۷	۶	۱	۰	۳	۲
۱۴	۱۵	۱۲	۱۳	۱۰	۱۱	۸	۹	۶	۷	۴	۵	۲	۳	۰	۱
۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

تمرین ۳

تعدادی از درایه‌های جدول ۱ را امتحان کنید و به الگویی که با شکستن اعداد جدول به توانهای کوچکتر ۲ به‌دست می آید، توجه کنید. آیا جمع نیم تعویض‌پذیر است؟ یعنی آیا $a \overset{*}{+} b$ با $b \overset{*}{+} a$ برابر است؟. آیا شرکت‌پذیر است؟ یعنی آیا $(a \overset{*}{+} b) \overset{*}{+} c$ همواره مساوی با $a \overset{*}{+} (b \overset{*}{+} c)$ است؟ آیا می‌توان آن را با جمع معمولی، مخلوط کرد؟ یعنی آیا تساوی $(۳ \overset{*}{+} ۵) + ۶ = ۳ \overset{*}{+} (۵ + ۶)$ برقرار است؟

توجه کنید که مانند جمع معمولی،

فرد $\overset{*}{+}$ فرد = زوج = زوج $\overset{*}{+}$ زوج

زوج $\overset{*}{+}$ فرد = فرد = فرد $\overset{*}{+}$ زوج

تمرین ۴

چطور می‌توانید ۲۰ اسب را در ۵ اصطبل قرار دهید، به‌طوری که تعداد اسبها در هر اصطبل، فرد باشد (An odd number of horses in each stall)؟ چگونه می‌توانید

فوراً بگویید که ۶۶۵ $\overset{*}{+}$ ۷۵ $\overset{*}{+}$ ۷۲۳ یک $\mathcal{P}$- وضعیت نیست؟

اکنون گونه دیگری از بازی نیمبل را که در فصل قبل با آن آشنا شدید توضیح می‌دهیم. مانند قبل، با سکه‌هایی روی یک نوار بازی می‌کنیم، اما این بار، باید حداکثر یک سکه روی هر خانه قرار دهید و نمی‌توانید سکه‌ای را از روی سکهٔ دیگری عبور دهید. حرکت یعنی سُر دادن سکه به سمت چپ نوار، هر قدر که می‌خواهید، اما قرار دادن آن روی سکهٔ بعدی یا عبور از روی سکه بعدی و یا خارج شدن از نوار، مجاز نیست.

شکل ۶ یک نمونه از نمونه‌های مختلفِ بازی نیم.

ممکن است وقت زیادی را صرف کشف این موضوع بکنید که این بازی شکلی از بازی نیم است. اما حالا این را می‌دانید، آیا می‌توانید راز این ارتباط را کشف کنید؟

وقتی از سمت راست شروع به شمردن می‌کنید، اندازهٔ کپه‌ها در بازی نیم متناظر، مساوی تعداد خانه‌هایی است که متناوباً در فاصلهٔ خالی بین سکه‌ها قرار دارند. زمانی که دو سکه روی دو خانهٔ مجاور قرار دارند، فراموش نکنید که فاصلهٔ ۰ میان آن دو را نیز محاسبه کنید. در شکل ۶، فاصله‌ها از راست به چپ به‌صورت زیر هستند:

$\underline{۱}$ ۰ $\underline{۰}$ ۱ $\underline{۲}$ ۰ $\underline{۴}$ ۲ $\underline{۳}$

اعدادی که یکی در میان متمایز از عددهای دیگر هستند، نشان‌دهندهٔ خطوط سیاه رنگ در شکل ۶ هستند. کپه‌ها در این بازی به اندازه‌های {۱, ۰, ۲, ۴, ۳} هستند که همان {۱, ۲, ۴, ۳} است.

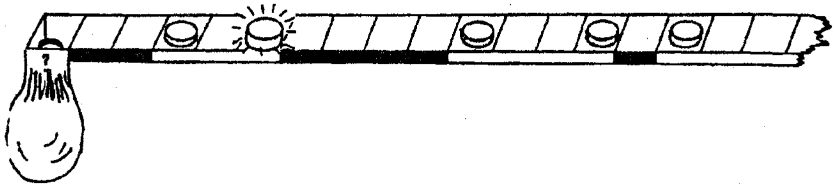
تمرین ۵

تنها حرکت خوب در شکل ۶ چیست؟

اگر هنوز متوجه نشده‌اید که چرا این بازی نوعی از بازی نیم است، تا زمان خواندن فصل بعد، (نیم پُکر) صبر کنید.

بازی دلار نقره‌ای ان.جی.دی براین (N. G. de Bruijn's Silver Dollar Game) مانند بازی شکل ۶، صورت می‌گیرد، اما یکی از سکه‌ها از جنس نقره است که ارزش آن از مجموع ارزش بقیهٔ سکه‌ها بیشتر است. به آخرین خانهٔ روی نوار در سمت چپ، یک کیسهٔ پول متصل شده است و یک انتخاب دیگری به‌صورت زیر وجود دارد: کیسهٔ پول

و محتوای آن را بردارید که در این‌صورت طرف مقابل شما همهٔ سکه‌های باقی‌مانده روی نوار را برمی‌دارد. بنابراین بهتر است منتظر بمانید که رقیبتان سکهٔ نقره را درون کیسه بیندازد و بعد کیسهٔ پول را بردارید.



شکل ۷ بازی سکهٔ نقرهٔ دو براین.

تمرین ٦

آیا می‌توانید ارتباط این بازی را با بازی نیم دریابید؟

اکنون سعی کنید بازی **دلار نقره‌ای** را انجام دهید، اما با این انتخاب اضافی که می‌توانید در یک حرکت، سکه‌ای را درون کیسه بیندازید و کیسه را بردارید. این بار شما می‌خواهید بازیکنی باشید که سکهٔ نقره را در کیسه می‌اندازد.

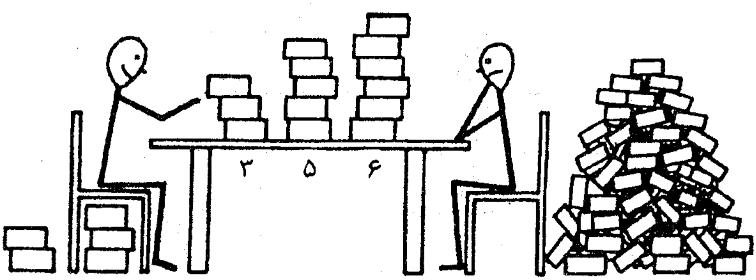
تمرین ۷

این بازی چه ارتباطی با بازی نیم دارد؟

[راهنمایی: در این تمرین و تمرین ٦، تصمیم بگیرید که کیسهٔ پول یک خانهٔ اشغال شده درنظر گرفته شود یا نه.]

نیم پُکر

در شکل ۸، شما در طرف چپ نشسته‌اید و احساس خوشایندی دارید، زیرا در حال بازی نیم هستید، و رقیبتان را در وضعیت {۳, ۵, ۶} قرار داده‌اید، و می‌دانید که ۳ $\overset{*}{+}$ ۵ $\overset{*}{+}$ ۶ = ۰؛ پس رقیب در یک $\mathcal{P}$- وضعیت است. اما کار گیر کوچکی دارد: دارید نیم پکر بازی می‌کنید که با تعدادی قطعه چوب صورت می‌گیرد و می‌توانید چند قطعه چوب به هر ستون اضافه و یا از هر ستون کم کنید. این تفاوت چه اثری بر بازی می‌گذارد؟



شکل ۸ نمونه‌ای از بازی نیم پُکر.

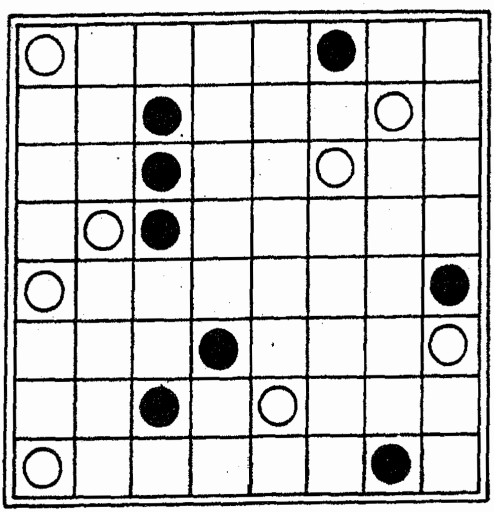
رقیبتان می‌تواند ۲۷ قطعه چوب را به ستون با ۳ قطعه چوب اضافه کند و وضعیت {۳۰, ۵, ۶} را ایجاد کند. در این حالت چه کار می‌کنید؟ مسأله فقط با برداشتن ۲۷ قطعه چوب حل می‌شود. ممکن است رقیبتان قطعه چوبهای زیادی را اضافه کند، ولی شما می‌توانید آنها را بردارید. بالاخره ذخیرهٔ قطعه چوبها به پایان می‌رسد و شما می‌توانید برنده شوید.

اضافه کردن ۲۷ قطعه چوب یکی از مثالهای حرکت برگشت‌پذیر است. می‌توانیم چنین حرکتهایی را اصلاً به‌حساب نیاوریم، چون همیشه می‌توان ترتیبی داد که چنین حرکتهایی خنثی شوند! در واقع این حرکتها فقط تمام شدن بازی را به تأخیر می‌اندازند

و به‌کار بستن آنها اثری در نتیجهٔ بازی ندارد.

بازی شکل ٦ بیشتر شبیه به نیم پُکر است تا به نیم. به یاد آورید که فاصله‌ها را یکی در میان می‌شمردید. اگر سکه‌ای را که در شکل ٦ در سمت راست قرار گرفته است، در نظر بگیرید و آن را به سمت چپ حرکت دهید، مثل این است که از اندازهٔ کپهٔ- نیم کاسته‌اید (در این مثال اندازهٔ کپهٔ- نیم ۳ است). اگر سکه‌ای را که در سمت چپ یکی از فاصله‌ها قرار گرفته است، مانند دومین سکه از سمت راست در شکل ٦ به سمت چپ حرکت دهید، اندازهٔ کپهٔ- نیم را افزایش داده‌اید و رقیبتان اگر بخواهد می‌تواند فاصلهٔ بین دو سکه را به اندازهٔ اولیه‌شان[1] بازگرداند.

در بازی **نرث کات** (شکل ۹) در هر ردیف صفحه، دقیقاً دو مهره به دو رنگ متمایز سفید و سیاه داریم. زمانی که نوبت حرکت شماست می‌توانید مهرهٔ مربوط به خودتان را به هر تعداد خانه در سطر خودش (به راست یا چپ) حرکت دهید البته با این شرط که نباید از روی مهره دیگر بگذرد و یا از صفحه خارج شود.



شکل ۹ بازی نرث کات.

بسیاری از مردم در ابتدای آشنایی با این بازی، مهره‌ها را بدون هدف حرکت می‌دهند و حتی یادآوری اینکه برنده کسی است که آخرین حرکت را انجام دهد، چندان کمکی به آنها نمی‌کند. این افراد تصور می‌کنند که این بازی می‌تواند تا ابد ادامه یابد؛ و البته

[1] با حرکت سکه‌ای که در سمت راست یک فاصله قرار گرفته است به سمت چپ، می‌توان فاصله بین دو سکه را کاهش داد. ــ م.

اگر هیچ یک از این بازیکنان راز بازی را کشف نکند همین‌طور هم هست.

تمرین ۸

راز بازی نرث کات را کشف کنید.

[راهنمایی: بازی را دقیقاً با یک جفت مهره در یک سطر امتحان کنید. سپس با دو جفت در دو سطر.]

تمرین ۹

چه تفاوتی در بازی نرث کات ایجاد می‌شود اگر، وقتی نوبت حرکت شماست، شما بتوانید هر مهره‌ای، نه فقط مهرهٔ مربوط به خودتان، را حرکت دهید؟ [تمرین ۱۴ را ببینید.]

بازیهای منصفانه

تصور کنید که به دو نفر برمی‌خورید که عمیقاً درفکرند و بازی عجیبی را انجام می‌دهند که نحوهٔ انجام بازی را نمی‌دانید ولی امیدوارید که با نگاه کردن به حرکتهای آنها، آن را کشف کنید. اما مدت زیادی طول می‌کشد تا یکی از آنها حرکتی را انجام دهد و حوصله‌تان سر می‌رود. بعد وقتی‌که یکی از آنها حرکت می‌کند، متوجه حرکتش نمی‌شوید. در این حالت، اگر بتوانید بگویید که کدام بازیکن حرکت کرده است (مثلاً مهرهٔ سیاه و یا مهره سفید)، بازی را **بازی پارتیزانی** می‌نامیم، مانند بازیهای **گو**، **چکرز**، **شطرنج**، **تیک‌ـ تاک‌ـ تو** یا **تخته نرد**. اما درصورتی که نتوانید تشخیص دهید که کدام بازیکن حرکت کرده است، بازی را **بازی منصفانه** می‌نامیم.

دریک بازی منصفانه

مستقل از اینکه نوبت کدام بازیکن است، امکانات یکسانی وجود دارد.

همهٔ بازیهایی که تا به حال داشته‌ایم، جز بازی **نرث کات**، بازیهای منصفانه بوده‌اند و در تمرین ۹ سؤال شده است که آیا بازی **نرث کات** واقعاً **پارتیزانی** است یا خیر. در حقیقت ما در این کتاب فقط بازیهای منصفانه را بررسی می‌کنیم. بسیاری از بازیهای **پارتیزانی** قابل تجزیه و تحلیل‌اند اما تجزیه و تحلیل آنها بسیار مشکل است. اگر می‌خواهید با بازیهای **پارتیزانی** آشنا شوید به کتاب **راههای پیروزی**[٦] رجوع کنید.

نیم لاسکر

ادوارد لاسکر [۲۷] برادر **امانوئل لاسکر** (Emanuel Lasker)، که یک قرن پیش قهرمان شطرنج جهان بود، گونه‌ای از بازی نیم را با یک **انتخاب اضافی** پیشنهاد کرد. به این‌صورت که می‌توانید یک کپهٔ را انتخاب کنید و آن را به دو کپهٔ کوچکتر (ناخالی) تقسیم کنید. این عمل چه تغییری در بازی می‌دهد؟

این بازی را تا وقتی‌که به کپه‌ای با دو لوبیا نرسیم، تفاوتی با بازی نیم ندارد. در این حالت، انتخاب جدید $\{۲\} \to \{۱,۱\}$ را نیز خواهیم داشت. اما $\{۱,۱\}$ با توجه به اصل مشابه‌سازی معادل یک کپهٔ نیم بدون لوبیاست. بنابراین انتخاب جدید تفاوتی با $\{۲\} \to \{۰\}$ ندارد، یعنی برداشتن کل کپه. حال اگر یک کپه دارای ۳ لوبیا باشد چگونه عمل می‌کنیم؟ علاوه بر حرکتهای

$$\{۳\} \to \{۲\}, \quad \{۳\} \to \{۱\}, \quad \{۳\} \to \{۰\}$$

انتخاب $\{۲,۱\} \to ۳$ را نیز داریم که مانند حرکت به سوی یک کپهٔ نیم با $۲ \overset{*}{+} ۱ =$ ۳ لوبیا است.

در بازی نیم لاسکر یک کپه با ۳ لوبیا مانند یک کپهٔ ۴تایی در نیم معمولی است، زیرا به هر یک از حالتهای ۳، ۲، ۱ و ۰تایی می‌توان رسید.

کپه‌ای با ۴ لوبیا در بازی نیم لاسکر در نیم معمولی معادل با چیست؟ در نیم لاسکر می‌توان وضعیتهای زیر را ایجاد کرد:

$$\{۰\} \quad \{۱\} \quad \{۲\} \quad \{۳\} \quad \{۲,۲\} \quad \{۳,۱\}$$

که معادل آنها در بازی نیم معمولی به‌صورت زیر است:

$$۰ \quad ۱ \quad ۲ \quad ۴ \quad ۲ \overset{*}{+} ۲ \quad ۴ \overset{*}{+} ۱$$

به‌طوری که $۰ = ۲ \overset{*}{+} ۲$، در حالی که ۴ و $۴ \overset{*}{+} ۱$ را می‌توان به ترتیب به حرکتهای ۰ و $۱ \overset{*}{+} ۱$ برگرداند. (در بازی نیم لاسکر حرکتهای $\{۲,۱\} \to \{۳\}$

و $\{۳, ۱\} \leftarrow \{۲, ۱\}$ را انجام دهید). بنابراین یک کپه با ۴ لوبیا در نیم لاسکر معادل با کپه‌ای با ۳ لوبیا در نیم معمولی است. نقش ۳ و ۴ در نیم لاسکر جابه‌جا شده است!

تمرین ۱۰

آیا کپه‌های حاوی ۱، ۲ و ۴ لوبیا در نیم لاسکر، یک $\mathcal{P}$ـ وضعیت ایجاد می کنند یا یک $\mathcal{N}$ـ وضعیت؟ اگر با کپه‌های حاوی ۱، ۲ و ۳ لوبیا در بازی نیم لاسکر مواجه شوید، چه حرکتی انجام می‌دهید؟

تمرین ۱۱

یک کپهٔ حاوی ۵ لوبیا در بازی نیم لاسکر چه رفتاری دارد؟ رفتار یک کپهٔ حاوی ۶ لوبیا و یک کپهٔ حاوی ۵۹ لوبیا را نیز بررسی کنید.

کپه‌های نیم تقلبی

در شکل ۹، به سطر سوم صفحهٔ مهره‌ها توجه کنید. ادعا می‌کنیم که این درست معادل با کپهٔ نیم حاوی ۲ لوبیا است. زیرا دقیقاً دو مربع خالی بین دو مهره وجود دارد. اما علاوه بر اینکه می‌توان فاصلهٔ بین دو مهره را به ۱ یا ۰ مربع کاهش داد، می‌توان این فاصله را به ۳ یا ۴ مربع نیز افزایش داد. گرچه این دو حرکت اخیر، حرکتهای برگشت‌پذیرند. به‌همین صورت اگر بازی نیم لاسکر را در نظر بگیریم، کپه‌ای با ۴ لوبیا معادل با کپه‌های ۰، ۱، ۲، ۴، ۰ و ۵ تایی در بازی نیم معمولی است، اما می‌توانیم انتخابهای ۴ و ۵ را در نظر نگیریم، زیرا اینها حرکتهای برگشت‌پذیرند. یک کپهٔ نیم تقلبی، کپه‌ای با حرکتهای اضافی و برگشت‌پذیر است.

مجموع بازیها

اغلب بازیها قابل تجزیه به بازیهای مجزا و یا شکسته شدن به مؤلفه‌های کوچکترند برای مثال، بازی نیم را می‌توان به‌صورت مجموع بازیهایی با یک بسته و بازی نرت کات را مجموعی از هشت بازی یک سطری که در هر سطر یک جفت مهره هست، درنظر گرفت. در نیم لاسکر یک کپه را می‌توان به‌صورت مجموع دو بسته در نظر گرفت. به‌طور کلی اغلب بازیها را می‌توان به‌صورت مجموعی از دو یا چند بازی دیگر در نظر گرفت. اگر نوبت حرکت شماست، یکی از این مؤلفه‌ها را در نظر بگیرید و حرکت قانونی را روی آن انجام دهید و بقیه مؤلفه‌ها را دست نخورده باقی بگذارید.

قاعدهٔ کمترین ناموجود

ادعا می‌کنیم که مؤلفه‌های معین در بازیهای معین (در واقع، همهٔ وضعیتها در همهٔ بازیهای منصفانه) **معادل** با کپه‌هایی نیم هستند به این معنی که می‌توانیم بازی را با گذاشتن کپه‌های لوبیای معادل به‌جای مؤلفه‌ها انجام دهیم، و زمانی که بازی بخواهد روی مؤلفهٔ مورد نظر انجام شود، یک حرکت نیم مناسب برای کپهٔ حاوی لوبیا موجود است. روشن است که اگر این ادعا برای همهٔ وضعیتهای منتج از انتخابها در یک وضعیت صادق باشد، برای خود آن وضعیت هم صادق است. مسأله این است که مشخص شود که چه تعداد لوبیا در کپهٔ نیم معادل وجود دارد. قاعدهٔ **کمترین ناموجود** پاسخ این مسأله است:

قاعدهٔ کمترین ناموجود

> فرض کنید که حرکتهای (یک وضعیت در)
>
> بازی G
>
> به وضعیتهایی منجر می‌شوند که
>
> **معادل با کپه‌های نیم با اندازه‌های**
>
> $\{a, b, c, \ldots\}$ باشند.
>
> **در این‌صورت، G معادل با کپهٔ نیمی با اندازهٔ m**
>
> **است که m کوچکترین عدد از عددهای ۰ یا ۱ یا ۲**
>
> **یا ...، است که در بین عددهای a، b، c، ...**
>
> **نیست.**

این قاعده را قاعدهٔ **کمترین ناموجود** می‌نامیم، زیرا به کوچکترین عدد غیر عضو در

مجموعهٔ $\{a, b, c, \ldots\}$ اشاره دارد. برای اختصار، اغلب m، یعنی اندازهٔ کپهٔ نیم معادل با یک وضعیت، را **مقدار نیم** وضعیت مورد نظر می‌نامیم.

توجه کنید که اگر هیچ حرکتی از وضعیت داده شده وجود نداشته باشد یعنی اگر وضعیت مورد نظر **وضعیت پایانی** باشد، مقدار نیم آن برابر با ۰ است. در بخش **کپه‌های نیم تقلبی**، بازی **نرث کات** و **نیم لاسکر**، اندازهٔ کپهٔ نیم معادل با استفاده از قاعدهٔ کمترین ناموجود به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:
در **نیم لاسکر**، $\text{mex}\{۰, ۱, ۲, ۴, ۰, ۵\} = ۳$؛ و در **نرث کات** $\text{mex}\{۱, ۰, ۳, ۴\} = ۲$.
به‌خاطر داشته باشید که

$\mathcal{P}$ـ وضعیتها مقدار نیم صفر دارند.
$\mathcal{N}$ـ وضعیتها مقدار نیم مثبت دارند.

حال در وضعیتی هستیم که ثابت کنیم:

هر وضعیتی در بازی منصفانه معادل با یک کپهٔ نیم (تقلبی) است.

ما این را به استقرا روی سادگی وضعیت مورد نظر ثابت می‌کنیم. بنابر تعریف، انتخابهای موجود در یک وضعیت به وضعیتهایی که ساده‌تر از خود آن وضعیت‌اند منجر می‌شوند. ساده‌ترین وضعیت، وضعیت پایانی است که همان‌طور که دیدیم معادل با کپهٔ نیمی است که حاوی هیچ لوبیایی نیست. به استقرا فرض کنید که هر وضعیت دیگر دارای انتخابهایی است که معادل با کپه‌های نیمی به اندازه‌های a، b و c هستند و فرض کنید $\text{mex}\{a, b, c, \ldots\} = m$. بنابر تعریف $m \neq a$، $m \neq b$، $m \neq c$ و ... و اگر $n < m$، عضوی در $\{a, b, c, \ldots\}$ وجود دارد که برابر با n است. می‌توانیم از کپه‌ای با m لوبیا، هر تعداد لوبیا برداریم و حتی می‌توانیم کل m لوبیا را برداریم و به ۰ برسیم. از سوی دیگر، هر عضوی از $\{a, b, c, \ldots\}$ که بزرگتر از m باشد، حرکت برگشت‌پذیر است و می‌تواند به وضعیتی (ساده‌تر) بازگردد که با کپهٔ نیمی از اندازهٔ m معادل است.

پروژهٔ A

چند بازی منصفانه اختراع یا پیدا کنید و ببینید آیا می‌توانید آنها را تجزیه و تحلیل

کنید. این ایده‌ها را هم درنظر داشته باشید:

بازی نیمبل روی شیار مدور. چگونه می‌توانید مطمئن شوید که این بازی در شرط پایانی صدق می کند؟

نیم کنزیگ. سکه‌ها را به نوبت روی یک نوار مدور قرار دهید، در هر حرکت هر سکه دقیقاً یک، دو یا سه خانه بعد از آخرین سکه در جهت عقربه‌های ساعت قرار می گیرد در هر خانه فقط یک سکه قرار می گیرد. اگر هیچ خانهٔ خالی برایتان وجود نداشته باشد بازنده‌اید. این بازی را روی مجموعه‌های دیگر به‌جای مجموعهٔ {۳, ۲, ۱} امتحان کنید. برای مثال، حالتی را که مجموعه فقط از یک عدد تشکیل شده است امتحان کنید؛ در این‌صورت در هر حرکت فقط یک انتخاب دارید. سپس دو عدد و .... و البته این بازی را می‌توان با نوارهای مدوری با تعداد خانه‌های متفاوت انجام داد.

پلکان پنج‌تایی. روی یک پلکان با سکه‌ها بازی کنید. هر تعداد سکه کمتر از پنج سکه، را از یک پله به پله‌های پایینتر، کمتر از ۵ پله، حرکت دهید. برنده آخرین سکه(ها) را در پایین‌ترین پله قرار می‌دهد. این بازی را با اعداد دیگری به‌جای ۵ امتحان کنید.

نیم فیبوناچی. این بازی نیم با یک کپه انجام می‌شود: اولین بازیکن هر تعداد لوبیا را از کپه برمی‌دارد اما نمی‌تواند همهٔ کپه را بردارد. بعد از آن هر بازیکنی حداکثر دو برابر بازیکن قبلی لوبیا برمی‌دارد. این بازی را به‌جای حداکثر با «کمتر از» و همین‌طور به‌جای دو برابر با «سه برابر»، «چهار برابر» . . . امتحان کنید. چرا این بازی **نیم فیبوناچی** نامیده می‌شود؟

بازی ویتوف. این بازی نیم با دو کپه انجام می‌شود و یک امکان اضافی دارد و آن اینکه می‌توانید به تعداد مساوی لوبیا از دو کپه بردارید.

هیکوری، دیکوری، داک. با کپه‌های لوبیا بازی می کنیم. یک حرکت این است که یک کپه با n لوبیا، با سه کپه به اندازه‌های k، $n-k$، $n-2k$، که k هر عددی بین ۱ تا $\frac{1}{2}n$ است (یا به دو کپهٔ مساوی به اندازهٔ $\frac{1}{2}n$، اگر n زوج باشد و $k=\frac{1}{2}n$) جایگزین شود؛ k از حرکتی به حرکت دیگر می‌تواند تغییر کند.

نام [۳۰].

کِرَم

بازی را به نوبت با قرار دادن دومینوهای ۱ × ۲ در صفحهٔ شطرنجی انجام دهید. یک دومینو دو خانه را می‌پوشاند و نباید روی لبه‌های صفحه یا روی دومینوی دیگر قرار گیرد. بازی کِرَم را **پلاگ**، **نقطه و جفت**، و **دومینوی منصفانه** نیز می‌نامند. نام این بازی از نامهای جفری مت_اسمیت (Geoffrey Mott_Smith)، سولومون گولومب (Solomon Golomb) و جان کانوی (John Conway) گرفته شده است.

تمرین ۱۲
در بازی کِرَم، مقدار نیم (تعداد لوبیاها در کپهٔ نیم معادل) یک صفحهٔ ۸ × ۸ چیست؟

[راهنمایی: مقدار نیم برای صفحه‌های ۲ × ۲، ۴ × ۲، ۴ × ۴، ۴ × ۶، ... چیست؟ از اصل مشابه‌سازی استفاده کنید.]

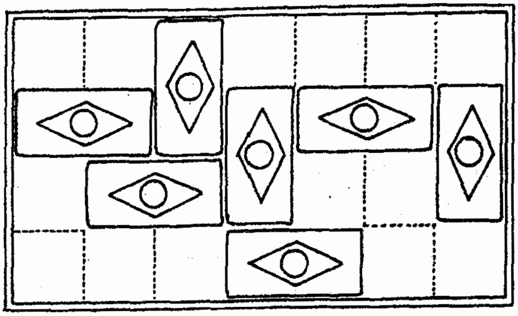
بیایید مقدار نیم صفحه‌های کوچکتری را که در شکل ۱۰ نشان داده شده‌اند بیابیم.

شکل ۱۰ چند صفحهٔ کوچک کِرَم.

در صفحهٔ (a) هیچ دومینویی جا نمی‌گیرد؛ حرکتی وجود ندارد: مانند کپهٔ نیم بدون لوبیا. در صفحهٔ (b) (و در صفحه‌های (c)، (d) و (e)) یک دومینو جا می‌گیرد، اما بعد از قرار دادن یک دومینو دیگر نمی‌توان حرکتی انجام داد. این صفحه‌ها فقط انتخاب ۰ را دارند و mex{۰} نیز ۱ است و آنها هر کدام مانند کپه‌های **نیمی** با یک لوبیا هستند. حالا به صفحه‌های (f)، (g) و (h) نگاه کنید. در هر حالت به دو روش متفاوت می‌توان یک دومینو را در صفحه قرار داد. یک روش، صفحه را به شکل (b) درمی‌آورد که ارزش آن ۱ لوبیاست و روش دیگر دو صفحه مانند (a) را پدید می‌آورد که ارزش آنها

$\circ = \circ \overset{*}{+} \circ$ لوبیا است. انتخابهای ما ۱ و ۰ در همهٔ حالات است و ۲ $= \mathrm{mex}\{\circ, 1\}$ و بنابراین، صفحه‌های (f)، (g) و (h) مانند کپه‌های **نیمی** با ۲ لوبیا هستند.

البته اگر با هر یک از این سه صفحهٔ آخر در حال بازی بودید، فوراً دومینو را طوری قرار دهید که رقیبتان نتواند حرکتی کند، بنابراین چه حرکتی باید انجام داد؟ به شکل ۱۱ نگاه کنید. اگر نوبت شما باشد، چه‌کار می‌کنید؟



شکل ۱۱ آیا در این وضعیت کِرَم، می‌توانید برنده شوید؟

کِرَم مثال خوبی از یک بازی است که به مجموعی از بازیهای کوچکتر تقسیم می‌شود. شکل ۱۱ مجموع صفحه‌های (b)، (f)، (g) و (h) است. مانند این است که در حال بازی کردن نیم با ۴ کپهٔ حاوی ۱، ۲، ۲، ۲ لوبیا هستید. اگر طماع باشید دومینو را در یکی از صفحه‌های (f)، (g) یا (h) طوری قرار دهید که رقیبتان نتواند در آن صفحه حرکت کند، بازنده خواهید شد! اما اگر دومینو را در یکی از صفحه‌های (f)، (g) یا (h) سخاوتمندانه قرار دهید تا رقیبتان هم بتواند حرکتی انجام دهد، برنده خواهید شد!

تمرین ۱۳

مقدارهای نیم را برای هر یک صفحه‌های کِرَم شکل ۱۲ بیابید.

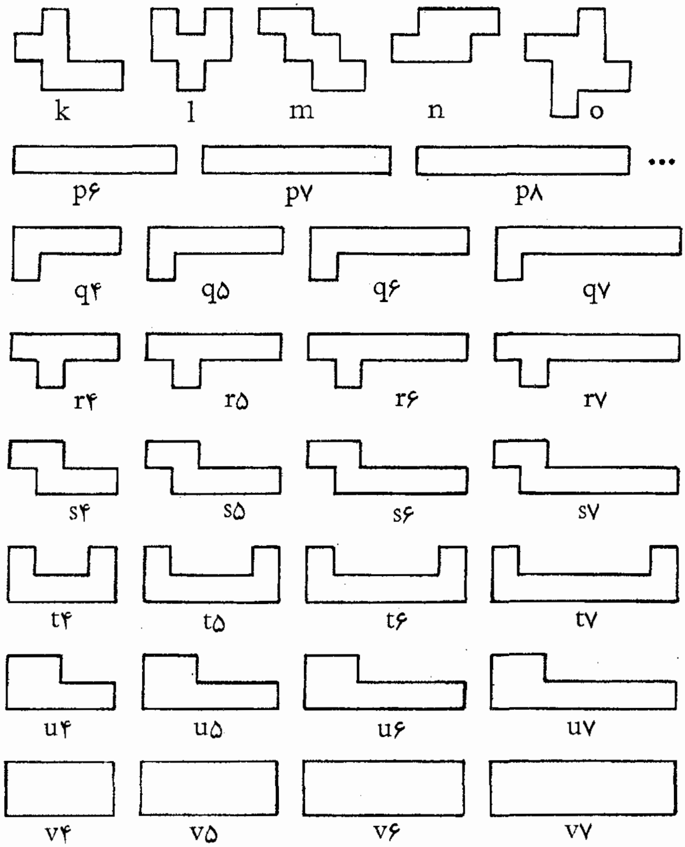
پروژهٔ B

بازی کِرَم را بررسی کنید، اما با **ترومینوها** (صفحهٔ (d) در شکل ۱۰) به‌جای **دومینوها**، یا با تکه‌هایی به‌شکل صفحهٔ (c) در شکل ۱۰ یا با بقیهٔ شکلها، یا با مجموعه‌ای از شکلها. همین کار برای بازی در سه بعد، با آجرهای ۲ × ۱ × ۱ نیز انجام دهید.

تمرین ۱۴

وقتی که بازی **نرث کات** را به‌عنوان بازی منصفانه معرفی کردیم، تا حدی تجاهل کردیم.

برای مثال، در ردیف ٦ از شکل ۹، که ادعا کردیم با کپهٔ نیمی با ۳ لوبیا معادل است، هر کدام از مهره‌های سفید و سیاه انتخابهای ۲، ۱ و ۰ دارند، اما مهرهٔ سیاه انتخابهای ۴، ۵ و ٦ را نیز دارد ولی سفید این انتخابها را ندارد. در شکل ۹، یک حرکت برنده، برای سیاه بیابید که حرکت برنده‌ای برای سفید نیست.



شکل ۱۲ مقدارهای نیم صفحه‌های کِرَم بالا را بیابید.

قضیهٔ اسپراگ گراندی

موضوعی را که در حال حاضر در مورد بازیهای منصفانه می‌دانید، رولاند پرسیوال اسپراگ [۳۷] در سال ۱۹۳۶ و پاتریک مایکل گراندی [۱۹] در سال ۱۹۳۹ مستقل از هم کشف کردند. می‌توانیم آن را اصل کپهٔ نیم تقلبی بنامیم.

اصل کپهٔ نیم تقلبی

هر بازی منصفانه‌ای معادل با یک کپهٔ نیم تقلبی است. قاعدهٔ کمترین ناموجود تعداد لوبیاهای کپه را مشخص می‌کند.

گفتیم کپهٔ نیم تقلبی، چون یک کپهٔ نیم اصیل امکان حرکتهای برگشت‌پذیر را نمی‌دهد. حرکتهای برگشت‌پذیر کاملاً رایج‌اند، اما به محض تشخیص دادن، می‌توان از آنها چشم پوشید.

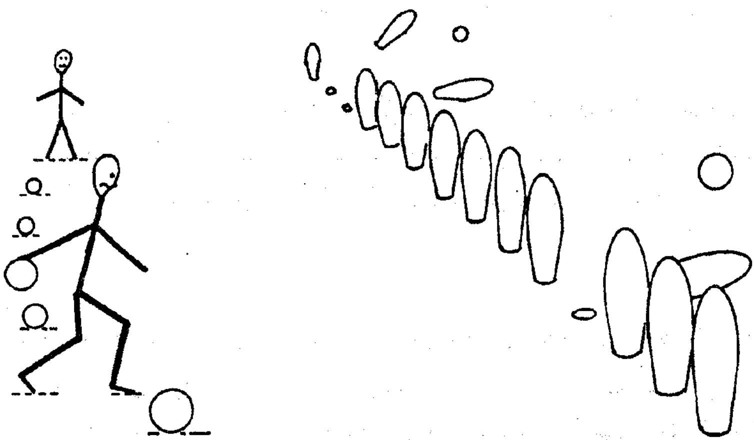
نظریهٔ مجموع بازیها و قضیهٔ اسپراگ- گراندی اساساً به هم مربوط‌اند:

مقدار نیم مجموع بازیها همان مجموع نیم مقدارهای نیم هر یک از مؤلفه‌های بازی است.

در حال حاضر، قضیهٔ اسپراگ- گراندی را می‌توانید برای تحلیل بسیاری از بازیها، به‌کار برید.

کیلز

کیلز یک واژهٔ قدیمی انگلیسی که برای بازی اسکیتل (نوعی بولینگ) است. هنری ارنست دادنی [[۱۳] و [۲۹] را ببینید] این واژه را برای نامگذاری بازیی به‌کار برد، که در آن بازیکنان توپها را به نوبت به پینهای بولینگ سُر می‌دهند. مهارت آنها به‌صورتی است که همیشه می‌توانند هر پین یا هر جفت از پینهای مجاور را که بخواهند بیندازند. اما هر قدر تلاش کنند نمی‌توانند آرایش دیگری از پینها را بیندازند. طبق معمول، هر یک از آنها سعی می‌کند کسی باشند که آخرین پین را می‌اندازد.



شکل ۱۳ در حال انجام بازی کیلز.

اندازهٔ کپهٔ نیم معادل با n پین در یک ردیف چیست؟ اندازهٔ کپهٔ نیم معادل با ۰، ۱ یا ۲ پین چقدر است؟ روشن است که جواب به‌ترتیب، ۰، ۱ و ۲ لوبیاست. در ادامهٔ تحلیل، پینها را با دایره‌های کوچک نشان می‌دهیم. کافی است فقط یک ردیف یا دو ردیف از پینها را در نظر بگیریم، و البته حالتهای تکراری را نیز در نظر نمی‌گیریم. (اگر پینی را از انتهای یک ردیف بیندازید مثل این است که پین انتهای دیگر ردیف را

انداخته باشید، یعنی در هر دو حالت در وضعیت یکسانی هستید).

ooo = {oo, oo, o}
۲, ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ = ۰, ۱, mex = ۳

oooo = {ooo, oo o, oo, o o}
۳, ۲ $\overset{*}{+}$ ۱ = ۳, ۲, ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ = ۰, mex = ۱

ooooo = {oooo, oooo, oo oo, ooo, oo o}
۱, ۳ $\overset{*}{+}$ ۱ = ۲, ۲ $\overset{*}{+}$ ۲ = ۰, ۳, ۲ $\overset{*}{+}$ ۱ = ۳, mex = ۴

oooooo = {ooooo,ooooo o, ooooo, oooo,oooo, oo oo}
۴, ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ = ۰, ۳ $\overset{*}{+}$ ۲ = ۱, ۱, ۳ $\overset{*}{+}$ ۱ = ۲, ۲ $\overset{*}{+}$ ۲ = ۰, mex = ۳

تمرین ۱۵

تحلیل کیلز را ادامه دهید، آیا می‌توانید الگویی برای آن بیابید؟

تعداد پینها	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	...
اندازهٔ کپه نیم	۰	۱	۲	۳	۱	۴	۳	۲	۱	۴	۲	۶	...

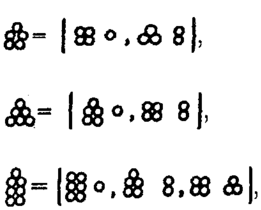
آیا راهی قانونمندتر برای ادامه وجود دارد؟ اگر تمرین ۱۵ را با قلم و کاغذ انجام دهید، استفاده از مقیاس گراندی را سودمند خواهید یافت. این روش را، با یک مثال ساده، یعنی بازی گراندی، توضیح خواهیم داد، ولی ابتدا به تمرین ۱۶ توجه کنید.

تمرین ۱۶

کشف کنید که چگونه می‌توان در بازیی که با رشته‌هایی با طولهای گوناگون انجام می‌شود، خوب بازی کرد؟ وقتی نوبت حرکت شماست، دقیقاً یک سانتیمتر از رشته مورد نظر را، یا از انتهای رشته، یا از وسط آن می‌برید. برنده کسی است که آخرین قطعه را از رشته‌ای که طولش بیش از یک سانتیمتر است، ببرد.

بازی گراندی

این بازی با کپه‌های لوبیا انجام می‌شود، و حرکت در آن بسیار ساده است: یک کپه را به دو کپهٔ نامساوی تقسیم کنید. پس کپهٔ حاوی ۰، ۱ یا ۲ لوبیا قابل تقسیم نیست؛ بنابراین مقدار نیم این کپه‌ها صفر است. یک **کپهٔ گراندی** ۳تایی را می‌توان به کپه‌های با ۲ و ۱ لوبیا تقسیم کرد که مقدار نیم آن $۰ \overset{*}{+} ۰ = ۰$ است؛ $\text{mex}\{۰\} = ۱$. بنابراین مقدار نیم یک کپهٔ **گراندی** ۳تایی، ۱ است. یک کپهٔ **گراندی** ۴تایی را می‌توان به کپه‌هایی با ۳ و ۱ لوبیا تقسیم کرد (اما قابل تقسیم به ۲ کپهٔ دوتایی نیست، زیرا کپه‌ها باید نامساوی باشند) که مقدار نیم آن $۱ \overset{*}{+} ۰ = ۱$ است و $\text{mex}\{۱\} = ۰$، بنابراین یک کپهٔ **گراندی** ۴تایی دارای مقدار نیم ۰ است. می‌توانیم به همین صورت ادامه دهیم:



$$\text{mex}\{۰ \overset{*}{+} ۰ = ۰, ۱ \overset{*}{+} ۰ = ۱\} = ۲,$$

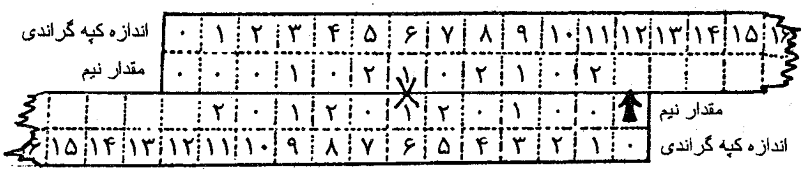
$$\text{mex}\{۲ \overset{*}{+} ۰ = ۲, ۰ \overset{*}{+} ۰ = ۰\} = ۱,$$

$$\text{mex}\{۱ \overset{*}{+} ۰ = ۱, ۲ \overset{*}{+} ۰ = ۲, ۰ \overset{*}{+} ۱ = ۱\} = ۰,$$

اما به‌زودی متوجه می‌شویم، این کار برای تعداد زیادی از لوبیاها آسان نیست. بنابراین بهتر است از مقیاس گراندی استفاده کنیم.

مقیاسهای گراندی

مقادیر نیمی را که تا به حال محاسبه کرده‌اید زیر اندازهٔ کپه‌های گراندی متناظر بنویسید. سپس، روی نوار کاغذی دیگری آنها را به‌همین شکل ولی وارونه بنویسید. به‌کار بردن کاغذهای شطرنجی سودمند است. فرض کنید، مقادیر نیم را برای کپه‌های گراندی تا ۱۱تایی محاسبه کرده‌ایم. پس از آن محاسبه برای ۱۲، به‌وسیله گذاشتن نوار روبه‌روی فهرست اصلی به آسانی انجام می‌شود (شکل ۱۴ را ببینید).



شکل ۱۴ محاسبهٔ مقدار نیم یک کپهٔ گراندی ۱۲ تایی توسط مقیاس گراندی.

انتخابهای کپهٔ گراندی ۱۲تایی به‌صورت زیرند:

۱۱&۱ ۱۰&۲ ۹&۳ ۸&۴ ۷&۵ (اما ٦&٦ نیست)

مقادیر نیم این انتخابها از روی مقیاس گراندی به آسانی خوانده می‌شود:

$$۲ \overset{*}{+} ۰ \quad ۰ \overset{*}{+} ۰ \quad ۱ \overset{*}{+} ۱ \quad ۲ \overset{*}{+} ۰ \quad ۰ \overset{*}{+} ۲$$

و $\text{mex}\{۲, ۰, ۰, ۲, ۲\} = ۱$. بنابراین مقدار نیم یک کپهٔ گراندی ۱۲تایی، ۱ است.

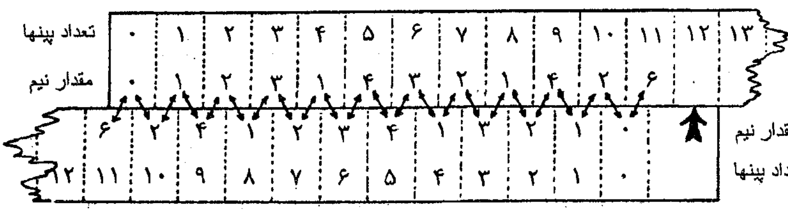
ممکن است فکر کنید که با شروع از کپهٔ ۳تایی، مقادیر نیم برای بازی گراندی با دورهٔ تناوب ۳ رخ می‌دهند: ...۱۰۲۱۰۲۱۰۲۱، اما اگر تمرین ۱۷ را انجام دهید، متأسفانه ناامید خواهید شد. بعداً دوباره به بازی گراندی باز می‌گردیم.

تمرین ۱۷

مقادیر نیم را برای بازی گراندی تا جایی محاسبه کنید که مشخص شود یک کپهٔ گراندی شامل ۵۰ لوبیا یک $\mathcal{P}$- وضعیت است.

البته، مقیاس گراندی برای هر بازی به‌صورت ویژه‌ای است. شما باید هر دفعه یک مقیاس جدید ایجاد کنید. بیایید یک مقیاس گراندی برای محاسبهٔ مقادیر نیم برای ردیفهای طویل در بازی کیلز ایجاد کنیم. این عمل کمی پیچیده‌تر است اما ارزشش را دارد.

مقادیر نیمی را که تا کنون محاسبه کرده‌اید، جایگزین کنید و مانند قبل، رونوشت وارونهٔ آن را روی نوار جداگانه‌ای درست کنید. برای قرار دادن نوار مقابل فهرست اصلی به‌دقت بیشتری نیاز داریم (شکل ۱۵). پیکانهای مورب مجموعهای نیمی را نشان می‌دهند که باید ایجاد کنید.



شکل ۱۵ قرار گرفتن یک مقیاس گراندی برای محاسبهٔ مقدار نیم یک ردیف ۱۲تایی از پینها در بازی کیلز.

انتخابها برای یک ردیف ۱۲تایی از پینها با شروع از یکی از دو انتهای ردیف به‌صورت زیر هستند:

۱۱&۰ ۱۰&۰ ۱۰&۱ ۹&۱ ۹&۲ ۸&۲ ۸&۳ ۷&۳ ۷&۴ ۶&۴ ۶&۵ ۵&۵ ...

با مقادیر نیم

$$6 \dotplus 0 \quad 2 \dotplus 0 \quad 2 \dotplus 1 \quad 4 \dotplus 1 \quad 4 \dotplus 2 \quad 1 \dotplus 2 \quad 1 \dotplus 3 \quad 2 \dotplus 3 \quad 2 \dotplus 1 \quad 3 \dotplus 1 \quad 3 \dotplus 4 \quad 4 \dotplus 4 \quad \ldots$$

کافی است فقط نصف محاسبات را انجام دهید، اما وقتی محاسبات را دستی انجام می‌دهید، بهتر است به‌عنوان امتحان نتایج، همهٔ محاسبات را انجام دهید. کمترین عدد ناموجود اعداد زیر:

۶ ۲ ۳ ۵ ۶ ۳ ۲ ۱ ۳ ۲ ۷ ۰

۴ است، و این، مقدار نیمِ یک ردیف ۱۲تایی از پینها در بازی کیلز است.

ممکن است ترجیح دهید که یک برنامه کامپیوتری بنویسید. فراموش نکنید که اگر XOR در اختیار دارید، از تسهیلات آن استفاده کنید. برای امتحان محاسباتتان، توجه کنید که مقادیر نیم نهایتاً متناوب، با دورهٔ ۱۲، هستند اما قبل از اینکه تناوب رخ دهد، تعدادی استثنا وجود دارد. بزرگترین مقدار استثنا، برای یک ردیف ۷۰تایی از پینهاست.

تمرین ۱۸

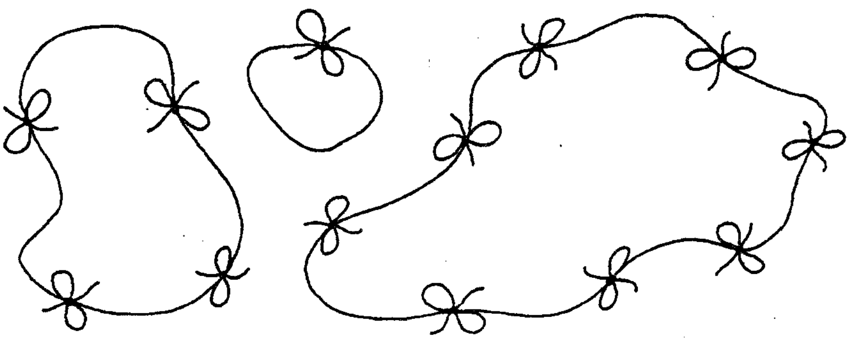
محاسبهٔ مقادیر نیم برای بازی کیلز را تا کجا باید ادامه دهیم تا مطمئن شویم که از آن به بعد، مقادیر دقیقاً متناوب‌اند؟

تمرین ۱۹

یک بازی شبیه به بازی گراندی را که در آن می‌توان یک بسته را نه فقط به دو قسمت نامساوی بلکه به دو قسمت مساوی نیز تقسیم کرد، تحلیل کنید. وقتی اندازهٔ همهٔ کپه‌ها ۱ شد، بازی تمام می‌شود.

دوستم دارد، دوستم ندارد

این بازی با چند رشته نخ شروع می‌شود. حرکت در این بازی، گره زدن دو انتهای آزاد نخها به یکدیگر است که در این‌صورت یا رشته‌ای طولانی‌تر ایجاد می‌شود یا یک **طوقه** پدید می‌آید. بازی زمانی پایان می‌یابد که انتهای آزاد همهٔ رشته‌ها به هم گره خورده و یک یا چند طوقه پدید آمده باشد. برنده کسی است که آخرین گره را بزند. در شکل ۱۶ بازی با ۱۳ رشته شروع شده است.



شکل ۱۶ پایان بازی دوستم دارد، دوستم ندارد.

تمرین ۲۰

قاعدهٔ ساده‌ای بیابید که مشخص کند با معلوم بودن تعداد رشته‌ها در بازی **دوستم دارد، دوستم ندارد**، چه کسی برنده خواهد شد. دنبالهٔ نیم مقادیر نیم برای ۰، ۱، ۲، ۳، ... رشته در این بازی چیست؟

تمرین ۲۱

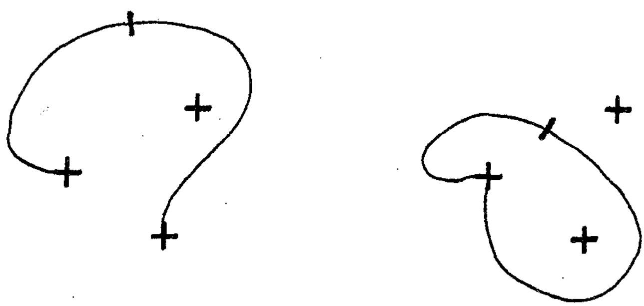
بازیی شبیه بازی نیم را درنظر بگیرید که با کپه‌های حاوی لوبیا انجام می‌شود و حرکت در این بازی برداشتن یک لوبیا از یک کپه است با یک انتخاب اضافی که اگر خواستید انجام می‌دهید: تقسیم کردن باقی‌ماندهٔ آن کپه به دو کپهٔ دیگر. این بازی را تحلیل کنید. در مورد بازیی مشابه با این بازی که در آن امکان اضافی، تقسیم کردن باقی‌ماندهٔ کپهٔ مورد نظر به دو یا بیشتر از دو کپهٔ دیگر است، چه می‌توان گفت؟

تمرین ۲۲

بازی نیمی را تحلیل کنید که در آن فقط مجازید، تعداد فردی لوبیا از یک کپه بردارید.

کلم بروکسلی

این بازی توسط جان کانوی و مایکل پترسون اختراع شده است، و با کاغذ و مداد انجام می‌شود. با تعدادی ضربدر(×) شروع می‌کنید. حرکت در این بازی متصل کردن دو بازو (از یک ضربدر یا از دو ضربدر متفاوت) و درست کردن یک ضربدر جدید با رسم یک خط عرضی روی خط اتصال بین دو بازو است (شکل ۱۷).



شکل ۱۷ دو حرکت ممکن در اولین حرکت از بازی کلم بروکسلی با سه ضربدر.

تمرین ۲۳

در هر حرکتی دو بازو مورد استفاده قرار می‌گیرد (دو انتهای خط اتصال) و دو بازو اضافه می‌شود (دو انتهای خط عرضی). آیا بازی در شرط پایانی صدق می‌کند؟

تمرین ۲۴

در بازی کلم بروکسلی با یک ضربدر، اولین حرکت متصل کردن دو بازوی مجاور یا دو بازوی متقابل ضربدر است. همهٔ امکانات بازی در کلم بروکسلی با یک ضربدر را رسم کنید و مشخص کنید کدام‌یک از این دو حرکت، برای شروع کنندهٔ بازی بهتر است.

تمرین ۲۵

چه کسی در بازی کلم بروکسلی با دو ضربدر می‌برد، اولین بازیکن یا دومین بازیکن؟ فرض کنید که هر بازیکن بهترین حرکت ممکن را انجام می‌دهد.

تمرین ۲۶

نظرتان در مورد بازی کلم بروکسلی با سه ضربدر چیست؟ و حتی با تعداد ضربدرهای بیشتر؟

گره‌ها

بازی **دوستم دارد، دوستم ندارد** را در جهت عکس درنظر بگیرید. بازی را با تعدادی رشته که همهٔ آنها به هم گره خورده‌اند، مانند شکل ۱۶، شروع می‌کنیم، و حرکت در این بازی باز کردن یک گره است. چندان طول نمی‌کشد که متوجه شوید این بازی حقیقتاً شبیه به بازی اصلی است.

برای جالب شدن بازی و به این علت که ممکن است حوصله نداشته باشید گره‌ها را باز کنید، دین توماس المانگ [۲]، در بازی‌اش به‌نام **گره‌ها**، اجازهٔ انجام یک نوع حرکت اضافی را به شما می‌دهد. یک قیچی بردارید و به‌جای باز کردن گره، اگر دوست داشتید، رشتهٔ بین دو گره را ببرید.

اگر با یک حلقه که شامل یک گره است، مانند مؤلفه میانی در شکل ۱۶، شروع کنید ممکن است گره را باز کنید (و در این‌صورت بازی تمام می‌شود) یا حلقه را ببرید (که در این‌صورت، رقیبتان با باز کردن گره برنده خواهد شد). یک رشتهٔ باز با یک گره دارای مقدار نیم ۱ است؛ یک طوقه با یک گره دارای مقدار نیم ۲ است.

تمرین ۲۷

مقادیر نیم رشته‌هایی با طولهای متفاوت و طوقه‌هایی شامل رشته‌هایی با n گره را برای $n = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$ در بازی **گره‌ها**، بیابید.

بازیهای تفاضلی

بازیی را انجام می‌دهیم که شبیه به نیم است، اما فقط می‌توانید دقیقاً ۲، ۵، یا ۷ لوبیا از یک کپه بردارید. مقدار نیم یک کپه با n لوبیا را در این بازی با $\mathcal{G}(n)$ مشخص کنید. بنابراین

$$\mathcal{G}(n) = \text{mex}\{\mathcal{G}(n-۲), \mathcal{G}(n-۵), \mathcal{G}(n-۷)\}$$

می‌توانیم این فرمول (و یک مقیاس گراندی بسیار ساده) را برای محاسبهٔ دنبالهٔ نیم $\mathcal{G}(۰)$، $\mathcal{G}(۱)$، $\mathcal{G}(۲)$، ... به‌کار ببریم:

$n =$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	...
$\mathcal{G}(n) =$	۰	۰	۱	۱	۰	۲	۱	۳	۲	۲	۰	۳	۱	۰	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	۲	...

تمرین ۲۸

این محاسبات را ادامه دهید و توجه کنید که این دنبالهٔ ۲۲تایی از مقادیر نیم، دوباره تکرار می‌شود. آیا این دنباله بعد از ۴۴ عدد باز هم تکرار می‌شود؟ چگونه می‌توانید مطمئن شوید؟

بازیی را که هم اکنون تحلیل کردیم، یک بازی تفاضلی است، که آن را با $S\{۲,۵,۷\}$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ $\{۲,۵,۷\}$ شامل اعدادی است که می‌توان اندازهٔ کپه را به اندازه آنها کاهش داد و مجموعهٔ تفاضلی نامیده می‌شود. بازیهای تفاضلی با مجموعه‌های تفاضلی متناهی باید نهایتاً متناوب باشند.

برای درک موضوع، فرض کنید که یک مجموعهٔ تفاضلی دارای k عضو $s_۱ < s_۲ < \cdots < s_k$ است. در این‌صورت،

$$\mathcal{G}(n) = \text{mex}\{\mathcal{G}(n-s_۱), \ldots, \mathcal{G}(n-s_k)\}$$

و $k \le \mathcal{G}(n)$ و تساوی دقیقاً زمانی برقرار می‌شود که مقادیر $\mathcal{G}(n-s_1)$، ... و $\mathcal{G}(n-s_k)$ مساوی ۰، ۱، ... و $k-1$ با ترتیبی دلخواه باشند. بنابراین بین عددهای نیم همگی از مقادیر ۰، ... و k انتخاب می‌شوند، و حداکثر $(k+1)^k$ امکان برای دنبالهٔ $\mathcal{G}(n-s_1)$، ... و $\mathcal{G}(n-s_k)$ از k مقدار که $\mathcal{G}(n)$ را تعیین می‌کنند وجود دارد. بنابراین دنباله نهایتاً باید تکرار شود.

تمرین ۲۹

دنبالهٔ نیم را برای بازی **تفاضلی** $S\{1,2,3\}$ بیابید، یعنی بازی نیمی که در آن می‌توانید حداکثر ۳ لوبیا از یک کپه بردارید.

تمرین ۳۰

دنبالهٔ نیم را برای بازی $S\{1,\dots,k\}$ بیابید، یعنی بازی نیمی که در آن می‌توانید حداکثر k لوبیا از یک کپه بردارید.

تمرین ۳۱

نشان دهید که دنبالهٔ نیم برای بازی $S\{2,4,7\}$ متناوب است و دورهٔ تناوب آن ۳ است، اما این تناوب اتفاق نمی‌افتد مگر اینکه اندازهٔ کپه بزرگتر از ۷ باشد.

توماس اس. فرگِسون [۱۴]، رابطه قابل توجهی بین مقادیر نیم ۰ و ۱ در هر بازی تفاضلی کشف کرد:

خاصیت تزویج فرگِسون

$\mathcal{G}(n)=1$ اگر و فقط اگر $\mathcal{G}(n-s_1)=0$ که s_1 کوچکترین عضو مجموعهٔ تفاضلی است.

برای مثال، در دو بازی $S\{2,5,7\}$ و $S\{2,4,7\}$ (تمرین ۳۱)، می‌توانید مشاهده کنید که دو مکان $(s_1=2)$ بعد از هر صفری، ۱ آمده است و هر ۱ای دو مکان جلوتر از یک ۰ رخ داده است.

تمرین ۳۲

خاصیت تزویج فرگِسون را ثابت کنید.

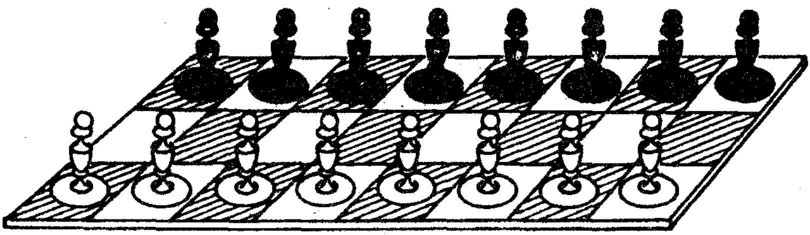
پروژهٔ C

تا جایی که می‌توانید دنباله‌های نیم را برای بازیهای تفاضلی بیابید. برای حالتی که مجموعهٔ تفاضلی فقط شامل یک عدد باشد و همچنین برای حالتی که مجموعهٔ تفاضلی شامل دو عضو a و b با خاصیت $a \perp b$ است، یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b، ۱ است، اطلاعات جامعی به‌دست دهید. سپس نتیجه را به مجموعهٔ $\{ak, bk, \ldots\}$ تعمیم دهید. به‌طور کلی توجه کنید که $S(ak, bk, ck, \ldots)$، k برابر $S(a, b, c, \ldots)$ است، یعنی برای دارای همان دنبالهٔ نیم است، اما هر عضوی k مرتبه تکرار شده است. هیچ نتیجهٔ کلی برای $S(a, b, c)$، یعنی برای بازیهای تفاضلی با مجموعه‌های تفاضلی شامل ۳ عضو، شناخته نشده است. اما حالت $c = a + b$ در [۶] در صفحه‌های ۴۹۸–۴۹۵ بررسی شده است.

بازیهای
هشت هشتی و کُدِ گای ـ اسمیت

بازیهای نیم، نیم لاسکر و بازیهای تفاضلی همه مثالهایی از «بازیهای برداشتن و شکستن» هستند که با کپه‌ها یا ردیفهایی از مهره‌ها انجام می‌شوند، همراه با قاعده‌ای که بیان می‌کند وقتی مقادیر گوناگون ۰، ۱، ۲، ... از محتویات یک کپهٔ داده شده برمی‌دارید، چه تعداد کپه می‌توانید جایگزین آن کنید. البته بازیهای بی‌شماری از این نوع وجود دارند. در صفحهٔ بعد مثال دیگری خواهد آمد.

شطرنج داؤسون



شکل ۱۸ شطرنج داؤسون روی یک صفحهٔ 8×3.

توماس رینر داؤسون (Thomas Rayner Dawson)، سلطان «شطرنج منصفانه»، یک بازی با دو ردیف سرباز روی یک صفحهٔ شطرنجی $n \times 3$ اختراع کرد [۱۰] و [۱۱]. گرفتن مهره، اجباری است. فارغ از محتوای شطرنجی آن، این بازی معادل با بازیی است که با یک ردیف از مهره‌ها انجام می‌شود و در آن یک حرکت عبارت است از برداشتن یک مهره، همراه با (یک یا دو) مهرهٔ مجاورش، در صورت وجود. اگر این بازی را با کپه‌های لوبیا به‌جای ردیفهایی از مهره‌ها انجام دهید، قاعدهٔ بیان شده به این قاعده تبدیل می‌شود که یک کپه را می‌توانید با

۰ کپه، اگر دقیقاً یک لوبیا برداشته شود (هیچ مهرهٔ مجاوری برداشته نشود)،
۱ یا ۰ کپه، اگر دقیقاً دو لوبیا برداشته شود (یک مهرهٔ مجاور برداشته شود)،
۲، ۱ یا ۰ کپه، اگر دقیقاً سه لوبیا برداشته شود (دو مهرهٔ مجاور برداشته شود).

جایگزین کنید.

به‌عنوان مثال، از یک ردیف هشت‌تایی، می‌توانید به یک ردیف ۶تایی، یا به یک ردیف ۵تایی، یا به دو ردیف ۱ و ۴تایی یا ۲ و ۳تایی برسید. یک مهره یا لوبیا را فقط اگر خود به تنهایی یک ردیف و یا کپه باشد، می‌توان برداشت.

ریچارد کنت گای (Richard Kenneth Guy) و سدریک اوستون باردل اسمیت [۱۸] این شرایط را به‌وسیلهٔ **کد رقمی**، برای هر تعداد لوبیا ۰، ۱، ۲، ... که ممکن است برداشته شود، به‌صورت رمزی درآوردند. برای **شطرنج داؤسون** رقمهای رمز به‌صورت زیر هستند:

$$\text{برای برداشتن یک لوبیا} \quad ۲^{۰} = ۱$$

$$\text{برای برداشتن دو لوبیا} \quad ۲^{۰} + ۲^{۱} = ۳$$

$$\text{برای برداشتن سه لوبیا} \quad ۲^{۰} + ۲^{۱} + ۲^{۲} = ۷$$

و بازی **شطرنج داؤسون** برچسب ۱۳۷•۰ را می‌گیرد، که اولین رقم رمز بعد از نقطه، شرایطی است که تحت آن می‌توانید یک لوبیا بردارید، رقم دوم شرایطی است برای برداشتن ۲ لوبیا، و سومین آنها شرایطی برای برداشتن ۳ لوبیا را نشان می‌دهد.

به‌طور کلی، اگر در یک بازی بتوانیم k لوبیا از یک کپه برداریم، با این فرض که باقی‌ماندهٔ کپه دقیقاً به a کپه (ناتهی)، یا b کپه، یا c کپه، یا ... (a، b، c و ... متمایزند) تقسیم شود، به این بازی، رمز $\underline{d}_k = ۲^a + ۲^b + ۲^c + \cdots$ را برای برداشتن k لوبیا می‌دهیم. در بازی **کیلز** می‌توانیم ۱ یا ۲ لوبیا برداریم، یعنی باقی‌ماندهٔ کپه به‌صورت ۲، ۱ یا ۰ کپه باقی می‌ماند، و $۷ = ۲^{۰} + ۲^{۱} + ۲^{۲}$. بنابراین $\underline{d}_۱ = \underline{d}_۲ = ۷$ و **کیلز** ۷۷• است. در بازیهای **تفاضلی** همیشه ۱ یا هیچ کپه (اگر کل کپه را برداریم) باقی می‌ماند، بنابراین رقمهای رمز به‌صورت $\underline{d}_k = ۰$ یا $\underline{d}_k = ۳(۲^{۰} + ۲^{۱})$، بسته به اینکه

جدول ۲ تعبیر رقمهای رمز.

شرایطی برای برداشتن k لوبیا از یک کپهٔ منفرد	مقدار $\underline{d}_k$
اجازهٔ برداشتن ندارید	۰
اگر لوبیاهای برداشته شده، کل کپه باشد	۱
فقط اگر تعدادی لوبیا به‌صورت یک کپه باقی بماند	۲
درصورتی که لوبیاهای باقی‌مانده، اگر باقی‌مانده‌ای باشد، در یک کپه باقی بمانند	۳
فقط اگر تعدادی لوبیا دقیقاً در دو کپهٔ ناتهی باقی بمانند	۴
درصورتی که لوبیاهای باقی‌مانده، اگر باقیمانده‌ای باشد، در دو کپه باقی بمانند	۵
فقط اگر تعدادی لوبیا در یک یا دو کپه باقی بماند	٦
درصورتی که لوبیاهای باقی‌مانده حداکثر در ۲ کپه قرار گیرند	۷
فقط اگر تعدادی لوبیا دقیقاً در ۳ کپهٔ ناتهی قرار بگیرند	۸

k در مجموعهٔ تفاضلی موجود نباشد یا باشد، است. برای مثال، $S(۲,۵,۷)$ دارای رمز •۰۰۳۰۰۳۰۳ است. رمز نیم ...۳۳۳• یا ۳ • (متناوباً تکرار می‌شود) است، در حالی که رمز بازی نیم لاسکر به‌صورت ...۳۳۳۳ • ۴ یا ۳ •۴ است: اولین رقم رمز $\underline{d}_۰ = ۴(= ۲^۲)$ به این معنی است که هیچ لوبیایی از بسته برنداریم و باقی‌مانده را به دو کپهٔ ناتهی تقسیم کنیم.

تمرین ۳۳

قواعدی را برای بازیهایی که با تعدادی کپهٔ لوبیا، یا با ردیفی از مهره‌ها انجام می‌شوند و نام رمز آنها •۱۵ («کیلز») و •۵۳ و ۳۰ • = ...۳۰۳۰۳• است، بیان کنید.

تمرین ۳۴

برای شطرنج داؤسون، •۱۳۷، دنبالهٔ نیم را بیابید. نشان دهید که این دنباله دارای دورهٔ تناوب ۳۴ است. برای نشان دادن این موضوع به حوصله زیاد، یا به یک برنامه کامپیوتری نیاز دارید. این دنباله دقیقاً تناوبی نیست و تا بعد از مقدار نیم استثنایی $\mathcal{G}(۵۱) = ۲$، برای ردیفی از ۵۱ مهره (یا یک صفحهٔ شطرنجی ۳ × ۵۱) پایدار نمی‌شود. شروع زیر برای اشکال زدایی برنامه‌تان مفید است:

$n =$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	...
$\mathcal{G}(n) =$	**۰**	۱	۱	۲	۰	۳	۱	۱	۰	۳	۳	۲	۲	۴	**۰**	۵	**۲**	**۲**	۳	۳	...

[مقادیر $\mathcal{G}(n)$ به ازای $n = ۰, ۱۴, ۱۶, ۱۷$ استثناهایی برای دورهٔ تناوب نهایی‌اند.]

چه وقت دنباله‌های نیم متناوب‌اند؟

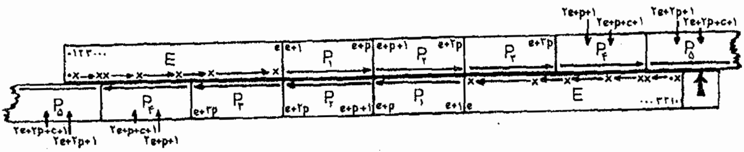
در تمرینهای ۲۱ـ ۱۸، ۳۱ـ ۲۸ و ۳۴ با دنباله‌های نیمی روبه‌رو شدیم که بعد از چند مقدار استثنایی نزدیک به ابتدای دنباله، متناوب می‌شدند. چطور می‌توانید مطمئن باشید که این دنباله‌ها واقعاً متناوب‌اند، و مقدار استثنایی دیگری درست پس از آنکه از محاسبه کردن خسته شدید، ظاهر نمی‌شود؟

با استفاده از مقیاس گراندی خودتان (که ممکن است درصورت لزوم خیلی طولانی باشد) می‌توانید مطمئن شوید. فرض کنید می‌خواهید مقدار نیم

$$\mathcal{G}(۲e+۲p+c+۱)$$

از یک کپهٔ $۲e + ۲p + c + ۱$ لوبیایی، یا از یک ردیف شامل $۲e + ۲p + c + ۱$ مهره را محاسبه کنید، و امیدوارید که نتیجهٔ آن مانند $\mathcal{G}(۲e+p+c+۱)$، یعنی مقدار نیم برای دقیقاً p لوبیا یا مهره کمتر، شود. در اینجا p عددی است که حدس زده‌اید دوره تناوب است؛ e عددی است که امیدوارید اندازهٔ بزرگترین کپه با یک مقدار نیم استثنایی باشد [یعنی $\mathcal{G}(e) \neq \mathcal{G}(e+p)$ و اما $\mathcal{G}(r) = \mathcal{G}(r+p)$ برای $r > e$، دست‌کم تا آنجایی که محاسبه کرده‌اید]، و c بیشترین تعداد لوبیا یا مهره است که می‌توانید، در یک حرکت بردارید. بازیها را با کد رقمی آنها مشخص می‌کنیم؛ پس آنچه گفتیم به این معناست که $\underline{d}_c \neq ۰$، اما برای $k > c$، $\underline{d}_k = ۰$. بازیهایی که ارقام رمز آنها حداکثر ۷ است، بازیهای **هشت هشتی** نامیده می‌شوند، زیرا نام رمز آنها را می‌توانیم عددهایی در مبنای هشت در نظر بگیریم. برخی فکر می‌کنند که همهٔ بازیهای **هشت هشتی** با تعداد متناهی رقم رمز غیر صفر نهایتاً متناوب‌اند، اما راهی بسیار طولانی برای اثبات این موضوع داریم. در اینجا بر آنچه که می‌توانیم ثابت کنیم متمرکز می‌شویم. مقیاس گراندی در شکل ۱۹ برای محاسبهٔ $\mathcal{G}(۲e+۲p+c+۱)$ ایجاد شده است. بخش E شامل مقادیر استثنایی است که به‌وسیلهٔ xها نشان داده شده‌اند؛ آخرین آنها به کپه‌ای به اندازهٔ e مربوط می‌شود. بخشهای $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، ... شامل نسخه‌های یکسانی از

تناوبهای دقیق با مقادیر نیم p هستند.

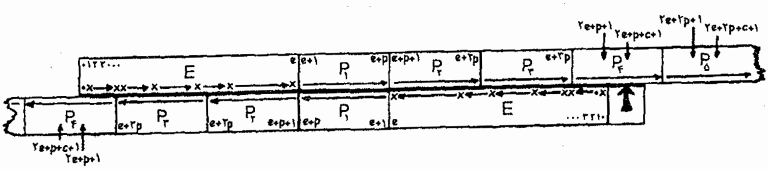


شکل ۱۹ مقیاس گراندی به اندازه کافی طولانی متناوب بودن برخی از دنباله‌های نیم را ثابت می‌کند.

برای محاسبهٔ $\mathcal{G}(2e+2p+c+1)$، اصل کمترین ناموجود را برای مجموعهای نیم مختلف به‌کار می‌گیریم. اینها مجموع مقادیر نیم در E با مقادیر نیم متناظرشان در P_3، P_4، ...، و مجموع مقادیر نیم در P_1 با مقادیر نیم متناظرشان در P_2 هستند (لزومی ندارد که بیش از نصف مسیر را طی کنیم، زیرا مجموع مقادیر در P_2 با مقادیر نیم در P_1، همان مجموع مقادیر نیم در P_1 با مقادیر نیم در P_2 است و غیره).

اما این مجموعهای نیم درست مانند آنهایی است که هنگام محاسبهٔ $\mathcal{G}(2e+p+c+1)$، P لوبیا جلوتر، پیدا کردیم بجز اینکه حالا p تا نسخهٔ اضافی، افزوده شده است. شکل ۲۰ این محاسبات جلوتر را نشان می‌دهد:

E با P_2، P_3، ... همان مجموعهای نیمی را به‌دست می‌داد که حالا E با P_3، P_4، ... به‌دست می‌دهد، و P_1 با P_1 همان نتیجه‌ای را به‌دست می‌داد که حالا P_1 با P_2 می‌دهد و از حالا به بعد هر محاسبه‌ای، تکرار محاسبهٔ p لوبیا جلوتر است؛ فقط در این حالت p نسخهٔ اضافی داریم که روی مقدار کمترین ناموجود اثری ندارد.



شکل ۲۰ محاسبه‌ای که برای p لوبیا جلوتر از محاسبهٔ شکل ۱۹ انجام دادیم.

توجه کنید که این بحث برای بازی گراندی معتبر نیست، زیرا شرط کپه‌های کیسه‌های نامساوی، وسط محاسبه را دچار اشکال می‌کند، و باز هم مقادیر استثنایی شده را حفظ می‌کند.

اگر بتوان یک کپه به اندازهٔ e ($e \geq 0$) یافت به‌طوری که

$$\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n)$$

برای همهٔ کپه‌های به اندازهٔ n با شرط $e < n \leq 2e + p + c$ صدق کند،
که c بزرگترین اندیس یک رقم رمز غیرصفر است،
آنگاه دنبالهٔ نیم برای یک بازی متناهی هشت هشتی
(که همهٔ رقمهای رمز آن، جز تعداد متناهی، $\hat{0}$ هستند)
با دوره تناوب p، متناوب است.

در جدول ۳ چند مثال از بازیهایی که متناوب بودن آنها را با این روش می‌توانید ثابت کنید نشان داده شده‌اند.

جدول ۳ بعضی از بازیهای هشت هشتی که می‌دانیم متناوب‌اند.

نام بازی	دوره تناوب، p	آخرین استثنا، e	c	محاسبات را تا $2e + 2p + c$ امتحان کنید.
کیلز (۰۷۷•)	۱۲	۷۰	۲	۱۶۶
شطرنج داؤسون (۱۳۷•)	۳۴	۵۱	۳	۱۷۳
گیلز (۱۵•)	۱۰	۰	۲	۲۲
۳۴•	۸	۶	۲	۳۰
۵۳•	۹	۱۰	۲	۴۰
۳۷۵•	۱۸	۳۶	۳	۱۱۱
۱۷۷•	۲۰	۴۹۷	۳	۱۰۳۷
۱۷۳•	۴۰	۲۰	۳	۱۲۳
۱۵۲•	۴۸	۱	۳	۱۰۱
۰۵۱•	۴۸	۴۶	۳	۱۹۱
۵۲۴•	۵۲	۱	۳	۱۰۹
۰۱۷•	۶۰	۵	۳	۱۳۳
۱۳۴•	۶۲	۵۹	۳	۲۴۵

تمرین ۳۵

بازی ۰۷• (انداختن دو پین بولینگ مجاور از یک ردیف، یا برداشتن دقیقاً ۲ لوبیا از یک کپه، به‌طوری که ۲، ۱، یا ۰ کپه باقی بماند؛ توجه کنید که یک پین تنها، یا یک

لوبیا، را نمی‌توان برداشت و اثری در بازی ندارد: مقدار نیم آن ٥ است) **کیلز داؤسون** نامیده می‌شود. دنباله نیم این بازی را محاسبه کنید و حدس بزنید که چرا نام **داؤسون** برای آن به‌کار رفته است.

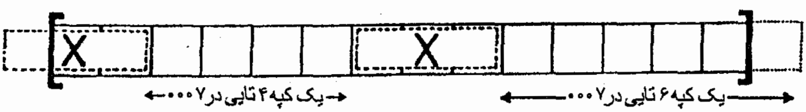
تمرین ٣٦

دنبالهٔ نیم بازی ۴• را محاسبه کنید (انداختن یک پین بولینگ از وسط یک ردیف؛ ردیفهایی که شامل یک یا ۲ پین هستند مقدار نیم صفر دارند). آیا می‌توانید ارتباط بین ۱۳۷•، ٥٧• و ۴• را بدون محاسبهٔ مقادیر نیم آنها توضیح دهید؟

سه ضربدر

این بازی همان بازی X-O تو روی نوار $N \times ۱$ متشکل از مربعهاست، با دو بازیکنی که هر دو از یک علامت ضربدر ($\times$)، استفاده می‌کنند. برنده، اولین بازیکنی است که یک ردیف از سه ضربدر متوالی را کامل کند.

البته به‌زودی متوجه خواهید شد که بازی کردن در یک خانه یا دو خانه بعد از خانهٔ شامل ضربدر عاقلانه نیست. بنابراین زمانی که یک ضربدر ایجاد می‌کنید، دو خانهٔ مجاور ضربدر را نیز اشغال شده فرض کنید (که البته ممکن است خارج از انتهای نوار باشد). این مطلب به این معناست که بازی را به حالتی تبدیل کنیم که شخصی با ترومینوها (صفحهٔ (د) شکل ۱۰) که سه خانهٔ متوالی از نوار را می‌پوشانند، بازی کند و گذاشتن ترومینو روی یالهای صفحه مجاز نباشد (مگر در انتهای نوار که می‌توان به اندازهٔ یک خانه بیرون رفت). شکل ۲۱ نشان می‌دهد که بازی سه‌ضربدر مانند بازی اسکیتل است که در آن، حرکت، انداختن دقیقاً ۳ پین متوالی است.



شکل ۲۱ تربل کراس به شکل ۰۰۷● است.

برای یک ردیف با n خانه بین دو ضربدر علامت XnX و برای یک ردیف با n خانه بین یک ضربدر و انتهای نوار، $Xn]$ و برای نوار با n مربع بدون ضربدر، علامت $[n]$ را بنویسید. در این‌صورت، مقدار نیم برای بازی سه‌ضربدر و ۰۰۷● به‌صورت زیر است:

وضعیتهای سه‌ضربدر

		[۰]	[۱]	[۲]	[۳]	[۴]	[۵]	[۶]	[۷]	[۸]
$X۰]$	$X۱]$	$X۲]$	$X۳]$	$X۴]$	$X۵]$	$X۶]$	$X۷]$	$X۸]$	$X۹]$	$X۱۰]$
$X۲X$	$X۳X$	$X۴X$	$X۵X$	$X۶X$	$X۷X$	$X۸X$	$X۹X$	$X۱۰X$	$X۱۱X$	$X۱۲X$

اندازهٔ کپهٔ ۰۰۷•

۱۰	۹	۸	۷	٦	۵	۴	۳	۲	۱	۰

مقادیر نیم

۳	۳	۰	۲	۲	۱	۱	۱	۰	۰	۰

تاکنون کسی نمی‌داند که آیا دنبالهٔ نیم برای **بازی سه‌ضربدر** متناوب است یا نه!

تمرین ۳۷

بازی ۱۷• (برداشتن یک مهرهٔ تنها، یا برداشتن دو مهرهٔ مجاور از یک ردیف) را تحلیل کنید. به رابطهٔ عجیبی که میان مقادیر نیم برای این بازی و بازیهای با رمز ۰۷•، یعنی بازی **کیلز داؤسون**، وجود دارد توجه کنید.

تمرین ۳۸

روابط قابل توجهی را میان دنباله‌های نیم برای بازی **کیلز** (۷۷•)، **کیلز دو برابر** (۰۰۷۷•، انداختن ۲ یا ۳ پین مجاور از یک ردیف)، **کیلز سه برابر** (۰۰۰۷۷•)، **کیلز دوتایی** (۷۷۷۷•)، **کیلز چهارتایی** (۷۷۷۷۷۷۷۷•) و **کیلز $\frac{5}{4}$ برابر** (۱۷۷•؛ برداشتن یک مهرهٔ تنها یا برداشتن ۲ یا ۳ مهرهٔ مجاور از یک ردیف) کشف کنید.

تمرین ۳۹

درستی کشفیات جان چارلز کنیون [۲۵] و [۲٦] و ریچارد بروس اوستین [۳] را که طبق آنها بازیهای **هشت هشتی** با کدهای ۰۰۵۵•، ۱۵٦•، ۱٦۵•، ۳۵٦• و ٦۴۴• به ترتیب دارای تناوبهای متناهی با طولهای ۱۴۸، ۳۴۹، ۱۵۵۰، ۱۴۲ و ۴۴۲ هستند، بررسی کنید. مقادیر نیم را در هر تناوب بیازمایید و ببینید کدام الگو به‌کار می آید. بسیاری از اینها توضیح داده نشده‌اند.

پروژهٔ D

دیده شده است که دنباله‌های نیم بازیهای زیادی به‌طور متناهی متناوب‌اند، اما بازیهای زیادی نیز حتی گاهی با قواعد کاملاً ساده وجود دارند که تناوب در آنها برقرار نشده است. برای مثال، بازی **گراندی**. مایک گای (Mike Guy)، اولین ۱۰ میلیون مقادیر نیم را محاسبه کرده است. اما تناوب، اگر موجود باشد، هنوز رخ نداده است. **بازی سه‌ضربدر** (۰۰۷•) بازی دیگری است که متناوب شناخته نشده است. سعی کنید،

تناوب هر یک از بازیهایی را که کدهای آنها به‌صورت زیر است، ثابت کنید:

•٦, •۰٦, •١۴, •٣٦, •٦۴, •٧۴, •۰۰۴, •۰۰۵, •۰۰٦, •۰١٦, •١۰۴, •١۰٦,
•١١۴, •١٣۵, •١٣٦, •١۴٢, •١۴٣, •١۴٦, •١٦٢, •١٦٣, •١٦۴, •١٧٢, •٣٢۴,
•٣٣٦, •٣۴٢, •٣٦٢, •٣٧١, •٣٧۴, •۴۰۴, •۴١۴, •۴١٦, •۴۴۴, •۴۵۴, •۵٦۴,
•٦۰۴, •٦۰٦, •٦۴۴, •٧۴۴, •٧٦۴, •٧٧۴, •٧٧٦.

تقریباً به‌طور قطع به یک برنامه کامپیوتری نیاز خواهید داشت و ممکن است بخواهید بخش بعدی راجع به **فضاهای پر صفر** و **هم‌مجموعه‌های معمولی** را مطالعه کنید. این بخش بعضی اوقات، اما نه همیشه، تعداد محاسبات مورد نیازی را که باید انجام گیرد کاهش می‌دهد. اگر روی یکی از این کدها موفق شدید، به نویسنده اطلاع دهید. سعی کنید اطلاعات کاملی بدهید تا نتیجه قابل تشخیص باشد: اطلاعاتی همچون تناوب؛ مقادیر استثنایی؛ فضای پر صفر (اگر موجود است)، دنبالهٔ نیم (اگر زیاد بزرگ نباشد).

[شش ماه پیش، بعد از اینکه برای اولین بار این پروژه طرح شد، آنیل گانگلی (Anil Gangolli) و دَن پلامبک (Thane Plambeck)، از دانشگاه استانفورد، کشف کردند که ١٦•، ۵٦•، ١٢٧•، ٣٧٦• متناوب‌اند (به ترتیب با تناوبهای ١۴٩۴۵٩، ١۴۴، ۴، ۴ و بنابراین آنها حذف شدند). در بعضی حالات آنها بایست بیش از یک میلیون مقادیر نیم را محاسبه می‌کردند، اما امروزه این کار چندان مشکلی نیست.]

فضاهای پرصفر
و هم‌مجموعه‌های معمولی

وقتی که تمرین ۱۵ را انجام دهید، توجهتان به این موضوع جلب خواهد شد که در بازی کیلز مقادیر نیم

$$۱, ۲, ۴, ۷, ۸$$

معمولی هستند، در حالی که مقادیر نیم

$$۰, ۳, ۵, ۶, ۹, ۱۰$$

نادرند. اینها چه اعدادی هستند و چرا چنین اتفاقی می‌افتد؟ اگر این اعداد را در مبنای دو بنویسید،

$$۰۰۰۱,\quad ۰۰۱۰,\quad ۰۱۰۰,\quad ۰۱۱۱,\quad ۱۰۰۰$$
$$۰۰۰۰,\quad ۰۰۱۱,\quad ۰۱۰۱,\quad ۰۱۱۰,\quad ۱۰۰۱,\quad ۱۰۱۰$$

خواهید دید که مقادیر معمولی، **اعداد فردی** هستند، یعنی تعداد فردی ۱ در نمایش آنها ظاهر می‌شود، در حالی که مقادیر نادر، **اعداد زوجی** هستند، با تعداد زوجی از ۱ها. مهمترین خاصیتی که این اعداد در آن صدق می‌کند، به‌صورت زیر است:

قواعد معمولی و نادر

نادر $\overset{*}{+}$ نادر = نادر = معمولی $\overset{*}{+}$ معمولی
نادر $\overset{*}{+}$ معمولی = معمولی = معمولی $\overset{*}{+}$ نادر

زمانی که مقادیر نیم را محاسبه می‌کنید، تعداد زیادی از مجموعهای نیم از نوع «نادر = معمولی $\overset{*}{+}$ معمولی» هستند. پس مقدار کمترین ناموجود را از مجموعه‌ای

برمی‌دارید که بیشتر اعضایش نادر هستند، و چون مقدار کمترین ناموجود در این مجموعه نیست، به احتمال زیاد عددی معمولی است: وقتی‌که موقعیت نادر- معمولی برقرار شود، تمایل دارد که برقرار بماند.

برای بازی **گراندی**، مقادیر **معمولی** به‌صورت زیر هستند:

۲, ۳, ۴, ۵, ۸, ۹, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۲۲, ۲۳, ...

و مقادیر نادر به‌صورت زیر هستند:

۰, ۱, ۶, ۷, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۸, ۱۹, ۲۰, ۲۱, ...

اینها اعداد زوجی و فردی نیستند، اما حتماً از قواعد «نادر و معمولی» تبعیت می‌کنند. در بازی گراندی برای تعیین اینکه عددی معمولی یا نادر است، قبل از شمارش تعداد بیتهای ۱، از آخرین بیت (۲°) صرف‌نظر کنید:

۲, ۳ = ۰۰۰۱X ۴, ۵ = ۰۰۱۰X ۸, ۹ = ۰۱۰۰X ۱۴, ۱۵ = ۰۱۱۱X ۱۶, ۱۷ = ۱۰۰۰X

۰, ۱ = ۰۰۰۰X ۶, ۷ = ۰۰۱۱X ۱۰, ۱۱ = ۰۱۰۱X ۱۲, ۱۳ = ۰۱۱۰X ۱۸, ۱۹ = ۱۰۰۱X

به‌طوری که X، ۰ یا ۱ است و در شمارش تعداد ۱ها به حساب نمی‌آید.

زمانی که پدیدهٔ **معمولی- نادر** رخ می‌دهد، چون **نادر** = **نادر** $\overset{*}{+}$ **نادر**، اعداد **نادر** یک فضای برداری تشکیل می‌دهند که ما آن‌را **فضای پرصفر** می‌نامیم. اعداد معمولی متمم این فضا هستند، که آنها را **هم‌مجموعهٔ معمولی** می‌نامیم.

پدیدهٔ **فضای پرصفر** در همهٔ بازیها رخ نمی‌دهد. برای مثال، **شطرنج داؤسون** (•۱۳۷)، این پدیده را نشان نمی‌دهد. گرچه، زمانی که این پدیده اتفاق بیفتد، شما را قادر می‌سازد که به‌طور قابل ملاحظه‌ای سرعت محاسباتتان را افزایش دهید. در پروژهٔ D قول دادیم که نشان دهیم که چطور این حالت اتفاق می‌افتد.

این مطلب را با بازی •۳۷۵، که ارقام رمز آن به معنای زیر است، نشان می‌دهیم:

۳: انداختن یک پین تنها، یا پینی که در انتهای یک ردیف طویل قرار دارد. یک انتخاب $n \to (n - ۱)$، برای $(n \geq ۱)$ وجود دارد.

۷: انداختن ۲ پین مجاور. برای $n \geq ۲$، $n - ۱$ انتخاب وجود دارد و برای $۰ \leq i \leq n - ۲$، انتخابهای $n \to \{n - ۲ - i, i\}$ وجود دارد. بنابر تقارن، کافی است نیمی از این انتخابها را بررسی کنیم.

۵: انداختن ۳ پین مجاور اگر تشکیل یک ردیف سه‌تایی بدهند، یا درون یک ردیف طویل باشند. یک انتخاب زمانی که $n = ۳$ به‌صورت $۰ \to ۳$، یا $n-۴$ انتخاب اگر $n \geq ۵$: برای $۱ \leq j \leq n - ۴$، انتخاب $n \to (n - ۳ - j, j)$. دوباره کافی است نیمی از این انتخابها آزمایش شوند.

برای ردیفهای شامل ۰، ۱، ۲ و ۳ پین، بازی مانند بازی نیم با ۰، ۱، ۲ و ۳ لوبیاست: مقادیر نیم ۰، ۱، ۲ و ۳ است، $n = ۰$ تنها $\mathcal{P}$- وضعیت است: برای $n \geq ۴$، با توجه به اینکه n زوج یا فرد است می‌توان همیشه ۲ یا ۳ پین میانی را انداخت و سپس از اصل مشابه‌سازی استفاده کرد. اگر برای محاسبهٔ $\mathcal{G}(n)$ از نیروی نامعقولی استفاده می‌کنید، برای $n \geq ۴$، به آزمایش $n - ۱$ انتخاب و تعیین مقدار کمترین ناموجود از مقادیر نیم آنها نیاز دارید. اما اگر یک **فضای پرصفر** تشخیص داده‌اید، می‌توانید قواعد معمولی و نادر را به خاطر بیاورید و کار کمتری انجام دهید.
فرض کنید که مقادیر زیر را محاسبه کرده‌اید:

n = ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱

$\mathcal{G}(n)$ = ۰ ۱ ۲ ۳ ۱ ۲ ۴ ۳ ۲ ۱ ۳ ۴ ۲ ۷ ۴ ۸ ۱ ۴ ۸ ۱ ۲ ۴

و حدس زده‌اید که اعداد زوجی، ۰، ۳، ۵، ۶، ۹، ۱۰، ... **فضای پرصفر** را برای بازی ۳۷۵• ایجاد می‌کنند. مطمئناً با چنین تعریفی از مقدار نادر، تنها مقادیر نادر تا کنون $\mathcal{G}(۰) = ۰$، $\mathcal{G}(۱۰) = \mathcal{G}(۷) = \mathcal{G}(۳) = ۳$ هستند.

اگر می‌خواهیم $\mathcal{G}(۲۲)$ را محاسبه کنیم، نیازی نداریم که همهٔ ۲۱ محاسبه را انجام دهیم. تنها محاسباتی که شامل مقادیر نادر هستند، عبارتند از:

$$۲۲ \to \{۱۶,۳\}\ \{۱۲,۷\}\ \{۹,۱۰\} \quad \text{و} \quad ۱ \overset{*}{+} ۳ = ۲ \quad ۲ \overset{*}{+} ۳ = ۱ \quad ۱ \overset{*}{+} ۳ = ۲$$

$$۲۲ \to \{۱۷,۳\}\ \{۱۳,۷\}\ \{۱۰,۱۰\} \quad \text{و} \quad ۴ \overset{*}{+} ۳ = ۷ \quad ۷ \overset{*}{+} ۳ = ۴ \quad (۳ \overset{*}{+} ۳ = ۰)$$

مقدار کمترین ناموجود یا باید ۸ باشد، یعنی مقدار **معمولی** بعدی بعد از ۱، ۲، ۴، ۷ و یا یک مقدار **نادر** کوچکتر غیر از ۰. اعداد ۳، ۵ و ۶ با توجه به روابط زیر

$$\mathcal{G}\{۶,۱۳\} = ۴ \overset{*}{+} ۷ = ۳, \quad \mathcal{G}\{۹,۱۱\} = ۱ \overset{*}{+} ۴ = ۵, \quad \mathcal{G}\{۸,۱۱\} = ۲ \overset{*}{+} ۴ = ۶$$

حذف می‌شوند. بنابراین $\mathcal{G}(۲۲) = ۸$؛ ۹ محاسبه بجای ۲۱ محاسبه. برای $\mathcal{G}(۲۳)$، از دومین ردیف محاسبات بالا همراه با اولین ردیف محاسبات زیر استفاده کنید:

$$\begin{array}{ll}
 & \{۱۸,۳\}\ \{۱۴,۷\}\ \{۱۱,۱۰\} \quad ۸ \overset{*}{+} ۳ = ۱۱ \quad ۴ \overset{*}{+} ۳ = ۷ \quad ۴ \overset{*}{+} ۳ = ۷ \\
۲۴ & \\
 & \{۱۹,۳\}\ \{۱۵,۷\}\ \{۱۲,۱۰\} \quad ۱ \overset{*}{+} ۳ = ۲ \quad ۸ \overset{*}{+} ۳ = ۱۱ \quad ۲ \overset{*}{+} ۳ = ۱ \\
۲۵ & \\
 & \{۲۰,۳\}\ \{۱۶,۷\}\ \{۱۳,۱۰\} \quad ۲ \overset{*}{+} ۳ = ۱ \quad ۱ \overset{*}{+} ۳ = ۲ \quad ۷ \overset{*}{+} ۳ = ۴
\end{array}$$

بنابراین $\mathcal{G}(۲۳) = ۱$، یعنی کوچکترین مقدار معمولی که خارج از مجموعه نیست، چون اگر $n > ۰$ آنگاه $\mathcal{G}(n) \neq ۰$، برای $\mathcal{G}(۲۴)$، مقادیر معمولی خارج از مجموعه، ۱، ۲، ۷، ۱۱ هستند که $\mathcal{G}(۲۴) = ۴$ را پیشنهاد می‌کند، یعنی کمترین مقدار معمولی که خارج از مجموعه نیست؛ که درست است، زیرا $\mathcal{G}(۲۴)$ نه ۰ است و نه $\mathcal{G}\{۲۰,۱\} = ۲ \overset{*}{+} ۱ = ۳$.

مقادیر معمولی خارج از مجموعه، برای $\mathcal{G}(۲۵)$، ۱، ۲، ۴، ۱۱ هستند، بنابراین $\mathcal{G}(۲۵)$ مساوی ۷ یا یک مقدار نادر کوچکتر است. گرچه، در اینجا مجبوریم همهٔ ۲۴ مجموع نیم را قبل از کشف اینکه هیچ یک از انتخابهای ۲۵ دارای مقدار نیم ۳ نیستند، محاسبه کنیم و $\mathcal{G}(۲۵) = ۳$ یک مقدار نادر جدید است. از حالا به بعد باید ۸ محاسبهٔ نادر به‌جای ۶ تا انجام دهیم، اما معمولاً قبل از اینکه مقادیر نادر کوچک را حذف کنیم تعداد زیادی اضافه نمی‌شود.

تمرین ۴۰

محاسبات را برای ۳۷۵۰ ادامه دهید و نشان دهید که دارای تناوب

$$\dot{۴}۱۲۴۸۱۴۷۸۱۴۸۲۱۴۸۱\dot{۷}$$

برای $(n = ۰,۱,\ldots,۱۷, \pmod{۱۸})$، جز برای مقادیر نادر $\mathcal{G}(۰) = ۰$، $\mathcal{G}(۳) = \mathcal{G}(۷) = \mathcal{G}(۱۰) = \mathcal{G}(۲۵) = ۳$، و مقادیر استثنایی دیگر (از میان اعداد معمولی) $\mathcal{G}(۴) = ۱$، $\mathcal{G}(۸) = \mathcal{G}(۵) = ۲$، $\mathcal{G}(۱۱) = \mathcal{G}(۱۷) = \mathcal{G}(۳۵) = ۴$، $\mathcal{G}(۱۳) = ۷$ و $\mathcal{G}(۱۸) = \mathcal{G}(۳۶) = ۸$ است. تا چه حد محاسبات را ادامه دادید تا مطمئن شدید که مقدار نادر یا مقادیر استثنایی دیگری وجود ندارد؟

نیم وارون و یک هشدار ناخوشایند

فرض کنید که نیم بازی می‌کنید، اما قانونها را به این صورت تغییر دهید که بازیکنی که آخرین لوبیا را برمی‌دارد، به‌جای برنده شدن، ببازد. آیا این تغییر تفاوت زیادی در نتیجهٔ بازی ایجاد می‌کند؟ با موشکافی فراوان جواب منفی است. بوتون (Bouton)، هنگامی که برای اولین بار این بازی را تحلیل می‌کرد، این نکته را کشف کرد.

نیم وارون

بازی نیم معمولی را انجام دهید تا همهٔ کپه‌ها، به‌جز یکی از آنها، شامل تنها یک لوبیا باشد. سپس از آن کپهٔ استثنایی همهٔ لوبیاها، یا همه جز یکی را خارج کنید به‌طوری که تعداد فردی از کپه‌ها با اندازهٔ ۱ باقی بماند.

مشاهده کرده‌ایم که همهٔ بازیهای منصفانه به بازی نیم معمولی قابل تبدیل‌اند.

بازی وارون

آخرین بازیکن می‌بازد. اگر نمی‌توانید حرکت کنید، برنده‌اید!

بازی معمولی

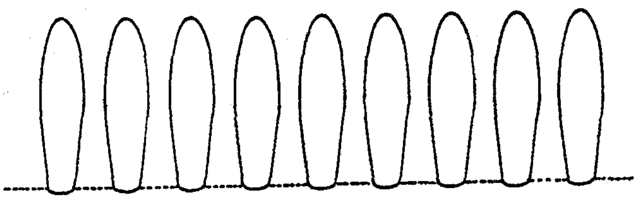
آخرین بازیکن می‌برد. اگر نمی‌توانید حرکت کنید، بازنده‌اید!

این مطلب وسوسه‌انگیز است که فکر کنید می‌توانید با بازیهای منصفانه وارون، درست شبیه به بازیهای منصفانهٔ معمولی، تا نزدیک به پایان آن، بازی کنید، وقتی که شما . . .

اما این مطلب درست نیست!

این وضعیت بسیار پیچیده است، مطلب کمی که در حالت کلی دربارهٔ آن می‌دانیم، در بخش ۱۳ از کتاب **راههای پیروزی** [٦] آورده شده است: همچنین [۲۰] و بخش ۱۲ از [۸] را نیز ببینید. در اینجا یک مثال و یک تمرین هست که به شما هشدار می‌دهند که در این مورد قواعد ساده‌ای وجود ندارند.

یک ردیف نه‌تایی از پینها در بازی کیلز درنظر بگیرید (شکل ۲۲).



شکل ۲۲ یک ردیف نه‌تایی در بازی کیلز: نوبت حرکت شماست، اما وارون بازی می‌کنید.

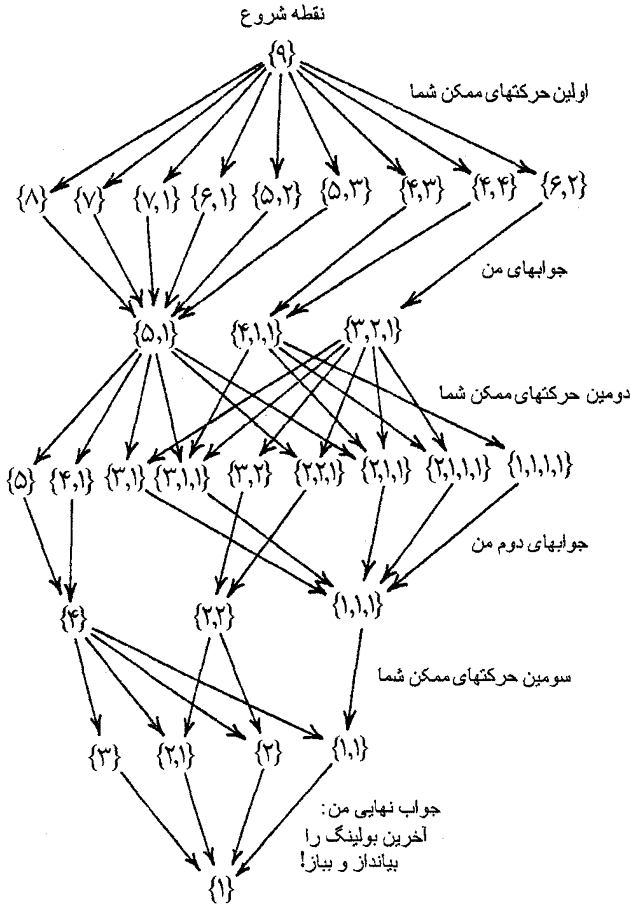
اگر بازی معمولی را انتخاب کنید، باید اجازه دهید که من بازی را شروع کنم! من پین میانی را می‌اندازم، دو ردیف چهارتایی باقی می‌ماند، و سپس به اصل مشابه‌سازی استناد می‌کنم. اما اگر شما می‌خواهید بازی را شروع کنید، من روی بازی **وارون** پافشاری می‌کنم! شما باز هم بازنده خواهید شد! شکل ۲۳ همهٔ حرکات ممکن شما همراه با پاسخهای مرا نشان می‌دهد. دادن توضیحی در مورد آنچه اتفاق می‌افتد، آسان نیست: قضیه اسپراگ گراندی کمکی نمی‌کند. چیزی شبیه دنبالهٔ نیم وارون وجود ندارد، بسیاری از بازیها معادل با کپه‌های نیم نیستند.

تمرین ۴۱

(تمرین سخت!) در تمرین ۱۷ کشف کردید که کپه‌هایی به اندازهٔ

۱, ۲, ۴, ۷, ۱۰, ۲۰, ۲۳, ۲٦, ۵۰

$\mathcal{P}$- وضعیتها در بازی معمولیِ بازی **گراندی** هستند. نشان دهید که در بازی **وارون** بازی **گراندی**، کپه‌هایی به اندازهٔ $3k$، $1 \leq k \leq 15$ و ۵۰تایی، $\mathcal{P}$- وضعیتها هستند.



شکل ۲۳ چگونگی برنده شدن من، در مقابل هر آنچه روی ردیف نه‌تایی در کیلز وارون، انجام می‌دهید.

بازیهای سکه‌برگردان

این بازیها بر اساس ایدهٔ نظریه پرداز هلندی اعداد، هنریک ویلم لنسترا (Hendrik Willem Lenstra)، بنا شده است. در شکل ۲۴، شیرماهی و نجار در حال بازی بیرحمانهٔ برگرداندن لاک‌پشتها هستند. در هر حرکت یکی از آنها یک لاک‌پشت را به پشتش برمی‌گرداند، و یا ممکن است، اگر بخواهد، لاک‌پشت دومی را واژگون کند، که در سمت چپ لاک‌پشت اول قرار دارد. این لاک‌پشت دوم ممکن است به پشت یا روی پاهایش برگردانده شود. برنده کسی است که آخرین لاک‌پشت را به پشت برگرداند.

شکل ۲۴ . . . و در یک ردیف منتظر بود . . . شیرماهی گفت: «برایت متأسفم».

تمرین ۴۲

نشان دهید که بازی لاک‌پشت برگردان با نیم معادل است، با این تعبیر که مقدار نیم

یک لاک‌پشت روی پایش تعداد لوبیاهای نوشته شده بر روی پشتش است، و مقدار نیم یک لاک‌پشت پا در هوا صفر است، و حرکتهای برگرداندن لاک‌پشتها متناظر است با:

(الف) برداشتن کل کپهٔ نیم،

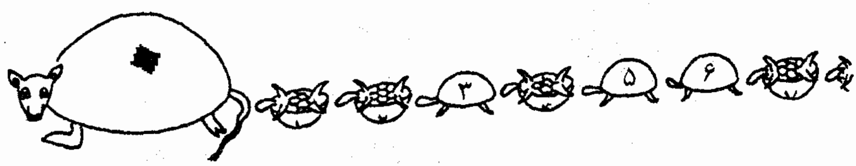
(ب) کاهش دادن یک کپهٔ نیم به اندازهٔ متفاوتی از کپه‌های دیگر،

(ج) کاهش دادن یک کپهٔ نیم به اندازهٔ کپه‌ای دیگر.

تمرین ۴۳

شکل ۲۴ یک $\mathcal{N}$- وضعیت است، برد با بازیکن بعدی است. ۳ حرکت مختلف مناسب را که بازیکن بعدی ممکن است انجام دهد را بیابید.

در بازی لاک‌پشت برگردان، امکان برگرداندن یک یا دو لاک‌پشت را دارید. حالا لاک‌پشت پیشرو را آزمایش کنید (شکل ۲۵)، که در آن امکان برگرداندن یک، دو، یا سه لاک‌پشت را دارید، با این شرط که لاک‌پشت سمت راست را از روی پاهایش به پشت قرار دهید. این برای اطمینان از این است که بازی در شرط پایانی صدق می‌کند.



شکل ۲۵ لاک‌پشت پیشرو در بازی شرکت می‌کند.

موقعیت در این حالت بسیار پیچیده است. انتخابهای زیادی وجود دارند، بنابراین توقع داریم که مقادیر نیم، بزرگتر از تعداد لاک‌پشت‌ها باشد. برای یافتن مقدار نیم، $\mathcal{G}(n)$، از لاک‌پشت nام (وقتی که لاک‌پشت روی پاهایش است؛ چون وقتی که به پشت قرار دارد، مقدار نیم آن صفر است)، وضعیتی را تصور کنید که لاک‌پشت nام روی پاهایش است و بقیهٔ لاک‌پشتها به پشت هستند. چه انتخابهایی وجود دارد؟ این انتخابها شامل برگرداندن لاک‌پشت nام به پشت و یا:

(الف) دادن مقدار نیم ۰ و دیگر هیچ، یا

(ب) برگرداندن لاک‌پشت دیگر، به شمارهٔ a، $a < n$، روی پاهایش، دادن مقدار نیم $\mathcal{G}(a)$، یا

(ج) برگرداندن دو لاک‌پشت، به شماره‌های a و b، روی پاهایشان و دادن مقدار نیم $\mathcal{G}(a) \overset{*}{+} \mathcal{G}(b)$.

است. بنابراین $\mathcal{G}(n)$ کمترین ناموجود همهٔ اعداد $\{۰, \mathcal{G}(a), \mathcal{G}(a) \overset{*}{+} \mathcal{G}(b)\}$ است، به‌طوری که a و b کوچکتر از n هستند. محاسبات را به نوبت انجام می‌دهیم:

[شما انتخابی دارید که لاک‌پشت پیشرو را به پشت برمی‌گردانید] $\qquad \mathcal{G}(۰) = ۱$

[لاک‌پشت ۱ را به پشت برگردانید (۰)، یا همچنین لاک‌پشت پیشرو را به روی پاهایش برگردانید (۱)] $\qquad \mathcal{G}(۱) = \text{mex}\{۰, ۱\} = ۲$

[لاک‌پشت ۲ را به پشت برگردانید (۰)، یا لاک‌پشت پیشرو را همچنین به روی پاهایش برگردانید (۱)، یا لاک‌پشت ۱ را روی پاهایش برگردانید (۲)، یا هر دو لاک‌پشت ۱ و لاک‌پشت پیشرو را بر روی پاهایشان برگردانید ($۳ = ۲ \overset{*}{+} ۱$)]

$$\mathcal{G}(۲) = \text{mex}\{۰, ۱, ۲, ۱ \overset{*}{+} ۲\} = ۴$$

تمرین ۴۴

این تحلیل را ادامه دهید، و مقادیر نیم لاک‌پشتهای پیشرو را تعیین کنید:

$$n = ۰\ ۱\ ۲\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶\ ۷\ ۸\ ۹\ ۱۰\ ۱۱\ ۱۲\ ۱۳\ ۱۴\ ۱۵\ ۱۶\ ۱۷\ ۱۸\ ۱۹\ ۲۰\ ۲۱\ \ldots$$

$$\mathcal{G}(n) = ۱\ ۲\ ۴\ ۷\ ۸\ ۱۱\ ۱۳\ ۱۴\ ۱۶\ ۱۹\ ۲۱\ ۲۲\ ۲۵\ ۲۶\ ۲۸\ ۳۱\ ۳۲\ ۳۵\ ۳۷\ ۳۸\ ۴۱\ ۴۲\ \ldots$$

این اعداد چه هستند؟ از چه قاعده‌ای پیروی می‌کنند؟ [راهنمایی: بحث «فضای پرصفر» در بازی کیلز را به یاد آورید.]

زمانی که مقدار $\mathcal{G}(n)$ را در بازی **لاک‌پشتهای پیشرو** محاسبه می‌کنید، **عدد فردی** بعدی هرگز خارج از مجموعه نیست، زیرا جمع نیم دو **عدد فردی**، **زوجی** است. گرچه همهٔ **اعداد زوجی** کوچکتر، مانند **اعداد فردی** کوچکتر، همیشه خارج از مجموعه هستند. اگر $\{a_۱, \ldots a_k\}$ یک $\mathcal{P}$ـ وضعیت در نیم باشد، به‌طوری که

$$a_۱ \overset{*}{+} a_۲ \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} a_k = ۰,$$

برای **اعداد فردی** متناظر آنها، $\mathcal{G}(a_i)$، در بازی **لاک‌پشت‌های پیشرو** داریم:

$$\mathcal{G}(a_۱) \overset{*}{+} \mathcal{G}(a_۲) \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} \mathcal{G}(a_k) = ۰ \quad \text{یا} \quad ۱$$

بر حسب آنکه k زوج یا فرد است.

> **$\mathcal{P}$- وضعیتها در بازی لاک‌پشتهای پیشرو، دقیقاً $\mathcal{P}$- وضعیتهایی در نیم با تعداد زوجی از کپه‌ها هستند.**

این را با تمرین ۱ در بخش بازی نیمبل مقایسه کنید. لاک‌پشت پیشرو، شمارهٔ ۰، باید همراه بقیه نوبت بگیرد. در بازی لاک‌پشتهای پیشرو، شکل ۲۴، $\{۰, ۳, ۵, ٦\}$ یک $\mathcal{P}$- وضعیت است، اما $\{۳, ۵, ٦\}$، $\mathcal{P}$- وضعیت نیست.

بسیار ساده‌تر، و کمتر بیرحمانه است که این بازیها را با سکه‌ها انجام دهید. برای صدق کردن در شرط پایانی، پافشاری می‌کنیم که آخرین سکهٔ سمت راست واژگون شده باید از شیر به خط برگردانده شود. برنده کسی است که آخرین شیر را برگرداند.

پروژهٔ E

در مورد بازیهای سکه برگردان تحقیق کنید، به‌طوری که امکان برگرداندن هر تعدادی سکه، ۱، ۲، ۳، ... و t، را دارید با این شرط که آخرین سکهٔ سمت راست از شیر به خط برگردانده شود. برای $t = ۱$، مقدار نیم برای حالت شیر ۱ است، بنابراین این بازی نوع دیگری از بازی دوستم دارد، دوستم ندارد است. برای $t = ۲, ۳$، بازیها لاک‌پشت برگردان و لاک‌پشتهای پیشرو هستند. رابطهٔ میان مقادیر آنها در حالت $m = ۱$ مطابق اصل زیر است:

اصل لاک‌پشت پیشرو

> **در بازی با t فرد $(t = ۲m + ۱)$ برای هر حالت شیر، مقدار نیم یک عدد فردی است.**
>
> **مقدار نیم برای سکه متناظرش در این بازی برای حالت $t = ۲m$، با پاک کردن آخرین رقم دو دویی از مقدار نیمی که از بازی در حالت $۲m + ۱$ به‌دست می‌آید، حاصل می‌شود.**

سعی کنید اصل لاک‌پشت پیشرو را ثابت کنید. فقط لازم است که بازی را در حالت t فرد تحلیل کنید. برای حالت $t = ۵$، بازی **موبیوس** را داریم. همهٔ $\mathcal{P}$- وضعیتها را (باید دست‌کم شامل ٦ شیر باشد) زمانی که با ردیفی از ۱۸ سکه بازی می کنید، بیابید. روابط جالبی با رمزهای تصحیح خطا و تبدیلات موبیوس به پیمانهٔ ۱۷ وجود دارد، که دلیل نامگذاری این بازی است. برای حالت $t = ۷$، بازی **موگل** را داریم، که حتی ساختار قابل توجه‌تری دارد و با **رمز گُلای** بسط داده شده، **گروه ماتیو** $M_{۲۴}$، **سیستم اشتاینر** $S(۲۴, ۸, ۵)$ و **مولد میراکل اکناد کرتیس** [بخش ۱۴ از کتاب راههای پیروزی را مطالعه کنید] در ارتباط است.

تمرین ۴۵

مقدار نیم را در **بازی ماتلی** در وضعیتی بیابید که تنها یک شیر (بقیه خط هستند) در موقعیت nام داریم (از سمت چپ از ۰ شماره‌گذاری کنید). **حرکت**، برگرداندن هر تعدادی سکه (شامل برگرداندن سکهٔ سمت راست از شیر به خط) است. در عمل این بازی زیاد جالب توجه نیست. چرا؟ زیرا اگر شما با مجموع چند بازی **ماتلی** بازی کنید، به معنای داشتن ردیفهای متعددی از سکه‌ها، و هر دفعه حرکت کردن در یک ردیف است، پس هنوز نوع دیگری نامگذاری برای نیم دارید: چگونه؟

تمرین ٤٦

مقدار نیم را برای یک شیر تنها در موقعیت nام (آیا بهتر است که این بار از ۰ شماره‌گذاری کنیم؟) در بازی **دوقلوها** را که در آن یک **حرکت**، برگرداندن دقیقاً دو سکه است که یکی از آنها برگرداندان سکهٔ سمت راست از شیر به خط است، به‌دست آورید. این بازی مانند بازی **لاک‌پشت برگردان** است، جز اینکه شما مجبورید سکهٔ دوم را نیز برگردانید.

تمرین ۴۷

مانند تمرین ٤٦، اما برای **بازی سه‌قلوها** که در آن **حرکت**، برگرداندن دقیقاً ۳ سکه است: مانند لاک‌پشت پیشرو؛ به‌جز اینکه باید بیشترین تعداد سکه (۳ عدد) را برگردانید.

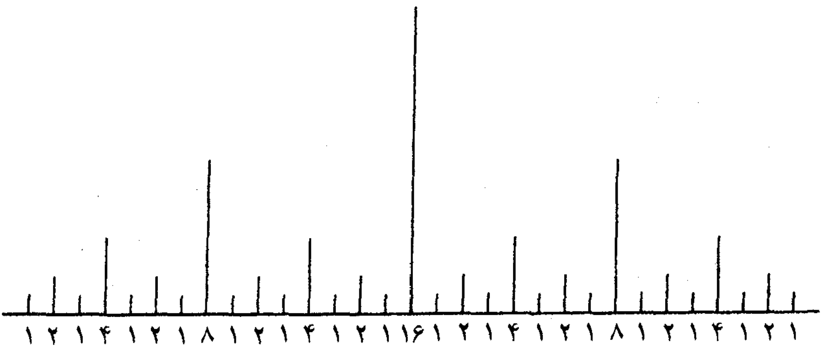
تمرین ۴۸

تمرینهای ٤٦ و ۴۷ را به بازیهایی که در آنها دقیقاً t سکه را برمی‌گردانید، تعمیم دهید.

[راهنمایی: این بازی شبیه به بازیی است که در آن می‌توانید هر تعداد سکه از ۱، ۲، ... تا t سکه را برگردانید، اما به $t - ۱$ لاک‌پشت پیشرو نیاز دارید!]

تمرین ۴۹

نشان دهید که مقدار نیم یک شیر تنها در وضعیت nام (این بار بهترین شماره‌گذاری از ۱ است) در بازی **خط‌کش**، که در آن تعدادی از سکه‌های پشت سر هم (مجاور) می‌توانند برگردانده شوند، بزرگترین توانی از ۲ است که بر n بخش‌پذیر است. مقادیر نیم در بازی **خط‌کش** شبیه به نشانه‌ها روی یک خط‌کش است (شکل ۲۶).



شکل ۲۶ مقادیر نیم برای بازی خط‌کش.

بازیهای دارای محدودیت

هریک از بازیهای **سکه برگردان** را که تا به حال توضیح داده‌ایم می‌توان با این محدودیت بازی کرد که سکه‌های برگردانده شده نباید دور از یکدیگر واقع شوند. در بازی **لاک‌پشت پیشرو ۵تایی**، می‌توانید ۱، ۲ یا ۳ سکه از ۵ سکهٔ متوالی را برگردانید. در بازی **۳تا از هفت‌تا** دقیقاً ۳ سکه از ۷ سکهٔ متوالی را برمی‌گردانید. در **رولر ۹تایی**، ۱، ۲، ۳، . . .، ۸ یا ۹ سکهٔ متوالی را واژگون می‌کنید. در این بازیها، پنج (هفت، نُه) مقدار نیم اوّل، مانند بازیهای نامحدود متناظرشان خواهد بود.

تمرین ۵۰

نشان دهید که دنباله‌های نیم برای این سه بازی، متناوب با دوره‌های تناوب ۵، ۷ و ۸ (۹ نیست؟) هستند. یک قاعدهٔ کلی برای دورهٔ تناوب در هر یک از بازیهای دارای محدودیت بیابید.

شلغم

حرکت در این بازی برگرداندن ۳ سکه‌ای است که مکانهای آنها با هم تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند، مثلاً $n-d$، n، $n+d$؛ سه سکه که در مکانهای با فاصله‌های مساوی قرار گرفته‌اند. جدول ۴ مقادیر نیم برای حالت شیر در ۹۹ مکان اول را نشان می‌دهد. توجه کنید که این بار از ۰ می‌شماریم.

جدول ۴ ۹۹ مقدار نیم برای شلغم.

موقعیتها	مقادیر نیم								
۰ تا ۸	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۲	۲	۱
۹ تا ۱۷	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۲	۲	۱
۱۸ تا ۲۶	۴	۴	۱	۴	۴	۴	۲	۲	۱
۲۷ تا ۳۵	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۲	۲	۱
۳۶ تا ۴۴	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۲	۲	۱
۴۵ تا ۵۳	۴	۴	۱	۴	۴	۱	۲	۲	۱
۵۴ تا ۶۲	۷	۷	۱	۷	۷	۱	۲	۲	۱
۶۳ تا ۷۱	۷	۷	۱	۷	۷	۱	۲	۲	۱
۷۲ تا ۸۰	۴	۴	۱	۴	۴	۱	۲	۲	۱
۸۱ تا ۸۹	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۲	۲	۱
۹۰ تا ۹۸	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۲	۲	۱

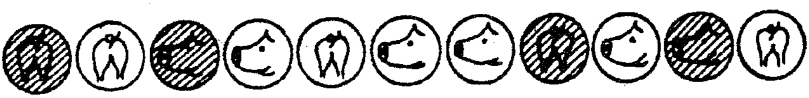
جدول ۴ را در ردیفهای $۳^۲$تایی نوشته‌ایم به‌طوری که می‌بینید مقادیر نیم، $\mathcal{G}(n)$، به شکلی با **مقیاس سه‌تایی** (اعدادی که در مبنای ۳ نوشته شده‌اند) در ارتباطند. n را در مبنای ۳ بنویسید. اگر n در بسط سه‌سه‌یی‌اش رقم ۲ نداشته باشد، آنگاه $\mathcal{G}(n) = ۰$. در غیر این صورت اگر آخرین ۲ در بسط سه‌سه‌یی آن در مکان kام از راست قرار بگیرد، $\mathcal{G}(n)$، kامین **عدد فردی** $(۱, ۲, ۴, ۷, ۸, ۱۱, \ldots)$ است.

تمرین ۵۱

با نوشتن اعداد در مبنای ۳، نشان دهید که در بازی **شلغم**، $\mathcal{G}(۱۱۲) = ۰$، $\mathcal{G}(۱۹۴) = ۱$، $\mathcal{G}(۱۶۰) = ۲$، $\mathcal{G}(۱۰۲) = ۴$ و $\mathcal{G}(۱۴۸) = ۷$. می‌توانید یک قاعدهٔ کلی برای مقادیر $\mathcal{G}(۳k + ۲)$، $\mathcal{G}(۹k + ۷)$ و $\mathcal{G}(۲۷k + ۲۱)$ به‌دست آورید؟ سعی کنید این قاعده کلی را ثابت کنید.

خوکی

در این بازی **سکه برگردان**، حرکت، برگرداندن چهار سکه‌ای است که به‌طور متقارن در کنار هم قرار گرفته‌اند، به‌طوری که اولین سکه، سکه‌ای است که در منتهی‌الیه سمت چپ قرار دارد و چهارمی باید از شیر به خط برگردانده شود، یعنی سکه‌ها را در وضعیتهای 0، a، $n-a$ و n به ازای $0 < a < \frac{1}{2}n$ برمی‌گردانیم، مثلاً سکه‌های هاشور خورده در شکل ۲۷ را که در آن $a = 2$، $n = 9$ درنظر بگیرید. ممکن است هر چهار سکه را بتوان مطابق حرکت قانونی بازی **خوکی** برگرداند.



شکل ۲۷ سکه‌های هاشور خورده یک حرکت قانونی را که منجر به پیروزی در خوکی می‌شود نشان می‌دهند.

تمرین ۵۲

نشان دهید که بازی **خوکی** نام دیگری برای بازی **گراندی** است.

تقارن

یک تعمیم از بازی **خوکی** حرکتی است که در آن هر مجموعه‌ای از سکه‌ها که به‌طور متقارن در کنار هم قرار دارند، برگردانده شوند و لزوماً شامل سکه سمت چپ، شمارهٔ ۰ نیست، و برای هر تعداد سکه، نه فقط ۴ سکه، کاربرد دارد. ما نتوانسته‌ایم یک الگو یا قاعده برای مقادیر نیم بیابیم:

n	=	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶ ...
$\mathcal{G}(n)$	=	۱	۲	۴	۳	۶	۷	۸	۱۶	۱۸	۲۵	۳۲	۱۱	۶۴	۳۱	۱۲۸	۱۰	۲۵۶ ...

تمرین ۵۳

بازی **تقارن ساده شده** [1] را تحلیل کنید. در این بازی، **حرکت**، مانند حرکت در تقارن است، واژگون کردن هر مجموعه‌ای از سکه‌ها که به‌طور متقارن مرتب شده‌اند، اما این بار سکه سمت چپ، شمارهٔ ۰، باید در مجموعهٔ منظم قرار گیرد.

پروژهٔ F

در مورد بازیهای سکه برگردان ۲بعدی تحقیق کنید. در این حالت سکه‌هایی که می‌توانند واژگون شوند در یک آرایه متعامدند، یک سکهٔ نشانه، در وضعیتی با مختصات (a, b)، $a \geq 0$ و $b \geq 0$ است. برای اینکه مطمئن شویم این بازی در شرط پایانی صدق می‌کند، سکه‌ای که برگردانده شده است و بزرگترین مقدار $a + b$ را دارد، باید از شیر به خط برگردانده شود.

با **دوقلوهای نامنظم** شروع کنید. حرکت، برگرداندن دو سکه‌ای است که هر دو در یک سطر یا در یک ستون قرار دارند. مقدار نیم حالت شیر در وضعیت (a, b)، $a \overset{*}{+} b$ است، مانند جدول ۱ مقدار نیم یک وضعیت، مجموع نیم مقادیر نیم همهٔ شیرهاست.

[1] به‌نظر می‌آید که واژه Sympler از ترکیب دو واژهٔ Symmetry و Simpler به‌دست آمده است. ــ م.

بعداً گوشه‌های واژگون شده را تحلیل کنید. حرکت، برگرداندن ۴ سکه در گوشه‌های مستطیل است، که در وضعیتهای (a', b')، (a', b)، (a, b')، (a, b) قرار دارند. به‌ازای $a' < a \leq$ ۰ و $b' < b \leq$ ۰، به‌طوری که وضعیت (a, b) از شیر به خط برگردانده می‌شود. مقادیر نیم می‌توانند با استفاده از فرمول زیر محاسبه شوند:

$$\mathcal{G}(a,b) = \text{mex}\{\mathcal{G}(a',b) \overset{*}{+} \mathcal{G}(a,b') \overset{*}{+} \mathcal{G}(a',b')\}$$

به‌طوری که مقادیر a' و b' در فواصل $a' < a \leq$ ۰ و $b' < b \leq$ ۰ خلاصه هستند. جدول ۵ مقادیر $\mathcal{G}(a, b)$ را برای a و b های کمتر از ۱۶ به‌دست می‌دهد.

جدول ۵ مقادیر نیم برای گوشه‌های واژگون شده. یک جدول ضرب نیم.

۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۰	۲	۳	۱	۸	۱۰	۱۱	۹	۱۲	۱۴	۱۵	۱۳	۴	۶	۷	۵
۰	۳	۱	۲	۱۲	۱۵	۱۳	۱۴	۴	۷	۵	۶	۸	۱۱	۹	۱۰
۰	۴	۸	۱۲	۶	۲	۱۴	۱۰	۱۱	۱۵	۳	۷	۱۳	۹	۵	۱
۰	۵	۱۰	۱۵	۲	۷	۸	۱۳	۳	۶	۹	۱۲	۱	۴	۱۱	۱۴
۰	۶	۱۱	۱۳	۱۴	۸	۵	۳	۷	۱	۱۲	۱۰	۹	۱۵	۲	۴
۰	۷	۹	۱۴	۱۰	۱۳	۳	۴	۱۵	۸	۶	۱	۵	۲	۱۲	۱۱
۰	۸	۱۲	۴	۱۱	۳	۷	۱۵	۱۳	۵	۱	۹	۶	۱۴	۱۰	۲
۰	۹	۱۴	۷	۱۵	۶	۱	۸	۵	۱۲	۱۱	۲	۱۰	۳	۴	۱۳
۰	۱۰	۱۵	۵	۳	۹	۱۲	۶	۱	۱۱	۱۴	۴	۲	۸	۱۳	۷
۰	۱۱	۱۳	۶	۷	۱۲	۱۰	۱	۹	۲	۴	۱۵	۱۴	۵	۳	۸
۰	۱۲	۴	۸	۱۳	۱	۹	۵	۶	۱۰	۲	۱۴	۱۱	۷	۱۵	۳
۰	۱۳	۶	۱۱	۹	۴	۱۵	۲	۱۴	۳	۸	۵	۷	۱۰	۱	۱۲
۰	۱۴	۷	۹	۵	۱۱	۲	۱۲	۱۰	۴	۱۳	۳	۱۵	۱	۸	۶
۰	۱۵	۵	۱۰	۱	۱۴	۴	۱۱	۲	۱۳	۷	۸	۳	۱۲	۶	۹

یک **بازی شطرنجی**، $A \times B$، می‌تواند از دو بازی یک‌بعدی سکه برگردان، A و B، درست شود. اگر یک حرکت قانونی در A، برگرداندن سکه‌ها در وضعیتهای a_1، a_2، ...، a_k و یک حرکت قانونی در B برگرداندن سکه‌ها در وضعیتهای b_1، b_2، ...، b_l باشد، یک حرکت قانونی در $A \times B$ برگرداندن سکه‌ها در همهٔ وضعیت‌های kl به‌شکل (a_i, b_j)، $1 \leq i \leq k$، $1 \leq j \leq l$ است. برای مثال، اگر A و B، هر دو بازی **دوقلو** باشند، آنگاه $A \times B$، **گوشه‌های واژگون شده** است.

اصل شطرنجی

مقدار نیم یک حالت شیر در بازی شطرنجی $A \times B$، ضرب نیم بازیهای A و B است:

$$\mathcal{G}_{A \times B}(a,b) = \mathcal{G}_A(a) \overset{*}{\times} \mathcal{G}_B(b)$$

ضرب نیم، $\overset{*}{\times}$، آن چیزی است که در جدول ۵ آمده، است: [۲۸] را ببینید.

در مورد بازیهای زیر:

قالیچه = خط‌کش × خط‌کش

قالی = تقارن × تقارن

قالی اندازه شده = تقارن ساده شده × تقارن ساده شده

پنجره = شلغم × شلغم

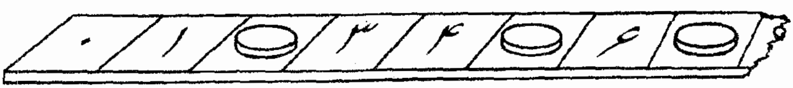
و

در = خوکی × شلغم

تحقیق کنید. [بخش ۱۴ کتاب راههای پیروزی را مطالعه کنید].

بازی وِلتر

بازی ولتر شبیه بازی نیمبل است با این تفاوت مهم که در هر خانه فقط می‌توانید یک سکه بگذارید. همچنین، مانند تمرین ۱ در بخش بازی نیمبل، مجاز نیستید که از انتهای نوار خارج شوید. می‌توانستیم این بازی را با عنوان **نیم با کپه‌های نامساوی** مطرح کنیم، اما وقتی‌که یک کپه تمام می‌شود، سخت است که به‌خاطر بیاورید کپه‌ای به اندازهٔ صفر دارید و دیگر مجاز نیستید که کپهٔ دیگری به این اندازه داشته باشید. بنابراین از گونهٔ دیگر **نیمبل** در تمرین ۱ استفاده می‌کنیم و خانه‌ها را از صفر شماره‌گذاری می‌کنیم.



شکل ۲۸ یک وضعیت در بازی ولتر.

بنابراین بازی ولتر با سکه‌هایی روی یک نوار انجام می‌گیرد، حداکثر یک سکه در هر خانه قرار می‌گیرد، و یک حرکت بردن سکه به سمت چپ است. سکه می‌تواند از روی سکه دیگر عبور کند اما نمی‌تواند روی سکهٔ دیگری قرار بگیرد، و نمی‌تواند از انتهای نوار خارج شود. این بازی با k سکه، زمانی خاتمه می‌یابد که سکه‌ها در خانه‌های $k-1$ ،...،۰ باشند. طبق معمول، آخرین بازیکنی که بازی می‌کند، برنده است.

بازی ولتر با یک سکه چندان هیجان‌انگیز نیست: در این حالت شما با حرکت دادن سکه بسوی خانهٔ صفر فوراً برنده می‌شوید. این بازی دقیقاً مانند نیم با یک کپه است! می‌توانید سکه را به خانه‌های با شماره‌های کوچکتر حرکت دهید، درست مانند یک کپهٔ نیم که می‌توانید آن‌را به کپه‌ای با لوبیاهای کمتر، یا حتی صفر کاهش دهید. آیا بازی ولتر هنوز گونهٔ دیگری از بازی نیم است؟ خوب، به بازی نیم نزدیک است، اما خود آن نیست.

تمرین ۵۴

ثابت کنید که مقدار نیم برای بازی ولتر با دو سکه در خانه‌های a و b، $(a \neq b)$ یک **تابع مجاورسازی** است، و $[a \mid b] = (a \overset{*}{+} b) - ۱$.

نظریهٔ بازی ولتر بسیار پیچیده است. اصل این بازی از **اسپراگ** [۳۸] و [۳۹] و **ولتر** [۴۱] و [۴۲] است. می‌توانیم مطالب لازم برای انجام محاسبات مقادیر نیم و یافتن حرکتهای خوب را بیان کنیم. اما اگر می‌خواهید بدانید که چرا چنین روشی ثمربخش است، باید به [۸]، صفحات ۱۶۵ـ ۱۵۳ مراجعه کنید. همچنین به [۵] و [۶]، صفحات ۴۸۱ـ ۴۲۷ و [۳۱] نیز مراجعه کنید.

تابع ولتر، یا مقدار نیم برای وضعیتی از بازی ولتر با k سکه در k خانهٔ متفاوت a، b، c، ... را با $[a \mid b \mid c \ldots]_k$ نشان می‌دهیم. برای مثال، مقدار نیم در وضعیت شکل ۲۸ به‌صورت $[۷ \mid ۵ \mid ۲]_۳$ نوشته می‌شود. حال (اگر تمرین ۵۴ را انجام داده‌اید) می‌دانیم که

$$[a]_۱ = a$$
$$[a \mid b]_۲ = (a \overset{*}{+} b) - ۱$$

بازی ولتر با ۱ و ۲ سکه

کمی بعد دوباره به بازی ولتر با ۳ سکه بازمی‌گردیم. اولاً توجه کنید که بازی ولتر با ۴ سکه می‌تواند دقیقاً شبیه به نیم، انجام شود. این حقیقت که نمی‌توانید دو کپه به یک اندازه داشته باشید، تأثیری روی بازی نمی‌گذارد.

$$[a \mid b \mid c \mid d]_۴ = ۰$$
اگر فقط
$$a \overset{*}{+} b \overset{*}{+} c \overset{*}{+} d = ۰$$

بازی ولتر با ۴ سکه

حالا می‌توانید ببینید که بازی ولتر با ۳ سکه چگونه انجام می‌شود، زیرا این بازی همان بازی ولتر با ۴ سکه است که در آن یکی از سکه‌ها به خانهٔ ۰ رسیده باشد. اما حالا باید شماره‌گذاری را یک واحد انتقال دهید:

$$\boxed{\begin{array}{l}[\circ \mid a \mid b \mid c]_{۴} = [a-۱ \mid b-۱ \mid c-۱]_{۳} \\ [a \mid b \mid c]_{۳} = [\circ \mid a+۱ \mid b+۱ \mid c+۱]_{۴}\end{array}}$$

بازی ولتر با ۳ سکه

برای مثال، وضعیت شکل ۲۸ مقدار نیم زیر را دارد:

$$[۲ \mid ۵ \mid ۷]_{۳} = [\circ \mid ۳ \mid ۶ \mid ۸]_{۴}$$

ما تاکنون نمی‌دانیم که چگونه این مقادیر نیم را با بیشتر از دو سکه محاسبه کنیم، اما این‌را می‌دانیم که اگر $\circ = d \overset{*}{+} ۶ \overset{*}{+} ۳ \overset{*}{+} \circ$ آنگاه $[\circ \mid ۳ \mid ۶ \mid d]_{۴} = \circ$، یعنی درحالتی که $d = ۵$، (هنوز مراقب باشید!) حرکت خوب این است که طوری حرکت کنید که $[۲ \mid ۵ \mid ۴]_{۳} = [\circ \mid ۳ \mid ۶ \mid ۵]_{۴} = \circ$: سکهٔ روی خانهٔ ۷ را به خانهٔ ۴ حرکت دهید.

تمرین ۵۵

$(a \overset{*}{+} b) - ۱$، $(a - ۱) \overset{*}{+} b$، $a \overset{*}{+} (b - ۱)$ و $\{(a-۱) \overset{*}{+} (b-۱)\} + ۱$ را برای مقادیر کوچک متفاوت a و b محاسبه کنید. آیا هیچ جفتی از چهار مقدار برابرند؟ همیشه برابرند؟ اگر بعضی اوقات برابرند، تحت چه شرایطی برابری روی می‌دهد؟

روش مجاورسازی

این روش ساده‌ترین راه برای محاسبهٔ مقدار نیم برای بیش از ۲ سکه است.

آن دو عدد از k عدد را که تفاضلشان شامل بزرگترین توان ۲ به‌عنوان یک مقسوم‌علیه است، **مجاور** هم قرار دهید. همان‌طور که در نظریه اعداد می‌گویند، آن دو عدد به پیمانهٔ بزرگترین توان ۲ همنهشت‌اند. سپس یک جفت از $k-۲$ عدد باقی‌مانده را طبق همان قاعده، مجاور هم قرار دهید، و .... این کار را ادامه دهید تا همهٔ عددها جفت شوند، مگر اینکه k فرد باشد، که در این‌حالت یک عضو باقی می‌ماند: مانند عضو تنهای s:

(a,b)، (c,d)، ... و احتمالاً s.

سپس

$$[a \mid b \mid c \mid d \mid \ldots]_k = [a \mid b] \overset{*}{+} [c \mid d] \overset{*}{+} \cdots (\overset{*}{+}\, s \text{ ،اگر } k \text{ فرد است})$$

برای مثال، در مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱\}$، ۵ با ۲۱ به پیمانه ۱۶ همنهشت است، سپس ۱ با ۱۳ به پیمانهٔ ۴ همنهشت است. ۲ با ۸ به پیمانهٔ ۲ همنهشت است و بنابراین ۳ به‌عنوان عضو تنها باقی می‌ماند.

$$\begin{aligned}
[۱ \mid ۲ \mid ۳ \mid ۵ \mid ۸ \mid ۱۳ \mid ۲۱]_۷ &= [۵ \mid ۲۱] \overset{*}{+} [۱ \mid ۱۳] \overset{*}{+} [۲ \mid ۸] \overset{*}{+} ۳ \\
&= \{(۵ \overset{*}{+} ۲۱) - ۱\} \overset{*}{+} \{(۱ \overset{*}{+} ۱۳) - ۱\} \\
&\quad \overset{*}{+} \{(۲ \overset{*}{+} ۸) - ۱\} \overset{*}{+} ۳ \\
&= (۱۶ - ۱) \overset{*}{+} (۱۲ - ۱) \overset{*}{+} (۱۰ - ۱) \overset{*}{+} ۳ \\
&= ۱۵ \overset{*}{+} ۱۱ \overset{*}{+} ۹ \overset{*}{+} ۳ = ۱۴
\end{aligned}$$

مثال دیگری، بدون عضو تنها، به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
[۱ \mid ۴ \mid ۹ \mid ۱٦ \mid ۲۵ \mid ۳٦ \mid ۴۹ \mid ٦۴]_{۸} &= [۴ \mid ۳٦] \overset{*}{+} [۱ \mid ۴۹] \\
&\quad \overset{*}{+} [۹ \mid ۲۵] \overset{*}{+} [۱٦ \mid ٦۴] \\
&= \{(۴ \overset{*}{+} ۳٦) - ۱\} \\
&\quad \overset{*}{+} \{(۱ \overset{*}{+} ۴۹) - ۱\} \\
&\quad \overset{*}{+} \{(۹ \overset{*}{+} ۲۵) - ۱\} \\
&\quad \overset{*}{+} \{(۱٦ \overset{*}{+} ٦۴) - ۱\} \\
&= (۳۲ - ۱) \overset{*}{+} (۴۸ - ۱) \\
&\quad \overset{*}{+} (۱٦ - ۱) \overset{*}{+} (۸۰ - ۱) \\
&= ۳۱ \overset{*}{+} ۴۷ \overset{*}{+} ۱۵ \overset{*}{+} ۷۹ = ۱۱۲.
\end{aligned}
$$

در اینجا جفتهای (۱, ۴۹)، (۹, ۲۵) و (۱٦, ٦۴) همگی به خوبی در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. در چنین حالتی، مهم نیست که کدام دو عضو را ابتدا در کنار هم قرار دهیم.

تمرین ۵٦

$[۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷]_{۷}$ و $[۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰]_{٦}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۵۷

نشان دهید که اگر a، b و c عددهای صحیح متمایز مثبت باشند، همیشه یک عضو تنهای یکتا وجود دارد، یعنی یکی از جفتهای (a, b)، (b, c) و (c, a)، نسبت به دوتایی‌های دیگر بهتر جور می‌شوند. همچنین نشان دهید که دو جفت دیگر هم جور می‌شود.

روش مجاورسازی روش خوبی برای کار کردن با مقدار نیم است، اما آن چیزی که شما حقیقتاً می‌خواهید بدانید، چگونگی یافتن حرکات درست در یک وضعیت، از بازی ولتر است. یک روش زیبا برای انجام این کار از مطالعهٔ الگوهای نواری [۹] حاصل خواهد شد.

الگوهای نواری

یافتن حرکاتی که مقدار نیم را به صفر یا به هر مقدار دیگری تغییر دهد، آسان نیست. ابتدا روش دیگری برای محاسبهٔ مقدار نیم ارائه می‌دهیم. این روش، در مقایسه با به‌کارگیری روش مجاورسازی، مشکلتر است و حتی در آن دچار خطای بیشتری می‌شویم. اما اگر می‌خواهید به کامپیوترتان، بازی ولتر را بیاموزید، روش بسیار خوبی است.

یک ردیف از صفرها را به همراه یک ردیف از اعدادی که خانه‌هایی را در وضعیت بازی ولتر اشغال کرده‌اند در زیرِ فضاهای بین صفرها بنویسید. اولین مثالی که به روش مجاورسازی انجام دادیم، حالا به‌صورت زیر است:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
۰ & & ۰ & & ۰ & & ۰ & & ۰ & & ۰ & & ۰ & & ۰ \\
& ۱ & & ۲ & & ۳ & & ۵ & & ۸ & & ۱۳ & & ۲۱ &
\end{array}
$$

حال با استفاده از قاعدهٔ زیر، الگو را بسط می‌دهیم:

قاعدهٔ لوزی

b

هر لوزی $d \quad a$ **باید**

c

در

$(a \overset{*}{+} d) = (b \overset{*}{+} c) + ۱$ **صدق کند.**

اولاً از قاعدهٔ لوزی به‌شکل زیر استفاده کنید:

$$c = ((a \overset{*}{+} d) - ۱) \overset{*}{+} b.$$

ترکیب کردن جمع نیم با تفاضل معمولی، می‌تواند کاملاً مکارانه باشد، بنابراین مراقب

باشید! اگر تمرین ۵۵ در بخش بازی ولتر را انجام داده‌اید، متوجه شده‌اید که نمی‌توان ترتیب عملیات را تغییر داد.

```
۰    ۰    ۰    ۰    ۰    ۰    ۰    ۰
  ۱    ۲    ۳    ۵    ۸   ۱۳   ۲۱
     ۲    ۰    ۵   ۱۲    ۴   ۲۳
        ۳    ۷   ۱۳   ۱۵   ۳۱
           ۳   ۱۲   ۱۳   ۱۱
              ۹   ۱۳   ۱۰
                ۱۵   ۱۱
                   ۱۴
```

شکل ۲۹ روش دیگری از محاسبهٔ تابع ولتر.

توجه کنید که اعضای پی در پی در یک ردیف همیشه متفاوت‌اند (نمی‌توانید ۲ سکه در یک خانه داشته باشید)، بنابراین جمع نیم $a \overset{*}{+} d$ همیشه مثبت است و وقتی منهای یک می‌کنید، هرگز عدد منفی به‌دست نمی‌آورید. اگر محاسبات را درست انجام دهید، مقدار نیم در انتهای مثلث ظاهر خواهد شد، یعنی عدد ۱۴ در شکل ۲۹.

تمرین ۵۸

محاسبهٔ $[۱ \mid ۲ \mid ۳ \mid ۵ \mid ۸ \mid ۱۳ \mid ۲۱]_{۷} = ۱۴$ را امتحان کنید. از همان روش برای تشخیص درستی $[۱ \mid ۴ \mid ۹ \mid ۱۶ \mid ۲۵ \mid ۳۶ \mid ۴۹ \mid ۶۴]_{۸} = ۱۱۲$ استفاده کنید.

چرا این الگو نواری نامیده می‌شود؟ زیرا می‌توانید آن را مانند نوار تزئینی با وارد کردن هر تعدادی که دوست دارید در ردیف پایینی، و متناوب چیدن آنها با ۱۴ که در آنجاست، به سمت بالا و راست کار کنید. مثلاً، در ردیف انتهایی، ۱۴ را با صفر به‌صورت متناوب قرار دهید، و از قاعدهٔ لوزی به شکل زیر استفاده کنید:

$$d = ((b \overset{*}{+} c) + ۱) \overset{*}{+} a$$

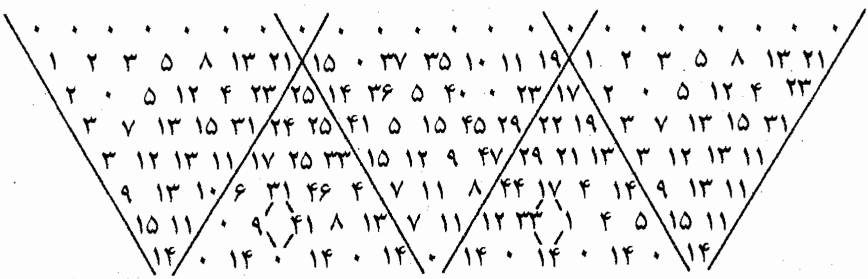
تا کنون، در جمع نیم کاملاً ورزیده شده‌اید و می‌دانید که اگر با اعدادی مثلاً کمتر از ۳۲ کار کنید، بدون توجه به اینکه چه تعداد جمع نیم انجام می‌دهید، جواب هرگز بزرگتر از ۳۱ نخواهد شد. اما این صورت جدید از قاعدهٔ لوزی، یک ۱+ معمولی دارد، و این مقدار گاهی اوقات محاسبات را به توان ۲ بعدی سوق می‌دهد. در انتهای شکل ۳۰، یک لوزی با $a = ۹$، $b = ۳۱$ و $c = ۰$ وجود دارد، بنابراین

$$d = ((۳۱ \overset{*}{+} ۰) + ۱) \overset{*}{+} ۹ = (۳۱ + ۱) \overset{*}{+} ۹ = ۳۲ \overset{*}{+} ۹ = ۴۱$$

هفت مکان جلوتر وقتی به لوزیی با $a = ۳۳$، $b = ۱۷$، $c = ۱۴$ و

$$\begin{aligned} d &= ((۱۷ \overset{*}{+} ۱۴) + ۱) \overset{*}{+} ۳۳ \\ &= (۳۱ + ۱) \overset{*}{+} ۳۳ \\ &= ۳۲ \overset{*}{+} ۳۳ \\ &= ۱ \end{aligned}$$

می‌رسیم، دوباره ۳۲ را گم می‌کنیم.



شکل ۳۰ روش نواری به‌کار رفته است!

دو موضوع جالب رخ داده است! هفت عدد در وضعیت اصلی وجود داشتند. بعد از ۲ قطر هفت‌تایی، همهٔ الگو تکرار می‌شود، به این دلیل است که الگو، نواری نامیده می‌شود. محاسبات زیادی را انجام داده‌ایم به‌طوری که مثلث شکل ۲۹) در سمت راست شکل ۳۰ تکرار شده است. می‌توانید موضوع قابل توجه دیگری را ببینید؛ اگر عدد جدید از ردیف بالا را در زیر هفت عدد اصلی در یک معادله بنویسید، آنگاه

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & ۸ & ۱۳ & ۲۱ \\ ۱۵ & ۰ & ۳۷ & ۳۵ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۹ \end{array}\right] = \begin{array}{c} ۱۴ \\ ۰ \end{array}$$

چطور این موضوع را توضیح می‌دهیم؟ می‌دانیم که می‌توانیم از ردیف بالایی بخوانیم:

$$[۱ \mid ۲ \mid ۳ \mid ۵ \mid ۸ \mid ۱۳ \mid ۲۱] = ۱۴$$

و اگر به مثلث وسط شکل ۲۹ نگاه کنید، می‌توانید ببینید که ردیف زیرین

$$[۱۵ \mid ۰ \mid ۳۷ \mid ۳۵ \mid ۱۰ \mid ۱۱ \mid ۱۹] = ۰$$

درست است. اما مطالب بیشتری وجود دارد!

قضیهٔ انتخاب جفت

> **در معادلهٔ**
>
> $$\left[\begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & \\ & & & \cdots \\ a' & b' & c' & \end{array}\right] = \begin{array}{c} n \\ n' \end{array}$$
>
> **هر تعداد جفتی از جفتهای**
>
> $(a, a'), (b, b'), \ldots, (n, n')$
>
> **قابل جابه‌جا شدن هستند.**

برای مثال

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & ۸ & ۱۱ & ۲۱ \\ ۱۵ & ۰ & ۳۷ & ۳۵ & ۱۰ & ۱۳ & ۱۹ \end{array}\right] = \begin{array}{c} ۰ \\ ۱۴ \end{array}$$

در حالتی هستند که زوجهای (۱۳, ۱۱) و (۰ ,۱۴) را جابجا کرده‌ایم. حالا ردیف بالایی به‌صورت زیر خوانده می‌شود:

$$[۱ \mid ۲ \mid ۳ \mid ۵ \mid ۸ \mid ۱۱ \mid ۲۱] = ۰$$

و این نشان می‌دهد که سکهٔ ۱۳ روی خانه ۱۱ یک حرکت مناسب است. همچنین ۲۱ روی ۱۹ و ۲ روی ۰ حرکتهای مناسبی هستند. همچنین اگر حرکت ۱ روی ۱۵ قانونی بود، می‌توانست حرکت مناسبی باشد، اما مجاز نیستید که به خانه‌ای با شمارهٔ بزرگتر حرکت کنید.

تمرین ۵۹

با استفاده از از روش مجاورسازی نشان دهید رابطهٔ $[۱ \mid ۴ \mid ۹ \mid ۱۶ \mid ۲۵]_۵ = ۲۹$ برقرار است. این مطلب را با ساختن یک الگوی نواری امتحان کنید، و همهٔ حرکات مناسب را در چنین وضعیتی در بازی ولتر بیابید.

تمرین ۶۰

توجه کنید که n' می‌تواند هر عدد دیگری، همچنین ۰، در قضیهٔ انتخاب جفت باشد. همهٔ حرکات از وضعیت موجود در تمرین ۵۹ را که مقادیر نیم را از ۲۹ به ۱۵ تغییر می‌دهد، بیابید.

پروژهٔ G

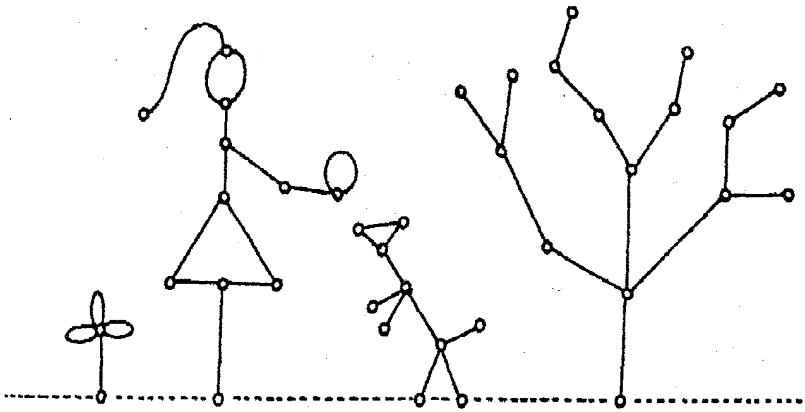
انواع دیگر قواعد لوزی را بیازمایید و الگوهای نواری دیگری را کشف کنید. برای مثال، با دو ردیف از ۱ها که با قطری از ۱ها به‌صورت زیگزاگ به یکدیگر وصل شده‌اند، شروع کنید، و از قاعدهٔ ضرب معمولی لوزی استفاده کنید، $ad = bc + ۱$. سپس ۱ها را با صفر جابه‌جا کنید و از یک قاعدهٔ جمع معمولی لوزی $(a + d) = (b + c) + ۱$ استفاده کنید. [مرجعهای [۹] و [۳۴] را مطالعه کنید.]

هرس کردن بوته‌های سبز

در این بخش بازی دیگری را معرفی می‌کنیم که در آن جمع نیم و جمع معمولی با هم تلفیق شده‌اند. طبق معمول جای زیادی برای دادن یک تئوری کامل نداریم. اما برای اینکه بتوانید بازی را خوب انجام دهید، به اندازهٔ کافی توضیح می‌دهیم. تغییرات انجام شده روی این قضیه توسط جان کانوی (John Conway) در صفحات ۱۷۲ـ۱۶۵ از بخش ۱۳ از [۸] و توسط الین برلکمپ (Elwyn Berlekamp) در صفحات ۱۹۰ـ ۱۸۳ در بخش ۷ از [۶] داده شده است؛ همچنین [۱۷] را نیز ببینید.

بازی **هرس کردن بوته‌ها** با یک تصویر انجام می‌گیرد. در طول بازی، قسمتهایی از تصویر ناپدید می‌شود، بنابراین فکر خوبی است که این بازی را روی یک تخته سیاه و با استفاده از یک تخته پاک‌کن، انجام دهید. تصویر یک **گراف** است یعنی مجموعه‌ای از نقاط یا **رأسها** که تعدادی از آنها توسط **یالهایی** به هم متصل شده‌اند. مجموعه‌ای از رأسها مانند a، b، c، ...، k، l یک **دور** تشکیل می‌دهند اگر یالهایی موجود باشند که هر جفت (a,b)، (b,c)، ...، (k,l) و (l,a) را به هم متصل کنند. گراف بدون دوری که هنوز همبند است (مسیری با استفاده از یالها از هر رأس به بقیه موجود است)، یک **درخت** نامیده می‌شود. بعضی از رأسها در تصویر **هرس کردن بوته‌ها** روی **زمین** (خط چینها در شکل ۳۱) قرار دارند. یک **حرکت** در بازی **هرس کردن بوته‌ها**، بریدن یک یال است. هر تعداد رأس و یال که به زمین متصل نباشند به‌طور همزمان ناپدید می‌شوند. برای مثال اگر شما بدن سگ را در شکل ۳۱ ببرید، پاهای جلو، گردن و سرش همگی ناپدید می‌شوند. طبق معمول، هدف این است که بازیکنی باشید که آخرین یال را می‌بُرد.

چطور مقدار نیم یک تصویر **هرس کردن بوته‌ها** را مانند تصویری که در شکل ۳۱ است، محاسبه کنیم؟ اول از همه توجه کنید که هرس کردن بوته‌ها اغلب **مجموعی** از مؤلفه‌های همبند است (گل، دختر، سگ و درختی که در شکل ۳۱ نشاند داده شده‌اند). بنابراین جواب، مجموع نیم مقادیر هر یک از مؤلفه‌ها خواهد بود. برای یافتن مقدار



شکل ۳۱ تصویری از هرس کردن بوته‌های سبز.

نیم یک مؤلفه، آن را با استفاده از اصل زیر به یک درخت تبدیل می‌کنیم:

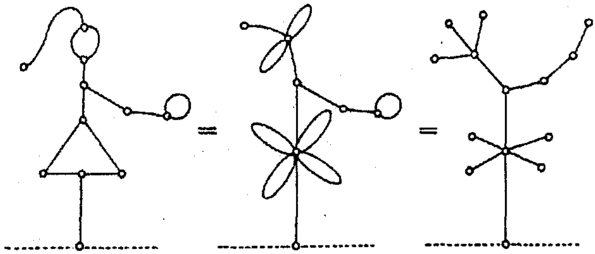
اصل جوش

می‌توانید همهٔ رأسها در یک دور را در یک تصویر هرس کردن بوته‌های سبز به هم جوش دهید بدون اینکه مقدار آنها تغییر کند.

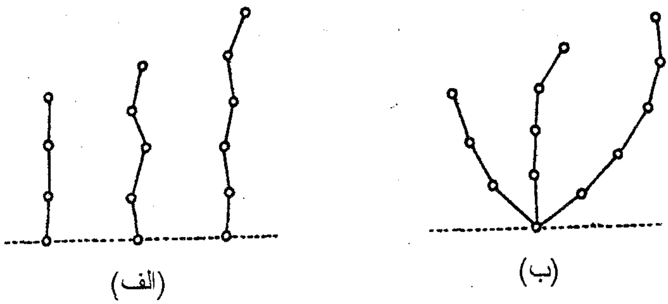
دو رأس را با آوردن آنها به یک رأسِ تنها جوش می‌دهید. اگر دو رأس توسط یک یال به هم متصل شده بودند، در این صورت این عمل تشکیل یک طوقه می‌دهد، که اثر یک ساقه را دارد (تا جایی که به حذف یالها مربوط می‌شود، یک طوقه و یک ساقه مانند هم هستند: هر دو را می‌توان بدون تأثیر گذاشتن روی بقیهٔ گراف حذف کرد).

شکل ۳۲ دختری از شکل ۳۱ را که به درخت تبدیل شده است، نشان می‌دهد. چهار رأس از دامن و دو رأس از سرش را به هم جوش دهید. سپس ۷ حلقه را به‌وسیلهٔ ساقه‌های درخت جایگزین کنید.

رأسها زمینی یک تصویر هرس کردن بوته‌ها می‌توانند به‌صورت یک رأس تنها نیز به هم جوش شوند، تشخیص اینکه، به‌طور مثال، تصویرها در شکل ۳۳(الف) و ۳۳(ب) هر دو معادل با بازی نیم با سه کپه به اندازه‌های ۳، ۴ و ۵ است، آسان است. مقدار نیم هر تصویر ۲ = ۵ $\overset{*}{+}$ ۴ $\overset{*}{+}$ ۳ است.

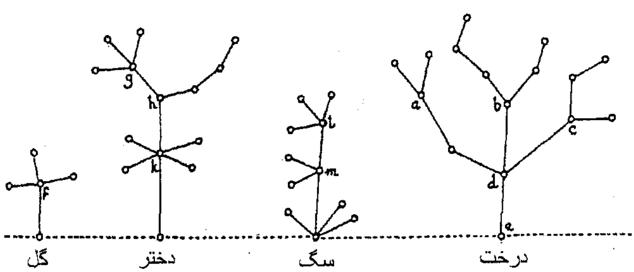


شکل ۳۲ دختر به درخت تبدیل می‌شود.



شکل ۳۳ تصاویر هرس کردن بوته‌های سبز معادل با همان بازی در نیم است.

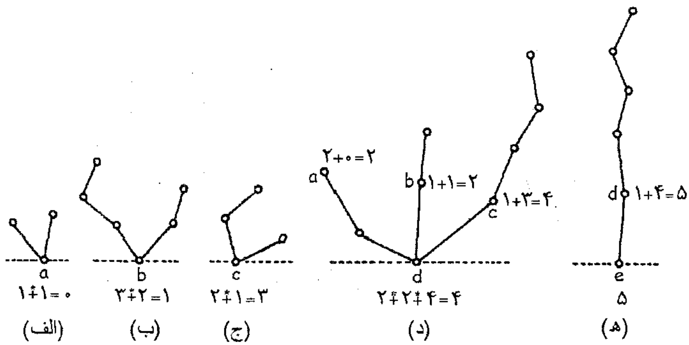
اصل جوش برای پاهای پشت سگ و سه رأس سرش به‌کار می‌رود، بنابراین شکل ۳۱ همان مقدار نیم شکل ۳۴ را دارد.



شکل ۳۴ تصاویر تبدیل شده.

اگر بدانیم که چگونه مقدار نیم یک درخت را بیابیم، بازی تمام شده است. محاسبهٔ مقادیر نیم درختهای خیلی سادهٔ شکل ۳۳(الف)، آسان است: مقادیر نیم آنها درست تعداد یالهای موجود در ساقهٔ اصلی درخت است. همچنین، زمانی که شاخه‌ها به هم متصل هستند، مانند شکل ۳۳(ب)، می‌توانیم جمع نیم روی آنها انجام دهیم. برای

کار کردن با درختهای پیچیده‌تر می‌توانیم از **اصل کالن** استفاده کنیم که، علاوه بر چیزهای دیگر، می‌گوید که جمع نیم را می‌توان هم در هوا، و هم در زمین انجام داد. برای مثال، درخت شکل ۳۱ را مانند شکل ۳۴، نامگذاری کنید، و مجموعه‌های نیم شکلهای ۳۵ (الف، ب و ج) را انجام دهید. سپس در شکل ۳۵ (د) شاخه‌های شکلهای (الف)، (ب) و (ج) را با مسیرهای به طول ۰، ۱ و ۳ جایگزین کنید. این عمل متناظر است با جمع معمولی ۰، ۱ و ۳ با شاخه‌های موجود به طولهای ۲، ۱ و ۱ از d به a، b و c. حالا در d جمع نیم این شاخه‌ها، ۰ + ۲، ۱ + ۱، ۳ + ۱، را داریم؛ و ۴ = ۴ $\overset{*}{+}$ ۲ $\overset{*}{+}$ ۲. بالاخره، به روش معمولی ۴ را به طول ۱ از e به d اضافه می‌کنیم، مقدار ۵ برای مقدار نیم درخت به‌دست می‌آید. (شکل ۳۵ (ه)).



شکل ۳۵ حاصل‌جمعهای نیم‌گونه و جمعهای معمولی در محاسبهٔ یک درخت.

تمرین ٦۱

مقادیر نیم گل، دختر و سگ شکل ۳۱ را بیابید (از شکلهای درختی شکل ۳۴ استفاده کنید). برای یافتن مقدار نیم کل تصویر، آنها را با مقدار نیم درخت، جمع نیم کنید. تنها حرکت خوب برای بازیکن اول را در شکل ۳۱ بیابید. [راهنمایی: تصمیم بگیرید که چه تغییری در مقدار نیم و در کدام مؤلفه می‌خواهید انجام دهید، سپس در شکل ۳۵، به‌صورت برعکس عمل کنید.]

دوری

گرچه قضیه اسپراگ- گراندی برای همهٔ بازیهای منصفانه به‌کار می‌رود، اما ممکن است در چنین بازیهایی به راحتی به‌کار نرود، زیرا فقط یک قضیه است و جنبهٔ عملی ندارد. در عمل، چیزهای مختلفی ممکن است پیش آید:

(الف) ممکن است مجموعها به‌طور طبیعی به‌دست نیایند، که در این‌صورت، اساسی‌ترین قسمت مهم قضیه کار نمی‌کند. برای مثال، بازی **اسپراتز** (پروژهٔ I) را درنظر بگیرید.

(ب) ممکن است محاسبهٔ مقادیر نیم دشوار باشد. برای مثال، بازی کِرَم را درنظر بگیرید.

(ج) حتی اگر مقادیر نیم قابل محاسبه باشند، ممکن است یافتن حرکتهایی که مقدار را به صفر تغییر می‌دهند، دشوار باشد.

(د) ممکن است مقادیر نیم هیچ الگوی آسان قابل شناختی ایجاد نکنند. برای مثال، بازی **گراندی** (صفحهٔ ۲۹) و بسیاری از بازیهای **هشت هشتی** (پروژهٔ D) را می‌توان نام برد.

روش دیگری که می‌تواند برای تحلیل بازیهای منصفانه به‌کار رود، سالها پیش در سال ۱۹۲۵ توسط هوگو استین‌هاوس [۴۰] داده شد. این روش محاسبهٔ چیزی است که سدریک اسمیت [۳۵] و [۳۶] آن را **دوری** یک وضعیت نامیده است. می‌توانید آن را به‌عنوان تعداد حرکتهایی در طول یک بازی درنظر بگیرید که در حالی که بازنده تلاش می‌کند حتی‌الامکان مغلوب نشود، برنده تلاش می‌کند که هر چه سریعتر ببرد.

در بازی معمولی، آخرین بازیکن برنده است، بنابراین وضعیتهای پایانی، **دوری صفر** دارند، و

$\mathcal{P}$- وضعیتها دوری زوج دارند.
$\mathcal{N}$- وضعیتها دوری فرد دارند.

تلاش می‌کنید که وضعیتهای با دوری زوج را، با کوچک کردن تا حد امکان یک دوری ترک کنید:

سریعاً می‌برید!

در زمان بازنده شدن، باید یک وضعیت از دوری فرد را، به‌طوری که آن را تا حد امکان بزرگ می‌کنید، ترک کنید:

به کندی می‌بازید!

دوری را می‌توانید از دوری‌های انتخابها محاسبه کنید:

دوری در بازی معمولی

اگر یک انتخاب از دوری زوج وجود دارد،
«کوچکترین زوج +۱»
در غیر این صورت، اگر همهٔ انتخابها دوری فرد دارند،
«بزرگترین فرد +۱»
و اگر انتخابی وجود ندارد،
«صفر»

تعدادی از دوری‌های وضعیتهایی در بازی سایمن نورت (Simon North) از آزمایش سخت را محاسبه خواهیم کرد. این بازی با یک کپهٔ حاوی لوبیا انجام می‌شود. یک حرکت، برداشتن یا اضافه کردن بزرگترین عدد مثلثی ممکن (...,۲۱ ,۱۵ ,۱۰ ,٦ ,۳ ,۱) از لوبیاها از کپه، یا اضافه کردن آن تعداد لوبیا به کپه است. به دلیل این انتخاب اضافی،آزمایش سخت در شرط پایانی صدق نمی‌کند. گرچه

به‌نظر می‌رسد (هر چند اطمینان نداریم) که از یک کپهٔ حاوی لوبیا به هر اندازه، همیشه یک برنده وجود دارد. معتقدیم که همهٔ اندازه‌های یک کپه یا $\mathcal{P}$- وضعیت و یا $\mathcal{N}$- وضعیت‌ها است!

اگر اندازهٔ کپه یک عدد مثلثی باشد، می‌توانید با برداشتن کل کپه فوراً ببرید، بنابراین دوری ۱ است. انتخابهای ۲ به‌صورت ۱ = ۱ − ۲ و ۳ = ۱ + ۲، هر دو عددهای مثلثی با **دوری** ۱ هستند. بنابراین یک کپهٔ ۲تایی، **دوری** ۲ دارد. کپهٔ ۴تایی انتخابهای ۱ = ۳ − ۴ (**دوری** ۱) و ۷ = ۳ + ۴ (**دوری** نامعلوم) را داراست. یک کپهٔ ۷تایی انتخابهای ۱ = ٦ − ۷ (**دوری** ۱) و ۱۳ = ٦ + ۷ (**دوری** نامعلوم) را داراست. یک کپهٔ ۱۳تایی انتخابهای ۳ = ۱۰ − ۱۳ (**دوری** ۱) و ۲۳ = ۱۰ + ۱۳ (**دوری** نامعلوم) را داراست. یک کپهٔ ۲۳تایی انتخابهای ۲ = ۲۱ − ۲۳ (**دوری** ۲) و ۴۴ = ۲۱ + ۲۳ ... داراست، آیا باید همچنان به محاسبه ادامه دهیم؟

$$\begin{tikzcd}
\text{۴} \arrow[r] \arrow[d] & \text{۷} \arrow[r] \arrow[d] & \text{۱۳} \arrow[r] \arrow[d] & \text{۲۳} \arrow[r] \arrow[d] & \text{۴۴} \arrow[r] \arrow[d] & \text{۸۰??} \\
\text{۱} & \text{۱} & \text{۳} & \text{۲} & \text{۸ ??} &
\end{tikzcd}$$

[دوری ۲] [دوری ۱] [دوری ۱] [دوری ۱]

شکل ۳٦ دوری ۴ در بازی آزمایش سخت چیست؟

...، لازم نیست بیشتر ادامه دهیم! **دوری** ۲۳ چیست؟ یکی بیشتر از کوچکترین، **دوری** زوج از یک انتخاب است. حالا انتخاب ۲ دارای یک **دوری** زوج از ۲ است، که اگر انتخاب دیگری نباشد، کوچکترین **دوری** زوج است. و این در حالی است که ۴۴ با دوری صفر دوری زوج از ۲ را ندارد. بنابراین $\text{rem}(۲۳) = ۱ + ۲ = ۳$. پس $\text{rem}(۱۳) = ۱ + \max(۱, ۳) = ۴$، و $\text{rem}(۷) = ۱ + ۴ = ۵$ و بالاخره $\text{rem}(۴) = ۱ + \max(۱, ۵) = ٦$ است.

تمرین ٦۲

دوری‌های آزمایش سخت را محاسبه کنید. اگر دوست دارید از یک برنامه کامپیوتری استفاده کنید. اولین اعداد به‌صورت زیر هستند:

n	= ۰	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
$\text{rem}(n)$	= ۰	۱	۲	۱	٦	۳	۱	۵	۳	۲	۱	۲	۳	۴	۳	۱

اولین $\mathcal{P}$- وضعیتهای این اعداد (با **دوری** زوج) به‌صورت زیر هستند:

۰, ۲, ۴, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۸, ۲۰, ۲۲, ۲۴, ۲٦, ...

هیچ الگویی نمی‌شناسیم. حتی نمی‌دانیم که آیا O- وضعیتهایی، **وضعیتهای باز**، که با بهترین بازی رسم شده است، وجود دارد. زیرا بازی در یک **دور** انجام می‌گیرد. برای مثال،

$$۴, ۷, ۱۳, ۲۳, ۴۴, ۸, ۱۴, ۴, ۷, ۱۳, \ldots$$

(اما اینها، همهٔ بهترین حرکتها نیستند). ممکن است کپه بزرگتر و بزرگتر شود و ....

پروژهٔ H

دوری را برای بازیهای مختلف محاسبه کنید. بازی **یک مربع بگذار یا بردار** (ریچارد اپستین (Richard Epstein)) مانند **آزمایش سخت** است، به‌جز اینکه اعداد مربعی (۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ...)، جایگزین اعداد مثلثی می‌شوند: بزرگترین عدد مربعی ممکن را از یک کپه برمی‌دارید، یا به آن اضافه می‌کنید. O- وضعیتهای زیادی وجود دارند؛ یعنی ۲، ۳، ۶، ۷، ۸، ۱۰، ... می‌توانید **دوری** بزرگتر از rem(۱۹۱۸) = ۱۴ بیابید؟

ساق پا (مایک گای (Mike Guy)) مانند دو بازی قبل است، جز اینکه، به‌جای کم کردن یا اضافه کردن اعداد مثلثی یا مربعی، **حرکت**، کم کردن (یا اضافه کردن) بزرگترین عدد فیبوناچی + یک (۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ...) است. ببینید می‌توانید تحلیل کامل این موضوع را بیابید. (کمی پیچیده‌تر است).

لوبیاها صحبت می‌کنند (جان ایزبل) [۲۲]، با یک عدد فرد بزرگتر از ۱ شروع می‌شود. اگر عدد n فرد است، به $۳n \pm ۱$ حرکت کنید (دو انتخاب)؛ اگر زوج است، به $\frac{n}{۲}$ حرکت کنید، (فقط یک انتخاب). هدف حرکت به ۱ است. مشخص نیست که آیا هیچ O- وضعیتی وجود دارد یا خیر.

لوبیاها صحبت نمی‌کنند (جان کانوی) [۲۲]، مانند بازی «**لوبیاها صحبت می‌کنند**» است ولی حرکت همیشه از n به $\frac{۳n\pm۱}{۲^*}$ (۲ انتخاب) است که ۲^* بزرگترین توان ۲ است که $۳n \pm ۱$ را می‌شمارد، یعنی عدد جاری همیشه فرد است. دوباره مشخص نیست که آیا هیچ O- وضعیتی وجود دارد یا خیر.

پروژهٔ I

اکنون که دستتان پر از تسلیحاتی برای تحلیل بازیهای منصفانه است، دوباره به پروژهٔ A برگردید. حتی ممکن است باز هم لازم باشد که هنوز با استفاده از **روشهای نیروی غیر منطقی**، همهٔ امکانات را بدون یافتن یک الگوی مشخص، جدول‌بندی کنید.

نیم نابرابری نیمی است که در آن اجازه ندارید ۲ کپه به یک اندازه داشته باشید. این قاعده برای کپه‌هایی با اندازهٔ صفر به‌کار نمی‌رود، بنابراین می‌توانید آن را به‌عنوان یک بازی **ولتر** در نظر بگیرید که در آن می‌توانید هر تعداد سکه روی خانهٔ ۰ داشته باشید، یا مانند بازی **ولتر** که در آن می‌توانید از نوار (که از ۱ شماره گذاری شده است) بپرید. نشان دهید که در نیم نابرابری ۳ـ سکه‌ای، (a, b, c) یک $\mathcal{P}$ـ وضعیت است در صورتی که $(a+1, b+1, c+1)$ یک $\mathcal{P}$ـ وضعیت در نیم باشد. برای یافتن $\mathcal{P}$ـ وضعیتهای ۴ـ سکه، احتمالاً نیاز به ساختن یک جدول دارید.

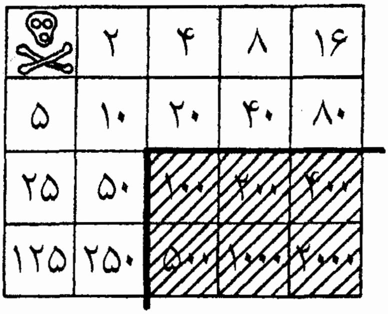
نیم برابری بازی **نیمی** است که در آن همه بسته‌های به یک اندازه، باید به یک صورت تغییر کنند. اگر یک بسته را به یک اندازهٔ داده شده، کاهش می‌دهید، باید همهٔ بسته‌های به آن اندازه را نیز به همان مقدار کاهش دهید. وقتی روی یک نوار بازی می‌کنید، یک حرکت، برداشتن همهٔ سکه‌های روی یک خانه و گذاشتن آنها روی یک خانهٔ نزدیکتر به ابتدای نوار است (که ممکن است قبلاً اشغال شده باشد یا نشده باشد). نشان دهید که نیم برابری اساساً شبیه نیم نابرابری است.

نیم مشابهی بازی **نیمی** است که در آن ممکن است هر تعداد حرکتی که بازیکن انجام می‌دهد، همگی مثل هم باشند. این بازی شبیه به بازی **نیم برابری** است به‌جز اینکه مجبور نیستید همهٔ کپه‌های یک اندازه را کاهش دهید، بلکه فقط تعدادی از آنها کافی است. با سکه‌های روی یک نوار، هر تعداد سکه را از یک خانه به خانهٔ نزدیکتر به ابتدای نوار (اشغال شده یا نشده) حرکت دهید. یک تحلیل کامل برای حداکثر ۴ کپه (سکه) وجود دارد، اما حقیقتاً پیچیده است.

نیم صبحگاهی (سی. آر. ماتیو (C. R. Matthews)). در این بازی هر یک از دو بازیکن با n لوبیا بازی را شروع می‌کنند، و متناوباً روی جدول (که در ابتدا خالی است) بازی می‌کنند، یا با یک کپهٔ جدید آغاز می‌کنند، یا یک لوبیا را به آخرین کپه‌ای که به کار رفته است اضافه می‌کنند. آخرین حرکت زمانی می‌برد که به یک $\mathcal{P}$ـ وضعیت در نیم خاتمه یابد.

جوانه‌ها (جان کانوی و میکائیل پترسون (John Conway & Michael Paterson) [[٦]، صفحات ٥٦۴ـ ٥٦٨.] با نقاطی روی یک صفحه بازی کنید. یک حرکت، متصل کردن دو نقطه، یا یک نقطه به خودش، با یک منحنی است که یک نقطه یا منحنی از قبل رسم شده را قطع نکرده باشد. وقتی یک منحنی جدید رسم می‌شود، یک نقطهٔ جدید باید در طول آن گذاشته شود. هیچ نقطه‌ای نمی‌تواند در محل تقاطع بیش از سه منحنی قرار گیرد. هدف، رسم آخرین منحنی است. در بازی معمولی نتیجهٔ بازی ۷ـ نقطه ناشناخته است. نتیجهٔ بازی ۵ـ نقطه در بازی **وارون** ناشناخته است.

گاز زدن. به‌ازای عدد ثابتی مانند N، بازیکنان به تناوب مقسوم‌علیه‌هایی از N را مشخص می‌کنند که ممکن است مضربی از مقسوم‌علیه‌های مشخص شدهٔ قبلی نباشد. کسی که ۱ را نامگذاری می‌کند، می‌بازد. اگر برای مثال، $N = ۲۰۰۰$، یک حرکت مثل خوردن یک مربع (برای مثال، مربع ۱۰۰) از یک بستهٔ شکلات در شکل ۳۷ بعلاوهٔ همهٔ مربعات زیر یا سمت راست آن است. مربع شمارهٔ ۱ سمی است! شکل



شکل ۳۷ گاز زدن یک بسته شکلات.

حسابی این بازی از فِرِد شو (Fred. Schuh) [۳۲] و شکل هندسی آن از دیوید گیل؛ [٦]، صفحات ۵۹۸- ۵۹۹ و [۲۴] است. اگر N، ۳ یا بیش از ۳ مقسوم‌علیه اول داشته باشد، گاز زدن را در سه یا بیش از سه بعد انجام می‌دهید!

پاسخ تمرینها

۱. اگر مجاز باشید که از روی نوار عبور کنید، «خارج از نوار» را بعنوان صفر بشمارید و خانه‌های روی نوار را ۱، ۲، ۳ و ... شماره‌گذاری کنید. اگر اجازهٔ عبور از نوار را ندارید خانه‌ها را با همان تأثیر به‌صورت ۰، ۱، ۲، ... شماره‌گذاری کنید. در هر یک از تمرینهای ٦، ۷، ۴۲ و ۴۴ تا ۵۴، روش «درست» شماره‌گذاری، توصیف قواعد را آسانتر می‌کند.

۲.

باید ستونهای شامل ۲، ۴ و ۸ را از فرد به زوج تغییر دهیم، تنها حرکتهای مناسب به‌صورت زیر هستند:	۲۳ = ۱٦ + + ۴ + ۲ + ۱ ۱۹ = ۱٦ + ۲ + ۱
برداشتن ۱۰ = ۲ − ۴ + ۸ از ۱۳ و باقی ماندن ۳، یا	۱۳ = ۸ + ۴ + + ۱
برداشتن ۱۰ = ۲ − ۴ + ۸ از ۱۲ و باقی ماندن ۲، یا	۱۲ = ۸ + ۴
برداشتن ٦ = ۲ + ۴ − ۸ از ۱۱ و باقی ماندن ۵.	۱۱ = ۸ + + ۲ + ۱

۳. جمع نیم تعویض‌پذیر و شرکت‌پذیر است، اما

$$(۳ \overset{*}{+} ۵) + ٦ = ٦ + ٦ = ۱۲ \neq ۸ = ۳ \overset{*}{+} ۱۱ = ۳ \overset{*}{+} (۵ + ٦).$$

۴. ۱٦ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۲۰؛ گذاشتن ۱٦ اسب در یک اصطبل، کار عجیبی[1] است. روشن است که $٦٦۵ \overset{*}{+} ۷۵ \overset{*}{+} ۷۲۳$ فرد است و بنابراین صفر نیست. نیازی به محاسبه نیست.

۵. $۴ = ۳ \overset{*}{+} ۴ \overset{*}{+} ۲ \overset{*}{+} ۰ \overset{*}{+} ۱$. با حرکت دادن سکهٔ سوم از سمت راست به‌طول چهار خانه به سمت چپ، فاصلهٔ چهارتایی را به صفر کاهش دهید.

[1] لغت «odd» هم به معنای فرد به‌کار می‌رود و هم به معنای عجیب.ـ م.

۶. همان‌طور که در شکل ۶، و با هاشور زدن روی یالهای نوار در شکل (۷)، نشان داده شد، فاصله‌ها را از سمت راست یکی در میان بشمارید. کیسهٔ پول را بشمارید، آن را خانهٔ ۰ شماره‌گذاری کنید و به‌عنوان قسمتی از فاصله‌ها در نظر بگیرید. بنابراین وضعیت، معادل با {۳، ۴، ۱} در نیم است. سکه‌ای را که درست در سمت راست سکهٔ نقره‌ای قرار دارد دو خانه حرکت دهید تا فاصله به دو خانه کاهش یابد؛ وضعیت معادل با {۳، ۲، ۱} در نیم ایجاد می‌شود که یک $\mathcal{P}$- وضعیت است. فاصله‌های متناظر با $\mathcal{P}$- وضعیت‌ها در نیم را نگه دارید، برای رسیدن به وضعیت {۱، ۰، ۱}، با سکه‌هایی که در ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ قرار گرفته‌اند که ۰، کیف پول و ۲، دلار نقره است. حالا رقیبتان ۶ به ۵ یا ۱ به ۰ (به سمت کیسهٔ پول) را بازی می‌کند. شما با حرکت دیگری پاسخ می‌دهید، ۱ به ۰ یا ۶ به ۵. حالات ۲، ۳، ۴، ۵ باقی می‌ماند (۲، سکهٔ نقره‌ای است). رقیبتان ۱، ۳، ۴، ۵ را بازی می‌کند؛ شما ۱، ۲، ۴، ۵، وی ۱، ۲، ۳، ۵؛ شما ۱، ۲، ۳، ۴ و او باید دلار را در کیف پول قرار دهد و شما آن را برمی‌دارید.

۷. مانند تمرین ۶، اما کیسهٔ پول را به‌عنوان بخشی از فاصله به‌حساب نیاورید. حالا وضعیت، معادل با {۲، ۴، ۱} در نیم است و شما همان سکه در تمرین ۶ را فقط یک خانه حرکت می‌دهید، حالت {۲، ۳، ۱} به‌دست می‌آید که می‌برد. شخصی را مجبور کنید که با شما این بازی را انجام دهد.

۸. تعداد خانه‌های میان مهره‌ها برابر با تعداد لوبیاها در کپهٔ نیم معادل است. بنابراین شکل ۹ با {۵، ۱، ۳، ۶، ۰، ۲، ۳، ۴} در نیم، معادل است. مجموع نیم ۴ است. بنابراین اولین بازیکن به‌وسیلهٔ بستن فاصله به‌طور کامل در سطر اول، یا کاهش فاصلهٔ سطر پنجم از ۶ به ۲، یا در سطر آخر از ۵ به ۱، می‌برد. پاسخ تمرین ۱۴ را نیز ببینید.

۹. تنها تفاوت در این است که بازی به مدت کوتاهی در شرط پایانی صدق می‌کند. اگر اولین نفر، فاصلهٔ سطر اول را پر کند، و این کار توسط مهرهٔ سیاه انجام گیرد، دیگر مهرهٔ سفید نمی‌تواند روی آن سطر حرکت کند. مگر اینکه مهرهٔ سیاه فاصله را افزایش دهد. اگر مجاز باشید مهره‌های هر دو رنگ را حرکت دهید، می‌توانید حرکات برگشت‌پذیر را به‌صورت نامتناهی انجام دهید.

۱۰. کپه‌های لاسکر ۱، ۲ و ۴ به ترتیب با کپه‌های نیم ۱، ۲ و ۳ متناظرند، و یک $\mathcal{P}$- وضعیت تشکیل می‌دهند. اگر رقیبتان یک لوبیا از کپهٔ حاوی ۴ لوبیا، بردارد، کپه‌های ۱، ۲ و ۳ باقی می‌مانند، که این متناظر با کپه‌های نیم ۱، ۲ و ۴ است.

برای برنده شدن، می‌خواهید که آن ۴ را به یک ۳ تغییر دهید. به تحلیل کپه‌های لاسکر ۳تایی رجوع کنید. یک حرکت تقسیم شده {۱, ۲} → ۳ وجود دارد، که وضعیتی معادل با ۳ = ۲ $\overset{*}{+}$ ۱ در نیم است. همچنین می‌توانید مشاهده کنید که این حرکت به‌وسیلهٔ اصل مشابه‌سازی می‌برد.

۱۱. انتخابهای از ۵ لوبیا، به‌صورت ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، {۱, ۴}، {۲, ۳} هستند، که مقادیر نیم آنها ۰، ۱، ۲، ۴، ۳، ۲ = ۳ $\overset{*}{+}$ ۱، ٦ = ۴ $\overset{*}{+}$ ۲ است، بنابراین کوچکترین مقدار ناموجود برابر با ۵ است. برای ٦ لوبیا، انتخابها ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، {۱, ۵} و {۲, ۴} و {۳, ۳} با مقادیر نیم ۰، ۱، ۲، ۴، ۳، ۵، ۴ = ۵ $\overset{*}{+}$ ۱، ۱ = ۳ $\overset{*}{+}$ ۲، ۰ = ۴ $\overset{*}{+}$ ۴ هستند و کوچکترین مقدار ناموجود ٦ است. ببینید می‌توانید با استقراء ثابت کنید که مقادیر نیم برای کپه‌های لاسکر، اگر کپه‌ها به‌صورت ۳−$۴k$ یا ۲−$۴k$ باشند، برابر با کپه‌های نیم هستند، اما اگر به شکل ۱ − $۴K$ یا $۴k$ باشند، تغییر می‌کنند؟ برای مثال مقادیر نیم کپه‌های لاسکر ۳ و ۴تایی، به ترتیب ۴ و ۳ هستند، و یک کپهٔ لاسکر ۵۹تایی دارای مقدار نیم ٦۰ است.

۱۲. مقدار نیم یک صفحهٔ ۸×۸ در بازی کِرَم صفر است، زیرا یک $\mathcal{P}$ـ وضعیت است. از رقیبتان بخواهید که ابتدا حرکت کند، و اصل مشابه‌سازی را با تکرار کردن حرکاتش به‌طور متقارن نسبت به مرکز صفحه، به‌کار برید. برای مثال، یک جواب مناسب به a۳، b۳ می‌تواند g٦، h٦ باشد. این روش برای هر صفحهٔ زوج در زوجی درست است، اما اولین بازیکن می‌تواند روی یک صفحهٔ فرد در زوج به‌وسیلهٔ اشغال کردن دو مربع مرکزی و سپس با استفاده از اصل مشابه‌سازی، برنده شود.

۱۳. اگر می‌خواهید یک بازیکن خوب کِرَم باشید، نیاز دارید که فرهنگی از شکلها و مقادیر نیم آنها همراه با مقادیر صعودی تعداد خانه‌ها ایجاد کنید. در (k)، پنج حرکت مختلف وجود دارد، که همگی به وضعیتهایی از مقدار نیم ۱ می‌رسند. بنابراین مقدار نیم (k)، صفر است. بقیه برای (l)، (m)، (n) و (o)، به ترتیب ۳، ۳، ۰ و ۰ هستند.

(بازی ۰۷ • کیلز داوّسون، تمرین (۳۵) را ببینید) ... ۳۱۱۰۳۳۲۲۴۰۵۲۲۳۳۰(p٦, ۷, ۸, ...)

مانند (p) ,...۰۳۱۱۰۳۳(q۴, ۵, ٦, ...)

مانند قبل ,...۲۰۳۱۱۰۳۳(r۴, ۵, ٦, ...)

دوباره ,...۰۳۱۱۰۳۳(s۴, ۵, ٦, ...)

دوباره ,...۳۱۱۰۳۳۲(t۴, ۵, ٦, ...)

$...\text{۳۱۲۰۰۱۲۲۳۳۵۱۴۳۳۲۲۱}$($u$۴, ۵, ۶, ...)، مقادیر نیم برای بازی کیلز داؤسون $\overset{*}{+}$ ۱، یعنی با ۱ جمع نیم شود. ۰۱۰۱۰۱(v۴, ۵, ۶, ...)، یکی از انواع مختلف، بازی **دوستم دارد، دوستم ندارد**، است.

۱۴. ما وضعیت جواب ۸ را تحلیل می‌کنیم. در سطر چهارم مهرهٔ سیاه می‌تواند یک فاصلهٔ ۴ خانه‌ای، برای درست کردن یک $\mathcal{P}$ـ وضعیت باز کند، در صورتی که مهرهٔ سفید نمی‌تواند.

۱۵. تناوب متناهی برای بازی **کیلز** شامل دوازده عدد فرد ۴۱۲۸۱۴۷۲۱۸۲۷، برای ردیفهای شامل n پین، $n = \text{۰}, \text{۱}, \text{۲}, \ldots \text{۱۱}$، به پیمانهٔ ۱۲ هستند. این الگو با چهارده مقدار استثنایی: $\mathcal{G}(\text{۰}) = \text{۰}$؛ $\mathcal{G}(n) = \text{۳}$ برای $n = \text{۳}, \text{۶}, \text{۱۸}, \text{۳۹}$؛ $\mathcal{G}(n) = \text{۴}$؛ برای $n = \text{۹}, \text{۲۱}, \text{۵۷}$؛ $\mathcal{G}(\text{۲۸}) = \text{۵}$؛ $\mathcal{G}(n) = \text{۶}$ برای $n = \text{۱۱}, \text{۲۲}, \text{۳۴}, \text{۷۰}$؛ $\mathcal{G}(\text{۱۵}) = \text{۷}$ پوشانده می‌شود.

۱۶. این بازی صورت دیگری از بازی **کیلز** است. بعد از یک حرکت در یک قطعه از رشته‌ای به طول $n + x$ سانتیمتر، $\text{۰} \le x < \text{۱}$، دو تکه رشته به طولهای $n_\text{۱} + x_\text{۱}$ و $n_\text{۲} + x_\text{۲}$ دارید، به‌طوری که $x_\text{۱} + x_\text{۲} = x$ و $n_\text{۱} + n_\text{۲} = n - \text{۱}$ یا $x_\text{۱} + x_\text{۲} = \text{۱} + x$ و $n_\text{۱} + n_\text{۲} = n - \text{۲}$ که با انداختن ۱، یا ۲ پین مجاور، از یک ردیف nتایی معادل است.

۱۷. مقادیر نیم کپه‌های **گراندی** از اندازهٔ ۰ تا ۵۰ به‌صورت زیر هستند:

۰ ۰۰۱۰۲۱۰۲۱۰ ۲۱۳۲۱۳۲۴۳۰ ۴۳۰۴۳۰۴۱۲۳ ۱۲۴۱۲۴۱۲۴۱ ۵۴۱۵۴۱۵۴۱۰

مایک گای (Mike Guy)، ۱۰ میلیون مقدار را محاسبه کرده است، اما یک الگوی قابل تشخیص دور از دسترس باقی مانده است، احتمالاً تنها $\mathcal{P}$ـ وضعیتها برای

$$n = \text{۰}, \text{۱}, \text{۲}, \text{۴}, \text{۷}, \text{۱۰}, \text{۲۰}, \text{۲۳}, \text{۲۶}, \text{۵۰}, \text{۵۳}, \text{۲۷۰}, \text{۲۷۳}, \text{۲۷۶}, \text{۲۸۲}, \text{۲۸۵},$$
$$\text{۲۸۸}, \text{۳۱۶}, \text{۳۳۴}, \text{۳۳۷}, \text{۳۴۰}, \text{۳۴۶}, \text{۳۵۹}, \text{۳۶۲}, \text{۳۶۵}, \text{۳۸۶}, \text{۳۸۹}, \text{۳۹۲}, \text{۵۶۶},$$
$$\text{۶۳۰}, \text{۶۳۳}, \text{۶۳۶}, \text{۶۳۹}, \text{۶۷۳}, \text{۶۷۶}, \text{۶۸۲}, \text{۶۸۵}, \text{۹۲۳}, \text{۹۲۶}, \text{۹۲۹}, \text{۹۳۲} \& \text{۱۲۲۲}$$

است که در کل ۴۲ تاست.

۱۸. آخرین مقدار استثنایی برای بازی **کیلز** $\mathcal{G}(\text{۷۰}) = \text{۶}$ است. دورهٔ تناوب ۱۲ است، و حداکثر ۲ پین در هر حرکت انداخته می‌شود. بنابراین، اگر $\mathcal{G}(n+\text{۱۲}) = \mathcal{G}(n)$ برای هر n در بازهٔ $\text{۷۰} < n \le (\text{۲}x\text{۷۰}) + \text{۱۲} + \text{۲} = \text{۱۵۴}$، آنگاه به‌وسیلهٔ نظریه‌ای که در بخش بازیهای تفاضلی بیان شد، بازی **کیلز** (نهایتاً) متناوب است. آخرین مقدار نیم که باید محاسبه کنید $\mathcal{G}(\text{۱۶۶}) = \text{۲}$ است.

۱۹. اگر n لوبیا در کپه باشد، این بازی هر طور که انجام شود، دقیقاً $n - 1$ حرکت دارد؛ این بازی یکی دیگر از صورتهای بازی **دوستم دارد، دوستم ندارد** [۲۱]، با دنبالهٔ **نیم** ... ۰۱۰۱۰۱۰ است.

۲۰. اگر بازی را با n رشته، با $2n$ انتها، شروع کنید، در هر حرکت، دو انتها به هم گره می‌خورند و بنابراین n حرکت وجود خواهد داشت. درست مانند تمرین ۱۹، به‌جز اینکه زوجیت برعکس است و نام بازی از همین ناشی شده است. اگر با ۱۳ رشته شروع کنید، اولین بازیکن به‌طور خودکار، آخرین بازیکن و برنده خواهد بود، مگر بازی **وارون** انجام دهید.

۲۱. دوباره، اگر با n لوبیا شروع کنید، با هر آرایشی و هر گونه‌ای از بازی، دقیقاً n حرکت وجود دارد.

۲۲. هنوز هم، بازی **دوستم دارد، دوستم ندارد** است. زوجیت مجموع تعداد لوبیاها در بازی در هر حرکت تغییر می‌کند. با دوستانتان بازی کنید و به آنها اجازه دهید که اندازه‌های کپه‌ها را انتخاب کنند و یا شروع کنندهٔ بازی باشند، اما اجازهٔ هر دو کار را به آنها ندهید.

۲۳. تعداد بازوی موجود در **کلم بروکسلی** ثابت باقی می‌ماند، زیرا تا زمانی تعداد نواحی افزایش می‌یابد که در هر ناحیه درست یک بازو موجود باشد. در این صورت بازی **کلم بروکسلی** حتماً در شرط پایانی صدق می‌کند.

۲۴. تفاوتی نمی‌کند: جوابهای تمرینهای ۲۵ و ۲٦ را ببینید. اولین بازیکن می‌برد.

۲۵. دومین بازیکن می‌برد و «بهترین حرکت ممکن» وجود ندارد! جواب تمرین ۲٦ را ببینید.

۲٦. اگر با n ضربدر شروع کنیم، $4n$ بازو موجود است. همان‌طور که در جواب تمرین ۲۳ دیدیم، بازی زمانی دقیقاً خاتمه می‌یابد که یک بازو در هر یک از $4n$ ناحیه موجود باشد. هر حرکت یک ضربدر و دو یال اضافه می‌کند، بنابراین بعد از m حرکت، $m + n$ ضربدر و $2m$ یال داریم. فرمول اویلر به ما می‌گوید که $E + 2 = V + F$، که E تعداد یالها و V تعداد ضربدرها، و F تعداد ناحیه‌ها است. بنابراین زمانی که $2m + 2 = (m + n) + 4n$، $m = 5n - 2$، $4n$ ناحیه به‌دست می‌آید، و بسته به اینکه تعداد اولیه ضربدرها فرد یا زوج باشد اولین یا دومین بازیکن می‌برد و فرقی نمی‌کند که آنها چگونه بازی می‌کنند. یک صورت زیرکانه دیگر از بازی **دوستم دارد، دوستم ندارد** است.

۲۷. طول یک رشته با n گره به دو طول با یک مجموع n یا $n - ۱$ گره، می‌تواند بریده شود یا باز شود. این یک نمایش واضح از بازی **هشت هشتی** با کد گای- اسمیت ۴۰۷ است. دنبالهٔ نیم ...۰۱۲۱۲۱۲ است و می‌خواهید که اولین بازیکن باشید. اما از سوی دیگر، یک رشته حلقه‌ای با n گره می‌تواند بریده شود، یا باز شود، یک رشته با n یا $n - ۱$ گره باقی می‌ماند. بنابراین، در صورتی که $n = ۱$، از رقیبتان دعوت کنید که ابتدا حرکت کند! دنبالهٔ نیم، با شروع از حالت $n = ۱$، به‌صورت ...۲۰۰۰۰۰۰ است.

۲۸. با توجه به قضیهٔ بازیهای تفاضلی، چون $e = ۰$ (هیچ مقدار استثنایی موجود نیست) و $c = ۷$ (حداکثر ۷ لوبیا را می‌توان برداشت) و دورهٔ تناوب، $p = ۲۲$، نتیجهٔ $\mathcal{G}(n + p) = \mathcal{G}(n)$ برای $۰ < n \leq ۲۲ + ۷$ اثبات خواهد شد. بنابراین فقط نیاز دارید که تا $\mathcal{G}(۵۱) = ۳$ محاسبه کنید.

۲۹. ...۰۱۲۳۰۱۲۳۰۱۲۳

۳۰. $۰۱۲۳\ldots k۰۱۲\ldots k۰۱۲\ldots k۰۱۲\ldots$

۳۱. به‌ازای $p = ۳$، $e = ۷$ و $c = ۷$ داریم: ... ۱۰۲ ۱۰۲ ۱۰۲ ۰۰۱۱۲۲۰۳، تا $\mathcal{G}(۲۷) = ۰$ را امتحان کنید.

۳۲. فرض کنید که n کمترین عدد برای خاصیت تزویج فِرگوسنی (جملهٔ کادربندی شده در بخش بازیهای تفاضلی) است که برقرار نمی‌باشد. بنابراین داریم:

$$\mathcal{G}(n) = ۱ \text{ و } \mathcal{G}(n - s_۱) \neq ۰ \quad \text{یا} \quad \mathcal{G}(n - s_۱) = ۰ \text{ و } \mathcal{G}(n) \neq ۱$$

جملات بالا به ترتیب نشان می‌دهند که

$$\text{برای تعدادی } s_k\text{، } \mathcal{G}(n - s_k) = ۱ \quad \text{یا} \quad \text{برای تعدادی } s_k\text{، } \mathcal{G}(n - s_۱ - s_k) = ۰$$

که به استقرا

$$\mathcal{G}(n - s_k) = ۱ \quad \text{یا} \quad \mathcal{G}(n - s_k - s_۱) = ۰$$

۱ که نشان می‌دهد

$$\mathcal{G}(n) \neq ۱ \quad \text{یا} \quad \mathcal{G}(n - s_۱) \neq ۰$$

در هر دو حالت به تناقض می‌رسیم.

۳۳. بازی کیلز، ۰۱۵•: اگر فقط ۱ لوبیا موجود است، آن را بردارید: اگر یک کپه محتوی ۲ لوبیا یا دست‌کم ۴ لوبیاست، دو لوبیا بردارید، و باقی کپه را به دو کپهٔ ناتهی تقسیم کنید. اگر یک ردیف فقط شامل ۱ مهره است، آن را بردارید. اگر یک ردیف شامل ۲ مهره است، آنها را بردارید، برای ردیفی شامل تعدادی مهره می‌توان دو مهرهٔ مجاور را از میان مهره‌ها برداشت.

۰۵۳•: اگر یک کپه محتوی ۱، ۳ یا بیشتر از ۳ لوبیاست، ۱ لوبیا بردارید و باقی کپه را به دو کپهٔ ناتهی تقسیم کنید: از هر کپه ۲ لوبیا بردارید. از یک ردیف شامل ۱ مهره یا بیشتر، یک مهره بردارید: از انتهای یک ردیف ۲ مهرهٔ مجاور را بردارید.

$\dot{\ddot{۳}}$۰ •: تعداد فردی لوبیا از یک کپه بردارید. از انتهای یک ردیف از مهره‌ها، تعدادی فرد مهره بردارید.

۳۴. مقادیر نیم برای شطرنج داؤسون روی یک صفحهٔ $۳ \times n$ به‌صورت زیر هستند:

۸۱۱۲۰۳۱۱۰۳۳۲۲۴۴۵۵۹۳۳۰۱۱۳۰۲۱۱۰۴۵۳۷۴

برای $n = ۰, ۱, \ldots, ۳۳$، به پیمانهٔ ۳۴، به‌جز برای هفت مقدار استثنایی $\mathcal{G}(n) = ۰$ برای $n = ۰, ۱۴, ۳۴$؛ و $\mathcal{G}(n) = ۲$ برای $n = ۱۶, ۱۷, ۳۱, ۵۱$. تا $\mathcal{G}(۱۷۳) = ۲$ را محاسبه کنید.

۳۵. دنبالهٔ نیم ...۰۰۱۱۲۰۳۱۱۰۳ برای شطرنج داؤسون نیز هست، اما با یک صفر اضافی در ابتدا: بنابراین نام آن کیلز داؤسون است.

۳۶. دنباله نیم برای ۴• مانند جواب تمرین ۳۵ است، اما این بار با یک صفر آغازین دیگر، به‌صورت ...۰۰۰۱۱۲۰۳۱۱۰۳ است. می‌بینید که

	$\mathcal{G}(n)$	$\mathcal{G}(n+۱)$	$\mathcal{G}(n+۲)$
برای بازیهای متناظر یکسان هستند	•۱۳۷	•۰۷	•۴
توجه کنید که انتخابها، برداشتن	۳ لوبیا	۲ لوبیا	۱ لوبیا
و تقسیم کردن باقیماندهٔ	$n-۳$	$n-۱$	$n+۱$
لوبیاها به دو کپهٔ	a, b،	$a+۱$، $b+۱$	$a+۲$ $b+۲$

است که در هر حالت داریم: $a + b = n - ۳$. چندین مقدار اولیه را در هر حالت امتحان کنید.

۳۷. دنباله‌های نیم برای ۰۱۷• و ۰۰۷• (کیلز داؤسون) در وضعیتهای زوج- رتبه یکی هستند، و یک تفاضل نیم (همان‌طور که مجموع نیم دارد!) از ۱ در وضعیتهای فرد- رتبه دارد. هر دو، دورهٔ تناوب ۳۴ دارند. با جواب تمرین (u)۱۳ نیز مقایسه کنید.

۳۸. دنباله‌های نیم برای کیلز دوتایی (۰۰۷۷•) و کیلز سه‌تایی (۰۰۰۷۷•) مشابه با دنبالهٔ نیم برای کیلز هستند، اما هر مقدار دو برابر یا سه برابر شده است:

$$۰۰۱۱۲۲۳۳۱۱۴۴۳۳۲۲۱۱۴۴۲۲۶۶۴۴۱۱۲۲\ldots$$

و

$$۰۰۰۱۱۱۲۲۲۳۳۳۱۱۱۴۴۴۳۳۳۲۲۲۱۱۱۴۴۴\ldots$$

و با دورهٔ تناوب متناهی ۲۴ و ۳۶. بازی ۰۱۷۷•، کیلز $\frac{۵}{۳}$تایی نامیده می‌شود زیرا $\frac{۲}{۳}$ مقادیر کیلز دو برابر شده‌اند و $\frac{۱}{۳}$ از آنها نشده‌اند [۱۸]:

$$۰۱۱۲۲۳۱۱۴۴۳۲۲۱۱۴۲۲۶۴۴۱۱۲۲۷۱۱۴۴۳۲۲۱۱۴۸\ldots$$

با دورهٔ تناوب ۲۰، اما مقادیر استثنایی زیادی وجود دارد که آخرینشان $\mathcal{G}(۴۹۷) = ۸$ است. کیلز دو برابر (۰۷۷۷۷•) دنبالهٔ نیم مشابه با کیلز دارد، اما هر مقدار کیلز، g، به‌وسیله جفت $۲g$، $۲g + ۱$، یا جفت $۲g + ۱$، $۲g$ جایگزین می‌شود. به‌همین ترتیب، در کیلز چهارتایی g با $۴g$، $۴g + ۱$، $۴g + ۲$، $۴g + ۳$، یا در ترتیب عکس، جایگزین می‌شود، [٦]، صفحهٔ ۹۸ را برای توضیح جزئیات بیشتر ببینید.

۳۹. این پروژه کامپیوتری است. بعضی از جزئیات مسأله در [[۲۰]، [۲۱]، [۳] و صفحهٔ ۱۰۸ از [٦]] داده شده است.

۴۰. اگر تا $\mathcal{G}(۱۱۱) = ۴$ محاسبه کنید، چون $p = ۱۸$، $e = ۳٦$، $c = ۳$، جزئیات مشخص می‌شوند.

۴۱. نشان دادن این مطلب نیازمند اطلاعات کافی در مورد قضیه و کار بسیار زیاد در این مورد است. [۸]، صفحات ۱۴۵ـ ۱۴۲، یا [٦] صفحات ۴۰۱ـ ۳۹۹ و ۴۲۱ـ ۴۱۸ را ببینید. آلمانگ [۲] این رویه را مکانیزه کرده است و یک $\mathcal{P}$ـ وضعیت تک کپه‌ای جدید در گراندی وارون یافته است: یک کپهٔ ۹۴تایی که ممکن است آخرین وضعیت از این نوع باشد؛ البته دقیقاً مطمئن نیستیم.

۴۲. سه نوع حرکت در بازی لاک‌پشت برگردان وجود دارند:

(الف) لاک‌پشت nام را به پشت برگردانید: این حرکت معادل است با برداشتن کل کپهٔ محتوی n لوبیا.

(ب) لاک‌پشت nام را به پشت برگردانید، و لاک‌پشت mام $(m < n)$ را از پشت به روی پایش برگردانید: این اعمال معادل است با برداشتن $n - m$ لوبیا از کپهٔ nتایی.

(ج) لاک‌پشت‌های nام و mام را به پشت برگردانید: این عمل اساساً معادل است با برداشتن کل دو کپه به اندازه‌های n و m، اما این عمل مثل کاهش دادن کپه‌ای nتایی به کپهٔ mتایی است. به دلیل اصل مشابه‌سازی، یا چون $m \overset{*}{+} m = \circ$، لزومی ندارد که دو کپهٔ مساوی در بازی نیم روی نتیجه اثری بگذارد.

۴۳. مجموع نیم در شکل ۲۴ برابر با ۳ است. بنابراین حرکات مناسب می‌تواند، فقط برگرداندن لاک‌پشت ۳ به پشت؛ یا برگرداندن لاک‌پشت ۱۰ به پشت و آوردن لاک‌پشت ۹ به روی پایش؛ یا برگرداندن لاک‌پشت ٦ به پشت یا آوردن لاک‌پشت ۵ به روی پایش باشد.

۴۴. $G(n) = ۲n$ یا $۲n + ۱$، هرکدام که تعداد فردی رقم ۱ در نمایش دودویی دارد: (یعنی هرکدام که فرد است). n را به‌صورت دودویی بنویسید و برای فرد شدن تعداد ۱ها، یک ∘ یا یک ۱ به آن اضافه کنید.

۴۵. مقدار نیم سکه‌ای در حالت شیر در وضعیت n در بازی **ماتلی**، ۲^n $(n=\circ, ۱, ۲, \ldots)$ است. این حالتِ برد بازیکن اول است: همهٔ شیرها را به خط برگردانید! اما اگر با مجموعی از چند ردیف بازی می‌کنید، این یک صورت خیلی خوب دیگر برای بازی نیم است: ردیفها، کپه‌ها هستند؛ اندازهٔ آنها به‌صورت دودویی (از راست به چپ!) می‌تواند خوانده شود، شیرها ارقام ۱ هستند، خط‌ها ارقام ∘ هستند.

۴۶. بله، این بار بهتر است که از ∘ شروع به شمردن کنید، یعنی به لاک‌پشت پیشرو اجازهٔ ملحق شدن دهید. سپس، وقتی می‌خواهید یک حرکت در بازی « **لاک‌پشت برگردان**» انجام دهید به‌طوری که فقط یک لاک‌پشت برگردانده شود، و مجبورید لاک‌پشت دیگری را نیز برگردانید، فقط لاک‌پشت پیشرو، با مقدار نیم صفر، را که اثر دیگری روی بازی ندارد، برگردانید. اگر لاک‌پشت پیشرو تنها لاک‌پشتی باشد که بر روی پایش قرار دارد، بازی تمام است، چون باید دو لاک‌پشت را برگردانید. مقادیر نیم ...∘۱۲۳۴۵ هستند.

۴۷. به همین طریق، بازی **سه‌قلوها** مانند بازی **لاک‌پشت پیشرو** است، اما به دو لاک‌پشت پیشرو دیگر در سمت چپ، هر یک با مقدار نیم صفر، نیازمندید، تا وضعیتی که فقط می‌خواهید ۱ یا ۲ سکه را به‌جای ۳ سکه برگردانید ایجاد شود. لاک‌پشت پیشرو واقعی مقدار نیم ۱ دارد، و بقیهٔ لاک‌پشتها مقادیر نیم فردی دارند: دنبالهٔ نیم ...∘∘۱۲۴۷۸ است.

۴۸. اگر حرکت، برگرداندن دقیقاً t سکه باشد، مقادیر نیم درست شبیه به مقادیر نیم در بازیی است که در آن می‌توانید ۱، ۲، ...، t سکه را برگردانید، جز اینکه برای $t - ۱$

لاک‌پشت پیشرو اضافی که لازم است یدک کشیده شوند، $t-۱$ صفر در ابتدای دنباله است.

۴۹. مقدار نیم در بازی **خط‌کش** برای یک شیرِ تنها در وضعیت n،

$$\mathcal{G}(n) = \text{mex}\{۰, \mathcal{G}(n-۱), \mathcal{G}(n-۱) \overset{*}{+} \mathcal{G}(n-۲), \overset{*}{+} \mathcal{G}(n-۱)\mathcal{G}(n-۲) \overset{*}{+} \mathcal{G}(n-۳), \ldots\}$$

است. دنباله نیم (شمردن از وضعیت ۱) ... ۱۲۱۴۱۲۱۸۱۲ است، یعنی ۲^* که $n \parallel ۲^*$ (بزرگترین توان ۲ که بر n بخش‌پذیر است).

۵۰. دنبالهٔ نیم برای لاک‌پشت پیشرو پنج‌تایی به‌سادگی دیده می‌شود

۱۲۴۷۸۱۲۴۷۸۱۲۴۷۸...

و برای سه‌تایی از هفت‌تایی، ... ۰۰۱۲۴۷۸۰۰۱۲۴۷۸۰۰۱ است. دورهٔ تناوب چنین بازیی همان چیزی است که توقع دارید، جز اینکه **خط‌کش** چهارتایی، پنج‌تایی، شش‌تایی و هفت‌تایی همگی تناوب ۴ دارند: ... ۱۲۱۴۱۲۱۴۱۲۱۴، در حالی که خط‌کش هشت‌تایی، نه‌تایی، ...، پانزده‌تایی همگی تناوب هشت دارند:

۱۲۱۴۱۲۱۸۱۲۱۴۱۲۱۸۱۲۱۴۱۲۱۲۸...

۵۱. $۱۱۰۱۱_۳ = ۱۱۲$، رقم ۲ ندارد؛ $۲۱۰۱۲_۳ = ۱۹۴$ آخرین ۲ سمت راست را در همین مکان دارد، و اولین عدد فردی، ۱ است؛ $۱۲۲۲۱_۳ = ۱۶۰$ آخرین ۲ سمت راست خود را در مکان دوم از سمت راست دارد، و دومین عدد فردی، ۲ است، $۱۰۲۱۰_۳ = ۱۰۲$ آخرین ۲ سمت راست خود را در مکان سوم از سمت راست دارد، و سومین عدد فردی، ۴ است؛ $۱۲۱۱۱_۳ = ۱۴۸$ آخرین ۲ سمت راست خود را در مکان چهارم از سمت راست دارد، و چهارمین عدد فردی، ۷ است؛ $۳k+۲ = \ldots\ldots۲_۳$، بنابراین $\mathcal{G}(۳k+۲) = ۱$؛ $۹k+۷ = \ldots۲۱_۳$، بنابراین $\mathcal{G}(۹k+۷) = ۲$؛ $۲۷k+۲۱ = \ldots۲۱۰_۳$، بنابراین $\mathcal{G}(۲۷k+۲۱) = ۴$. در [۶] صفحات ۴۳۸ تا ۴۴۰ را برای نتیجهٔ کلی برای **شلغم** ببینید.

۵۲. سکه‌ها را از صفر شماره‌گذاری کنید، یک حرکت مشخص در بازی **خوکی** برگرداندن سکه‌های ۰، a، $n-a$ و n، برای $۰ < a < \frac{۱}{۲}n$، است. بنابراین

$$\mathcal{G}(n) = \text{mex}\{\mathcal{G}(a) \overset{*}{+} \mathcal{G}(n-a)\}$$

که مانند کپهٔ **گراندی** با n لوبیاست. توجه کنید که بسته‌های a و $n-a$ برابر نیستند.

۵۳. تحلیل **تقارن ساده شده** به‌راستی ساده‌تر است. چون آخرین سکهٔ سمت چپ در هر حرکت برمی‌گردد، سرانجام بسته به اینکه آخرین سکهٔ سمت چپ، شیر یا خط باشد

اولین بازیکن یا دومین بازیکن بازی را می‌برد: سکه‌های دیگر روی نتیجه اثری ندارند و دنبالهٔ نیم ...۱۰۰۰۰۰ است.

۵۴. $\mathcal{P}$- وضعیتها در ۲- سکه در بازی ولتر دقیقاً حالتهایی هستند که سکه‌ها روی $۲k$ و $۲k + ۱$ قرار دارند؛ چون $k = ۰$ حالت پایانی است و هر حرکتی از $۲k$ (متناظراً $۲k + ۱$) با $k > ۰$ به $۲m$ یا $۲m + ۱$ با $m < k$ می‌تواند به‌وسیله یک حرکت از $۲k + ۱$ (متناظراً $۲k$) به $۲m + ۱$ یا $۲m$ پاسخ داده شود. به‌علاوه $(۲k \overset{*}{+} (۲k + ۱)) - ۱ = ۰$ و $(a \overset{*}{+} b) - ۱ = ۰$ نشان می‌دهد که $a \overset{*}{+} b = ۱$، به‌طوری که a و b در ترتیبهایی $۲k$ و $۲k + ۱$ هستند. بقیهٔ وضعیتها، $\mathcal{N}$- وضعیتها هستند. برای مثال، آنها که با مقدار نیم ۱، $a \overset{*}{+} b = ۲$ دقیقاً a و bهایی مساوی $۴k$، $۴k + ۲$ یا $۴k + ۱$، $۴k + ۳$ هستند. از میان اینها می‌توانید به $\mathcal{P}$- وضعیت $۴k$، $۴k + ۱$ حرکت کنید، اما نه به هر وضعیتی از مقدار نیم ۱. بقیهٔ وضعیتها، مقدار نیم حداقل ۲ دارند، و حرکتهای یکتایی به $\mathcal{P}$- وضعیت یا به وضعیتهای از مقدار نیم ۱ وجود دارند.

۵۵. اگر a فرد باشد، $۲k + ۱$ قرار دهید، و اگر b زوج باشد، $۲l$ قرار دهید، پس $(a - ۱) \overset{*}{+} b = ۲k \overset{*}{+} ۲l$ و $(a \overset{*}{+} b) - ۱ = ۲k \overset{*}{+} ۲l + ۱ - ۱$ مساوی هستند. به‌همین ترتیب، اگر a زوج باشد، b فرد است، پس $a \overset{*}{+} (b - ۱) = (a \overset{*}{+} b) - ۱$. اگر a، b هر دو فرد باشند، قرار دهید $۲k + ۱$، $۲l + ۱$، پس

$$(a - ۱) \overset{*}{+} b = ۲k \overset{*}{+} ۲l + ۱ = a \overset{*}{+} (b - ۱) = \{(a - ۱) \overset{*}{+} (b - ۱)\} + ۱$$

تعدادی تساوی دیگر، به پیمانهٔ ۴، موجودند، اما به‌طور کلی باید برای تشخیص میان این ۴ عبارت، دقت شود.

۵۶. در میان $۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷$ بهترین مجاورها، $۷ = [۱۱ \mid ۳]$ و $۷ = [۱۳ \mid ۵]$ هستند. بهترین مجاور بعدی $۲۱ = [۱۷ \mid ۷]$ و عضو تنها ۲ است.

$$۷ \overset{*}{+} ۷ \overset{*}{+} ۲۱ \overset{*}{+} ۲ = ۲۳$$

در میان $۵, ۱۰, ۲۰, ۲۵, ۳۰$ بهترین مجاورها $۲۷ = [۲۵ \mid ۵]$ و $۱۹ = [۳۰ \mid ۱۰]$ هستند و آنچه باقی می‌ماند، $۲۶ = [۲۰ \mid ۱۵]$.

$$۲۷ \overset{*}{+} ۱۹ \overset{*}{+} ۲۶ = ۱۸$$

اعمال بالا را با ایجاد یک الگوی نواری، امتحان کنید.

۵۷. اگر میان a، b و c دوتای آنها فرد و دیگری زوج باشد، دو عدد فرد بهترین مجاورسازی است و قرار گرفتن عدد زوج با هر یک از اعداد فرد مجاورسازی مناسبی نیست. به‌همین ترتیب، اگر دوتای آنها زوج و دیگری فرد باشد به همین صورت است. اگر همهٔ آنها زوج باشند، نیمه‌های آنها را در نظر بگیرید. اگر هر سه فرد باشند، عدد ۱ را از همهٔ آنها کم کنید، کم کردن یک عدد از همهٔ آنها اثری روی تفاضل یا توانی از ۲ که بخش‌پذیر بر آنهاست، ندارد. نصف کردن هر عدد، هر توانی را یکی کاهش می‌دهد، و ترتیب را اصلاح نمی‌کند.

۵۸. شکلهای ۲۹ و ۳۰ را ببینید، دومین محاسبه به‌صورت زیر است:

۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵ ۳۶ ۴۹ ۶۴

۴ ۱۲ ۲۴ ۸ ۶۰ ۲۰ ۱۱۲

۳ ۲۶ ۳۱ ۴۲ ۳۸ ۸۲

۲۰ ۲۸ ۶۰ ۲۰ ۶۸

۲۹ ۰ ۱۳ ۷۶

۰ ۴۸ ۸۴

۴۷ ۱۱۰

۱۱۲

۵۹. بهترین مجاورها در میان ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۱۵ = [۲۵ | ۹] و سپس ۱۹ = [۱۶ | ۴] هستند و ۱ به‌عنوان عضو تنها باقی می‌ماند؛

$$۱ \overset{*}{+} ۱۵ \overset{*}{+} ۱۹ = ۲۹$$

مثلثی را که در پاسخ تمرین ۵۸ زیر شش صفر اول است، کپی کنید. سطر آخری را بسط دهید، ...,۲۹, ۰, ۲۹, ۰, ۲۹ و الگوی نواری را کامل کنید.

۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵ ۳۶ ۳۳ ۱۲ ۱۳ ۲۸ ۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵

۴ ۱۲ ۲۴ ۸ ۶۰ ۴ ۴۴ ۰ ۱۶ ۲۸ ۴ ۱۲ ۲۴ ۸

۳ ۲۶ ۳۱ ۴۲ ۱۹ ۶ ۳۹ ۲ ۲۳ ۲۲ ۳ ۲۶ ۳۱

۲۰ ۲۸ ۶۰ ۴ ۱۶ ۱۲ ۳۶ ۴ ۲۸ ۱۶ ۲۰ ۲۸

۲۹ ۰ ۲۹ ۰ ۲۹ ۰ ۲۹ ۰ ۲۹ ۰ ۲۹

از رابطهٔ

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} ۱ & ۴ & ۹ & ۱۶ & ۲۵ \\ ۳۶ & ۳۳ & ۱۲ & ۱۳ & ۲۸ \end{array}\right] = \begin{array}{c} ۲۹ \\ ۰ \end{array}$$

می‌بینیم که تنها حرکت خوب قانونی از ۱۶ به ۱۳ است.

۶۰. مانند جواب تمرین ۵۹ است، اما سطر انتهایی را به‌صورت ۱۵ ,۲۹ ,۱۵ ,۲۹ ادامه دهید

۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵ ۱۹ ۱۸ ۱۱ ۶ ۲۷ ۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵

۴ ۱۲ ۲۴ ۸ ۹ ۰ ۲۴ ۱۲ ۲۸ ۲۵ ۴ ۱۲ ۲۴ ۸

۳ ۲۶ ۳۱ ۲۵ ۲ ۵ ۲۴ ۹ ۳۱ ۲۹ ۳ ۲۶ ۳۱

۲۰ ۲۸ ۱۳ ۸ ۲۹ ۴ ۲۸ ۹ ۲۴ ۲۵ ۲۰ ۲۸

۲۹ ۱۵ ۲۹ ۱۵ ۲۹ ۱۵ ۲۹ ۱۵ ۲۹ ۱۵ ۲۹

و $\begin{array}{c} ۲۹ \\ ۱۵ \end{array} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} ۱ & ۴ & ۹ & ۱۶ & ۲۵ \\ ۱۹ & ۱۸ & ۱۱ & ۶ & ۲۷ \end{array}\right]$ نشان می‌دهد که تنها حرکت قانونی تغییر مقدار نیم از ۲۹ به ۱۵، از ۱۶ به ۶ است.

۶۱. در شکل ۳۴، در f، ۱ = ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ پس مقدار نیم گل ۲ = ۱ + ۱ است. برای دختر، در g، ۱ = ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ $\overset{*}{+}$ ۱، ۲ = ۱ + ۱، ۳ در h را می‌دهد. ۱ = ۳ $\overset{*}{+}$ ۲، با ۰ = ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ $\overset{*}{+}$ ۱، ۲ = ۱ + ۱ در k را می‌دهد. بنابراین ارزش دختر ۳ است. برای سگ، ۱ = ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ در l، ۲ = ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ $\overset{*}{+}$ (۱ + ۱) در m را می‌دهد، و ۲ = ۱ $\overset{*}{+}$ ۱ $\overset{*}{+}$ (۱ + ۲) برای سگ است. ارزش گل به‌علاوهٔ دختر به‌علاوهٔ سگ به‌علاوهٔ درخت ۴ = ۵ $\overset{*}{+}$ ۲ $\overset{*}{+}$ ۳ $\overset{*}{+}$ ۲ است. یک حرکت خوب، از ۴ به ۰ می‌تواند تنها در مؤلفه‌ای شامل یک ۴ باشد، که درخت است، و تعدادش باید از ۵ به ۱ کاهش داده شود. بعد از این حرکت، محاسبه در شکل ۳۵ (هـ) برای درخت هرس شده باید ۱ = ۰ + ۱ به‌جای ۵ = ۴ + ۱ خوانده شود. محاسبه در شکل ۳۵ (د)، ۰ = ۰ + ۲ $\overset{*}{+}$ ۲ به‌جای ۴ = ۴ $\overset{*}{+}$ ۲ $\overset{*}{+}$ ۲ باید خوانده شود. باید شاخهٔ بین c و d را ببریم.

۶۲. این مسأله بیشتر پروژه است تا یک تمرین! [۶]، صفحهٔ ۵۰۱ را ببینید.

مراجع

[1] Adams, E.W., and D.C. Benson. 1956. Nim–type games. *Carnegie Inst. Tech.* Report 13.

[2] Allemang, Dean Thomas. 1984. *Machine Computation with Finite Games.* M. Sc. thesis, Cambridge University.

[3] Austin, Richard Bruce. 1976. *Impartial and Partisan Games.* M. Sc. thesis, The University of Calgary.

[4] Ball, W.W. Rouse and H.S.M. Coxeter. 1974. *Mathematical Recreation and Essays.* 12th edition, University of Toronto Press, pp. 36–40.

[5] Berlekamp, E.R. 1972. Some recent results on the combinatorial game called Welter's Nim. Princeton: *Proc. 6th Conf. Information Sci. & Systems*, pp. 203–204.

[6] Berlekamp, E.R., J.H. Conway and R.K. Guy. 1982. *Winning Ways for Your Mathematical Plays.* Academic Press.
Chapter 2, pages 42–44: Nim and nimbers. Ch. 3 (55–61): the Mex Rule and the Sprague–Grundy Theory. Ch. 4 (82–116): Subtraction Games; Kayles, Dawson's Chess, Treblecross, the Guy–Smith Code and Octal Games in General; Grundy's Game; sparese spaces and common cosets. Ch. 7 (183–190): Green Hackenbush; (214) the Colon Principle. Ch. 13 (393–426): misere play of impartial games. Ch. 14 (429–456): Coin–turning Games. Ch. 15 (457–505): numerous impartial games, including Welter's Game. Ch. 17 (551–573): more impartial games including Sprouts and Brussels Sprouts.

[7] Bouton, Charles L. 1901–2. Nim, a game with a complete mathematical theory. *Ann. of Math.*, Princeton (2), **3**, 35–39.

[8] Convey, J.H. 1976. *On Numbers and Games.* London and New York: Academic Press.

Chapter 11, pages 122–131: Nim, the Silver Dollar Game, Kayles, Northcott's Game. Ch. 12 (136–145): misere theory of impartial games, including Grundy's Game. Ch. 13 (153–172): Welter's Game, Green Hackenbush.

[9] Conway, J.H. and H.S.M. Coxeter. 1973. Triangulated polygons and frieze patterns. *Math. Gaz.* 57: 87–94, 175–183; M.R. 57 #1254–5.

[10] Dawson, T.R. Problem 1603. *Fairy chess Review Dec* 1934 p. 94.

[11] Dawson, T.R. 1935. *Caissa's Wild Roses*, p. 13.

[12] Descartes, Blanche. 1953. Why are series musical? *Eureka 16: 18–20; reprinted ibid.* 27 (1964) 29–31.

[13] Ducdeney, H.e. 1910. *Canterbury Puzzles.* London, p. 118, 220.

[14] Ferguson, T.S. 1974. On sums of Graph Games with the last player losing. *J. Internat. Game Theory*, **3:** 159–167.

[15] Gale, D. and A. Neyman. 1982. Nim–like games. *Internat. J .Game Theory*, 11: 17–20.

[16] Gardner, Martin. 1959. *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions.* New York: Simon and Schuster, Chapter 15.

[17] Gardener, Martin. 1983. *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements.* New York: W.H. Freeman, Chapter 14.

[18] Gardener, Martin. 1975. *Mathematical Carnival.* New York: Alfred A. Knopf, Chapter 1.

[19] Grundy, P.M. 1939. Mathematics and games. *Eureka,* **2:** *6–8 ; reprinted ibid.* 27 (1964) 9–11.

[20] Grundy, P.M. and C.A.B. Smith. 1956. Disjunctive games with the last player losing. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **52:** 527–533.

[21] Guy, Rihard K. She loves me, she loves me not, relatives of two games of Lenstra, Een Pak met een Korte Borek. Papers presented to Hendrik William Lenstra, 77–05–18. Amsterdam: Mathematisch Centrum.

[22] Guy, Richard K. 1986. Jhon Isbell's game of Beans talk and Jhon Conway's game of Beans–Don't–Talk. *Math. Mag.* 59: 259–269; M.R. 88c: 90163.

[23] Guy, Richard K. and Cedric A.B. Smith. 1956. The G–values of various gmes. *Proc. Cambridge Philos.* Soc. 52: 514–526. M.R. 18, 546.

[24] Keeley, Robert J. 1986. Chomp – an introduction to definitions, conjectures, and theorems. *Math. Teacher*, **79:** 516–519.

[25] Kenyon, J.C. 1967. A nim–like game with period 349. *Univ. of Calgary Math. Res.* Paper 13.

[26] Kenyon, J.C. 1967. Nim–like Games and the Sprague–Grundy Theorem. M. Sc. thesis. The University of Calgary.

[27] Lasker, E. 1931. Brettspiele der Volker, Berlin, pp. 183–186.

[28] Lenstra, H.W. 1977–78. Nim multiplication, Seminaire de Theorie des Nombres, expose No. 11, Univ. de Bordeaux.

[29] Loyd, Sam. 1914. *Cyclopedia of Trics and Puzzles.* New York, p. 232.

[30] Mauldon, J.G. 1978. Num, a variant of Nim with no first player win. Amer. *Math Monthly,* **85:** 575–578.

[31] O'Beirne, T.H. 1965. *Puzzles and Paradoxes.* London: Oxford Univ. Press. Chapters 9 and 10.

[32] Schuh, Fred. 1952. The game of divisions. *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde,* **39:** 299–304.

[33] Schuh, Fred. 1968. *The Master Book of Mathematical Recreations,* trans. Frits Gobel, ed. T.H. O'Beirne. New York: Dover. Chapter 6: Nim. Chapter 12: Subtraction Games.

[34] Shephard, G.C. 1976. Additive frieze patterns and multiplication tables. *Math. Gaz.,* **60:** 178–184; M.R. **58** #16353.

[35] Smith, Cedric A.B. 1966. Graphs and composit games. *J. Combin. Theory,* 1: 51–81; M.R. 33 #2572.

[36] Smith, Cedric A.B. 1968. Compound games with counters. *J. Recreational Math.,* **1:** 67–77.

[37] Sprague, R.P. 1935–36. Uber mathematische Kampfspiele. Tohoku Math. J., **41:** 438–444 ; Zbl. **13**, 290.

[38] Sprague, Roland. 1947. Bemerkungen uber eine spezielle Abeslsche Gruppe. Math. Z. **51:** 82–84; M.R. **9,** 330–331.

[39] Sprague, Roland. 1963. *Recreations in Mathematics.* Trans. T.H. O'Beirne, Blackie, p. 12–14, 41–42.

[40] Steinhaus, H. 1925. Definicje potrzebne de teo rji gry i poscigu (Polish) Mys'l Akad. Lwow, **1** #1: 13–14; reprinted as Definitions for a teory of games and pursuit. *Naval Res. Logist. Quart.* **7** (1960): 105–108.

[41] Welter, C.P. 1952. The advancing operation in a special abelian group. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc Ser.* A, 55 = Indagationes Math. **14:** 304–314; M.R. **14**, 132.

[42] welter, C.P. 1954. The theory of a class of games on a sequence of Squares, in terms of the advancing operation in a special group. *ibid.* **57 = 16:** 194–200; M.R. **15,** 682; **17,** 1436.

واژه‌نامه فارسی- انگلیسی

آزمایش سخت	triboulation
اسپراگ	Sprague
اصل کالن	Colon principle
اصل مشابه‌سازی	tweedledum & tweedledee principle
اعداد زوجی	evil numbers
اعداد فردی	odious numbers
الگوهای نواری	frieze patterns
$\mathcal{N}$- وضعیت	$\mathcal{N}$-position
انتخاب	option
بازی X–O	tic-tac-toe
بازی پارتیزانی	partizan game
بازی شطرنجی	tartan game
بازی گراندی	Grundy's game
بازی ماتلی	Motley game
بازی موبیوس	Moebius game
بازی موگل	Mogul game
بازی نرث‌کات	Northcott's game
بازی وِلتر	Welter's game
بازی ویتوف	Wythoff's game
بازیهای برداشتن و شکستن	taking and breaking games
بازیهای تفاضلی	subtraction games
بازیهای سکه‌برگردان	coin turning games

بازیهای منصفانه	impartial games
بازیهای هشت هشتی	octal games
پلاگ	Plugg
پلکان پنج‌تایی	staircase fives
$\mathcal{P}$ـ وضعیت	$\mathcal{P}$-position
تابع مجاورسازی	mating function
ترومینوها	trominoes
تفریق نیم	nim_subtraction
تقارن	sym
تقارن ساده شده	sympler
جمع نیم	nim_addition
جوانه‌ها	sprouts
چکرز	checkers
حرکت برگشت‌پذیر	reversible move
خاصیت تزویج فرگسون	ferguson's pairing property
خوکی	grunt
دوری	remoteness
دوستم دارد، دوستم ندارد	she loves me, she loves me knot
دوقلوهای نامنظم	acrostic twins
راههای پیروزی	winning ways
روش مجاورسازی	mating method
روشهای نیروی غیر منطقی	brute force methods
ساق پا	fibulations

۳ تایی از هفت‌تایی	triplet sevens
سه ضربدر	treblecross
سیستم اشتاینر	Steiner system
شرط پایان‌پذیری	ending condition
شطرنج داوسون	Dawson's chess
شلغم	turnip
طوقه	loop
قاعدهٔ کمترین ناموجود	mex rule (minimum excluded rule)
قضیهٔ انتخاب زوج	even alteration theorem
k- برابر	k_plicate
کد رقمی	code digit
کپهٔ گراندی	Grundy_heap
کپهٔ لاسکر	Lasker_heap
کپهٔ نیم اصیل	genuine nim-heap
کپه‌های نیم	nim_heaps
کپه‌های نیم تقلبی	bogus nim_heaps
کد گُلای	Golay code
کِرَم	Cram
کلم بروکسلی	brussels sprouts
کیلز	kayles
کیلز داوسون	Dawson's kayles
کیلز دو برابر	duplicate kayles
کیلز دوتایی	double kayles
گاز زدن	chomp
گروه ماتیو	Mathieu group
گره‌ها	knots
گو	go

mock turtle fives	لاک‌پشت پیشرو ۵تایی
beanstalk	لوبیاها صحبت می‌کنند
beans_don't_talk	لوبیاها صحبت نمی‌کنند
sums of games	مجموع بازیها
nim-sum	مجموع نیم
ternary scale	مقیاس سه‌تایی
grundy scales	مقیاسهای گراندی
Curtis's miracle octad generator	مولد میراکل اکتاد کرتیس
dots & pairs	نقطه و جفت
nim	نیم
synonim (sympathetic nim)	نیم برابری
nimble	نیمبل
poker nim	نیم پُکر
matutinal nim	نیم صبحگاهی
Kotzig's nim	نیم کتزیگ
Lasker's nim	نیم لاسکر
simonim (similar move nim)	نیم مشابهی
antonim (antipathetic nim)	نیم نابرابری
misére nim	نیم وارون
next_player_winning	وضعیت برد بازیکن بعدی
pervious_player_winning	وضعیت برد بازیکن قبلی
open_positions	وضعیتهای باز
green hackenbush	هرس کردن بوته‌های سبز
hickory, dickory, dock	هیکوری، دیکوری، داک

فهرست راهنما