۱. الف) در جزوه pdf

ب) $\begin{cases} x' = 0x + y + 0 \\ y' = -4x - y + 2\sin t \end{cases} \Leftarrow$ با فرض $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ ،

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sin t \end{bmatrix}$$

داریم: $X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sin t \end{bmatrix}$

ج)

$$\begin{cases} x' = \frac{t}{xy} \\ y' = \frac{t}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t}{xy} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{t}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\frac{t}{xy}}{\frac{t}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| + c_1 = \ln|y| + c_2$$

پوشا بودن تابع لگاریتم

$$\Rightarrow \ln|x| + (c_1 - c_2) = \ln|y| \Rightarrow \ln|x| + \ln K_1 = \ln|y| \; ; K_1 > 0$$

$$\Rightarrow \ln K_1|x| = \ln|y| \Rightarrow |y| = K_1|x| \Rightarrow y = \pm K_1|x|$$

بنابراین $\boxed{y(t) = \underset{K \neq 0}{K}\,|x(t)|}$ با نام‌گذاری $K = \pm K_1$ که $K_1 > 0$ پس $K \neq 0$

۲. د)

$$① \begin{cases} x' + 4x - 4y = 12 \\ 10y' = 4x' - 4y \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} x'' + 4x' - 4y' = 0$

$\hookrightarrow y = \frac{1}{4}(x' + 4x - 12)$

$\longrightarrow \Rightarrow y' = \frac{4}{10}(x' - y) \Rightarrow x'' + 4x' - 4\left(\frac{4}{10}(x' - y)\right) = 0$

$$\Rightarrow x'' + 4x' - 4\left[\frac{4}{10}\left(x' - \frac{1}{4}(x' + 4x - 12)\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow x'' + 4x' - \frac{16}{10}x' + \frac{4}{10}x' + \frac{16}{10}x - \frac{48}{10} = 0 \Rightarrow x'' + \frac{28}{10}x' + \frac{16}{10}x - \frac{48}{10} = 0$$

$$\Rightarrow x'' + \frac{14}{5}x' + \frac{8}{5}x = \frac{24}{5} \Rightarrow 5x'' + 14x' + 8x = 24$$

$$5r^2 + 14r + 8 = 0 \Rightarrow r = -2, -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x_c = c_1e^{-2t} + c_2e^{-\frac{4}{5}t}, \quad \underset{\text{جواب خصوصی}}{X = K} \Rightarrow \boxed{x = c_1e^{-2t} + c_2e^{-\frac{4}{5}t} + K} \xrightarrow{①} \boxed{y(t) = \frac{1}{2}c_1e^{-2t} + \frac{4}{5}c_2e^{-\frac{4}{5}t}}$$

۲ـ هـ

$$\begin{cases} x'' = y+1 \\ y'' = x+t \Rightarrow y''' = x'+1 \Rightarrow y^{(4)} = x'' \end{cases} \Rightarrow y^{(4)} = y+1$$

پس، $\underbrace{y^{(4)} - y = 1}_{g(t)} \Leftarrow r^4 - 1 = 0 \Leftarrow (r^2-1)(r^2+1) = 0 \Leftarrow$

$(r-1)(r+1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow r = \pm 1, r = \pm i$

$\Rightarrow y_c = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + e^{0t}(c_3 \cos t + c_4 \sin t)$

جواب خاص $Y = K$ since $g(t) = 1$

پس

یعنی $y = y_c + Y$

$$\boxed{y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t + K}$$

اکنون $y(t)$ بدست آمده را در معادله دوم یعنی $y'' = x+t$ قرار دهیم تا x نیز بدست آید.

$y' = c_1 e^t - c_2 e^{-t} - c_3 \sin t + c_4 \cos t$

$\rightarrow y'' = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t$

$\xrightarrow{y''=x+t} x(t) = y'' - t \Rightarrow \boxed{x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t - t}$

۲- (و)

$$\begin{cases} x''+2x+4y=e^t & (1) \\ y''-x-3y=-t & (2) \end{cases} \Rightarrow x = y''-3y+t \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} x' = y'''-3y'+1$$

$$\xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} x'' = y^{(4)}-3y''$$ (الف)

اکنون x و x'' را در (1) جانشانی می‌کنیم.

$$(y^{(4)}-3y'') + 2(y''-3y+t) + 4y = e^t$$

$$\Rightarrow y^{(4)} - y'' - 2y = -2t + e^t \quad (3)$$

اکنون (3) را به کمک فصل ۴ حل می‌کنیم تا $y(t)$ بدست آید.

سپس با مشتق گیری (دوبار) از $y(t)$ و در (2) جاگذاری می‌کنیم تا $x(t)$ نیز بدست آید

(ادامه به عهده دانشجو) جواب آخر:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + c_3\cos t + c_4 \sin t + e^t - 2t \\ y(t) = -c_1 e^{\sqrt{2}t} - c_2 e^{-\sqrt{2}t} - \frac{1}{4}c_3 \cos t - \frac{1}{4} c_4 \sin t - \frac{1}{2}e^t + t \end{cases}$$

۲- (ز)

$$\begin{cases} x'+y''=-t & (1) \\ 5x'+ty''=t^3-30t & (2) \end{cases} \xrightarrow{\text{(1) در } (-t) \text{ ضرب}} \begin{cases} -tx'-ty''=t^2 \\ 5x'+ty''=t^3-30t \end{cases}$$

$$(5-t)x' = t^3+t^2-30t$$

بنابراین

$$x'(t) = \frac{t^3+t^2-30t}{5-t}$$

$$x(t) = \int \frac{t^3+t^2-30t}{5-t}\,dt = -3t^2 - \frac{t^3}{3} + c$$

پس $\boxed{x(t) = -3t^2 + \frac{t^3}{3} + c_1}$

اکنون در (1) جایگذاری می‌کنیم.

$$x'(t) = -6t+t^2 \xRightarrow{(1)} (-6t+t^2)+y'' = -t$$

$$\Rightarrow y'' = 5t - t^2 \xRightarrow{\text{انتگرال}} y' = \frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + c_2$$

$$\xRightarrow{\text{انتگرال}} \boxed{y(t) = \frac{5t^3}{6} - \frac{t^4}{12} + c_2 t + c_3}$$

۲ - ج

$$\begin{cases} x' + ty' = 2t & ① \\ tx' - y' = -x & ② \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{1}{t}(2t - x')$$

$\Downarrow$ در ②

$$tx' - \left(\frac{1}{t}(2t - x')\right) = -x$$

$$\Rightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)x' + x = 2 \Rightarrow x' + \frac{1}{\left(t+\frac{1}{t}\right)}x = \frac{2}{\left(t+\frac{1}{t}\right)}$$

$$\Rightarrow x' + \underbrace{\left(\frac{t}{t^2+1}\right)}_{P(t)}x = \underbrace{\frac{2t}{t^2+1}}_{g(t)}$$

معادله خطی مرتبه اول (فصل یک)

$$\mu(t) = e^{+\int P(t)dt} = e^{+\int \frac{t}{t^2+1}dt} = e^{+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)} = \sqrt{t^2+1}$$

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(C + \int \mu(t)g(t)dt\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\left(C + \int \frac{2t\sqrt{t^2+1}}{t^2+1}dt\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\left(C + \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}dt\right)$$

از طرفی $\int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}dt = 2\sqrt{t^2+1} + K$ پس

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\left(C + 2\sqrt{t^2+1}\right) \Rightarrow \boxed{x(t) = 2 + \frac{C}{\sqrt{t^2+1}}}$$

اکنون $x(t)$ را در ① قرار می‌دهیم تا y نیز به دست آید یعنی

$$x'(t) = \frac{ct}{\sqrt{t^2+1}} \overset{①}{\Longrightarrow} \frac{ct}{\sqrt{t^2+1}} + ty' = 2t \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{t}\left(2t - \frac{ct}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

$$y'(t) = 2 - \frac{c}{\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow y(t) = \int\left(2 - \frac{c}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt \Rightarrow \boxed{y(t) = 2t - C(\operatorname{arcsinh} t) + K}$$

۷. روش اول: حذفی

$$\begin{cases} x' + y' = 2\sinh t \\ y' + z' = e^t \\ z' + x' = 2e^t + e^{-t} \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} x(0)=1 \\ y(0)=1 \\ z(0)=0 \end{matrix}$$

توجه $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ پس $2\sinh t = e^t - e^{-t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' + y' = e^t - e^{-t} & (1) \\ y' + z' = e^t & (2) \\ z' + x' = 2e^t + e^{-t} & (3) \end{cases}$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} x' + y' = e^t - e^{-t} \\ -y' - z' = -e^t \end{cases} \Rightarrow x' - z' = e^t - 2e^{-t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' - z' = e^t - 2e^{-t} \\ x' + z' = 2e^t + e^{-t} \end{cases}$$

$$2x' = 3e^t - e^{-t} \Rightarrow x' = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \boxed{x(t) = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + c_1} \quad (I)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در (۳)}} z' + \left(\frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}\right) = 2e^t + e^{-t}$$

$$\Downarrow$$

$$z' = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \boxed{z(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} + c_2} \quad (II)$$

اکنون z' را در (۲) جانشین می‌کنیم:

$$y' + \left(\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}\right) = e^t \Rightarrow y' = \frac{1}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} + c_3} \quad (III)$$

$$x(0) = 1 \xrightarrow{\text{در } (I)} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + c_1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$y(0) = 1 \xrightarrow{\text{در } (III)} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + c_3 = 1 \Rightarrow \boxed{c_3 = -1}$$

$$z(0) = 0 \xrightarrow{\text{در } (II)} \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = 1}$$

پس جواب خصوصی دستگاه به صورت

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} - 1 \\ z(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} + 1 \end{cases}$$

روش دوم: استفاده از تبدیل لاپلاس

حل با استفاده از لاپلاس ساده است و به دانشجو واگذار می‌شود.

۸- الف)

$$\begin{cases} 4x+12\int_0^t [x(u)-y(u)]\,du = 1 \\ y+4\int_0^t y(u)\,du = 2\int_0^t x(u)\,du \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{لاپلاس}} \begin{cases} 4\mathcal{L}\{x\} + 12\left[\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\{x\}-\mathcal{L}\{y\}\right)\right] = \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}\{y\} + 4\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}\{y(t)\}\right) = 2\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}\{x(t)\}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(4+\frac{12}{s}\right)\mathcal{L}\{x\} - 12\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s} \\ -\frac{2}{s}\mathcal{L}\{x\} + \left(1+\frac{4}{s}\right)\mathcal{L}\{y\} = 0 \end{cases}$$

از دستور کرامر $\mathcal{L}\{x\}$ و $\mathcal{L}\{y\}$ را می‌یابیم. سپس با وارون لاپلاس توابع $x(t)$ و $y(t)$ به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} & -12 \\ 0 & 1+\frac{4}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4+\frac{12}{s} & -12 \\ -\frac{2}{s} & 1+\frac{4}{s} \end{vmatrix}} \quad , \quad \mathcal{L}\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} 4+\frac{12}{s} & \frac{1}{s} \\ -\frac{2}{s} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4+\frac{12}{s} & -12 \\ -\frac{2}{s} & 1+\frac{4}{s} \end{vmatrix}}$$

پس از محاسبه دترمینان‌ها و وارون لاپلاس گیری، توابع $x(t)$ و $y(t)$ به عنوان جواب های دستگاه پیدا می‌شوند. (ادامه به عهده دانشجو)

۸- ب)

$$\begin{cases} x = e^{2t} + \int_0^t y(u)\,du \\ y = 1 - e^{2t}\int_0^t e^{-2u} x(u)\,du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^{2t} + \int_0^t y(u)\,du \\ y = 1 - \int_0^t e^{2(t-u)} x(u)\,du \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = e^{2t} + \int_0^t y(u)\,du \\ y = 1 - e^{2t} * x(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{لاپلاس گیری}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} + \mathcal{L}\{\int_0^t y(u)\,du\} \\ \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{e^{2t} * x(t)\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{x\} = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{s}\mathcal{L}\{y\} \\ \mathcal{L}\{y\} = \dfrac{1}{s} - \mathcal{L}\{e^{2t}\}\cdot\mathcal{L}\{x\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{x\} = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{s}\mathcal{L}\{y\} \\ \mathcal{L}\{y\} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s-2}\mathcal{L}\{x\} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دسته بندی}} \begin{cases} \mathcal{L}\{x\} - \dfrac{1}{s}\mathcal{L}\{y\} = \dfrac{1}{s-2} \\ \dfrac{1}{s-2}\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y\} = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

از دستور کرامر $\mathcal{L}\{x\}$ و $\mathcal{L}\{y\}$ را پیدا کنیم.

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s-2} & -\frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{s} \\ \frac{1}{s-2} & 1 \end{vmatrix}} , \quad \mathcal{L}\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{s-2} \\ \frac{1}{s-2} & \frac{1}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{s} \\ \frac{1}{s-2} & 1 \end{vmatrix}}$$

پس از محاسبه دترمینان ها از لاپلاس معکوس استفاده کنیم تا $x(t)$ و $y(t)$ به دست آید. (ادامه به عهده دانشجو)

(جواب آخر: $x(t) = -2+3e^{t}$ و $y(t)$ به عهده دانشجو)