میدان

تعریف: یک میدان مجموعه‌ای است مانند F با دو عمل جمع و ضرب که دارای خواص زیر است:

۱) $(F\,,+)$ گروه آبلی

۲) $(F-\{o\},\times)$ یک گروه آبلی است. o عضو همانی جمع می‌باشد.

۳) به ازای هر $a\,,b\,,c\ \in F$ رابطه $a\times(b+c)=ab+ac$ برقرار است.(خاصیت توزیع پذیری ضرب روی جمع)

میدان مرتب

تعریف: یک میدان مرتب، میدانی است مانند F که یک مجموعه‌ی مرتب است و دارای دو خاصیت زیر می‌باشد:

$$۱)\ x<y\ \Rightarrow x+z<y+Z \qquad \forall\, x\,,y\,,z\in F$$

$$۲)\ x>o\,,y>o\Rightarrow x\times y>o \quad \forall\, x\,,y\ \in F$$

مثال:

۱- $(\mathbb{R}\,,+\,,\times)$ مجموعه اعداد حقیقی با دو عمل جمع و ضرب معمولی یک میدان است.

۲- $(\mathbb{Q}$ و $+\,,\times)$، مجموعه اعداد گویا با دو عمل جمع و ضرب معمولی یک میدان است.

حال به ویژگی از اعداد حقیقی می‌پردازیم که اعداد گویا دارای این ویژگی نیستند.

اصل کمال:

هر زیر مجموعه‌ی غیر تهی و از بالا کران‌دار در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارای کوچکترین کران بالا می‌باشد.

قضیه: هر زیر مجموعه‌ی غیر تهی و از پایین کران‌دار در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارای بزرگترین کران پایین می‌باشد.

اثبات:

حل: مجموعه‌ی $L=\{\,y\in\mathbb{Q}\ \ |y\le x\ \ ,\forall\,x\in E\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه مخالف تهی واز بالا کران دار است.(چرا؟)

تمرین ۱.۱: نشان دهید مجموعه‌ی $E=\{x\in\ \mathbb{Q}\mid x>۰\,,x^{۲}<۲\}$ یک زیر مجموعه‌ی غیر تهی و از بالا کران‌دار است که سوپریممی در مجموعه‌ی اعداد گویا ندارد.

حل: برهان خلف فرض می‌کنیم $p=\sup E$. قرار می‌دهیم:

$$q=p-\frac{p^{۲}-۲}{p+۲} \qquad (۱)$$

واضح است که $q\in\mathbb{Q}$ و داریم:

$$q^{۲}-۲=\frac{۲(p^{۲}-۲)}{(p+۲)^{۲}} \qquad (۲)$$

از اینکه معادله $x^۲ = ۲$ در مجموعه اعداد گویا دارای جواب نیست پس برای p دو حالت بررسی می‌شود.

حالت اول: $p^۲ < ۲$ از (۱) نتیجه می‌شود $q > p$ و از (۲) نتیجه می‌شود $q^۲ < ۲$. که این متناقض است با اینکه p کران بالایی برای E می‌باشد.

حالت دوم : $p^۲ > ۲$. از (۱) نتیجه می‌شود $q < p$ و از (۲) نتیجه می‌شود $q^۲ > ۲$ که این متناقض است با سوپریمم بودن P.

نتیجه : مجموعه‌ی اعداد گویا خاصیت کوچکترین کران بالایی را ندارد.(مجموعه اعداد گویا کامل نیست)

قضیه بعدی نتیجه‌ای از اصل کمال در مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

قضیه: خاصیت ارشمیدسی

هرگاه x , y دو عدد حقیقی که $x > ۰$، آنگاه عدد طبیعی مانند n وجود دارد بطوری که $nx > y$.

اثبات: برهان خلف: فرض می‌کنیم چنین n ی وجود نداشته باشد. پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $nx \leq y$ بنابراین y یک کران بالا برای مجموعه‌ی غیر تهی $A = \{nx \ \ |n \in \mathbb{N}\}$ می‌باشد. بنا بر اصل کمال وجود دارد $\alpha \in \mathbb{R}$ که $\alpha = \sup A$. از اینکه $x > ۰$ داریم $\alpha - x < \alpha$ بنابراین $\alpha - x$ کران بالایی برای A نیست پس وجود دارد $m \in \mathbb{N}$ به طوری‌که $\alpha - \mathrm{x} < \mathrm{mx}$ در نتیجه $\alpha < (m + ۱)x$.

چون $(m + ۱)x \in A$، این نامساوی با اینکه α کران بالایی برای A است تناقض دارد. بنابراین عدد طبیعی مانند n وجود دارد بطوری که $nx > y$.

تمرین ۲.۱ :

۱- مجموعه اعداد طبیعی از بالا کران‌دار نیست.

۲- به ازای هر عدد حقیقی x وجود دارد عدد صحیح n طوری‌که $n \leq x < n + ۱$

۳- به ازای هر عدد حقیقی مثبت x وجود دارد عدد طبیعی n بطوری‌که $\frac{۱}{n} < x$.

قضیه: چگال بودن اعداد گویا در مجموعه اعداد حقیقی

بین هر دو عدد حقیقی متمایز، عددی گویا وجود دارد..

اثبات: فرض کنید y, x دو عدد حقیقی و $x < y$ بنابراین $y - x > ۰$.

$y - x > ۰$ و $۱ \in \mathbb{R}$ بنابر خاصیت ارشمیدسی وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ که $ny - nx > ۱$. در نتیجه وجود دارد $m \in \mathbb{N}$ که $nx < m < ny$ (چرا؟) پس داریم: $x < \frac{m}{n} < y$.

تمرین ۳.۱ : ثابت کنید بین هر دو عدد حقیقی متمایز، عددی گنگ وجود دارد.

تمرین ۴.۱: مجموعه اعدادمختلط میدان هست اما میدان مرتب نیست.

(برای دیدن میدان بودن اعداد مختلط به کتاب رودین مراجعه کنید)