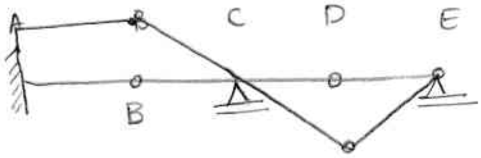
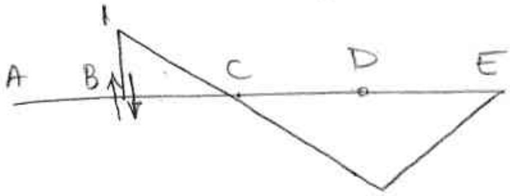
۶۵/۵

1 ← ۲۲۴

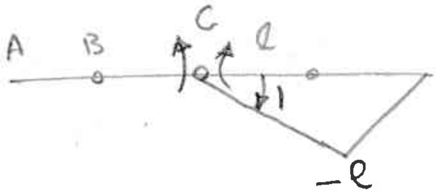
R_A:



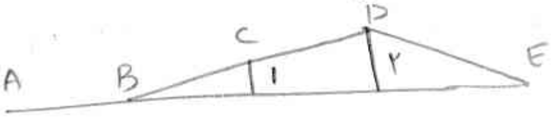
V_B:



M_C

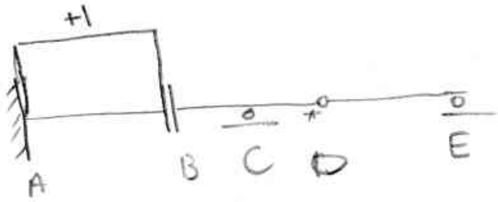


R_C

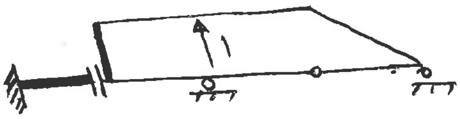


1 ← ۲۲۵ مهم

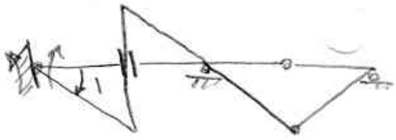
R_A



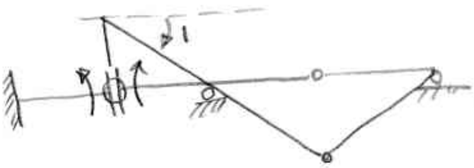
R_C: شیب چپ و راست مفصل برشی برابر است.



M_A:



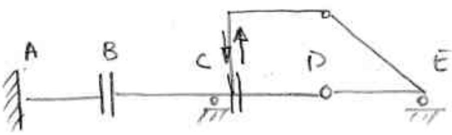
M_B:



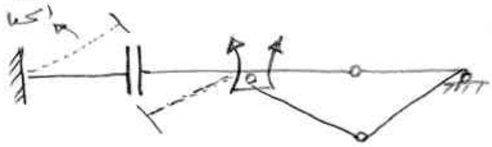
در سازه‌هایی که دارای مفصل برشی هستند شیب چپ و راست در همه موارد خط تأثیر برابر است مگر خط تأثیر نگاه به محل مفصل برشی

(1) ← ۲۲۶

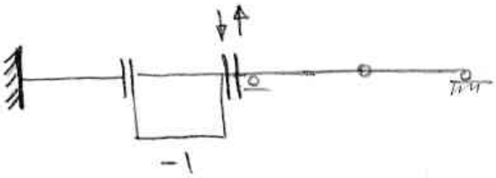
$(V_C)_R$



M_C: تمام چرخش از راست اعمال می‌شود چون شیب چپ و راست مفصل برشی باید یکی شود و باعث انحنای عضو AB می‌شود

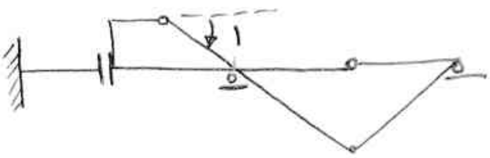


$(V_C)_L$:

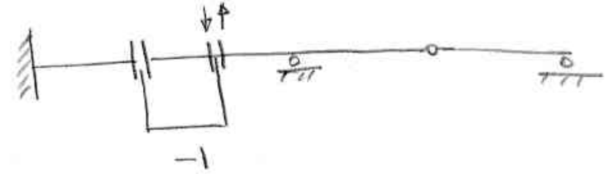


R_E:

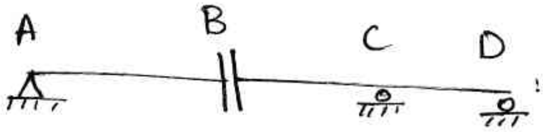
M_{BC} وسط :

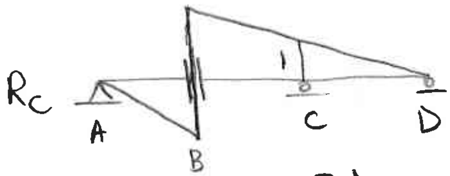


V_{BC} وسط



تمرین:

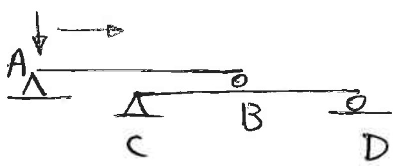


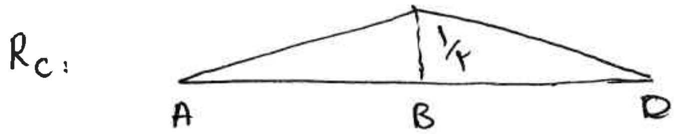


رسم خطوط تأثیر: R_A, R_C, R_C, M_B, M_C, $(V_C)_L$, $(V_C)_R$

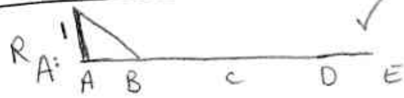
تیر و تیر لغزنده:

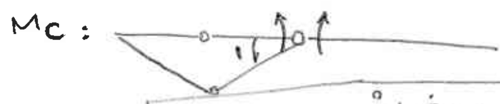
خط تأثیر تکیه گاه C:





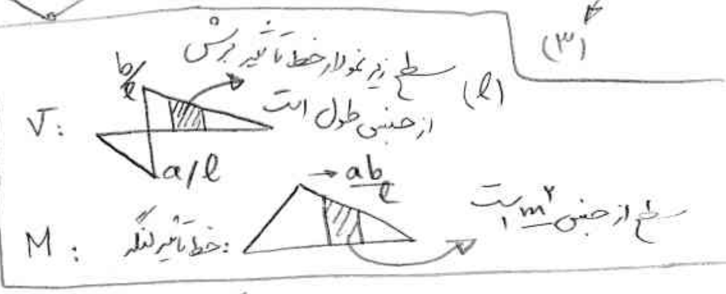
دیگر لزومی که با رواحد در قسمت BD هم اثری کند قسمت دوم را هم می کشیم

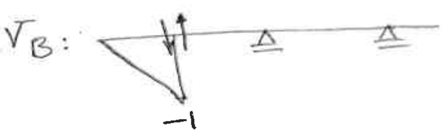




227

(3)

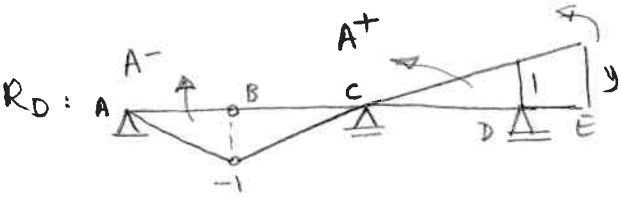




$y=\frac{6}{5}=1{,}2 \leftarrow \frac{1}{5}=\frac{y}{6}$

228: **طول زیاد:** طول برابر با طول تیر یا بزرگتر از طول تیر

(3)



بیشترین عکس العمل نشان دهنده این است که بارگذاری بین C و E باشد بیشترین عکس العمل کششی منفی است که بارگذاری بین A و C باشد

$$(R_D^+)_{max} = W \cdot A^+ = 1^{t/m} * \frac{6*1{,}2}{2} = 3{,}6t$$

نکته: عرض خط تأثیر عکس العمل تکیه گاهی و همچنین برش بدون بعد است و سطح زیر نمودار خط تأثیر عکس العمل تکیه گاهی یا برشی از جنس طول است

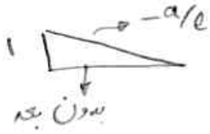
$$(R_D^-)_{max} = W \cdot A^- = 1^{t/m} * \frac{10*(-1)}{2} = -5t$$

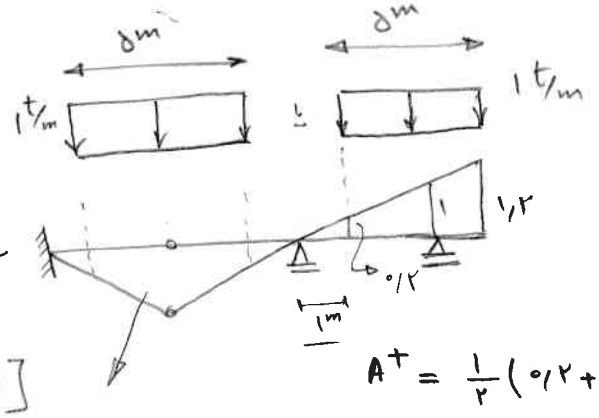
عرض خط تأثیر لنگر خمشی از جنس طول می باشد و بنابراین سطح زیر خط تأثیر نمودار لنگر از جنس m^2 متر مربع می باشد

نکته: در نمودارهای خط تأثیر عکس العمل تکیه گاهی و برش عرض خط تأثیر بدون بعد است و بنابراین سطح زیر نمودار خط تأثیر از جنس طول می باشد ولی عرض خط تأثیر لنگر خمشی از جنس طول می باشد که نتیجه می شود سطح زیر نمودار خط تأثیر لنگر از جنس سطح است

۲۷/۵

M:





$y = 0{,}2$

$\frac{y}{1} = \frac{1{,}2}{6}$

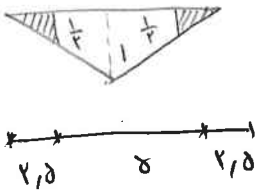
۲۲۹

سطحی از نمودار که بیشترین مقدار را دارد جواب مساله است

$A^- = -\left[\frac{1}{2}*10*1 - 2*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*2{,}5\right]$

۲ تا مثلث

$= -\left[5 - 1{,}25\right] = -3{,}75^m$



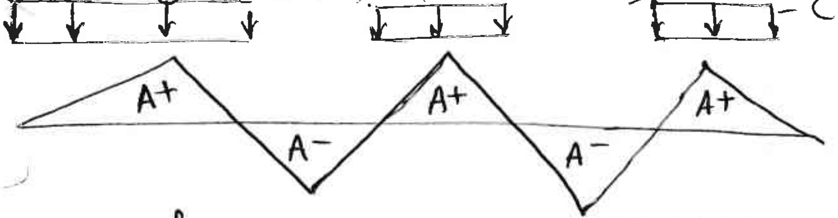
$A^+ = \frac{1}{2}(0{,}2+1{,}2)*5 = 3{,}5^m$

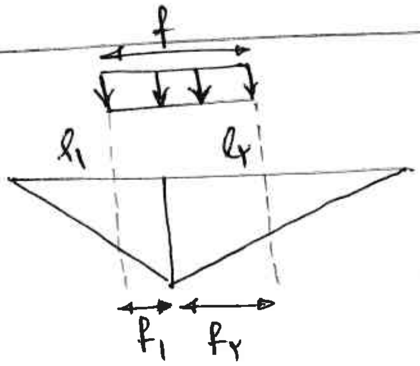
ماکزیمم قدر مطلقشان

$3{,}5\ ,\ -3{,}75$

$3{,}75 \rightarrow$ گزینه ۳

نکته: چنانچه بار گسترده زنده باشد (کلمه زنده در صورت سوال مطرح شده باشد) اجازه داریم بار گسترده را تجزیه کنیم و هر بخشی آن را در یک دهانه اعمال کنیم ولی اگر بار گسترده زنده نباشد نمی توان آن را تجزیه کرد. در این صورت بایستی بین دهانه های مختلف، دهانه بحرانی را پیدا کرد (دهانه ای که سطح زیر نمودار خط تأثیرش بزرگ‌تر باشد) و بار را به آن دهانه اعمال نمود. (شکل خط تأثیر مثل زیر باشد)





f : constant : طول بار گسترده

$$f_1 + f_2 = f$$

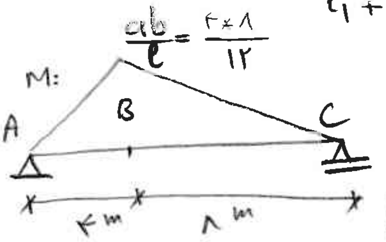
ترکیب نسبت در صورت و مخرج

$$\frac{f_1}{l_1} = \frac{f_2}{l_2} = \frac{f_1+f_2}{l_1+l_2} = \frac{f}{l_1+l_2}$$

$$\rightarrow\ f_1 = \frac{l_1}{l_1+l_2}\cdot f$$

$$f_2 = \frac{l_2}{l_1+l_2}\cdot f$$

* در حالتیکه طول دهانه‌ها برابر نیست بایستی هر دهانه به نسبت طول خود به طول کل از بار گسترده سهم متفاوت بگیرد تا سطح زیر نمودار خط تأثیر ماکزیمم شود (فرقی ندارد چه خط تأثیری باشد)



مثلاً: بار گسترده یکنواختی از تیر زیر عبور می کند $(M_{max})_B$ چقدر می شود؟

$f = 5^m$ طول بار گسترده ، $1^{t/m}$ بار گسترده

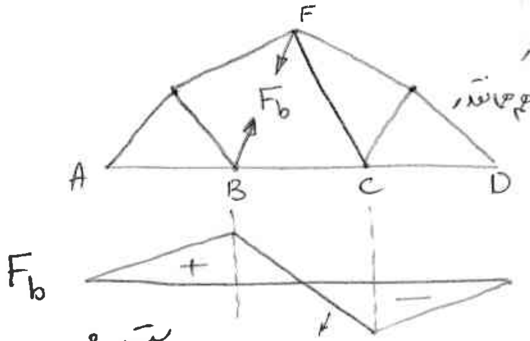
$$f_1 = \frac{4}{12}*5 = \frac{20}{12}\,m = \frac{5}{3}\,m$$

$$f_2 = \frac{8}{12}*5 = \frac{10}{3}\,m$$

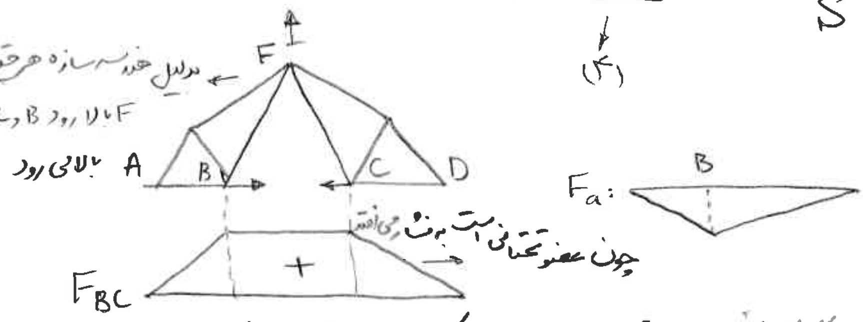
در این حالت $(M_{max})_B$ اتفاق می افتد

برای رسم خط تأثیر هر عضو آن را برداشته و به جای آن نیرو می‌گذاریم مثلا خط تأثیر عضو b

۲۳۵ ← (۴)



چون BF عضو مایل است برش مقطع را تحمل می‌کند

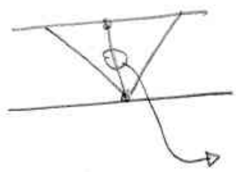


اگر نتوانستیم در اثر اعمال بار تغییر شکل سازه را حدس بزنیم

که یک نقطه را پیدا می‌کنیم که عرض خط تأثیر در ۲ گزینه متفاوت باشد و بعد روش مفصل و مقطع را با هم ترکیب می‌کنیم

و در آن نقطه عرض‌ها را با ترکیب مفصل و مقطع تحلیل می‌کنیم

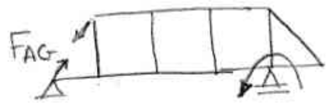
۲۳۶ ← (۴)



خط تأثیر این اعضا

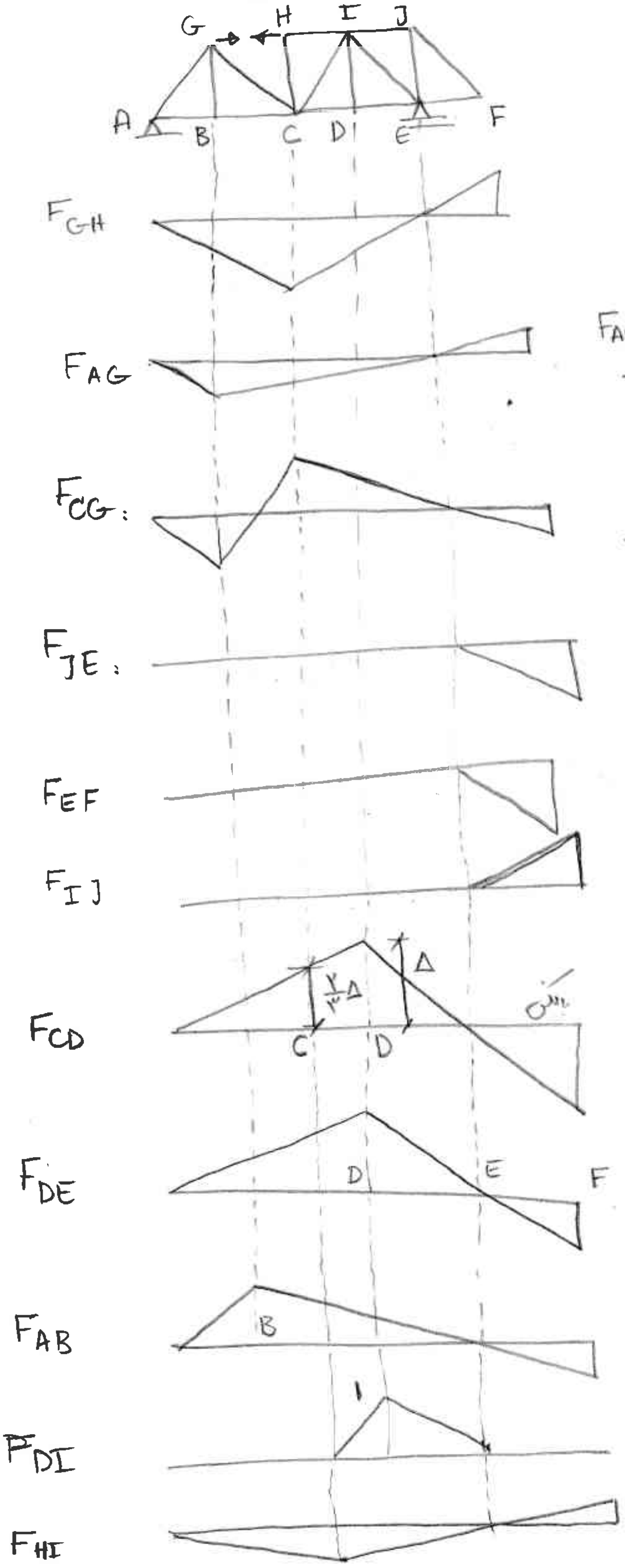
یا صفر و یا مثلثی

(بستگی به این دارد که بار روی پال بالا باشد یا پایین)



هنگامی که نیرو در گره‌های تحتانی اثر می‌کند

نیروی عضو CH همیشه صفر است



ادامه از صفحه ۶۱

ادامه خط تأثیر:

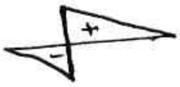
نکته: خط تأثیر نیروی محوری اعضای افقی فوقانی و تحتانی خرپا معمولاً شبیه خط تأثیر لنگر خمشی در تیرها است و خط تأثیر نیروی محوری اعضای قائم و مایل خرپا نیز معمولاً شبیه خط تأثیر برش در تیرها است

+ : چون کششی اند

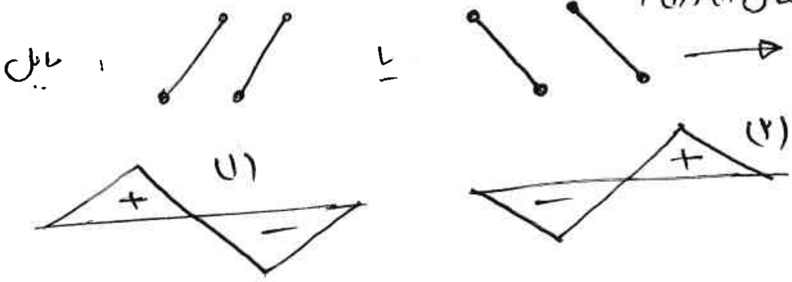
خط تأثیر نیروی محوری اعضای تحتانی ← 

خط تأثیر نیروی محوری اعضای فوقانی ← 

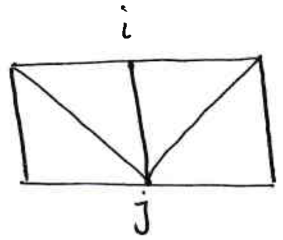
(خط تأثیر نیروی محوری شان)

اعضای قائم و مایل خط تأثیرشان شبیه خط تأثیر برش در تیر است : ← 

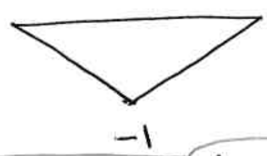
شبیه آن است و گرنه خود آن مثل اشکال (۱) و (۲) است

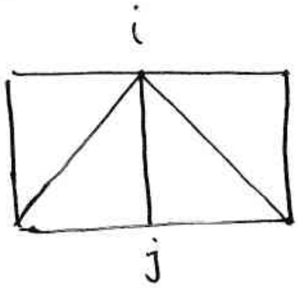
چه قائم باشد و چه مایل ← 

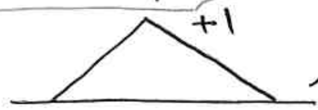
* نکته: اگر در خرپا عضو قائم در غیاب عضو مایل به دو عضو افقی متصل شده باشد، بسته به اینکه نیرو در چه گره هایی وارد می شود خط تأثیر نیروی محوری این عضو قائم یا صفر است و یا یک مثلث که مقدار ماکزیمم آن در محل عضو قائم می باشد.



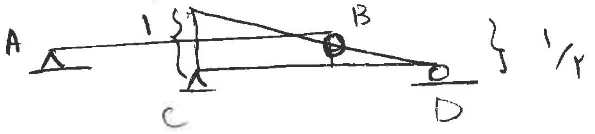
f_{ij} : اگر نیرو در گره های تحتانی اثر کند

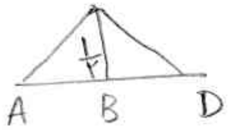
f_{ij} :  اگر نیرو در گره های فوقانی اثر کند



f_{ij}  اگر نیرو در گره های تحتانی اثر کند

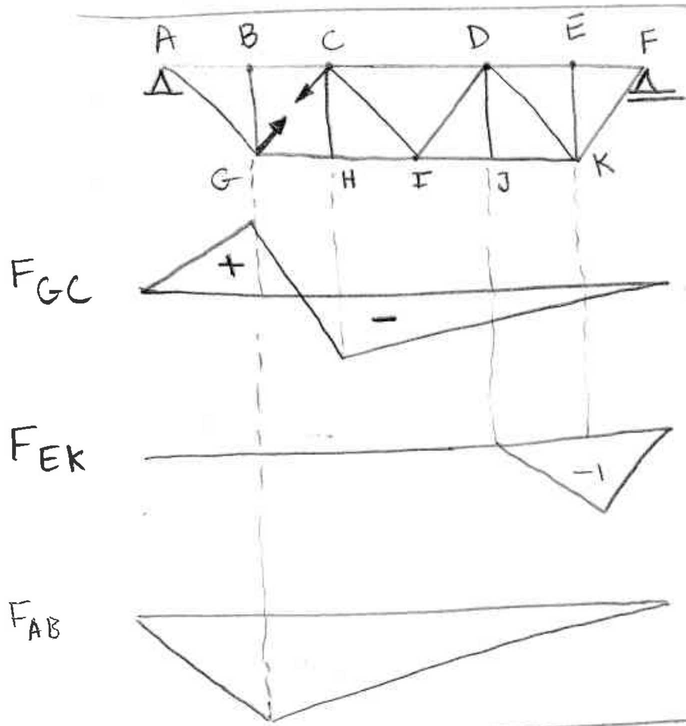
f_{ij} : ———— اگر نیرو در گره های فوقانی اثر کند





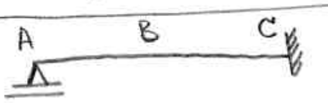
۲۳۹

بار بر روی گره های بالایی وارد می شود.

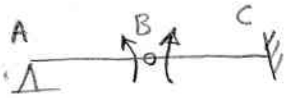


(۴) ← ۲۴۱

۲۴۴ خط تاثیر M_B در سازه مقابل کدام است؟



۲۴۴



جدا می کنیم

لنگر از A تا B خطی است

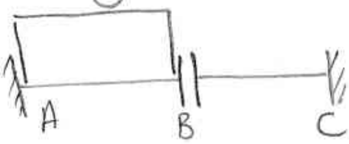
$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

شکل خط تاثیر سازه نامعین که بالکلی ندارد
قسمت معین وافلش ندارد همیشه منحنی است

↓

مثال نقض

R_A



در این سازه چه خط تاثیر واکنش تکیه گاهی
چه خط تاثیر برش خطی است

چون هر دو قسمت AB و BC تحت اثر لنگر خمشی هستند
انحنا خواهند داشت و بعلت خمش BC گره B تغییر مکان
خواهد داشت

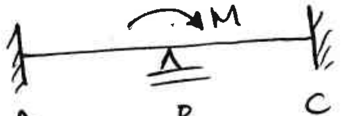
درست است که A مفصلی است ولی خود لنگر در B باعث
انحنای قسمت AB خواهد شد که انحنای آن بدلیل گیرداری C
کمتر از قسمت BC است ولی دارای انحنا می باشد.

۷۱/S

۲۴۵

نکته :

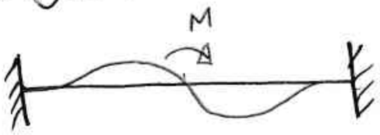
سازه متقارن
با بارگذاری پادمتقارن



$\uparrow R = 0$

$$R_B = M \times y' = M \times 0 = 0$$

یعنی تکیه‌گاه B را می‌توانیم بر داریم چون هیچ تأثیری ندارد و $R_B = 0$ است ولی در اثر اعمال لنگر M هیچ (در B) واکنشی ندارد



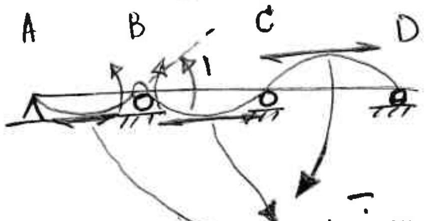
نکته: اگر لنگر خمشی متمرکز در محل شیب صفر (نقطه اکسترمم) از خط تأثیر پارامتری اعمال شود پارامتر مورد نظر صفر خواهد بود.

شیب صفر

خط تأثیر R_B :

۷۷ از آزمون جامع

در چند نقطه از تیر زیر می‌توان لنگر خمشی متمرکز M را اعمال کرد به طوری که لنگری در تکیه‌گاه B به وجود نیاید

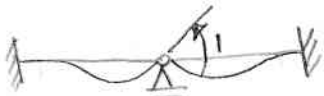


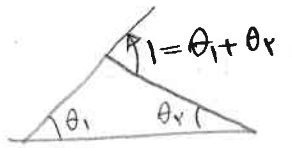
۳ نقطه

شیب صفر دارد

۲۴۶ ← (۴)

M_B

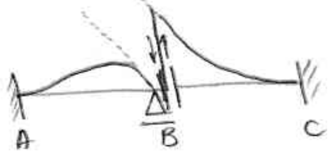




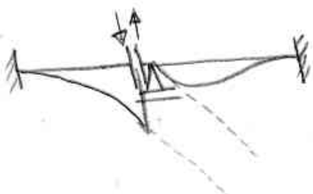
دقت شود که لنگر واحد استاندارد یک تغییرشکل با تغییر شکل سمت راست است
سمت چپ
مثل این حالت

۲۴۸, ۲۴۷

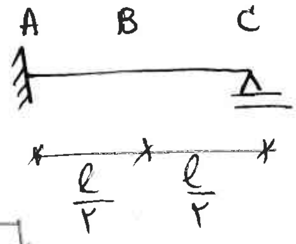
$(V_B)_R$:

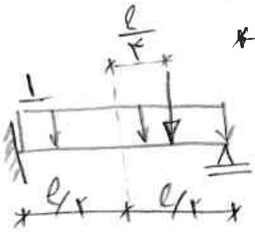


$(V_B)_L$:



سطح زیر نمودار خط تاثیر R_A لنگر گیردار برابر است با $\frac{5}{8}l$ ، سطح زیر نمودار خط تاثیر لنگر وسط تیر چقدر است





بار گسترده L روی تیر می‌گذاریم

$$R_A = W\cdot A = \frac{5}{8}l \longrightarrow R_C = \frac{3}{8}l$$

$W = 1$ ، $A = \frac{5}{8}l$

* بدست آوردن سطح زیر نمودار خط تاثیر لنگر از روی خط تاثیر عکس العمل تکیه گاهی

$$M_B = R_C * \frac{l}{2} - W * \frac{l}{2} * \frac{l}{4} = \frac{3l}{8} * \frac{l}{2} - \frac{l^2}{8} = \frac{l^2}{16} = W * A \longrightarrow A = \frac{l^2}{16}$$

$W = 1$ ، A: سطح زیر نمودار خط تاثیر لنگر وسط تیر

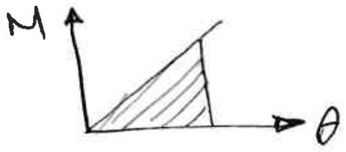
لنگر B را از استاتیک بدست آوردیم و آنرا مساوی $W*A$ قرار می‌دهیم

A: مساحت زیر نمودار خط تاثیر لنگر

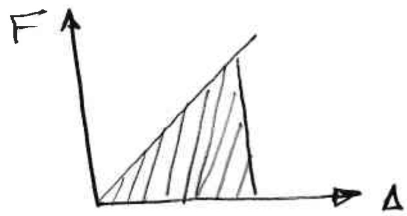
* خیز و شیب سازه‌ها *

فرضیات: ۱) رفتار مصالح خطی است

۲) نیرو به صورت تدریجی به سازه وارد می‌شود



$$W_{ext} = \frac{1}{2} M\theta$$

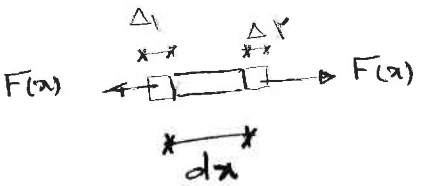


$$W_{ext} = \frac{1}{2} F\cdot\Delta$$

Strain Energy

$$\frac{1}{2}F(x)\cdot\Delta_1 + \frac{1}{2}F(x)\cdot\Delta_2 = \frac{1}{2}F(x)(\Delta_1+\Delta_2) = \frac{1}{2}F(x)\cdot dl$$

dl: افزایش طول المان



* انواع انرژی کرنشی سازه *

۱) انرژی کرنشی ناشی از تغییر شکل محوری

$$dl = \frac{F(x)\,dx}{E\cdot A(x)} \qquad du = \frac{1}{2}F(x)\cdot dl = \frac{F(x)^2\cdot dx}{2E\,A(x)}$$

در بارگذاری مجازی $\frac{1}{2}$ نداریم چون بار مجازی ۱ را می‌توان در آن واحد یا به سرعت اعمال کرد

$\frac{V\,4}{S}$

2. $u = \int \frac{F^2(x)\,dx}{2E\,A(x)}$ axial rigidity : $EA(x)$

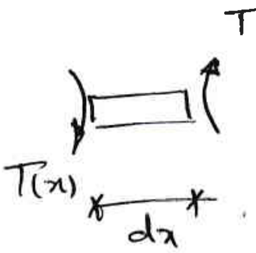
۲) انرژی کرنشی ناشی از پیچش:

به عبارت دیگر

$\frac{1}{2}T(x)\times\phi_1 + \frac{1}{2}T(x)\times\phi_2$

$= \frac{1}{2}T(x)(\underbrace{\phi_1+\phi_2}_{d\phi})$

$= \frac{1}{2}T(x).d\phi$

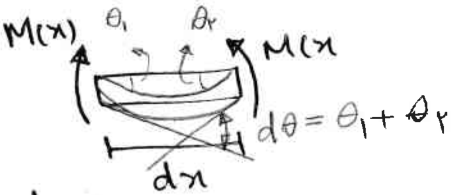


$GJ(x)$

$$d\phi = \frac{T(x).dx}{G.J(x)} \qquad dU = \frac{1}{2}T(x)d\phi = \frac{T^2(x)\,dx}{2\,G.J(x)}$$

$$U = \int du = \int \frac{T^2(x).dx}{2G\,J(x)}$$

۳) انرژی کرنشی ناشی از خمش

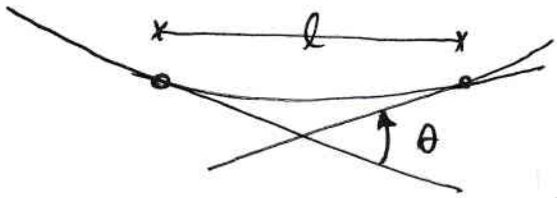


اگر قاب مسطح باشد و نیروها در صفحه قاب به قاب وارد شود در سازه پیچش بوجود نمی‌آید

$dU = \frac{1}{2}M(x)\times\theta_1 + \frac{1}{2}M(x)\theta_2$

$dU = \frac{1}{2}M(x)\,(\overbrace{\theta_1+\theta_2}^{d\theta}) = \frac{1}{2}M(x).d\theta$

اختلاف زاویه دو نقطه تقسیم بر طول بین آن دو نقطه انحنای بین آن دو نقطه را می‌دهد



انحنا $k = \frac{\theta}{l}$

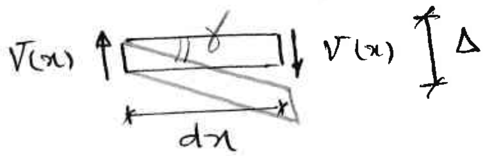
Curvature

$$k = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \longrightarrow d\theta = \frac{M(x).dx}{EI}$$

که همان dl هم می‌تواند باشد

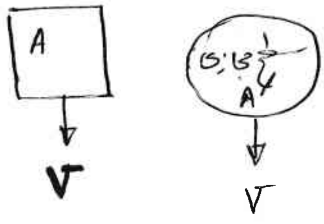
$$U = \int dU = \int \frac{M^2(x).dx}{2E\,I(x)}$$

۴) انرژی کرنشی ناشی از تغییر شکل برشی: $\frac{۷۴}{۵}$



سطح مقطع موثر برشی

$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad Q = A\bar{y} = 0$$



سطح مقطع موثر برشی: $A' < A$
همواره از A کوچکتر است

۱) همان برشی که روی مقطع اصلی اثر کرده روی مقطع موثر برشی هم اثر می‌کند

۲) توزیع تنش برشی در سطح مقطع موثر برشی یکسان است

۳) توزیع کرنش " " " " "

$$A' = \frac{5}{6}A = 83\% A$$

$$A' = \frac{9}{10}A = 90\% A$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{V(x)}{A'(x)\cdot G}$$

$$\Delta = \gamma \cdot dx = \frac{V(x).dx}{G A'(x)}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{V(x)\,dx}{G\,A'(x)}}$$

$$dU = \frac{1}{2} V * \Delta = \frac{1}{2} V(x) * \frac{V(x)\,dx}{G A'(x)} = \frac{V^2(x).dx}{2G.A'(x)}$$

$$U = \int du = \int \frac{V^2(x)\,dx}{2G A'(x)}$$

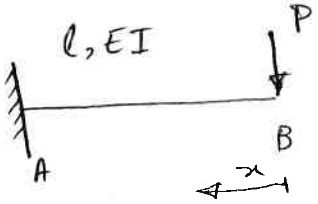
روشهای تحلیل سازه

روش کار حقیقی : Real Work

$$W_{external} = W_{internal}$$

$$\frac{1}{2}P\cdot\Delta = \int \frac{F^2(x)\,dx}{2EA(x)} + \int \frac{T^2(x)\,dx}{2GJ(x)} + \int \frac{V^2(x)\,dx}{2G\cdot A'(x)} + \int \frac{M^2(x)\,dx}{2EI(x)}$$

$$\frac{1}{2}M\cdot\theta$$



مثال: تغییر مکان انتهای تیر طره زیر را تحت اثر بار متمرکز P محاسبه کنید

در تمام صفحه‌ای که بار در صفحه ایجاد می‌شود برش نداریم

$$W_{ex} = W_{in}$$

$$\frac{1}{2}P\cdot\Delta = \int_0^l \frac{M^2(x)\,dx}{2EI} \rightarrow \frac{1}{2}P\cdot\Delta_B = \int_0^l \frac{(-Px)^2\,dx}{2EI} = \left[\frac{P^2x^3}{6EI}\right]_0^l$$

$$= \frac{P^2l^3}{6EI} \quad \Rightarrow \quad \Delta_B = \frac{Pl^3}{3EI}$$

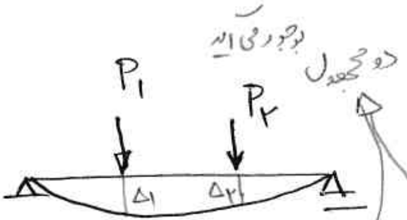
از انرژی کرنشی برشی در مقایسه با انرژی کرنشی خمشی چشم پوشی می‌کنیم

شیب انتهای تیر زیر را تحت اثر لنگر متمرکز M بدست آوریم

$$W_{ex} = W_{in}$$

$$\frac{1}{2}M\cdot\theta = \int_0^l \frac{M^2(x)\,dx}{2EI} = \int_0^l \frac{M^2\,dx}{2EI} = \frac{M^2l}{2EI}$$

$$\theta_B = \frac{Ml}{EI}$$



نکته: به دو دلیل زیر روش کار حقیقی روش مناسبی برای تحلیل سازه‌ها نمی‌باشد

۱) بایستی بارگذاری بصورت تکی باشد (یا یک نیروی متمرکز یا بصورت لنگر خمشی متمرکز)

$$W_{ex} = W_{in} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}P_1\Delta_1 + \frac{1}{2}P_2\Delta_2 = \int \frac{M^2(x)\,dx}{2EI}$$

اگر بارگذاری بصورت m نیروی متمرکز و n لنگر متمرکز باشد

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} P_i \cdot \Delta_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M_i \cdot \theta_i$$

۱۲) حتی اگر بارگذاری بصورت نیروی متمرکز باشد، با استفاده از روش کار حقیقی، فقط می‌توان تغییر مکان زیر بار متمرکز را محاسبه کرد و تغییر مکان سایر نقاط و همچنین شیب هیچ نقطه ای را نمی‌توان محاسبه کرد. اگر بارگذاری بصورت لنگر خمشی متمرکز باشد با استفاده از روش کار حقیقی فقط می‌توان شیب در محل لنگر خمشی متمرکز را بدست آورد و شیب سایر نقاط و تغییر مکان هیچ نقطه ای از تیر با این روش قابل محاسبه نمی باشد. مطالب فوق نشان می‌دهد که روش کار حقیقی روش مناسبی برای تحلیل سازه ها نمی باشد.

Method of Virtual work

روش کار مجازی

لنگر مجازی داخلی

$$1 * \Delta = \int \frac{M(x) \cdot m(x)\, dx}{E \cdot I(x)} + \int \frac{F(x) \cdot f(x)\, dx}{E\, A(x)} + \int \frac{T(x) \cdot t(x)\, dx}{G\, j(x)} + \int \frac{V(x)\, v(x) \cdot dx}{G\, A'(x)}$$

نیروی واحد مجازی خارجی

Δ خارجی حقیقی

$M(x)$: لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی

$m(x)$: 〃 〃 〃 〃 مجازی

$F(x)$: نیروی محوری ناشی از بارگذاری حقیقی

$f(x)$: 〃 〃 〃 〃 مجازی

$T(x)$: لنگر پیچشی ناشی از بارگذاری حقیقی

$t(x)$: 〃 〃 〃 〃 مجازی

$V(x)$: نیروی برشی ناشی از بارگذاری حقیقی

$v(x)$: 〃 〃 〃 مجازی

$$m(x) \cdot \frac{M(x)}{E I(x)} \rightarrow d\theta \text{ حقیقی}$$

$$k(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$f(x) * \frac{F(x)}{E \cdot A(x)} \rightarrow d\ell \text{ حقیقی}$$

نیروی محوری مجازی

$$t(x) * \frac{T(x) \cdot dx}{G j(x)} \rightarrow \text{حقیقی } d\phi$$

$$v(x) * \frac{V(x)\, dx}{G \cdot A'(x)}$$

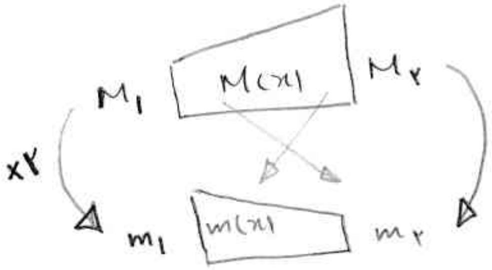
تغییر مکان برشی حقیقی داخلی

Δ برشی حقیقی داخلی

حالت خاص:

در محاسبه $\int \frac{M(x)\, m(x)\, dx}{EI(x)}$ ممکن است حالتی پیش آید که هم نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری حقیقی بصورت خطی باشد و هم نمودار لنگر خمشی ناشی از بارگذاری مجازی . در این صورت داریم


غیرخطی است چون ۲ شیب دارد



$$\int \frac{M(x)\cdot m(x)\, dx}{EI} = \frac{l}{6EI}\Big[\underbrace{\underset{2}{2M_1m_1} + \underset{2}{2M_2m_2} + \underset{1}{M_1m_2} + \underset{1}{M_2m_1}}_{6}\Big]$$

* حفظ شود:

$dx \equiv l$

$EI \equiv EI$

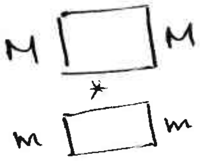
$$M(x) = M_1 + (M_2 - M_1)\frac{x}{l}$$

$$m(x) = m_1 + (m_2 - m_1)\frac{x}{l}$$

حالتهای خاص:

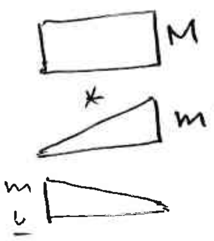
۱) مستطیل در مستطیل

$$\int \frac{M(x)\, m(x)\, dx}{EI} = \frac{Mml}{EI}$$



۲) مستطیل در مثلث

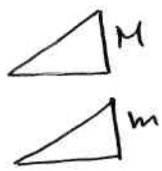
$$\int \frac{M(x)\, m(x)\, dx}{EI} = \frac{Mml}{2EI}$$



چپ و راست بودن مثلث فرقی نمی کند

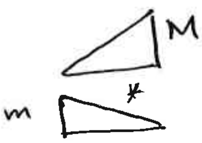
۳) مثلث در مثلث هم فاز:

$$\int \frac{M(x)\, m(x)\, dx}{EI} = \frac{Mml}{3EI}$$ Syncronize



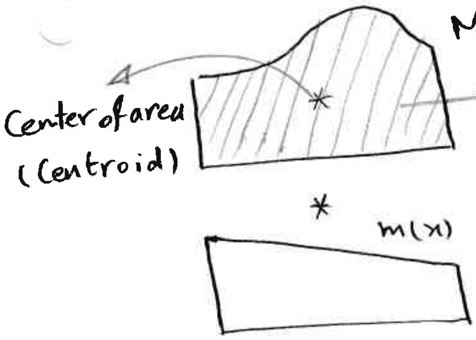
۴) مثلث در مثلث غیرهمفاز

$$\int \frac{M(x)\, m(x)\, dx}{EI} = \frac{Mml}{6EI}$$



چنانچه از نمودارها لنگر حقیقی یا مجازی یکی بصورت خطی باشه، از قاعده حور برای محاسبه $\int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}$ استفاده میکنیم

قاعده حور

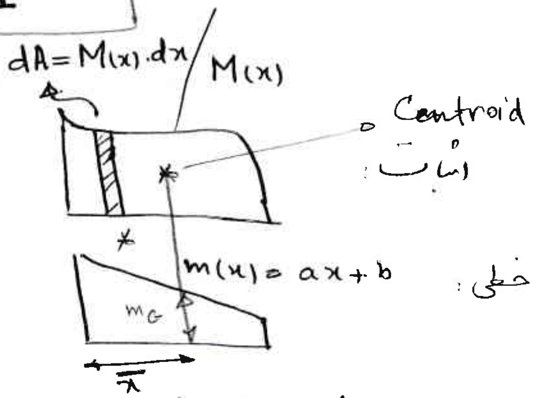


A_m: سطح زیر نمودار لنگر غیرخطی

m_G: مقدار لنگر در نمودار لنگر خطی در نقطه متناظر مرکز سطح نمودار لنگر غیرخطی

$$\boxed{\int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI} = \frac{A_m * m_G}{EI}}$$

اثبات:



خطی:

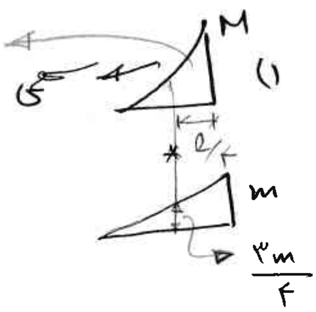
$$\int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI} = \int \frac{M(x)(ax+b)}{EI}\,dx$$

$$= \frac{a}{EI}\underbrace{\int x\,M(x)\,dx}_{A_m\cdot\bar{x}} + \frac{b}{EI}\underbrace{\int M(x)\,dx}_{A_m}$$

$$= \frac{A_m}{EI}(a\bar{x}+b) = \frac{A_m * m_G}{EI}$$

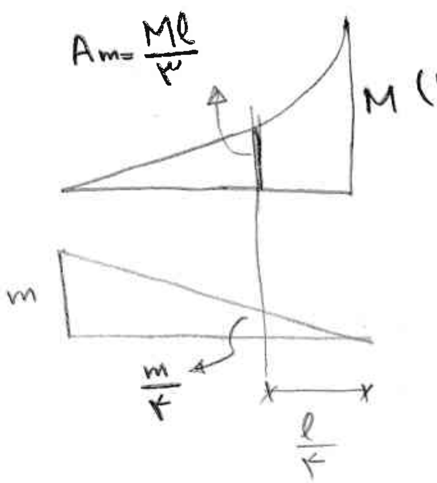
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{\int x\cdot M(x)\,dx}{A_m}$$

حالات مختلف قاعده حور



$$\int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI} = \frac{1}{EI}\cdot\frac{Ml}{3} * \frac{3m}{4}$$

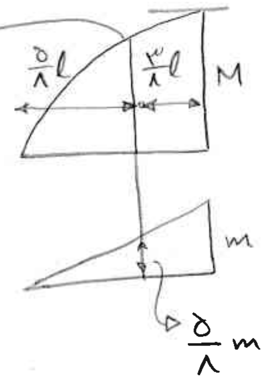
$$= \frac{Mml}{4EI}$$



$$\int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI} = \frac{\frac{Ml}{3} * \frac{m}{4}}{EI} = \frac{Mml}{12EI}$$

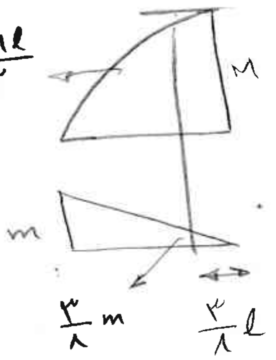
(۳

$$\int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI} = \frac{1}{EI} * \frac{2Ml}{3} * \frac{5}{8} m = \frac{5Mml}{12EI}$$



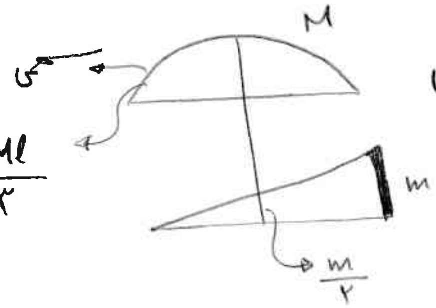
(۴

$$\int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI} = \frac{1}{EI} * \frac{2Ml}{3} * \frac{3}{8} m = \frac{Mml}{4EI}$$



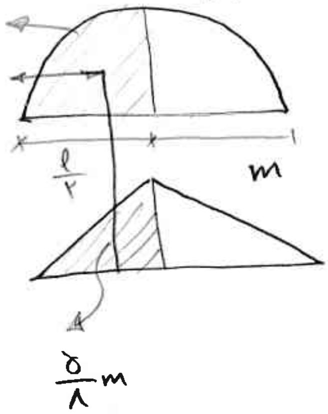
(۵

$$\int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI} = \frac{1}{EI} * \frac{2Ml}{3} * \frac{m}{2} = \frac{Mml}{3EI}$$



(۶

$$\int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI} = 2 * \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}M * \frac{l}{2}\right) * \frac{5}{8} m = \frac{5Mml}{12EI}$$



قضیه اول کاستیلیانو:

$U = U(\Delta_i, \theta_i) \rightarrow \frac{dU}{d\Delta_i} = F_i$ قضیه اول

انرژی کرنشی

$$\frac{dU}{d\theta_i} = M_i$$

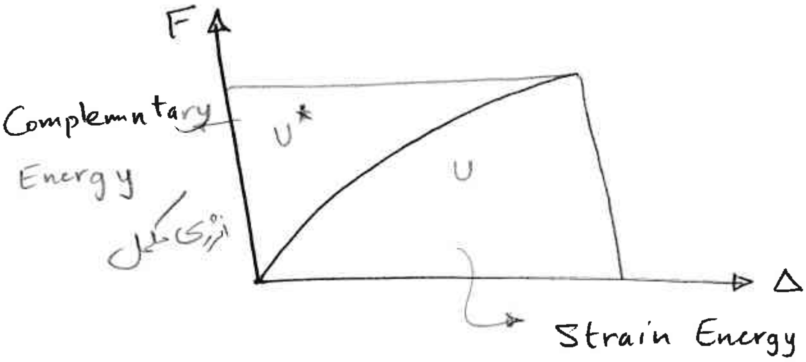
$U = U(F_i, M_i)$ $\qquad \frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i$ قضیه دوم

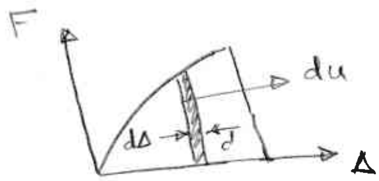
$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i$$

نکته: قضیه اول کاستیلیانو کلی است و محدودیتی ندارد بدین معنا که چه مصالح از قانون هوک تبعیت بکند و چه نکند

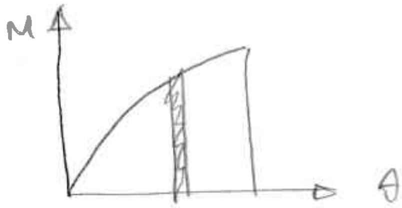
مثلاً $\sigma = E\varepsilon^3$ باشد در هر دو حالت می‌توان از قضیه اول کاستیلیانو برای محاسبه Δ و θ استفاده کرد

ولی فقط هنگامی می‌توان از قضیه دوم کاستیلیانو استفاده کرد که رفتار سازه و مصالح آن خطی باشد (قانون هوک معتبر باشد)



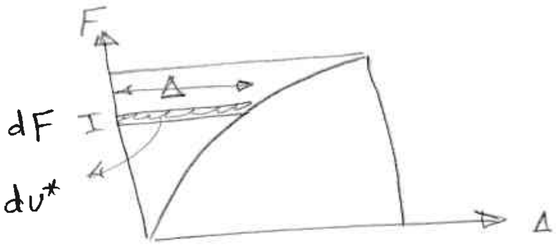


$$du = F \cdot d\Delta \rightarrow F = \frac{dU}{d\Delta}$$



$$du = M \cdot d\theta$$

$$M = \frac{du}{d\theta}$$



$$dU^* = \Delta\, dF$$

$$\rightarrow \Delta = \frac{dU^*}{dF} \quad \text{یا} \quad \Delta = \frac{\partial U^*}{\partial F}$$

حال U و U^* زمانی برابرند که رفتار مصالح خطی باشد

$$U = U^* = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$$

پس همواره داریم

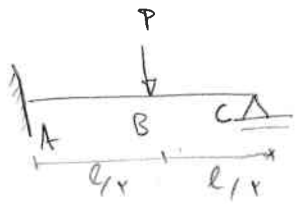
$$U + U^* = F \cdot \Delta$$

قضیه اول ← روشهای جابجائی

قضیه دوم ← روشهای نیرو

۱) روش نرمی (نیرو) ← مجهولات M و F (نیرو، لنگر)

تحلیل II ← ۲) روش سختی (جابجائی) ← مجهولات Δ و θ



تغییر شکل سازگار (معادله سازگاری)

ص ۱۷۹-۱۸۰

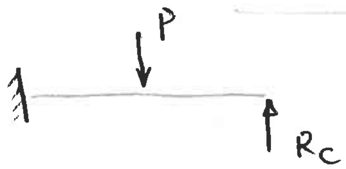
رابطه (۴) رابطه (۸)

Compatibility equation : $\theta_A = 0 \rightarrow \dfrac{Pl^2}{16EI} - \dfrac{M_A \times l}{3EI} = 0$

$$\rightarrow \boxed{M_A = \frac{3Pl}{16}}$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_C \times l + \frac{3Pl}{16} = P \times \frac{l}{2}$$

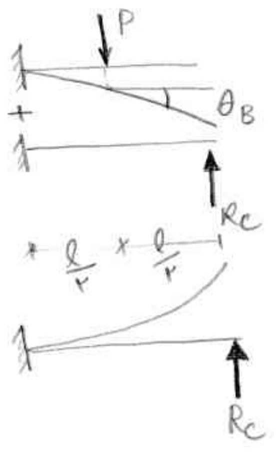
$$\rightarrow R_C = \frac{5P}{16}$$



یک روش دیگر

رابطه (۱)

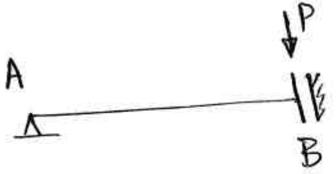
Compatibility equation : $\Delta C = 0 \rightarrow \dfrac{P(\frac{l}{2})^3}{3EI} + \theta_B \times \dfrac{l}{2} - \dfrac{R_c l^3}{3EI} = 0$



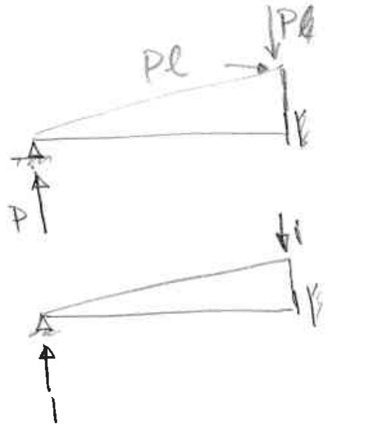
$$\theta_B = \frac{P(\frac{l}{2})^2}{2EI}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{24}\right)\frac{Pl^3}{EI} = \frac{R_c l^3}{3EI}$$

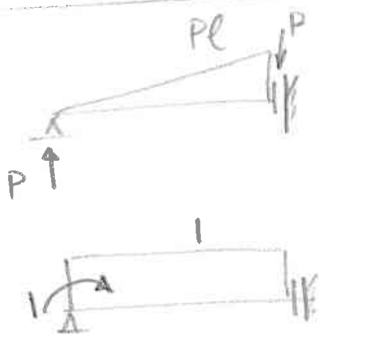
$$\rightarrow \boxed{R_c = \frac{5}{16}P}$$



راه حل اول : روش کار مجازی :



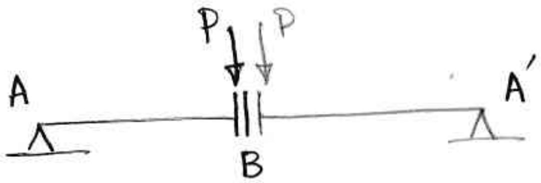
$$1 \times \Delta_B = \int \frac{M(x)m(x)\,dx}{EI} = \frac{Pl \times l \times l}{3EI} = \frac{Pl^3}{3EI}$$



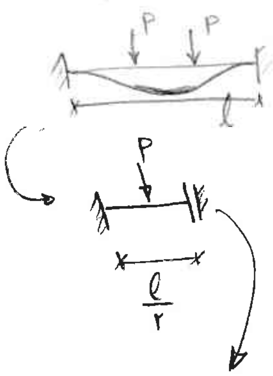
$$1 \times \theta_A = \int \frac{M(x)m(x)\,dx}{EI} = \frac{Pl \times 1 \times l}{2EI} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

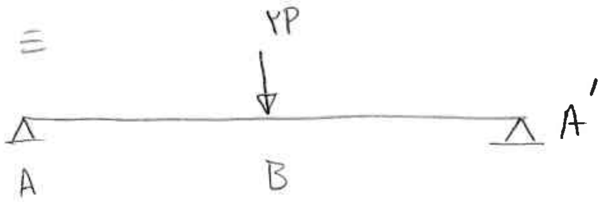
راه حل دوم :

نکته : هرگاه سازه‌ای به یک تکیه‌گاه گیردار غلطکی ختم شود می‌توان حل سازه را نسبت به این تکیه‌گاه گیردار غلطکی قرینه کرد و سازه‌ای با طول دو برابر معادل با سازه اولیه بدست آورد.



تقارن و پادتقارن نوع ۱





تیر ۴ حالت خاص

این نقطه شکل تیر اصلی

Δ دارد

θ ندارد ← صفر است

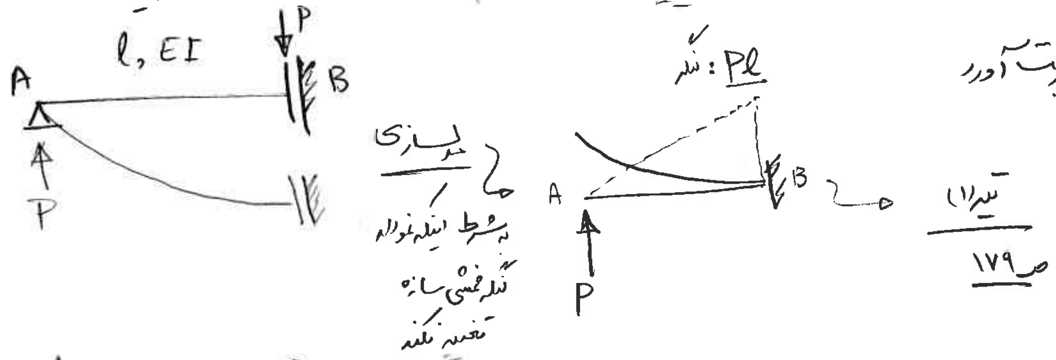
V برش آن نقطه هم صفر است

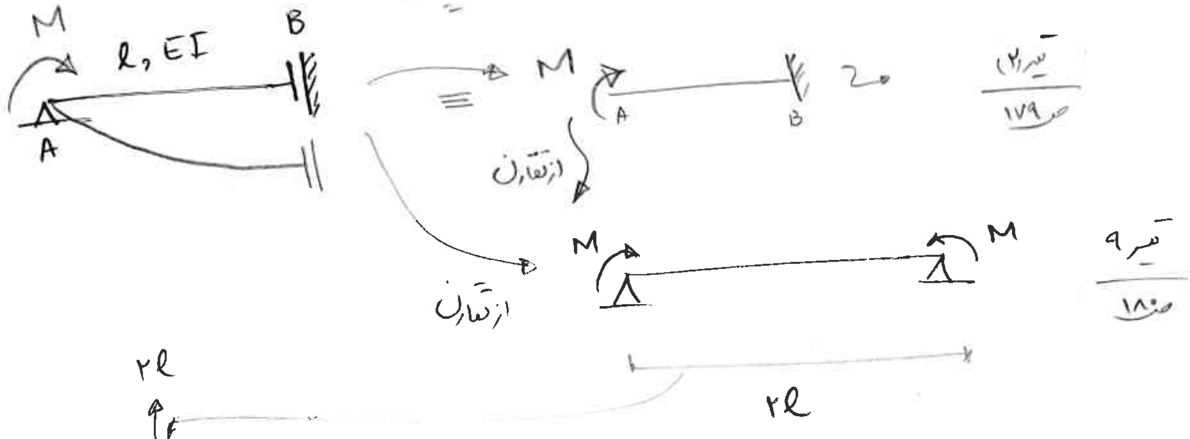
$$\theta_A = \frac{2P(2l)^2}{16EI} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\Delta_B = \frac{2P(2l)^3}{48EI} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

راه حل سوم:

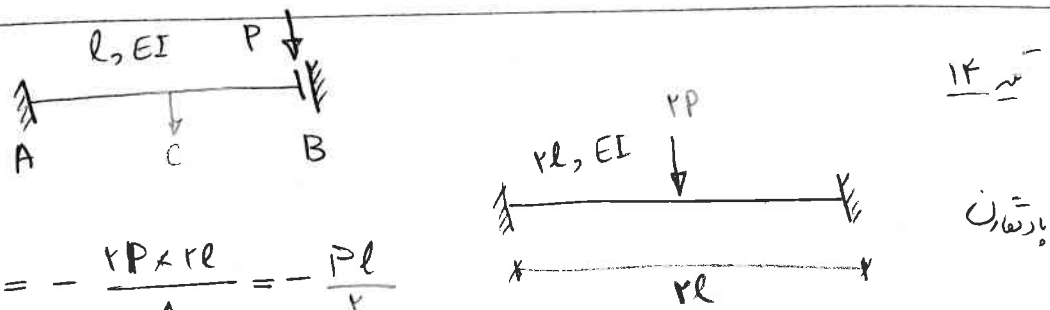
نکته: به شرطی که نمودار لنگر خمشی سازه تغییر نکند می توان درجات آزادی تکیه گاه‌ها را تعویض نمود و سازه ای معادل با سازه اولیه بدست آورد





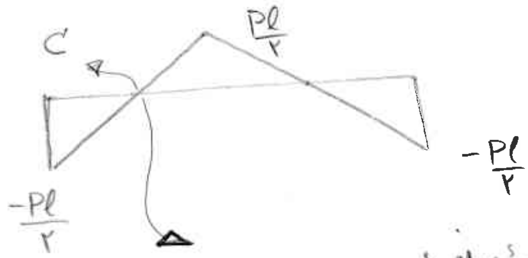
$$\theta_A = \frac{M \times 2l}{2EI} = \frac{Ml}{EI}$$

$$\Delta_B = \Delta_{mid} = \frac{M(2l)^2}{8EI} = \frac{Ml^2}{2EI}$$



تیر ۵ $\quad M_A = -\dfrac{2P \times 2l}{8} = -\dfrac{Pl}{2}$

$$\Delta_B = \frac{2P(2l)^3}{192EI} = \frac{Pl^3}{12EI}$$



نقطه عطف: در تیر اصلی: $M_{mid} = 0$

وسط B, A لنگر

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI} \to 0$$

$$\Delta_{\text{وسط } AB} = \Delta_C = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{1}{8}\Delta_B = \frac{Pl^3}{96EI}$$

$(m$ (یا نیوتن $\Delta : \dfrac{\alpha w l^4}{EI}$

$\dfrac{\frac{N}{m} \times m^4}{\frac{N}{m^2} \times m^4}$ نیوتن / متر

$\Delta : \dfrac{\alpha w l^4}{EI} , \dfrac{\alpha P l^3}{EI} , \dfrac{\alpha M l^2}{EI}$

$\theta : \dfrac{\alpha w l^3}{EI} , \dfrac{\alpha P l^2}{EI} , \dfrac{\alpha M l}{EI}$

نکته: برای تیر یک سر گیردار غلطکی فوق موارد زیر وجود دارد (دیگر سر گیردار غلطکی یک سر گیردار)

۱) لنگر تکیه‌گاهها هم جهت است (هر دو پاد ساعتگرد هستند)

۲) مقدار لنگر تکیه‌گاهها برابر $\dfrac{Pl}{2}$ است

۳) لنگر وسط تیر صفر است و این نقطه، نقطه عطف منحنی خمش سازه خواهد بود

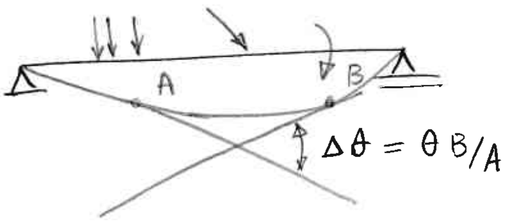
۴) سختی سازه در انتهای گیردار غلطکی برابر است با $\dfrac{12EI}{l^3}$ و بنابراین تغییر مکان نقطه اثر بار برابر است با $\dfrac{Pl^3}{12EI}$

۵) تغییر مکان وسط تیر برابر است با نصف تغییر مکان تکیه‌گاه گیردار غلطکی $\left(\Delta_{mid} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{Pl^3}{12EI} = \dfrac{Pl^3}{24EI}\right)$

moments area methods

قضایای لنگر سطح:

قضیه اول لنگر سطح:



$$\Delta\theta = \theta_{B/A} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)\,dx}{EI(x)}$$

اختلاف شیب بین دو نقطه A و B برابر است با سطح زیر نمودار $\dfrac{M}{EI}$ در فاصله بین آن دو نقطه

$$k(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

$$\xrightarrow{\int} \int \frac{d\theta}{dx} = \int \frac{M}{EI} \rightarrow \int d\theta = \int \frac{M\,dx}{EI}$$

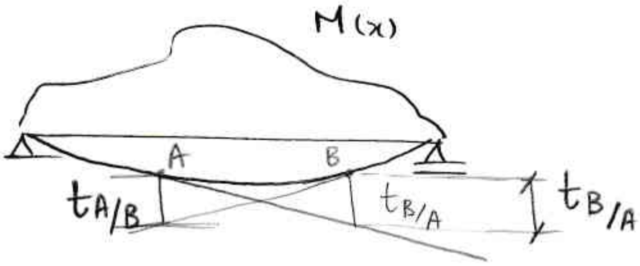
$\dfrac{M}{EI}$: elastic load : بار الاستیک

از جنس عکس طول است

$$\frac{N.m}{\frac{N}{m^2} \times m^4} = \frac{1}{m}$$

در این دو مبحث با بار الاستیک کار داریم { قضایای اول و دوم لنگر سطح / تیر مزدوج }

قضیه دوم لنگر سطح:



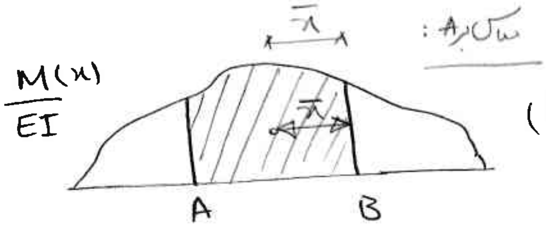
Tangential deviation of B with respect to A

انحراف مماس نقطه B از A

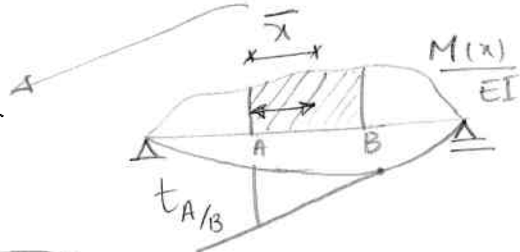
$$t_{B/A} = \int \frac{M(x)\,dx}{EI} * \bar{x}$$

Vertical distance: فاصله قائم

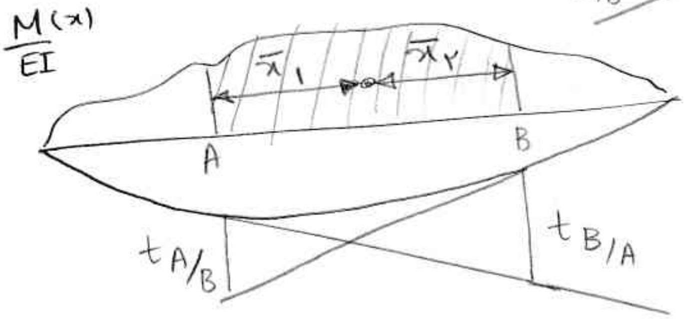
در تمام تحلیل‌ها منظور راستای شاقولی است



$\bar{x}$: فاصله عمودی مرکز سطح نمودار $\frac{M}{EI}$ (در فاصله A تا B) تا نقطه B



$$t_{A/B} = \int \frac{M(x)\,dx}{EI} * \bar{x}$$



$$t_{A/B} = \Delta\theta * \bar{x}_1$$

$$t_{B/A} = \Delta\theta * \bar{x}_2$$

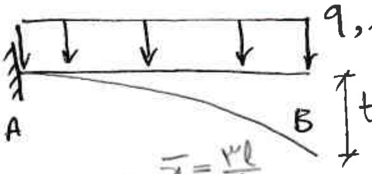
$$t_{A/B} + t_{B/A} = \Delta\theta \underbrace{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}_{AB} \rightarrow \Delta\theta = \frac{t_{A/B} + t_{B/A}}{AB}$$

نکته: قضایای اول و دوم لنگر سطح معمولاً در دو حالت زیر راه حل نسبتاً مناسبی می‌باشد.

۱) وقتی سازه دارای تکیه‌گاه گیردار باشد. در این حالت شیب تکیه‌گاه گیردار برابر صفر بوده و می‌توان با استفاده از قضیه اول لنگر سطح شیب هر نقطه‌ای را محاسبه کرد. و چنانچه خطی مماس بر سازه در محل تکیه‌گاه گیردار رسم کنیم با استفاده از قضیه دوم لنگر سطح و این خط مماس می‌توان تغییر مکان هر نقطه‌ای را بدست آورد.

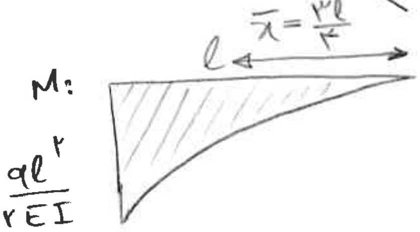
۲) وقتی سازه و بارگذاری هر دو متقارن است معمولاً شیب وسط سازه صفر است و می‌توان با استفاده از این نقطه میانی و قضایای اول و دوم لنگر سطح شیب و تغییر مکان نقاط سازه را بدست آورد.

حل:

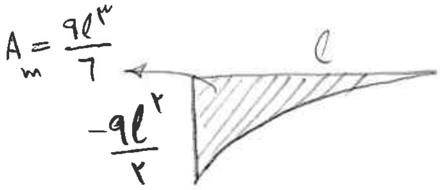


$t_{B/A} = \Delta_B$

$\theta_B = \frac{1}{3} * l * \frac{ql^2}{2EI} = \frac{ql^3}{6EI}$

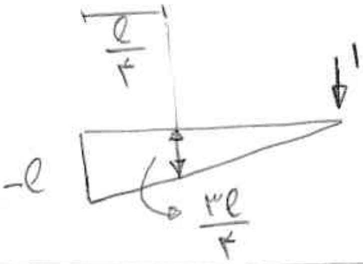


$t_{B/A} = \frac{ql^3}{6EI} * \frac{3l}{4} = \frac{ql^4}{8EI}$



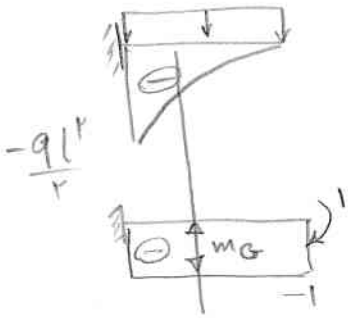
حل دوم: روش کار مجازی (روش مور) (روش بار واحد)

$\Delta_B = \frac{A_m * m_G}{EI} = \frac{\frac{ql^3}{6} * \frac{3l}{4}}{EI} = \frac{ql^4}{8EI}$

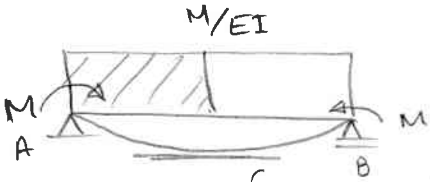


$A_m = \frac{(\frac{ql^2}{2})(l)}{3} = \frac{ql^3}{6}$

روش دیگر



$\theta_B = \frac{-\frac{ql^3}{6}(-1)}{EI} = \frac{ql^3}{6EI}$



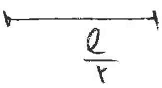
$\Delta_{mid} = \frac{Ml}{2EI} * \frac{l}{4} = \frac{Ml^2}{8EI}$

سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ از فاصله A و وسط تیر (سطح هاشور خورده)

فاصله مرکز سطح سطح هاشور خورده تا نقطه A

θ_A : سطح هاشور خورده است

که شیب صفر است ← تقارن وجود دارد



** **نکته**: چنانچه بین نقاط A و B مفصل خمشی وجود داشته باشد از هیچ یک از قضایای اول و دوم لنگر سطح نمی‌توان استفاده کرد ولی اگر بین نقاط A و B مفصل برشی وجود داشته باشد تنها می‌توان از قضیه اول لنگر سطح برای محاسبه شیب نقطه دلخواه استفاده کرد. ولی مجاز به استفاده از قضیه دوم لنگر سطح نیستیم

Conjugate beam method

روش تیر مزدوج

Elastic load بار الاستیک : $\frac{M}{EI}$

$\frac{M}{EI} \to L^{-1}$ دیمانسیون

برش در سازه مزدوج (V) ⟵ شیب در سازه اصلی θ

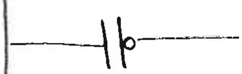
لنگر در سازه مزدوج (M) ⟵ تغییر مکان در سازه اصلی Δ

$\theta = \alpha \frac{Ml}{EI}$

$w = \frac{M}{EI}$

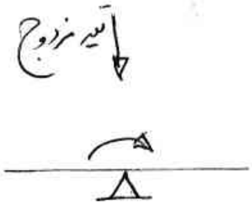
$V = wl \to l^{-1} * l \to$ (اسکالر است) چون θ بدون بعد است

$M = wl^{2} \to l^{-1} * l^{2} \to l \to$ چون Δ از جنس l است

مفصل خمشی برشی : ⟵ 

فقط نیروی محوری را منتقل می کند

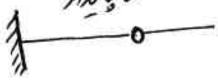
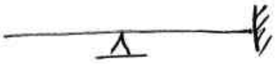
تیر مزدوج



۱) سازه معین :  DI = ۰ ⟵  DI = ۰ (تیر مزدوج)

۲) سازه نامعین :  DI = ۳ ⟵ ناپایدار استاتیکی DI = -۳

به همان تعداد قید کم دارد که درجه نامعینی سازه اصلی است

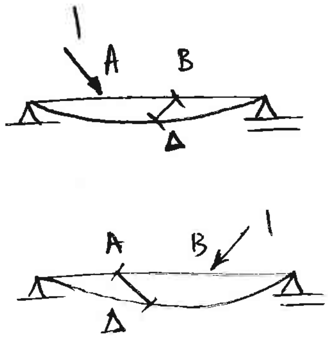
۳) سازه ناپایدار استاتیکی :  ناپایدار DI = -۱ ⟵  DI = +۱

$$\to (D.I.)_{beam} + (D.I)_{Conjugate\ beam} = 0$$

نکته : مزدوجِ مزدوجِ تیر، همان تیر اصلی خواهد شد

* قضیه ماکسول *

۱. حالت نیرو - نیرو



کار مجازی

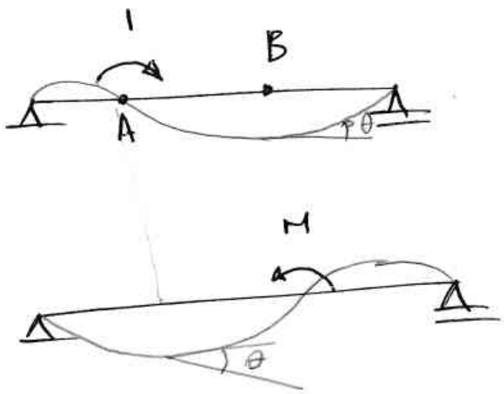
$m_1(x)$

$m_2(x)$

حقیقی ↗   مجازی ↑

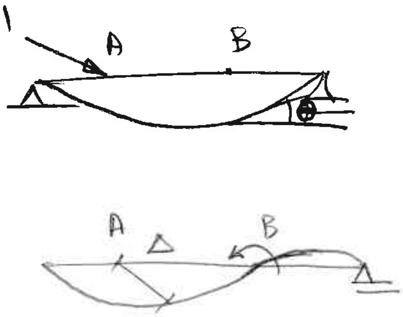
$$\Delta_B = \int \frac{m_1(x)\, m_2(x)\, dx}{EI}$$

۲) حالت لنگر، لنگر :



$\theta = \theta$

۳) حالت نیرو لنگر :



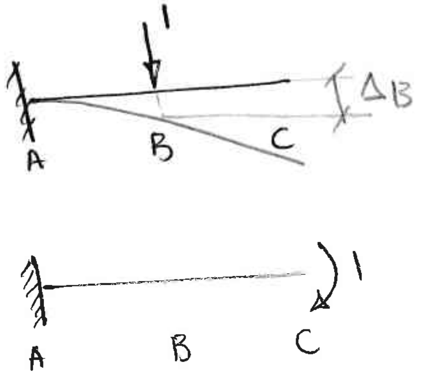
$\theta = \Delta$

$\theta \leftarrow$ P $(1)\dfrac{l^2}{2EI}$

$\Delta \leftarrow$ $(1)\dfrac{l^2}{2EI}$ M

۱۹۵/۵

تعمیم نیرو لنگر:

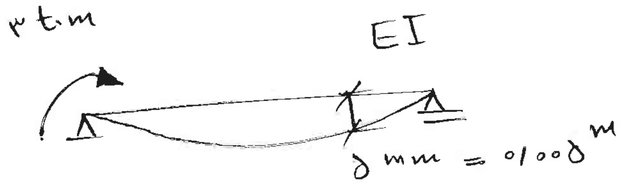


$$\theta_C=\theta_B=\frac{\overset{1}{P}l^2}{2EI}=\frac{l^2}{2EI}$$

$$\Delta_B=\frac{\overset{1}{M}l^2}{2EI}=\frac{l^2}{2EI}$$

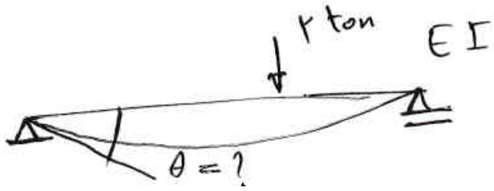
$$\to \theta_C=\Delta_B$$

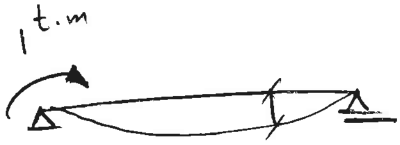
مثال عددی:



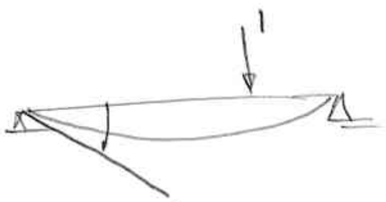
واحد لنگر باید واحد جابجایی هم در نظر گرفته شود

$\to M^{\,t.m} \longrightarrow \Delta^{(m)}$





$$\left(\frac{0.005}{3}\right)^{m} \longrightarrow \theta=\left(\frac{0.005}{3}\right)^{Rad}$$



$$\theta_{\text{تکیه‌گاهی}}=2\times\frac{0.005}{3}=\frac{0.01}{3}=0.0033\,Rad$$

اگر صلبیت تیر EI، n برابر شد نتایج در آخر محاسبه θ و Δ را $\frac{\theta}{n}$ و $\frac{\Delta}{n}$ می‌نویسیم

نکته: به شرطی که مولفه لنگر خمشی تغییر نکند جابجایی بارگذاری هم جابجایی مجاز می‌باشد

چنانچه سازه دارای قسمت صلب باشد، همواره می‌توان بارگذاری روی قسمت صلب را به هر شکل دلخواه جابجا نمود

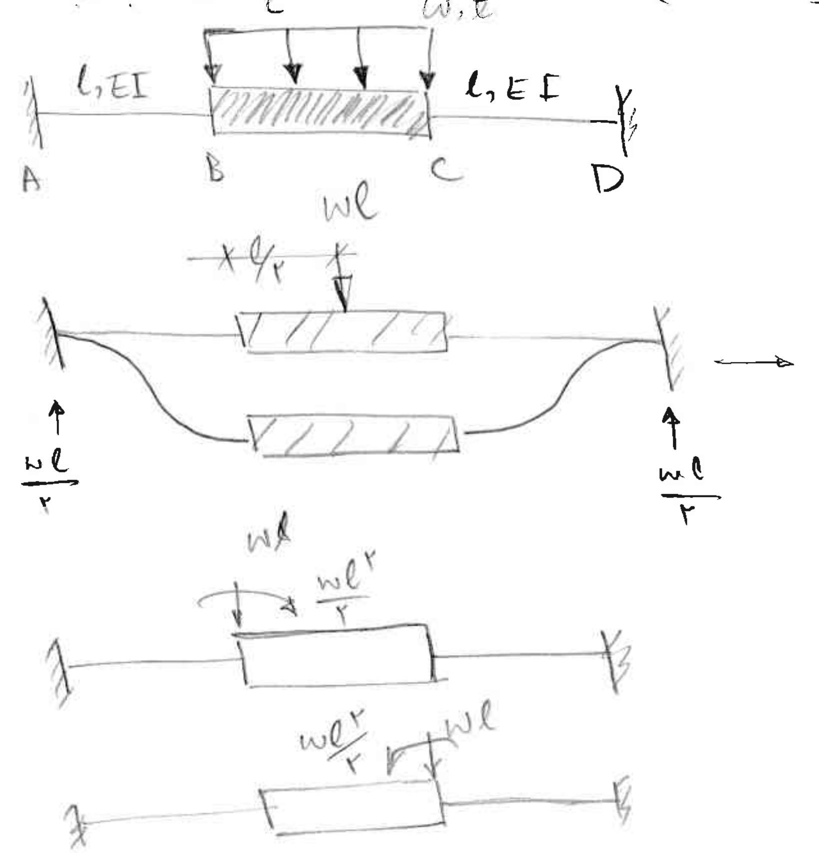
و این مطلب ربطی به معینی یا نامعینی سازه ندارد

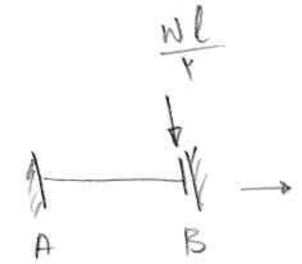
در مورد تیرهای نامعین می‌توان گفت که به هیچ وجه مجاز به جابجایی بارگذاری نیستیم چون مولفه لنگر خمشی سازه با جابجایی شده

بارگذاری تغییر خواهد کرد.

- در تیرهای معین برای تیر طره چنانچه بارگذاری بطرف تکیه گاه گیردار جابجا شود کمی جابجایی مجاز را خواهیم داشت ولی اگر بارگذاری بطرف انتهای آزاد تیر طره جابجا شود موجب تغییر نمودار لنگر خمشی سازه شده و مجاز نمی باشد

- همواره می توان بارگذاری روی بالکن را (Over hang) بطرف تکیه گاه جابجا کرد ولی عکس جابجایی مجاز نمی باشد



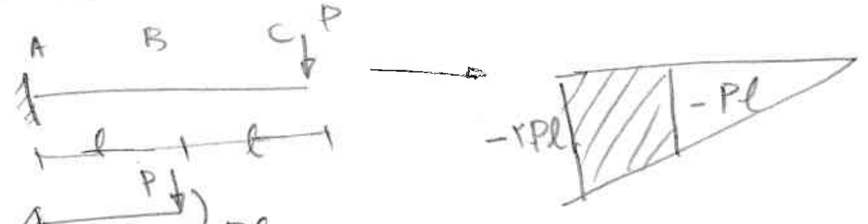


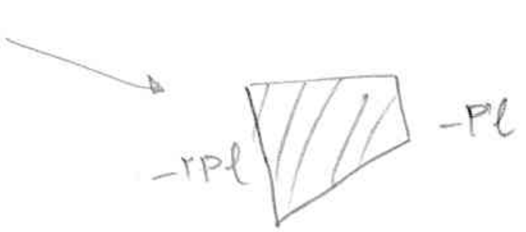
۱۴ تا

$$\Delta = \frac{wl}{۲} \times \frac{l^3}{۱۲EI} = \frac{wl^4}{۲۴EI}$$

$$M_A = M_B = M_C = M_D = \frac{wl}{۲} \times \frac{l}{۲}$$

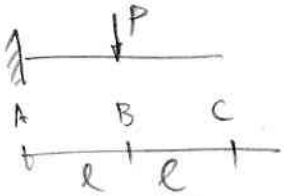
$$= \frac{wl^4}{۴}$$





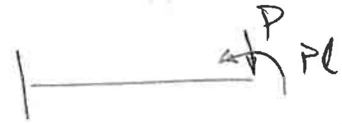
$$\Delta_B = \frac{Pl^3}{۳EI} + \frac{Pl \times l^2}{۲EI} = \frac{۵Pl^3}{۶EI}$$

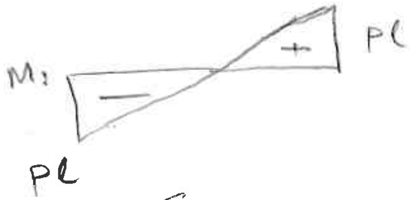
۹۱/۵

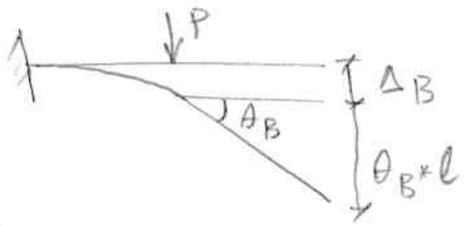


$\Delta C = ?$

$$\Delta_C = \underbrace{\frac{Pl^3}{3EI}}_{\Delta_B} + \underbrace{\frac{Pl^2}{2EI}}_{\theta_B} * l = \frac{5Pl^3}{6EI}$$





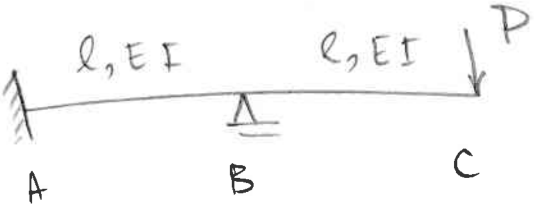


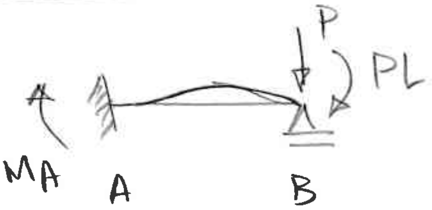
$$\cancel{\Delta C = \frac{P(2l)^3}{3EI} - \frac{Pl(2l)^2}{2EI}}$$

غلط

$M_A = ?$

$\theta_B = ?$



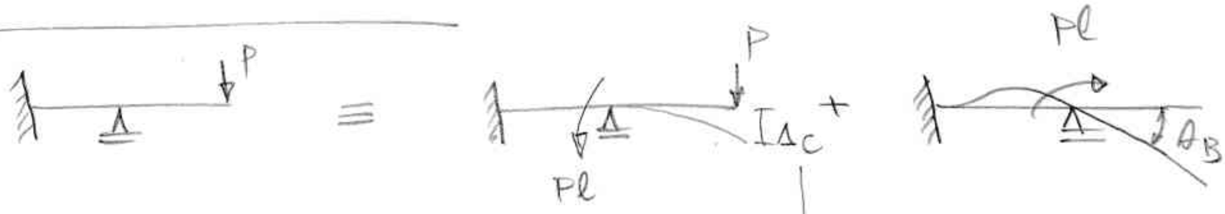


$\frac{Pl}{2} = M_A$

$$\theta_B = \frac{Ml}{4EI} = \frac{Pl * l}{4EI} = \frac{Pl^2}{4EI}$$

$$\Delta C = \frac{Pl^3}{3EI} + \underbrace{\frac{Pl^2}{4EI}}_{\theta_B} * \underbrace{l}_{l_{BC}} = \frac{7Pl^3}{12EI}$$

BC ناشی از خمش



$= \frac{Pl^2}{4EI}$

BC مثل تیر طره عمل می‌کند

$$\Delta C = \frac{Pl^3}{3EI}$$

رابطه کار مجازی: درصورتی که سازه دارای فنرهای پیچشی یا انتقالی باشد بصورت زیر خواهد بود

نیروی مجازی خارجی - جابجائی حقیقی خارجی

$$\left\{\begin{matrix}1*\Delta\\1*\theta\end{matrix}\right\} = \int \frac{M(x)\,m(x)\,dx}{EI} + \sum_{i=1}^{m}\frac{M_{i\theta}\, m_{i\theta}}{k_{i\theta}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{F_{is}\, f_{is}}{k_{is}}$$

لنگر مجازی خارجی - چرخش حقیقی خارجی

$M_{i\theta}$: لنگر فنر پیچشی iام ناشی از بارگذاری حقیقی

$m_{i\theta}$: " " " iام " " مجازی

F_{is}: نیروی فنر انتقالی iام ناشی از بارگذاری حقیقی

f_{is}: " " " " " مجازی

فرض شده که سازه دارای m فنر پیچشی و n فنر انتقالی است.

$\frac{M_{i\theta}}{K_{i\theta}}$: $\Delta\theta$ چرخش حقیقی فنر

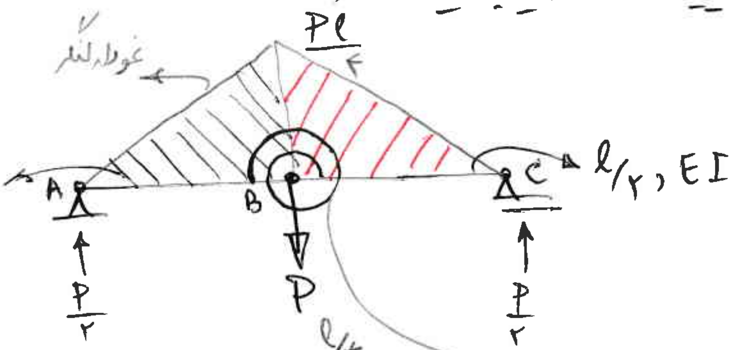
$m_{i\theta}$: لنگر مجازی فنر پیچشی

$\frac{F_{is}}{K_{is}}$: Δl تغییر طول حقیقی فنر داخلی

f_{is}: نیروی مجازی فنر داخلی

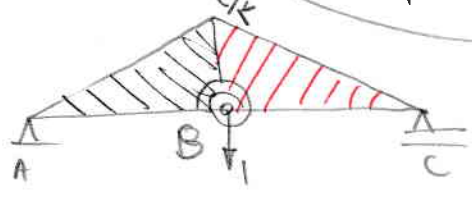
مثال: مطلوبست تغییر مکان B و شیب تکیه گاهها (تست ۳۸۷ کتاب)

$K_\theta = 6\,\frac{EI}{L}$



اگر سازه معین باشد فنر نقشی در آن ندارد

$M_\theta = \frac{Pl}{4}$



۹۳
S

$$1 * \Delta_B = \int \frac{M(x)\, m(x)\, dx}{EI} + \frac{M_\theta\, m_\theta}{k_\theta}$$

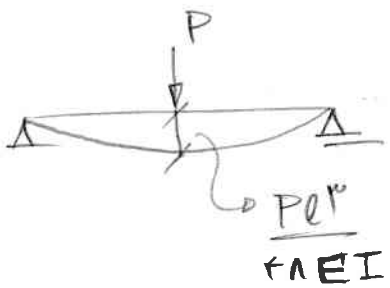
همان تغییر مکان B در حالتی که سختی فنر پیچشی به بینهایت میل کرده است (گره B پیوسته شده است)

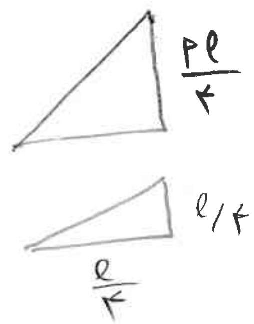
↓

تبدیل به تیر پایه ۲

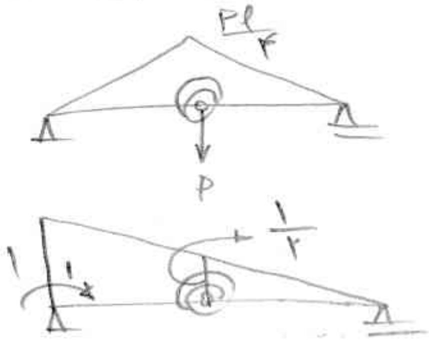
↓

این تکلیف همان به درد خوراکه وقتی سختی فنر را به ∞ میل دهیم حاصل کنم تیر پایه شود





$$\text{با}\quad 1 * \Delta_B = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{\frac{Pl}{4} * \frac{l}{4}}{\frac{6EI}{l}} = \frac{Pl^3}{32EI}$$



$M_\theta = \frac{Pl}{4}$

حال اگر θ_A را بخواهیم

$m_\theta = \frac{1}{2}$

$$1 * \theta_A = \int \frac{M(x)\, m(x)\, dx}{EI} + \frac{M_\theta\, m_\theta}{k_\theta} = \frac{Pl^2}{12EI} + \frac{\frac{Pl}{4} * \frac{1}{2}}{\frac{6EI}{l}} = \frac{5Pl^2}{48EI}$$

$k_\theta \to \infty$ همان θ_A در حالتی که (گره B پیوسته است)

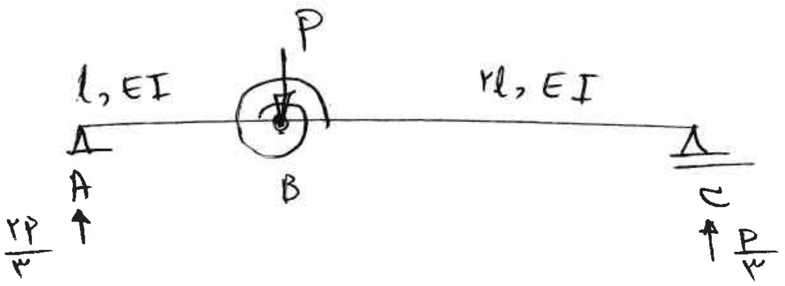
$$\int \frac{M(x) \cdot m(x)\, dx}{EI} = \frac{l}{6EI}\left[2(0)(1) + 2 * \frac{Pl}{4} \times \frac{1}{2} + (0)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{Pl}{4} * 1\right]$$

$$= \frac{l}{6EI}\left(\frac{Pl}{2}\right) = \frac{Pl^2}{12EI}$$

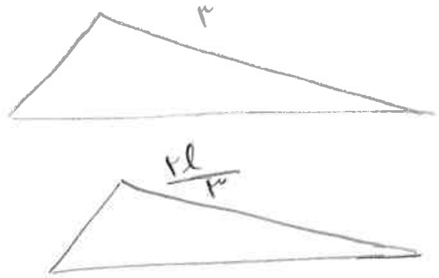
تست ۸۶ آزمون جامع اول

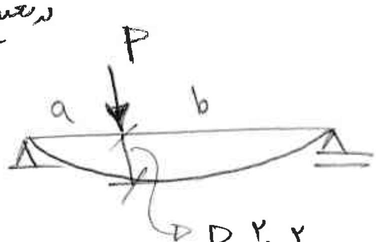
در تیر زیر سهم خمش تیر در تغییر مکان B چقدر است؟ $k_\theta = \frac{2EI}{l}$

$(\theta_B)_R , (\theta_B)_L = ?$



$$1 * \Delta_B = \underbrace{\int \frac{M(x)m(x)dx}{EI}}_{\text{سهم خمش تیر در تغییر مکان B}} + \underbrace{\frac{M_\theta * m_\theta}{k_\theta}}_{\text{سهم پیچش فنر پیچشی در تغییر مکان B}}$$





$\frac{Pa^2b^2}{3EIl}$

کل طول $(a+b)$

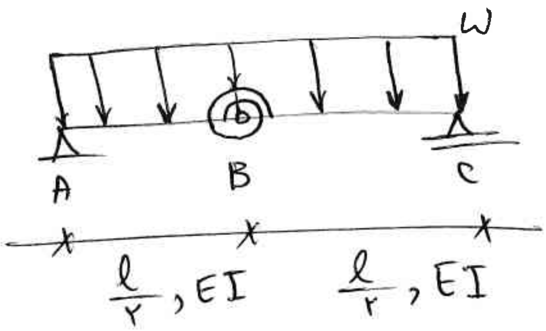
$$1 * \Delta_B = \frac{P * l^2 * (2l)^2}{3EI * 3l} + \frac{\frac{2Pl}{3} * \frac{l}{3}}{\frac{2EI}{l}} = \underbrace{\frac{4Pl^3}{9EI}}_{2x} + \underbrace{\frac{2Pl^3}{9EI}}_{x}$$

$$\longrightarrow \frac{2x}{3x} \longrightarrow \frac{2}{3} \longrightarrow 66,7\%$$

تمرین: تغییر زیر مطلوب است

۱) θ_A ۲) Δ_B ۳) $\Delta\theta_B$ ۴) $(\theta_B)_L , (\theta_B)_R$

$\frac{1}{2}\Delta\theta$

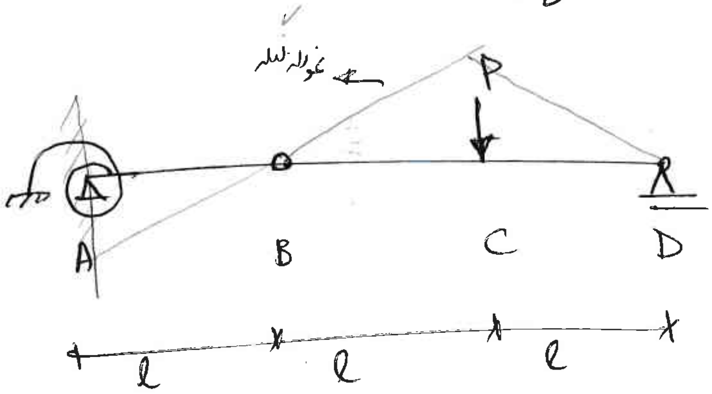


$k_\theta = \frac{4EI}{l}$

$\Delta\theta_B = \frac{M_\theta}{k_\theta}$

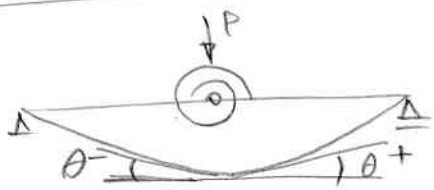
$\frac{95}{8}$

در تیر زیر مطلوبست : ۱) θ_A ۲) $(\theta_B)_L$ ۳) $(\theta_B)_R$ ۴) Δ_B ۵) Δ_C ۶) θ_D



$$k_\theta = \frac{6EI}{\ell}$$

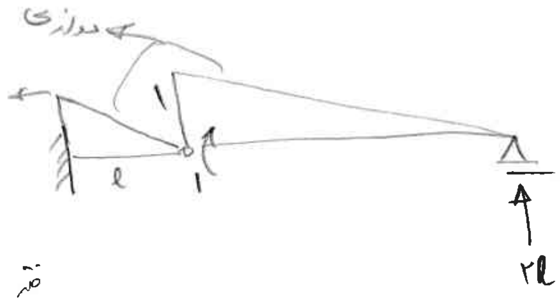
$EI = \text{constant}$



$$\theta_B^+ = \theta_B^- = \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{M_\theta}{2k_\theta} = \frac{\frac{P\ell}{4}}{2 \times \frac{6EI}{\ell}}$$

$$\boxed{\Delta B = \frac{M_\theta}{k_\theta}}$$

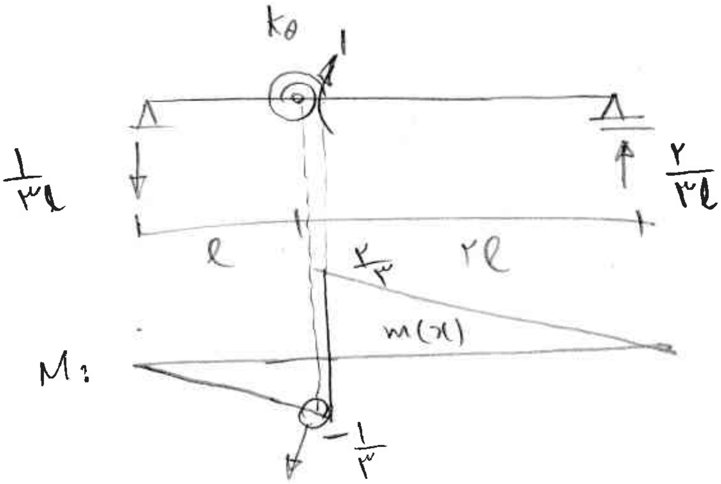
$\Delta\ (\theta_B)_R$



چپ و راست B چرخش دارد

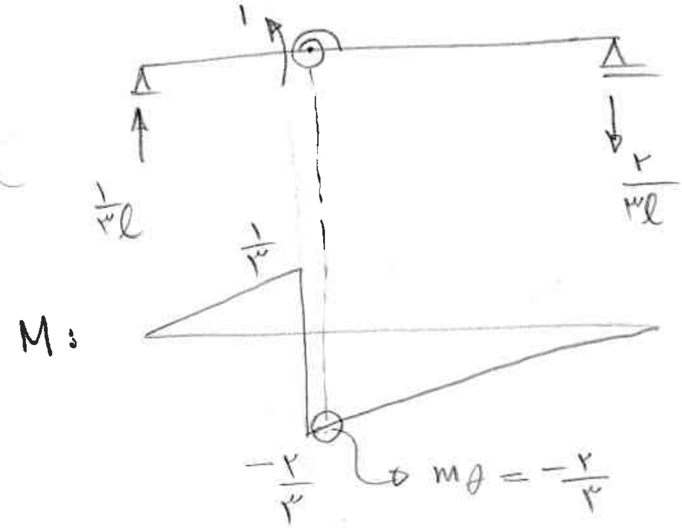
شیب چپ و راست مفصل B برابر است

$$\theta_A = \frac{M}{k_\theta}$$

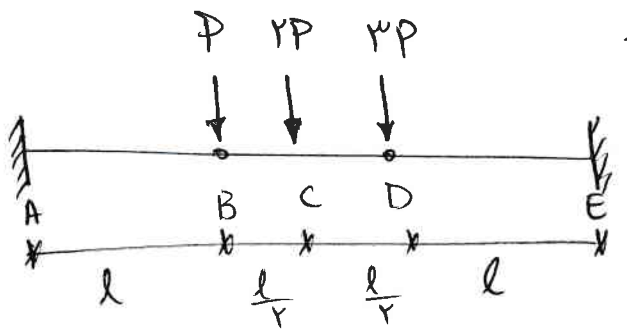


$$m_\theta = -\frac{1}{3}$$

$(\theta_B)_L , (\theta_B)_R$ جامع ۸۶



مثال: تیر زیر تغییر مکان نقطه C را حساب کنید

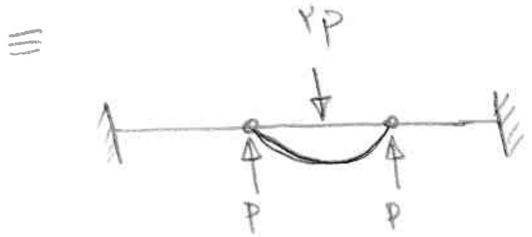


$EI = \text{Constant}$

تیرهای دو سر گیردار با دو مفصل داخلی:

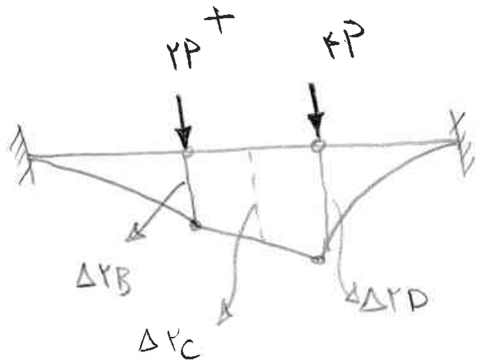
۱) تیرهای وسط خم شوند و تیرهای کناری خم نشوند

۲) تیرهای کناری خم شوند تیرهای وسط خم نشوند



$$\Delta_{1C} = \frac{2P \times l^3}{48EI} = \frac{Pl^3}{24EI}$$

+



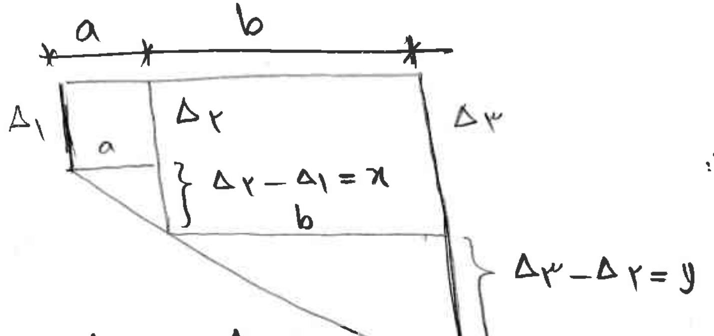
$$\Delta_{2B} = \frac{2Pl^3}{3EI} \qquad \Delta_{2D} = \frac{4Pl^3}{3EI}$$

$$\Delta_{2C} = \frac{1}{2}(\Delta_{2B} + \Delta_{2D})$$

$$\Delta_{2C} = \frac{1}{2}\left(\frac{2Pl^3}{3EI} + \frac{4Pl^3}{3EI}\right) = \frac{Pl^3}{EI}$$

$$\Delta_C = \Delta_{1C} + \Delta_{2C} = \frac{Pl^3}{24EI} + \frac{Pl^3}{EI} = \frac{25Pl^3}{24EI}$$

$\frac{۹۷}{S}$

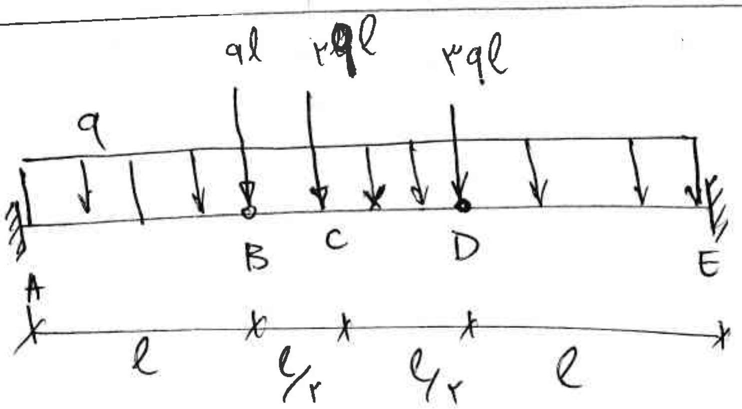


* اگر نقطه C در وسط BC قرار نداشت:

$$\frac{\Delta_۲-\Delta_۱}{a}=\frac{\Delta_۳-\Delta_۲}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

$$\rightarrow b\Delta_۲-b\Delta_۱=a\Delta_۳-a\Delta_۲ \longrightarrow (a+b)\Delta_۲=b\Delta_۱+a\Delta_۳$$

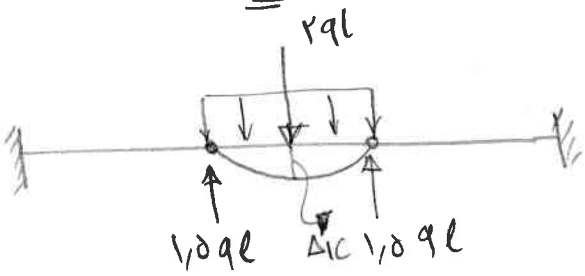
$$\rightarrow \boxed{\Delta_۲=\frac{b}{l}\Delta_۱+\frac{a}{l}\Delta_۳}$$



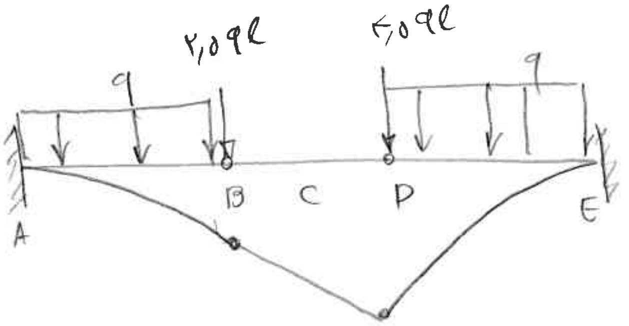
EI = Constant

$$\Delta_{۱C}=\frac{۵ql^۴}{۳۸۴EI}+\frac{۲ql\times l^۳}{۴۸EI}$$

≡



$$\Delta_{۲B}=\frac{ql^۴}{۸EI}+\frac{۲,۵ql\times l^۳}{۳EI}$$



$$\Delta_{۲D}=\frac{ql^۴}{۸EI}+\frac{۴,۵ql\times l^۳}{۳EI}$$

$$\Delta_{۲C}=\frac{۱}{۲}(\Delta_{۲B}+\Delta_{۲D})$$

$$\Delta_C=\Delta_{۱C}+\Delta_{۲C}$$

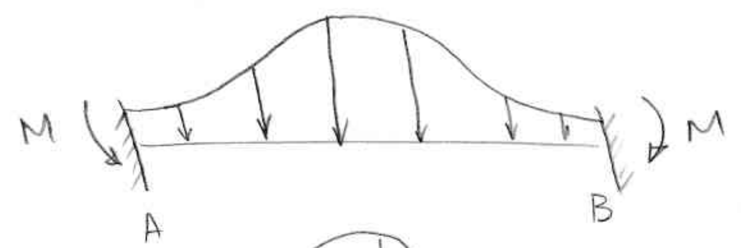
نکته: اگر در یک تیر دو سر گیردار تحت اثر هر بارگذاری متقارن لنگر گیرداری تکیه‌گاه‌ها برابر M باشد چنانچه یکی از تکیه‌گاه‌ها مفصلی شود: $\frac{98}{S}$

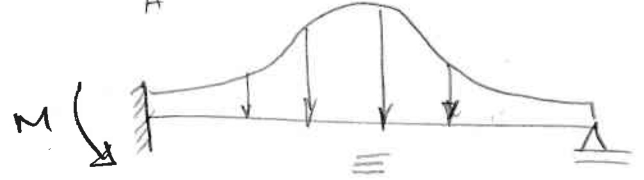
اولاً: لنگر تکیه‌گاه گیردار باقی مانده، ۱/۵ برابر می‌شود (1/5M)

ثانیاً: شیب تکیه‌گاه مفصلی برابر خواهد شد با $\frac{Ml}{4EI}$

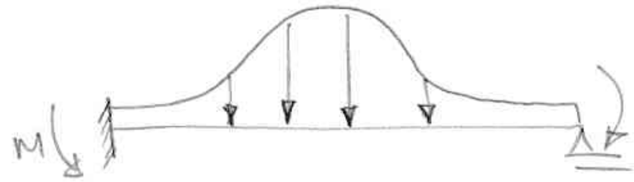
ثالثاً: اضافه تغییر مکان وسط تیر نسبت به حالت دو سر گیردار اولیه برابر است با $\frac{Ml^2}{32EI}$

اثبات





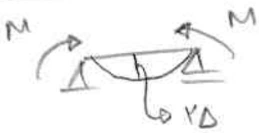
=

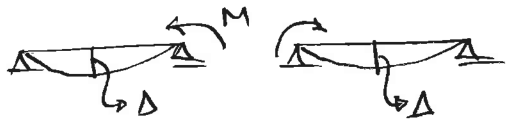


دقیقاً تیر دو سر گیردار را تحلیل می‌کند

+

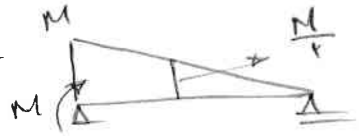
$\frac{Ml}{4EI}$





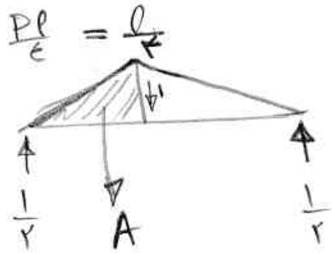
$$2\Delta = \frac{Ml^2}{8EI} \rightarrow \Delta = \frac{Ml^2}{16EI}$$

99/S



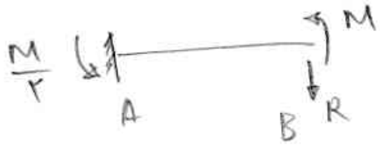
$$1\times\Delta = \frac{l}{6EI}\left[2M(0)+2\frac{M}{2}\times\frac{l}{4}+M\left(\frac{l}{4}\right)+\frac{M}{2}(0)\right]$$

$$\rightarrow \Delta = \frac{l}{6EI}\left[\frac{Ml}{4}+\frac{Ml}{4}\right] = \frac{l}{6EI}\times\frac{Ml}{2} = \frac{Ml^2}{12EI}$$



$$A = \frac{1}{2}\times l\times\frac{l}{4} = \frac{l^2}{8}$$

$$\Delta_{mid} = \frac{\frac{M}{2}\times\frac{l^2}{8}}{EI} = \frac{Ml^2}{16EI}$$



معادله سازگاری

$$\Delta_B = 0 \rightarrow \frac{Ml^2}{2EI} - \frac{Rl^3}{3EI} = 0$$

$$\rightarrow R = 1.5\frac{M}{l}$$

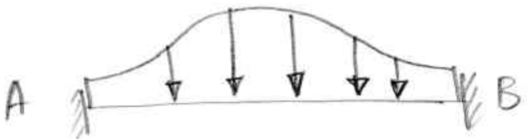
$$M_A = R\times l - M = 1.5\frac{M}{l} - M = 0.5M = \frac{M}{2}$$

$$\Delta_{mid} = \frac{Ml^2}{12EI} - \frac{\frac{M}{2}\times l^2}{16EI} = \frac{Ml^2}{32EI}$$

نکته: اگر یک تیر دوسرگیردار تحت اثر بارگذاری متقارن لنگر گیرداری تکیه‌گاهها برابر M باشد چنانچه هر دو تکیه‌گاه را مفصلی کنیم:

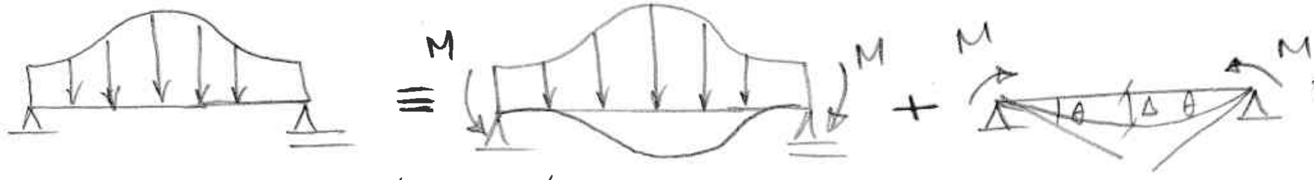
اولاً: شیب تکیه‌گاههای مفصلی برابر خواهد شد با $\frac{Ml}{2EI}$

ثانیاً: اضافه تغییر مکان وسط تیر نسبت به حالت دوسرگیردار اولیه برابر است با $\frac{Ml^2}{8EI}$



اثبات

2-

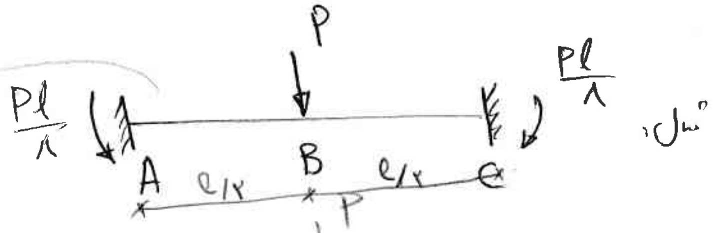


100/5

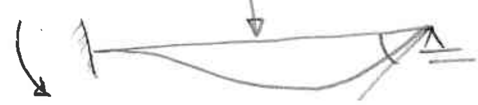
دقیقاً مانند تیر دو سر گیردار عمل می کند

$$\theta = \frac{Ml}{2EI} \quad , \quad \Delta = \frac{Ml^2}{8EI}$$

مثال:

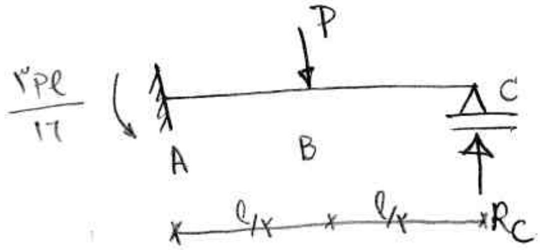


$$1.5 \times \frac{Pl}{8} = \frac{3Pl}{16}$$



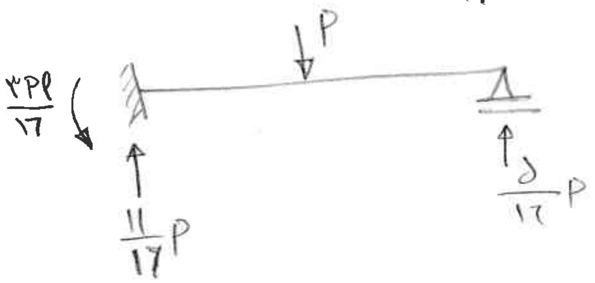
$$\theta_C = \frac{Ml}{4EI} = \frac{Pl}{8} \times \frac{l}{4EI} = \frac{Pl^2}{32EI}$$

$$\Delta_{mid} = \frac{Pl^3}{192EI} + \frac{Pl}{8} \times \frac{l^2}{32EI} = \frac{7Pl^3}{768EI}$$



$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow R_C \times l + \frac{3Pl}{16} = \frac{Pl}{2} \rightarrow \boxed{R_C = \frac{5}{16}P}$$

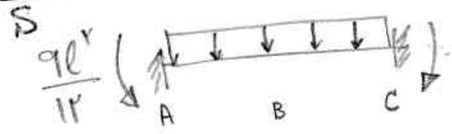
$$R_A + R_C = P \rightarrow R_A = \frac{11}{16}P$$



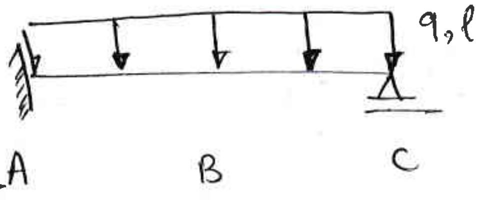
اعداد مقابل را خوب به خاطر بسپارید

۱۰۱/S

مثال:



C را مفصلی می‌کنیم

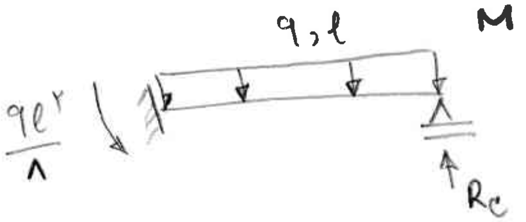


$$M_A = 1.5 * \frac{ql^2}{12} = \frac{ql^2}{8}$$

$$\theta_C = \frac{Ml}{4EI} = \frac{ql^2}{12} * \frac{l}{4EI} = \frac{ql^3}{48EI}$$

با مفصلی کردن C تغییر مکان وسط تیر دو برابر شد

$$\Delta_B = \Delta_{mid} = \frac{qL^4}{384EI} + \underbrace{\frac{ql^2}{12}}_{M} * \frac{l^2}{32EI} = \frac{ql^4}{192EI}$$

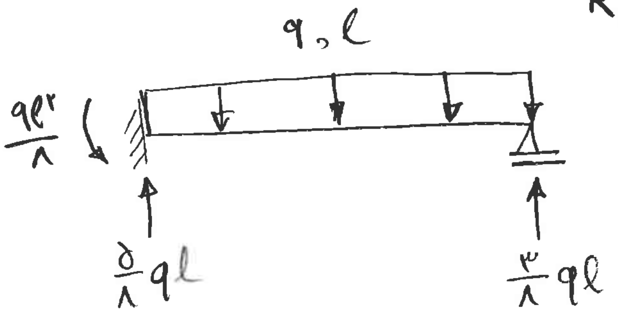


$$\Sigma M_A = 0$$

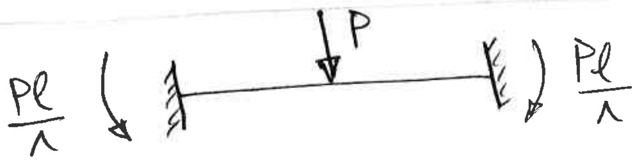
$$R_c * l + \frac{ql^2}{8} = ql * \frac{l}{2}$$

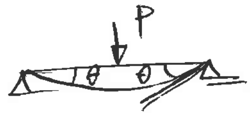
$$\rightarrow R_c = \frac{3}{8} ql$$

$$R_A + R_c = ql \rightarrow R_A = \frac{5}{8} ql$$



اعداد فوق را به ذهن بسپارید





$$\theta = \frac{Ml}{2EI} = \frac{Pl}{8} * \frac{l}{2EI} = \frac{Pl^2}{16EI}$$

$$\Delta = \frac{Pl^3}{192EI} + \underbrace{\frac{Pl}{8}}_{M} * \frac{l^2}{8EI} = \frac{Pl^3}{48EI}$$