مسائل مبانی آمار ریاضی

(استنباط آماری یک)

هديه سال جهاني آمار (۲۰۱۳)

تألیف

وحید فکور بافنده[۲]

fakoor@math.um.ac.ir

افشین آشفته[۱]

A.Ashofteh@SavadeAmari.com

---

[۱] http://www.AfshinAshofteh.ir/
http://ir.linkedin.com/pub/afshin-ashofteh/٦٦/٢٥/٢٩٣
http://www.AfshinAshofteh.ir/owner/Afshin-Ashofteh.html
http://www.savadeamari.com/owner.html

[۲] http://www.um.ac.ir/~fakoor/
http://ir.linkedin.com/pub/vahid-fakoor/٥٧/a٦٩/٧٦٦

به نام حضرت دوست

که هرچه بر سر ما می‌رود عنایت اوست

تقدیم به:

والدین و اساتید بزرگوارمان که پرتو ملکوتی عشق و معرفتند

و همسران و کودکان عزیزمان که حضورشان گرما بخش زندگی است.

فهرست مطالب

پیشگفتار

به نام خدا

همانطور که می‌دانیم کتاب "مبانی آمار ریاضی" تالیف جناب آقای دکتر پارسیان مرجع بسیاری از دانشجویان تحصیلات تکمیلی رشته آمار است. کتاب حاضر به علت سختی برخی مسایل این کتاب و سوالات مکرر دانشجویان توسط آقایان افشین آشفته و دکتر وحید فکور بافنده و با کسب اجازه از محضر پروفسور پارسیان در سال ۱۳۸۰ در پنج فصل تنظیم شده است. در فصل اول به اثبات "روابط بین توزیعها" پرداخته شده است که علاوه بر اینکه از این روابط در فصلهای دوم به بعد استفاده خواهد شد خود منبع خوبی جهت اطلاع از اثبات این روابط کاربردی استنباط آماری است. فصلهای دوم تا پنجم شامل حل مسائل فصلهای دوم تا پنجم کتاب مبانی آمار ریاضی انتشار یافته در سال ۱۳۷۸ می‌باشد. با توجه به اینکه در چاپهای بعدی برخی سوالات به فصلها اضافه شده است صورت سوال آورده شده تا خواننده را از تناظر برقرار کردن بین شماره سوالات در چاپهای مختلف فارغ نماید. بنا به نیاز در این کتاب ارجاعاتی به مطالب کتاب اصلی با نام "کتاب آمار ریاضی" داده شده است.

با توجه به اینکه این کتاب در سال ۱۳۸۰ تنها به تعداد ۱۰۰۰ نسخه چاپ گردید که بیشتر آن به کتابخانه ها و اعضای هیئت علمی و دانشجویان تحصیلات تکمیلی آمار هدیه شد و این خود باعث شد تا در مقابل تقاضاهای بعدی شرمنده دوستان باشیم. در سال جهانی آمار بر آن شدیم تا نسخه الکترونیکی کتاب را به جامعه آماری کشور هدیه نماییم. امید است که مقبول افتد

نظر به اینکه بعضی از مسأله های آمار ریاضی و استنباط آماری به روشهای مختلف قابل حل هستند، طبیعی است که هر راه حلی لزوماً بهترین نباشد. بنابراین امیدواریم خوانندگان بتوانند با تلاش جهت حل مسائل و مراجعه به کتاب حاضر به راه حل صحیح دست یافته و به نتیجه‌ای شایسته نایل شوند.

.

با تمام تلاش و کوششی که برای کامل بودن این مجموعه به عمل آمده، ادعایی در مورد بی عیب و نقص بودن آن نیست. لذا ارائه هر نوع راهنمایی و یادآوری بـرای بهبود مطالب کتاب، مورد استقبال و تقدیر مولفین خواهد بود.

در پایان از زحمات بی شائبه سرکار خانم محیا باقی زاده که در تایپ و بـازخوانی کتاب کمک بسیار نموده‌اند، تشکر کرده و از ایزد یگانه موفقیت روز افزون ایـشان را خواستاریم.

افشین آشفته - وحید فکور بافنده

فروردین ۱۳۹۱ (سال جهانی آمار ۲۰۱۳)

فصل اول

اثبات روابط بین توزیع‌ها

در این فصل به اثبات "روابط بین توزیعها" می پردازیم. از این روابط در فصل‌های بعدی در حل مسائل استفاده خواهیم کرد. فرض می کنیم خواننده با درس احتمال و کاربرد آشنایی کافی دارد و با مفاهیمی از قبیل قضیه یکتایی، قضیه پیوستگی وانواع روشهای به دست آوردن توزیعهای توابعی از متغیرهای تصادفی (روشهای تابع توزیع ، تبدیل متغیروتابع مولد گشتاور) آشنا می باشد.

روابط بین توزیع‌ها

۱- فرض کنید $X_۱, X_۲,..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $B(۱, p)$ باشد، آن گاه

الف: $Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i \sim B(n, p)$

ب: با انتخاب $\lambda = np$ ،

$$Y \xrightarrow{D} P(\lambda) \ , \ n \to \infty$$

ج: با انتخاب $\mu = np \ , \ \sigma^{۲} = pq$

$$\frac{Y-\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{D} N(۰,۱) \ , \ n \to \infty$$

د: $X_i \mid Y = y \sim HG(n,۱;y)$

حل:

(الف) ابتدا تابع مولد گشتاور Y را به دست می آوریم

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t\sum_{i=۱}^{n} Xi}) = \prod_{i=۱}^{n} M_{X_i}(t) = [M_{X_۱}(t)]^n = (pe^t + q)^n$$

$M_Y(t)$ تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای (n, p) می باشد. اکنون بنا بر قضیه یکتائی داریم

$$Y \sim B(n, p)$$

قضیه یکتایی: هر تابع مولد گشتاور بطور یکتا توزیع را مشخص می کند و بالعکس اگر تابع مولد گشتاور وجود داشته باشد آنگاه یکتاست.(در قضیه به جای تابع مولد گشتاور می توان تابع مشخصه بکار برد اما برخلاف تابع مولد گشتاور، تابع مشخصه همیشه وجود دارد.)

(ب) ابتدا تابع مولد گشتاور Y را به دست می آوریم

$$M_Y(t) = (pe^t + q)^n = (\frac{\lambda}{n}e^t + (۱-\frac{\lambda}{n}))^n = (۱+\frac{\lambda}{n}(e-۱^t))^n$$

$$M_Y(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda(e^t-۱)}$$

زیرا می دانیم وقتی $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ آنگاه $(۱+\frac{a_n}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^a$

اکنون با توجه به اینکه $e^{\lambda(e^t-1)}$ تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ است، بنابراین بنا بر قضیه پیوستگی

$$Y \xrightarrow{D} P(\lambda) \ , \ n \to \infty$$

تعریف همگرایی در توزیع: فرض کنید $F_n(y)$ تابع توزیع متغیر تصادفی Y_n باشد(که به عدد درست و مثبت n بستگی دارد.) اگر $F(y)$ تابع توزیع متغیر تصادفی Y باشد و در هر نقطه پیوستگی y تابع $F(y)$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = F(y)$$

آنگاه گوییم Y_n دارای توزیع حدی $F(y)$ است یا Y_n همگرا در توزیع به متغیر تصادفی Y است.

و به صورت

$$Y_n \xrightarrow{D} Y \qquad \text{یا} \qquad Y_n \xrightarrow{D} F(y)$$

نشان می دهیم.

قضیه پیوستگی: فرض کنید $F_n(y)$ تابع توزیع متغیر تصادفی Y_n و $M_n(t)$ تابع مولد گشتاورآن باشد که برای مقادیر $|t|<h$ و برای هر n وجود داشته باشد.اگر $F(y)$ و $M(t)$ بترتیب تابع توزیع وتابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y باشند و $M(t)$برای مقادیر $|t| \leq h_1 < h$ تعریف شده باشد و داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$$

آنگاه داریم $Y_n \xrightarrow{D} Y$.

(ج) متغیر تصادفی Z_n را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Z_n = \frac{Y - np}{\sqrt{n}\sigma}$$

با استفاده از استقلال و همتوزیعی $X_1,...,X_n$ داریم

$$M_{Z_n}(t) = E[\exp(tZ_n)] = E[\exp(t\frac{Y-np}{\sqrt{n}\sigma})]$$
$$= E\{\exp[\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - p)]\} = [m(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})]^n$$

که $m(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $X_1 - p$ می باشد. اکنـون $m(t)$ را بـه صورت سری توانی(بسط مک لورن) می نویسیم

$$M_{Z_n}(t) = [m(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})]^n = [1 + m'(0)(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}) + \frac{m''(0)}{2!}(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})^2 + \frac{m'''(0)}{3!}(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})^3 + \dots]^n$$

با توجه به اینکه

$$m'(0) = E(X_1 - p) = 0$$
$$m''(0) = E(X_1 - p)^2 = \mathrm{var}(X_1) = \sigma^2$$

بنابراین داریم

$$M_{Z_n}(t) = [1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{m'''(0)}{3!}(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma})^3 + \dots]^n$$
$$= [1 + \frac{1}{n}(\frac{t^2}{2} + \frac{m'''(0)}{3!}\frac{t^3}{\sqrt{n}\sigma^3} + \dots)]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{t^2}{2}}$$

زیرا عبارت داخل پرانتزوقتی $n \to \infty$ به سمت $\frac{t^2}{2}$ میـل مـی کنـد. چـون $e^{\frac{t^2}{2}}$ تابع مولد گشتاور توزیع نرمال استاندارد است. بنا بر قضیه پیوستگی داریم

$$Z_n = \frac{Y-\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1) \ , \ n \to \infty$$

(د) با استفاده از تعریف احتمال شرطی داریم

$$P(X_i = x_i \mid Y = y) = \frac{P(X_i = x_i, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{P(X_i = x_i \ , \sum_{j=1}^{n} X_j = y)}{P(Y = y)}$$

$$= \frac{P(X_i = x_i , \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_j = y - x_i)}{P(Y = y)}$$

$$= \frac{P(X_i = x_i) P(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_j = y - x_i)}{P(Y = y)}$$

$$= \frac{p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} \binom{n-1}{y-x_i} p^{y-x_i} (1-p)^{n-1-y+x_i}}{\binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}}$$

$$= \frac{\binom{1}{x_i}\binom{n-1}{y-x_i}}{\binom{n}{y}}$$

بنابراین

$$X_i \mid Y = y \sim HG(n,1;y)$$

■

۲- اگر $X \sim B(n, p)$ و $Y \sim B(m, p)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، آن گاه

الف: $X + Y \sim B(m+n, p)$

ب: $X \mid X + Y = z \sim HG(m+n, n; z)$

حل:

(الف) با استفاده از فرض استقلال داریم

$$M_{X+Y}(t)=E[e^{t(X+Y)}]=M_X(t)M_Y(t)=(pe^t+q)^n(pe^t+q)^m=(pe^t+q)^{m+n}$$

اکنون بنا بر قضیه یکتائی داریم

$$X+Y\sim B(m+n,p)$$

(ب)

$$P(X=x\mid X+Y=z)=\frac{P(X=x,X+Y=z)}{P(X+Y=z)}$$
$$=\frac{P(X=x,Y=z-x)}{P(X+Y=z)}$$

با استفاده از فرض استقلال $$=\frac{P(X=x)P(Y=z-x)}{P(X+Y=z)}$$

با استفاده از(الف)

$$=\frac{\binom{n}{x}p^x(۱-p)^{n-x}\binom{m}{z-x}p^{z-x}(۱-p)^{m-z+x}}{\binom{m+n}{z}p^z(۱-p)^{m+n-z}}$$

$$=\frac{\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}}{\binom{m+n}{z}}$$

بنابراین

$$X\mid X+Y=z\sim HG(m+n,n;z)$$

■

۳- اگر $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Ge(p)$ باشد، آن گاه

الف: $Y=\min(X_1,...,X_n)=X_{(1)}\sim Ge(1-q^n)$

ب: $Z=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim NB(n,p)$

حل:

$$f_p(x_1)=pq^{x_1}\qquad x_1=0,1,2,...$$

$$M_{X_1}(t)=p(1-qe^t)^{-1}$$

(الف)

$$P(Y\geq y)=P(X_{(1)}\geq y)=P(X_1\geq y,X_2\geq y,...,X_n\geq y)$$

بنا بر استقلال $=P(X_1\geq y)P(X_2\geq y)...P(X_n\geq y)$

بنا بر همتوزیعی $=[P(X_1\geq y)]^n$

$$=[\sum_{x=y}^{\infty}pq^x]^n=(\frac{pq^y}{1-q})^n=q^{ny}$$

پس

$$P(Y=y)=P(Y\geq y)-P(Y\geq y+1)=q^{ny}-q^{n(y+1)}=(1-q^n)q^{ny}$$

بنابراین

$$Y\sim Ge(1-q^n)$$

(ب) با استفاده از استقلال و همتوزیعی $X_1,...,X_n$ داریم

$$M_Z(t)=[M_{X_1}(t)]^n$$

$$=[p(1-qe^t)^{-1}]^n$$

$$= p^n(۱-qe^t)^{-n}$$

بنابراین
$$Z=\sum_{i=۱}^{n} X_i \sim NB(n,p)$$

■

۵- اگر $X \sim NB(n,p)$ **، با انتخاب** $\lambda = n(۱-p)$،

$$X \xrightarrow{D} P(\lambda) \quad , \quad n\to\infty$$

حل:

$$M_X(t)=p^n(۱-qe^t)^{-n}=(۱-\frac{\lambda}{n})^n(۱-\frac{\lambda}{n}e^t)^{-n}\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-۱)}$$

اکنون بنا بر قضیه پیوستگی

$$X \xrightarrow{D} P(\lambda)$$

■

۷- اگر $X_۱,X_۲,...,X_n$ **یک نمونه تصادفی** n **تایی از توزیع** $P(\lambda)$ **باشد، آن گاه**

الف: $Y=\sum_{i=۱}^{n} X_i \sim P(n\lambda)$

ب: $X_i \mid Y=y \sim B(y,\frac{۱}{n})$

ج: $\frac{Y-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{D} N(۰,۱) \quad , \quad n\to\infty$

حل:

(الف) با استفاده از استقلال و همتوزیعی $X_۱,...,X_n$ **داریم**

$$M_Y(t)=[M_{X_1}(t)]^n=[e^{\lambda(e^t-1)}]^n=e^{n\lambda(e^t-1)}$$

اکنون بنابر قضیه یکتایی داریم

$$Y\sim P(n\lambda)$$

(ب)

$$P(X_i=x\mid Y=y)=\frac{P(X_i=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{P(X_i=x,\sum_{j=1}^{n}X_j=y)}{P(Y=y)}$$

$$=\frac{P(X_i=x,\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_j=y-x)}{P(Y=y)}$$

$$=\frac{P(X_i=x)P(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_j=y-x)}{P(Y=y)}$$

$$=\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\cdot\frac{e^{-(n-1)\lambda}[(n-1)\lambda]^{y-x}}{(y-x)!}}{\frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^y}{y!}}=\binom{y}{x}(\frac{1}{n})^x(1-\frac{1}{n})^{y-x}$$

بنابراین

$$X_i\mid Y=y\sim B(y,\frac{1}{n})$$

(ج) فرض می کنیم $Z_n=\frac{Y-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$

با استفاده از استقلال و همتوزیعی $X_1,\dots,X_n$ **داریم**

$$M_{Z_n}(t)=E[e^{tZ_n}]=E[\exp(t\frac{Y-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}})]$$
$$=E\{\exp[\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\lambda)]\}$$
$$=[m(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}})]^n$$

که در عبارت فوق، $m(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $X_1-\lambda$ مـی باشـد. اکنون $m(t)$ را به صورت سری توانی می نویسیم

$$M_{Z_n}(t)=[1+m'(0)(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}})+\frac{m''(0)}{2!}(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}})^2+\frac{m'''(0)}{3!}(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}})^3+\ldots]^n$$

با توجه به اینکه

$$m'(0)=E(X_1-\lambda)=0$$
$$m''(0)=E(X_1-\lambda)^2=\text{var}(X_1)=\lambda$$

بنابراین

$$M_{Z_n}(t)=[1+\frac{t^2}{2n}+\frac{m'''(0)}{3!}(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}})^3+\ldots]^n$$
$$=[1+\frac{1}{n}(\frac{t^2}{2}+\frac{m'''(0)}{3!}\frac{t^3}{\sqrt{n}\lambda^{\frac{3}{2}}}+\ldots)]^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{\frac{t^2}{2}}$$

زیرا عبارت داخل پرانتزوقتی $n\to\infty$ به سمت $\frac{t^2}{2}$ میل می کنـد. اکنـون چـون $e^{\frac{t^2}{2}}$ تابع مولد گشتاور توزیع نرمال استاندارد است، بنا بر قضیه پیوستگی داریم

$$Z_n=\frac{Y-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\xrightarrow{D}N(0,1)\ ,\ n\to\infty$$

■

۸- اگر X_1,X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان $U(0,1)$ باشند، آن گاه

الف: $Y=-\theta\ln X_1\sim E(\frac{1}{\theta})$

ب: $Z=-۲\ln X_۱ \sim E(\frac{۱}{۲})=\chi^۲_{(۲)}$

ج: $U=X_۱-X_۲ \sim T(-۱,۱,۰)$

حل:

$$f_{X_i}(x)=۱ \quad ۰<x<۱ \quad , \quad i=۱,۲$$

(الف) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم

چون $y=-\theta\ln x_۱$ پس

$$x_۱=e^{-\frac{y}{\theta}} \quad \text{و} \quad J=\frac{dx_۱}{dy}=-\frac{۱}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}$$

درنتیجه

$$f_Y(y)=f_{X_۱}(e^{-\frac{y}{\theta}})\,|J|=\frac{۱}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}} \quad , \quad y>۰$$

بنابراین

$$Y=-\theta\ln X_۱ \sim E(\frac{۱}{\theta})$$

(ب) این قسمت حالت خاصی از (الف) به ازای $\theta=۲$ است.

(ج) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم

چون $X_۱$ و $X_۲$ مستقل اند، بنابراین

$$f_{X_۱,X_۲}(x_۱,x_۲)=I_{(۰,۱)}(x_۱)I_{(۰,۱)}(x_۲)$$

اینک فرض می کنیم $U=X_۱-X_۲$ و $V=X_۱$. ابتدا توزیع U,V را بـه دسـت می آوریم.

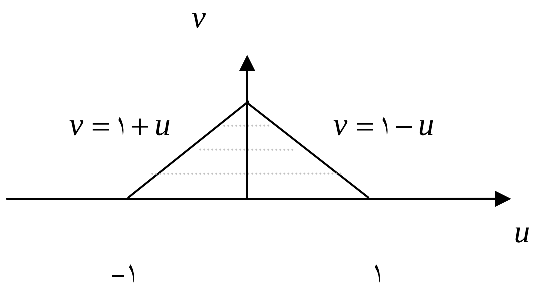
چون $u=x_۱-x_۲\,,\,v=x_۱$ پس $x_۱=v\,,\,x_۲=v-u$ و

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_۱}{\partial u} & \dfrac{\partial x_۱}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x_۲}{\partial u} & \dfrac{\partial x_۲}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}=۱$$

بنابراین داریم

$$f_{(U,V)}(u,v)=۱ \quad ۰<v<۱,\ ۰<v-u<۱$$

مجموعه نقاط (u,v) که در آن $f_{(U,V)}(u,v)>۰$ در شکل زیر رسم شده است.



اکنون

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{(U,V)}(u,v)dv$$

با توجه به شکل، اگر $-۱<u<۰$، آنگاه

$$f_U(u)=\int_{۰}^{۱+u}۱dv=۱+u$$

واگر $۰<u<۱$، آنگاه

$$f_U(u)=\int_{۰}^{۱-u}۱dv=۱-u$$

پس به طور خلاصه،

$$f_U(u)=\begin{cases}۱+u & -۱<u<۰\\ ۱-u & ۰<u<۱\\ ۰ & ow\end{cases} \quad =۱-|u| \quad -۱<u<۱$$

بنابراین

$$U = X_1 - X_2 \sim T(-1,1,0)$$

■

۹- اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\lambda)$ باشد، آن گاه

الف: $Y = \min(X_1, ..., X_n) = X_{(1)} \sim E(n\lambda)$

ب: $Z = X_1^{\frac{1}{\alpha}} \sim W(\alpha, \lambda)$

ج: $V = X_1 - X_2 \sim L(0, \lambda, \lambda)$

د: $U = X_1^2 \sim W(\frac{1}{2}, \lambda)$

ه: $W = 2\lambda X_1 \sim \chi^2_{(2)}$

و: $T = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2} \sim U(0,1)$

ز: $Q = \dfrac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2} \sim U(-1,1)$

ح: $F = \dfrac{X_1}{X_2} \sim F(2,2)$

ط: $\sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + (n-r)X_{(r)} \sim (2\lambda)^{-1} \chi^2_{(2r)}\ , 2 \le r \le n$

ی: $\sum_{i=2}^{n} (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \sim (2\lambda)^{-1} \chi^2_{(2n-2)}$

حل:

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0, \lambda > 0$$

به سادگی داریم

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad ; x > 0$$

(الف) ابتدا تابع توزیع متغیر تصادفی Y را محاسبه می کنیم

$$G(y) = P(Y \le y) = ۱ - P(Y > y) = ۱ - P(X_۱ > y, X_۲ > y, ... X_n > Y)$$

بنا به مستقل و همتوزیع بودن $X_1, ..., X_n$

$$= ۱ - [P(X_۱ > y)]^n$$

$$= 1 - [1 - F\ (y)]^n$$

با مشتق گیری از $G(y)$ نسبت به y داریم

$$g(y) = n[۱ - F(y)]^{n-۱} f(y)$$

بنابراین

$$g(y) = n\lambda e^{-n\lambda y} \quad , \quad y > ۰$$

در نتیجه

$$Y = \min(X_۱, ..., X_n) = X_{(۱)} \sim E(n\lambda)$$

(ب) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم

چون $z = x_۱^{\frac{۱}{\alpha}}$ پس

$$x_۱ = z^\alpha \qquad و \qquad J = \frac{dx_۱}{dz} = \alpha z^{\alpha - ۱}$$

درنتیجه

$$f_Z(z) = f_{X_۱}(z^\alpha) | J | = \alpha \lambda z^{\alpha-۱} e^{-\lambda z^\alpha} \quad , \quad z > ۰$$

بنابراین

$$Z = X_۱^{\frac{۱}{\alpha}} \sim W(\alpha, \lambda)$$

(ج) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم

چون $X_۱, X_۲$ مستقل اند، بنابراین

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} \quad , \quad x_1,x_2>0$$

اینک فرض می کنیم $V=X_1-X_2$ و $U=X_1$ و ابتدا توزیع U,V را به دست می آوریم.

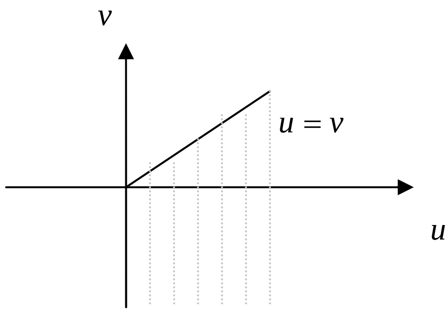
چون $v=x_1-x_2\ ,\ u=x_1$ **پس** $x_1=u\ ,\ x_2=u-v$ **و**

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$$

بنابراین داریم

$$f_{(U,V)}(u,v)=\lambda^2 e^{-\lambda(2u-v)} \qquad 0<u<\infty\ ,\ 0<u-v<\infty$$

مجموعه نقاط (u,v) که در آن $f_{(U,V)}(u,v)>0$ در شکل زیر رسم شده است.



اکنون

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{(U,V)}(u,v)du$$

با توجه به شکل، اگر $v>0$،آنگاه

$$f_V(v)=\int_{v}^{\infty}\lambda^2 e^{-\lambda(2u-v)}du=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda v}$$

واگر $v<0$، آنگاه

$$f_V(v)=\int_0^{\infty}\lambda^2 e^{-\lambda(2u-v)}du=\frac{\lambda}{2}e^{\lambda v}$$

پس به طور خلاصه،

$$f_V(v)=\begin{cases}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda v} & v>0\\ \frac{\lambda}{2}e^{\lambda v} & v<0\\ 0 & ow\end{cases}=\frac{\lambda}{2}e^{\lambda|v|}\quad ,v\in R$$

بنابراین

$$V=X_1-X_2\sim L(0,\lambda,\lambda)$$

(د) این قسمت حالت خاصی ازقسمت (ب) با $\alpha=\frac{1}{2}$ **است.**

(ه) با استفاده از روش تبدیل متغیر مساله را حل می کنیم

چون $w=2\lambda x_1$ **پس**

$$x_1=\frac{w}{2\lambda}\quad و \quad J=\frac{dx_1}{dw}=\frac{1}{2\lambda}$$

درنتیجه

$$f_W(w)=f_{X_1}(\frac{w}{2\lambda})|J|=\frac{1}{2}e^{-\frac{w}{2}}\quad ,\quad w>0$$

بنابراین

$$W=2\lambda X_1\sim\chi^2_{(2)}$$

(و) این قسمت حالت خاصی از قسمت(۱۱ – الف) می باشد.

(ز) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم

چون X_1,X_2 **مستقل اند، بنابراین**

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}\quad ,\quad x_1,x_2>0$$

فرض می کنیم $U = X_۱ + X_۲$ و $V = X_۱ - X_۲$ و ابتدا توزیع تـوام U و V را بـه دست می آوریم.

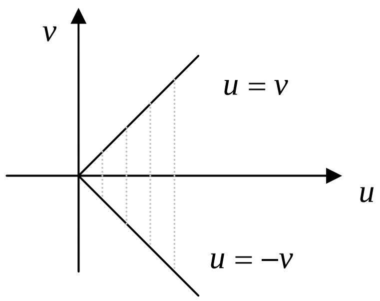
چون $u = x_۱ + x_۲$ و $v = x_۱ - x_۲$ پس $x_۱ = \frac{u+v}{۲}$ و $x_۲ = \frac{u-v}{۲}$ و

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_۱}{\partial u} & \frac{\partial x_۱}{\partial v} \\ \frac{\partial x_۲}{\partial u} & \frac{\partial x_۲}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} \end{vmatrix} = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین داریم

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{\lambda^۲}{۲} e^{-\lambda u} \qquad ۰ < u - v < \infty \,,\, ۰ < u + v < \infty \,,\, u > ۰$$

مجموعه نقاط (u,v) که در آن $f_{(U,V)}(u,v) > ۰$ در شکل زیر رسم شده است.



اکنون فرض کنید $P = U$ و $Q = \frac{V}{U}$ ، توزیع توأم (P,Q) را از توزیع توأم (U,V) به دست می آوریم.

$$\begin{cases} p = u \\ q = \frac{v}{u} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = p \\ v = pq \end{cases}$$

و

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q}\\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ q & p\end{vmatrix}=p$$

بنابراین

$$f_{(P,Q)}(p,q)=\frac{\lambda^{۲}}{۲}pe^{-\lambda p} \qquad ۰<p<\infty\,,\,-۱<q<۱$$

اکنون

$$f_Q(q)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{(P,Q)}(p,q)dp=\int_{۰}^{\infty}\frac{\lambda^{۲}}{۲}pe^{-\lambda p}dp=\frac{۱}{۲}$$

پس

$$f_Q(q)=\frac{۱}{۲} \qquad -۱<q<۱$$

درنتیجه

$$Q=\frac{X_{۱}-X_{۲}}{X_{۱}+X_{۲}}\sim U(-۱,۱)$$

(ح) از قسمت (ه) می دانیم

$$۲\lambda X_i\sim\chi^{۲}_{(۲)} \qquad i=۱,۲$$

با توجه به اینکه $X_{۱},X_{۲}$ مستقل اند از رابطه (۱۲-ب) – که در ادامه اثبات می شود- داریم

$$F=\frac{\frac{۲\lambda X_{۱}}{۲}}{\frac{۲\lambda X_{۲}}{۲}}\sim F_{(۲,۲)}$$

در نتیجه

$$F=\frac{X_{۱}}{X_{۲}}\sim F(۲,۲)$$

(ط) فرض کنید $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ آماره های ترتیبی نمونه تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ باشند. چگالی آماره های ترتیبی $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ به صورت زیر است.

$$f(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}) = n!\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = n!\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}} \qquad x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$$

نشان می دهیم متغیرهای تصادفی

$$Z_1 = nX_{(1)}\ , Z_2 = (n-1)(X_{(2)} - X_{(1)})\ , Z_{(3)} = (n-2)(X_{(3)} - X_{(2)})\ , \ldots,$$
$$Z_n = (X_{(n)} - X_{(n-1)})$$

مستقل و همتوزیع با توزیع $E(\lambda)$ می باشند.

ژاکوبین تبدیل فوق برابر است با

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_{(2)}} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_{(n)}} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_{(2)}} & \cdots & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_{(n)}} \\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial z_n}{\partial x_{(2)}} & \cdots & \dfrac{\partial z_n}{\partial x_{(n)}} \end{vmatrix} = n!$$

و به سادگی داریم $\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} z_i$

پس

$$f_{(Z_1,\ldots,Z_n)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = f(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)})|J|^{-1}$$

$$f_{(Z_1,\ldots,Z_n)}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} z_i} \quad , z_i > 0 \quad i = 1,2,\ldots,n$$

با توجه به اینکه حدود Z_i ها به یکدیگر بستگی ندارد و تابع چگالی توأم آنها به صورت حاصلضرب n تابع چگالی نمایی با پارامتر λ درآمده است، بنابراین Z_i ها از یکدیگر مستقل و همتوزیع (با توزیع $E(\lambda)$) می باشند.

به سادگی داریم

$$\sum_{i=۱}^{r} X_{(i)} + (n-r)X_{(r)} = nX_{(۱)} + (n-۱)(X_{(۲)} - X_{(۱)}) + \ldots + (n-r+۱)(X_{(r)} - X_{(r-۱)})$$

$$= \sum_{i=1}^{r} Z_i$$

با توجه به مطالب فوق

$$۲\lambda \sum_{i=۱}^{r} Z_i \sim \chi^{۲}_{(۲r)}$$

یا

$$\sum_{i=۱}^{r} Z_i \sim (۲\lambda)^{-۱} \chi^{۲}_{(۲r)}$$

در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{r} X_{(i)} + (n-r)X_{(r)} \sim (۲\lambda)^{-۱} \chi^{۲}_{(۲r)} \ , ۲ \le r \le n$$

(ی) به سادگی داریم

$$\sum_{i=۲}^{n} (n-i+۱)(X_{(i)} - X_{(i-۱)}) = (n-۱)(X_{(۲)} - X_{(۱)}) + (n-۲)(X_{(۳)} - X_{(۲)}) + \ldots$$

$$+ (X_{(n)} - X_{(n-۱)}) = \sum_{i=۲}^{n} Z_i$$

که Z_i ها در قسمت (ط) تعریف شده اند. با استفاده از مطالب قسمت (ط) به سادگی داریم

$$\sum_{i=۲}^{n} Z_i \sim \Gamma(n-۱, \lambda)$$

در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{r} (n-i+۱)(X_{(i)} - X_{(i-۱)}) \sim (۲\lambda)^{-۱} \chi^{۲}_{(۲n-۲)}$$

■

۱۰- اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\mu, \frac{1}{\sigma})$ باشد، آن گاه

الف: $Y = X_{(1)} \sim E(\mu, \frac{n}{\sigma})$

ب: $U = \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{(1)}) \sim \frac{\sigma}{2} \chi^2_{(2n-2)}$

حل:

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{\sigma}(x-\mu)} \quad ; \quad x > 0, \quad \sigma > 0, \mu \in R$$

به سادگی داریم

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\sigma}(x-\mu)} \quad ; x > 0$$

(الف) ابتدا تابع توزیع متغیر تصادفی Y را محاسبه می کنیم

$$G(y) = P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, ... X_n > Y)$$

بنا به مستقل و همتوزیع بودن $X_1, ..., X_n$

$$= 1 - [P(X_1 > y)]^n$$

$$= 1 - [1 - F(y)]^n$$

با مشتق گیری از $G(y)$ نسبت به y داریم

$$g(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y)$$

بنابراین

$$g(y) = \frac{n}{\sigma} e^{-\frac{n}{\sigma}(y-\mu)} \quad , \quad y > 0$$

در نتیجه

$$Y=\min(X_1,\dots,X_n)=X_{(1)}\sim E(\mu,\frac{n}{\sigma})$$

(ب) ابتدا توجه کنید که متغیرهای تصادفی $Y_i=X_i-\mu$, $i=1,2,\dots,n$ **دارای توزیع** $E(\frac{1}{\sigma})$ **می باشند. داریم**

$$\begin{aligned}U&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)-(X_{(1)}-\mu)]\\&=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-Y_{(1)})\\&=\sum_{i=2}^{n}Y_{(i)}-(n-1)Y_{(1)}\\&=(n-1)(Y_{(2)}-Y_{(1)})+(n-2)(Y_{(3)}-Y_{(2)})+\dots+(Y_{(n)}-Y_{(n-1)})\\&=Z_2+Z_3+\dots+Z_n\end{aligned}$$

همانطور که از قسمت (۹- ط) می دانیم، متغیرهای تصادفی Z_i ، $i=2,3,\dots,n$، **از یکدیگر مستقل و همتوزیع با توزیع** $E(\frac{1}{\sigma})$ **می باشند.**

بنابراین

$$U=\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})\sim\Gamma(n-1,\frac{1}{\sigma})$$

یا

$$U=\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})\sim\frac{\sigma}{2}\chi^2_{(2n-2)}$$

■

۱۱- اگر $X\sim G(\alpha_1,\lambda)$ **و** $Y\sim G(\alpha_2,\lambda)$ **دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آن گاه**

الف: $T=\dfrac{X}{X+Y}\sim Beta(\alpha_1,\alpha_2)$

ب: با انتخاب $\alpha_1=n$، $\mu=\dfrac{\alpha_1}{\lambda}$ **و** $\sigma^2=\dfrac{\alpha_1}{\lambda^2}$

$$\frac{X-\mu}{\sigma}\xrightarrow{D} N(0,1) \quad , \quad n\to\infty$$

حل:

(الف) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم.

چون X ,Y مستقل اند، بنابراین

$$f_{X,Y}(x\ ,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}x^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2-1}e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad x\ ,y>0$$

اینک فرض می کنیم $U=X+Y$ و $T=\frac{X}{X+Y}$ و ابتدا توزیع U,T را به دست می آوریم.

چون $u=x+y$, $t=\frac{x}{x+y}$ پس $x=ut$, $y=u(1-t)$ و

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t & u\\ 1-t & -u\end{vmatrix}=-u$$

بنابراین داریم

$$f_{(U,T)}(u,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\ e^{-\lambda u}$$

یا

$$f_{(U,T)}(u,t)=\frac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)}t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\ e^{-\lambda u}$$

که در عبارت فوق از رابطه $B(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$ استفاده کرده ایم.

با توجه به اینکه حدود t,u به یکدیگر بستگی ندارند و تابع چگالی توأم (U,T) به صورت حاصلضرب دو تابع چگالی درآمده است که یکی توزیع بتا با پارامترهای (α_1,α_2) و دیگری توزیع گاما با پارامترهای $(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$ می باشند بنابراین نتیجه حاصل می شود و

$T \sim Beta(\alpha_۱, \alpha_۲)$

(البته به سادگی با انتگرال گیری از چگالی توأم (U,T) نسبت به u می توان چگالی t را به دست آورد.)

(ب) می دانیم

$$f_X(x) = \frac{۱}{\Gamma(n)} \lambda^n x^{n-۱} e^{-\lambda x} \quad , \quad x > ۰$$

و

$$M_X(t) = (۱ - \frac{t}{\lambda})^{-n} \quad , t < \lambda$$

فرض می کنیم $Z_n = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

تابع مولد گشتاور Z_n را به دست می آوریم

$$M_{Z_n}(t) = E[e^{tZ_n}] = E[\exp(t\frac{X-\mu}{\sigma})] = m_{X-\mu}(\frac{t}{\sigma})$$

که در عبارت فوق $m(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $X-\mu$ می باشد.

اکنون $m(t)$ را به صورت سری توانی می نویسیم

$$M_{Z_n}(t) = [۱ + m'(۰)(\frac{t}{\sigma}) + \frac{m''(۰)}{۲!}(\frac{t}{\sigma})^۲ + \frac{m'''(۰)}{۳!}(\frac{t}{\sigma})^۳ + ...]^n$$

با توجه به اینکه

$$m'(۰) = E(X-\mu) = ۰$$

$$m''(۰) = E(X-\mu)^۲ = \mathrm{var}(X) = \frac{n}{\lambda^۲}$$

و $\dfrac{t}{\sigma} = \dfrac{t\lambda}{\sqrt{n}}$

بنابراین داریم

$$M_{Z_n}(t) = [۱ + \frac{t^۲}{۲n} + \frac{m'''(۰)}{۳!}(\frac{t\lambda}{\sqrt{n}})^۳ + \frac{m^{(۴)}(۰)}{۴!}(\frac{t\lambda}{\sqrt{n}})^۴ + ...]^n$$

$$=[1+\frac{1}{n}(\frac{t^2}{2}+\frac{m'''(0)}{3!}\frac{(t\lambda)^3}{\sqrt{n}}+\ldots)]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{t^2}{2}}$$

زیرا عبارت داخل پرانتز در بالا وقتی $n\to\infty$، به سمت $\frac{t^2}{2}$ میل می کند.

اکنون چون $e^{\frac{t^2}{2}}$ تابع مولد گشتاور توزیع نرمال استاندارد است بنا بر قضیه پیوستگی داریم

$$\frac{X-\mu}{\sigma}\xrightarrow{D} N(0,1) \quad , \quad n\to\infty$$

■

۱۲- فرض کنید $X_1,\ldots,X_r$، r متغیر تصادفی مستقل باشند، به طوری که $X_i\sim\chi^2_{(n_i)}$، $i=1,\ldots,r$ آن گاه

الف: $Y=\sum_{i=1}^{r}X_i\sim\chi^2_{(\sum_{i=1}^{r}n_i)}$

ب: $U=\dfrac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}}\sim F_{(n_1,n_2)}$

ج: $W=\frac{X_1}{X_1+X_2}\sim Beta(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})$

حل:

$$f_{X_i}(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{n_i}{2})2^{\frac{n_i}{2}}}x^{\frac{n_i}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \quad ,x>0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,r$$

$$M_{X_i}(t)=(1-2t)^{-\frac{n_i}{2}} \qquad i=1,2,\ldots,r$$

(الف) با استفاده از روش تابع مولد گشتاور مسأله را حل می کنیم

چون $X_1,\ldots,X_r$ متغیرهای تصادفی مستقل هستند داریم

$$M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{t\sum_{i=1}^{r}Xi})=\prod_{i=1}^{r}M_{X_i}(t)$$

$$=\prod_{i=1}^{r}(1-2t)^{\frac{n_i}{2}}=(1-2t)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}n_i}$$

با استفاده از قضیه یکتایی نتیجه می شود

$$Y=\sum_{i=1}^{r} X_i \sim \chi^2_{(\sum_{i=1}^{r} n_i)}$$

(ب) با استفاده از روش تبدیل متغیر مساله را حل می کنیم

چون X_1, X_2 مستقل اند، بنابراین

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})2^{\frac{n_1+n_1}{2}}} x_1^{\frac{n_1}{2}-1} x_2^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \quad , \quad x_1,x_2>0$$

اکنون فرض کنید $V=X_2$ و $U=\frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}}$. ابتدا توزیع توأم (U,V) را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} u=\frac{\frac{x_1}{n_1}}{\frac{x_2}{n_2}} \\ v=x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{n_1}{n_2}uv \\ x_2=v \end{cases}$$

ژاکوبین تبدیل برابر است با

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{n_1}{n_2}v & \frac{n_1}{n_2}u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{n_1}{n_2}v$$

بنابراین

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{1}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})2^{\frac{n_1+n_1}{2}}}(\frac{n_1}{n_2}uv)^{\frac{n_1}{2}-1} v^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}v(1+\frac{n_1}{n_2}u)} \frac{n_1}{n_2}v$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})2^{\frac{n_1+n_1}{2}}}(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n}{2}} u^{\frac{n_1}{2}-1} v^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}v(1+\frac{n_1}{n_2}u)} \quad , \quad u,v>0$$

اکنون

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{(U,V)}(u,v)du=\int_{0}^{\infty} cv^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}v(1+\frac{n_1}{n_2}u)}dv$$

$$=c\int_{0}^{\infty} v^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}v(1+\frac{n_1}{n_2}u)} \qquad (1)$$

که در عبارت فوق

$$c=\frac{1}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})2^{\frac{n_1+n_1}{2}}}(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n}{2}}u^{\frac{n_1}{2}-1}$$

اکنون انتگران در (۱) را به صورت یک چگالی گاما در می آوریم تا انتگرال فوق برابر یک شود.

درنتیجه

$$f_U(u)=\frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}}u^{\frac{n_1}{2}-1}(1+\frac{n_1}{n_1}u)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \quad ,u>0$$

بنابراین

$$U=\frac{\frac{X_1}{n_1}}{\frac{X_2}{n_2}}\sim F_{(n_1,n_2)}$$

(ج) می دانیم اگر $i=1,2$ $X_i\sim\chi^2_{(n_i)}$ آنگاه $i=1,2$ $X_i\sim\Gamma(\frac{n_i}{2},\frac{1}{2})$

چون X_1,X_2 مستقل هستند با استفاده از قسمت (۱۱- الف) داریم

$$W=\frac{X_1}{X_1+X_2}\sim Beta(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2})$$

■

۱۳- اگر $Z_1,...,Z_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(0,1)$ باشند ، آن گاه

الف: $Y=\sum_{i=1}^{n} Z_i \sim N(0,n)$

ب: $W=\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$

ج: $U=\frac{Z_1}{Z_2} \sim C(0,1)$

د: $V=\frac{Z_1}{|Z_2|} \sim C(0,1)$

حل:

$$f_{Z_i}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad t\in R$$

$$M_{Z_i}(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$$

(الف) با استفاده از روش تابع مولد گشتاور مسأله را حل می کنیم.

چون $Z_1,...,Z_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع هستند داریم

$$M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{t\sum_{i=1}^{r} Zi})=\prod_{i=1}^{n} M_{Z_i}(t)=(M_{Z_1}(t))^n=(e^{\frac{t^2}{2}})^n=e^{\frac{nt^2}{2}}$$

با استفاده از قضیه یکتایی نتیجه می شود

$$Y=\sum_{i=1}^{n} Z_i \sim N(0,n)$$

(ب) ابتدا نشان می دهیم Z_1^2 دارای توزیع χ_1^2 است. برای هر $z>0$ داریم

$$P(Z_1^2\le z)=P(-\sqrt{z}\le Z_1 \le \sqrt{z})=\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

با مشتق گیری نسبت به z به سادگی داریم

$$f_{Z_1}(z)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{1}{2}}}z^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}} \qquad ;z>0$$

بنابراین $Z_1^2 \sim \chi^2_{(1)}$.

اکنون تابع مولد گشتاور W را به دست می آوریم. چون $Z_1,...,Z_n$ مستقل و همتوزیع اند داریم

$$M_W(t)=E(e^{tW})=E[\exp(t\sum_{i=1}^{n}Z_i^2)]=[M_{Z_1^2}(t)]^n=(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

در نتیجه بنا بر قضیه یکتایی

$$W=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\sim\chi_{(n)}^2$$

(ج) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم.

چون Z_1,Z_2 مستقل اند، بنابراین

$$f_{(Z_1,Z_2)}(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)}\quad,\quad z_1,z_2\in R$$

اکنون فرض کنید $V=Z_1+Z_2$ و $U=\frac{Z_1}{Z_2}$. ابتدا توزیع توأم (U,V) را به دست

می آوریم.

$$\begin{cases}u=\dfrac{z_1}{z_2}\\ v=z_1+z_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=\dfrac{uv}{1+u}\\ z_2=\dfrac{v}{1+u}\end{cases}$$

ژاکوبین تبدیل برابر است با

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z_1}{\partial u}&\dfrac{\partial z_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial u}&\dfrac{\partial z_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{v}{(1+u)^2}&\dfrac{u}{1+u}\\ \dfrac{-v}{(1+u)^2}&\dfrac{1}{1+u}\end{vmatrix}=\frac{v}{(1+u)^2}$$

بنابراین

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{1}{2\pi}\frac{|v|}{(1+u)^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{v^2(1+u^2)}{(1+u)^2}}\qquad u,v\in R$$

اکنون

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(U,V)}(u,v)dv$$

$$= \frac{۱}{۲\pi(۱+u)^۲} \int_{-\infty}^{\infty} |v| e^{-\frac{v^۲(۱+u^۲)}{۲(۱+u)^۲}} dv$$

$$= \frac{۱}{\pi(۱+u)^۲} \int_{۰}^{\infty} v e^{-\frac{v^۲(۱+u^۲)}{۲(۱+u)^۲}} dv$$

$$= \frac{۱}{\pi(۱+u)^۲} \int_{۰}^{\infty} e^{-t} \frac{(۱+u)^۲}{(۱+u^۲)} dt$$

با تغییر متغیر $t = \frac{v^۲(۱+u^۲)}{۲(۱+u)^۲}$

$$= \frac{۱}{\pi(۱+u^۲)} \qquad u \in R$$

بنابراین

$$U = \frac{Z_۱}{Z_۲} \sim C(۰,۱)$$

(د) ابتدا توزیع $Y = |Z_۲|$ **را به دست می آوریم.**

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|Z_۲| \le y) = P(-y \le Z_۲ \le y) = F_{Z_۲}(y) - F_{Z_۲}(-y)$$

پس

$$f_Y(y) = f_{Z_۲}(y) + f_{Z_۲}(-y) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} e^{-\frac{y^۲}{۲}} \qquad y > ۰$$

چون $Z_۱, Y$ **مستقل هستند داریم**

$$f_{(Z_۱,Y)}(z_۱,y) = f_{(Z_۱)}(z_۱) f_Y(y) = \frac{۱}{\pi} e^{-\frac{۱}{۲}(z_۱^۲+y^۲)} \qquad z_۱ \in R\,,\, y > ۰$$

اکنون تبدیلات $U = Y$ **و** $V = \frac{Z_۱}{Y}$ **را در نظر بگیرید. توزیع توأم** (U,V) **را محاسبه می کنیم**

$$\begin{cases} u = y \\ v = \frac{z_۱}{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = u \\ z_۱ = uv \end{cases}$$

ژاکوبین تبدیل برابر است با

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z_۱}{\partial u} & \frac{\partial z_۱}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ v & u\end{vmatrix}=u$$

بنابراین

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{u}{\pi}e^{-\frac{۱}{۲}u^۲(۱+v^۲)} \qquad u>۰\,,\, v\in R$$

اکنون

$$\begin{aligned}f_V(v)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{(U,V)}(u,v)du\\&=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty}ue^{-\frac{۱}{۲}u^۲(۱+v^۲)}du\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+v^2}e^{-t}dt\\&=\frac{۱}{\pi(۱+v^۲)} \qquad v\in R\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $t=\frac{۱}{۲}u^۲(۱+v^۲)$

درنتیجه

$$V=\frac{Z_۱}{|Z_۲|}\sim C(۰,۱)$$

■

۱۴- اگر $Z\sim N(۰,۱)$، $V\sim\chi^۲_{(n)}$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آن گاه

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}\sim t_{(n)}$$

حل: با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم

چون V, Z مستقل اند، بنابراین

$$f_{Z,V}(z,v)=\frac{۲^{-\frac{n}{۲}}}{\Gamma(\frac{n}{۲})\sqrt{۲\pi}}v^{\frac{n}{۲}-۱}e^{-\frac{v}{۲}} \quad , \quad z\in R\,, v>۰$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می گیریم

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \quad \text{و} \qquad R=V$$

ابتدا توزیع توأم (R,T) را به دست می آوریم

$$\begin{cases} t=\frac{z}{\sqrt{\frac{v}{n}}} \\ r=v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z=t\sqrt{\frac{r}{n}} \\ v=r \end{cases}$$

ژاکوبین تبدیل برابر است با

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial r} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sqrt{\frac{r}{n}} & \frac{t}{۲\sqrt{nr}} \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=\sqrt{\frac{r}{n}}$$

بنابراین

$$f_{R,T}(r,t)=\frac{۲^{-\frac{n+۱}{۲}}}{\Gamma(\frac{n}{۲})\sqrt{\pi}}r^{\frac{n}{۲}-۱}e^{-\frac{r}{۲}(۱+\frac{t^۲}{n})} \quad , \quad t\in R\,, r>۰$$

اکنون

$$f_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{T,R}(t,r)dr$$

$$=\int_{۰}^{\infty}\frac{۲^{-\frac{n+۱}{۲}}}{\Gamma(\frac{n}{۲})\sqrt{\pi}}r^{\frac{n}{۲}-۱}e^{-\frac{r}{۲}(۱+\frac{t^۲}{n})}dr$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \qquad t \in R$$

درنتیجه

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim t_{(n)}$$

■

۱۵- اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ **یک نمونه تصادفی** n **تایی از توزیع** $LN(\mu, \sigma^2)$ **باشد، آن گاه**

الف: $Y = \prod_{i=1}^{n} X_i \sim LN(n\mu, n\sigma^2)$

ب: $W = \ln X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$

ج: $V = Y^{\frac{1}{n}} = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\frac{1}{n}} \sim LN(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

حل:

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}) \qquad ; x > 0 \ , \ \mu \in R \ , \ \sigma > 0$$

توضیح:

چنانچه $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ **آنگاه** $Y = e^X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ **زیرا**

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad x = \ln y \quad J = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

پس

$$f_Y(y) = f_X(\ln y)\,|J| = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}) \qquad y > 0$$

درنتیجه

$$Y = e^X \sim LN(\mu,\sigma^۲)$$

(الف) ابتدا توزیع $\ln Y$ را به دست می آوریم

$$\ln Y = \ln(\prod_{i=۱}^{n} X_i) = \sum_{i=۱}^{n} \ln X_i \sim N(n\mu, n\sigma^۲)$$

زیرا بنا به (ب)

$$\ln X_i \sim N(\mu,\sigma^۲) \quad i = ۱,۲,...,n$$

اکنون با توجه توضیح داده شده در ابتدا به سادگی داریم

$$Y = \prod_{i=۱}^{n} X_i \sim LN(n\mu, n\sigma^۲)$$

(ب) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم

چون $w = \ln x_۱$ **پس**

$$x_۱ = e^w \quad \text{و} \quad J = \frac{dx_۱}{dw} = e^w$$

درنتیجه

$$f_W(w) = f_{X_۱}(e^w)\,|J| = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma}\exp(-\frac{(w-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}) \quad , \quad w \in R$$

بنابراین

$$W = \ln X_۱ \sim N(\mu,\sigma^۲)$$

(ج) از قسمت (الف) می دانیم

$$\ln Y = \ln(\prod_{i=۱}^{n} X_i) = \sum_{i=۱}^{n} \ln X_i \sim N(n\mu, n\sigma^۲)$$

پس

$$\frac{۱}{n}\ln Y \sim N(\mu, \frac{\sigma^۲}{n})$$

یا

$$\ln Y^{\frac{۱}{n}} \sim N(\mu, \frac{\sigma^۲}{n})$$

اکنون بنابر توضیح بالا داریم

$$Y^{\frac{۱}{n}} \sim LN(\mu, \frac{\sigma^{۲}}{n})$$

■

۱۶- اگر $X_{۱}, X_{۲}, ..., X_{n}$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $IG(\mu, \sigma^{۲})$ باشد، آن گاه

الف: $Y = \frac{\lambda(X_{۱} - \mu)^{۲}}{\mu^{۲} X_{۱}} \sim \chi^{۲}_{(۱)}$

ب: $\overline{X} \sim IG(\mu, n\lambda)$

ج: $\sum_{i=۱}^{n} (X_i^{-۱} - \overline{X}^{-۱}) \sim \lambda^{-۱} \chi^{۲}_{(n-۱)}$

حل:

$$f_{\mu,\lambda}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{۲\pi x^{۳}}} \exp\{-\frac{\lambda(x-\mu)^{۲}}{۲\mu^{۲} x}\} \quad ; \quad x > ۰ \ , \ \lambda, \mu > ۰$$

$$M_X(t) = \exp\{\frac{\lambda}{\mu}[۱ - (\frac{۱ + \mu^{۲} t}{\lambda})^{\frac{۱}{۲}}]\}$$

(الف) ابتدا تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y رامحاسبه می کنیم

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E[\exp \frac{t\lambda(X_{۱} - \mu)^{۲}}{\mu^{۲} X_{۱}}]$$

$$= \int_{۰}^{\infty} \exp \frac{t\lambda(x-\mu)^{۲}}{\mu^{۲} x} f_{\mu,\lambda}(x) dx$$

$$= \int_{۰}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{۲\pi x^{۳}}} \exp\{-\frac{\lambda(x-\mu)^{۲}}{۲\mu^{۲} x} + \frac{t\lambda(x-\mu)^{۲}}{\mu^{۲} x}\} dx$$

$$= \int_{۰}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{۲\pi x^{۳}}} \exp\{-(۱ - ۲t) \frac{\lambda(x-\mu)^{۲}}{۲\mu^{۲} x}\} dx$$

با فرض $t < \frac{۱}{۲}$

$$= \int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{۱-۲t}} f_{\mu,(۱-۲t)\lambda}(x)dx$$

$$= (۱-۲t)^{-\frac{۱}{۲}} \qquad ; t < \frac{۱}{۲}$$

که در آخرین انتگرال $f_{\mu,(۱-۲t)\lambda}(x)$ تابع چگالی گوسین معکوس بـا پارامترهـای μ و $\lambda(۱-۲t)$ می باشد.

چون تابع مولد گشتاور Y به صورت تابع مولد گشتاور یک متغیر تـصادفی خـی دو با یک درجه آزادی است، بنابراین طبق قضیه یکتایی داریم

$$Y = \frac{\lambda(X_۱ - \mu)^۲}{\mu^۲ X_۱} \sim \chi^۲_{(۱)}$$

(ب) ابتدا تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $X_۱$ را به دست می آوریم

$$M_{X_۱}(t) = E(e^{tX_۱}) = \int_{۰}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{۲\pi x^۳}} e^{tx - \frac{\lambda(x-\lambda)^۲}{۲\mu^۲ x}} dx$$

توان داخل انتگرال را به صورت زیر می نویسیم

$$tx - \frac{\lambda(x^۲ + \mu^۲ - ۲x\mu)}{۲\mu^۲ x} = \frac{۲t\mu^۲ x^۲ - \lambda x^۲ - \lambda\mu^۲ + ۲x\mu\lambda)}{۲\mu^۲ x}$$

$$= \frac{-\lambda[x^۲(۱ - \frac{۲t\mu^۲}{\lambda}) - ۲\mu x + \mu^۲]}{۲\mu^۲ x}$$

در صورت کسر یک اتحاد مربع ایجاد می کنیم

$$= \frac{-\lambda[(x\sqrt{۱ - \frac{۲t\mu^۲}{\lambda}} - \mu)^۲ - ۲\mu x + ۲\mu x\sqrt{۱ - \frac{۲t\mu^۲}{\lambda}}]}{۲\mu^۲ x}$$

$$= \frac{-\lambda[(x\sqrt{۱ - \frac{۲t\mu^۲}{\lambda}} - \mu)^۲}{۲\mu^۲ x} - \frac{\lambda}{\mu}(\sqrt{۱ - \frac{۲t\mu^۲}{\lambda}} - ۱)$$

$$= \frac{-\lambda(1-\frac{2t\mu^2}{\lambda})(x-\frac{\mu\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda-2t\mu^2}})^2}{2\mu^2 x} - \frac{\lambda}{\mu}(\sqrt{1-\frac{2t\mu^2}{\lambda}}-1)$$

$$= \frac{-\lambda(x-\mu')^2}{2\mu'^2 x} - \frac{\lambda}{\mu}(\sqrt{1-\frac{2t\mu^2}{\lambda}}-1)$$

که در عبارت فوق

$$\mu' = \frac{\mu\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda-2t\mu^2}}$$

با جایگذاری عبارت فوق در انتگرال داریم

$$M_{X_1}(t) = \exp\{\frac{\lambda}{\mu}(1-\sqrt{1-\frac{2t\mu^2}{\lambda}})\}\int_0^\infty \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\{\frac{-\lambda(x-\mu')^2}{2\mu'^2 x}\}dx$$

با توجه به اینکه عبارت داخل انتگرال، تابع چگالی یک متغیر تصادفی با توزیع $IG(\mu',\lambda)$ است بنابراین داریم

$$M_{X_1}(t) = \exp\{\frac{\lambda}{\mu}(1-\sqrt{1-\frac{2t\mu^2}{\lambda}})\}$$

اکنون تابع مولد گشتاور $\overline{X}$ می شود

$$M_{\overline{X}}(t) = E[\exp(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)] = [M(\frac{t}{n})]^n = \exp\{\frac{n\lambda}{\mu}(1-\sqrt{1-\frac{2t\mu^2}{n\lambda}})\}$$

در نتیجه

$$\overline{X} \sim IG(\mu, n\lambda)$$

(ج) ابتدا داریم

$$U = \lambda\sum_{i=1}^n(\frac{1}{X_i}-\frac{1}{\overline{X}}) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda(X_i-\mu)^2}{\mu^2 X_i} - \frac{n\lambda(\overline{X}-\mu)^2}{\mu^2\overline{X}} = \sum_{i=1}^n Y_i - Z$$

که

$$Y_i = \frac{\lambda(X_i-\mu)^۲}{\mu^۲ X_i} \quad i=۱,۲,\dots,n \quad , \; Z = \frac{n\lambda(\overline{X}-\mu)^۲}{\mu^۲ \overline{X}}$$

با توجه به قسمتهای (الف) و (ب) به سادگی داریم

$$Y_i \sim \chi^۲_{(۱)} \quad i=۱,۲,\dots,n \quad \text{و} \quad Z \sim \chi^۲_{(۱)}$$

با توجه به اینکه X_i ها مستقل هستند (و درنتیجه Y_i ها مستقل می باشند) داریم

$$\sum_{i=۱}^{n} Y_i \sim \chi^۲_{(n)}$$

بنابراین توزیع متغیرهای تصادفی Z و $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ و در نتیجه توزیع $\lambda\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{X_i}-\frac{۱}{\overline{X}})$ مستقل از پارامتر است. پس $\lambda\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{X_i}-\frac{۱}{\overline{X}})$ یک آماره فرعی است.

از طرفی برای هر λ ثابتی خانواده توزیعهای گوسین معکوس عضو خانواده نمایی یک پارامتری با پارامتر μ و آماره بسنده کامل $\overline{X}$ است. لذا بنا بر قضیه باسو $\overline{X}$ و $\lambda\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{X_i}-\frac{۱}{\overline{X}})$ و درنتیجه $\overline{X}$ و $\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{X_i}-\frac{۱}{\overline{X}})$ از هم مستقل می باشند.

در نتیجه برای هر λ و هر μ نتیجه می شود که $\overline{X}$ و $\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{X_i}-\frac{۱}{\overline{X}})$ از هم مستقل می باشند. چون $U+Z=\sum_{i=۱}^{n} Y_i$ بنابراین

$$M_{U+Z}(t) = M_{\sum_{i=۱}^{n} Y_i}(t)$$

بنا به استقلال $\overline{X}$ و U

$$\Rightarrow \quad M_U(t)M_Z(t) = M_{\sum_{i=۱}^{n} Y_i}(t)$$

$$\Rightarrow \quad M_U(t) = M_{\sum_{i=۱}^{n} Y_i}(t)[M_Z(t)]^{-۱}$$

$$\Rightarrow \quad M_U(t) = (۱-۲t)^{-\frac{n-۱}{۲}}$$

بنابراین

$$U=\sum_{i=1}^{n}(X_i^{-1}-\overline{X}^{-1})\sim\lambda^{-1}\chi^{2}_{(n-1)}$$

■

۱۷- اگر $X_1,X_2,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $C(\theta,\sigma)$ باشد، آن گاه

الف: $Y=\frac{1}{X_1}\sim C(\frac{\theta}{\theta^2+\sigma^2},\frac{\sigma}{\theta^2+\sigma^2})$

ب: $Z=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim C(n\theta,n\sigma)$ & $\overline{X}\sim C(\theta,\sigma)$

حل:

(الف) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم

چون $y=\frac{1}{x_1}$ **پس**

$$x_1=\frac{1}{y}\quad \text{و}\quad J=\frac{dx_1}{dy}=-\frac{1}{y^2}$$

درنتیجه

$$f_Y(y)=f_{X_1}(\frac{1}{y})\,|J|=\frac{1}{\pi\sigma}[1+(\frac{1-y\theta}{y\sigma})^2]^{-1}\frac{1}{y^2}$$

با کمی ساده کردن داریم

$$=\frac{\sigma}{\pi\{y^2(\theta^2+\sigma^2)-2\theta y+1\}}=\frac{\sigma}{\pi\{(\theta^2+\sigma^2)[y^2-\frac{2\theta}{\theta^2+\sigma^2}y]+1\}}$$

$$=\frac{\sigma}{\pi\{(\theta^2+\sigma^2)[(y-\frac{\theta}{\theta^2+\sigma^2})^2-\frac{\theta^2}{(\theta^2+\sigma^2)^2}]+1\}}$$

$$=\frac{\sigma}{\pi\{(\theta^2+\sigma^2)(y-\frac{\theta}{\theta^2+\sigma^2})^2-\frac{\theta^2}{(\theta^2+\sigma^2)}+1\}}$$

$$=\frac{\sigma}{\pi\{(\theta^2+\sigma^2)(y-\frac{\theta}{\theta^2+\sigma^2})^2+\frac{\sigma^2}{(\theta^2+\sigma^2)}\}}$$

$$=\frac{\sigma}{\pi\frac{\sigma^2}{(\theta^2+\sigma^2)}\{\frac{(\theta^2+\sigma^2)^2}{\sigma^2}(y-\frac{\theta}{\theta^2+\sigma^2})^2+1\}}$$

با فرض $\theta'=\frac{\theta}{\theta^2+\sigma^2}$ **و** $\sigma'=\frac{\sigma}{\theta^2+\sigma^2}$ **به سادگی داریم**

$$=\frac{1}{\pi\sigma'\{1+(\frac{y-\theta'}{\sigma'})^2\}}$$

درنتیجه

$$Y=\frac{1}{X_1}\sim C(\frac{\theta}{\theta^2+\sigma^2},\frac{\sigma}{\theta^2+\sigma^2})$$

(ب) تابع مشخصه توزیع $C(\theta,\sigma)$ **برابر است با**

$$\rho_X(t)=e^{it\theta-\sigma|t|}$$

اکنون تابع مشخصه $\overline{X}$ **را به دست می آوریم.**

با توجه به مستقل و همتوزیع بودن $X_1,X_2,\dots,X_n$ **داریم**

$$\rho_{\overline{X}}(t)=E(e^{it\overline{X}})=[\rho_{X_1}(\frac{t}{n})]=[\exp(i\frac{t}{n}\theta-\sigma|\frac{t}{n}|)]^n=e^{it\theta-\sigma|t|}$$

درنتیجه توسط قضیه یکتایی داریم

$$\overline{X}\sim C(\theta,\sigma)$$

مشابه فوق داریم

$$\rho_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)=e^{itn\theta-n\sigma|t|}$$

درنتیجه، توسط قضیه یکتایی داریم

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim C(n\theta, n\sigma)$$

■

۱۸- اگر $X \sim L(0, \beta, \beta)$ ، **آن گاه** $U = |X| \sim E(\frac{1}{\beta})$.

حل:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x|}{\beta}} \quad ; x \in R \, , \beta > 0$$

با استفاده از روش تابع توزیع مسأله را حل می کنیم ، برای هر $u > 0$ **داریم**

$$F_U(u) = P(U \le u) = P(|X| \le u) = P(-u \le X \le u) = F_X(u) - F_X(-u)$$

با مشتق گیری نسبت به u **داریم**

$$f_U(u) = f_X(u) + f_X(-u) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{u}{\beta}} + \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{u}{\beta}} = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{u}{\beta}} \quad , u > 0$$

درنتیجه

$$U = |X| \sim E(\frac{1}{\beta})$$

■

۱۹- اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ **یک نمونه تصادفی** n **تایی از توزیع** $Pa(\alpha, \beta)$ **باشد، آن گاه**

الف: $Y = \ln(\frac{X_1}{\beta}) \sim E(\alpha)$

ب: $U = \min(X_1, ..., X_n) = X_{(1)} \sim Pa(n\alpha, \beta)$

ج: $W=2\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{X_i}{\beta})\sim\chi^2_{(2n)}$

د: $V=2\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{X_i}{X_{(1)}})\sim\chi^2_{(2n-2)}$

حل:

$$f_X(x)=\frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}\qquad ;\ x\ge\alpha\ \ ,\ \alpha,\beta>0$$

$$F_X(x)=\int_\alpha^x\frac{\alpha\beta^\alpha}{t^{\alpha+1}}dt=1-(\frac{\beta}{x})^\alpha\qquad x\ge\alpha$$

(الف) با استفاده از روش تبدیل متغیر مسأله را حل می کنیم

چون $y=\ln(\frac{x_1}{\beta})$ پس

$x_1=\beta e^y$ و $J=\frac{dx_1}{dy}=\beta e^y$

درنتیجه

$$f_Y(y)=f_{X_1}(\beta e^y)\,|\,J\,|=\frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta e^y)^{\alpha+1}}\beta e^y=\alpha e^{-\alpha y}\qquad ;\quad y>0$$

بنابراین

$$Y=\ln(\frac{X_1}{\beta})\sim E(\alpha)$$

(ب) ابتدا تابع توزیع متغیر تصادفی U را محاسبه می کنیم

$$G(u)=P(U\le u)=1-P(X_{(1)}>u)=1-P(X_1>u,X_2>u,\ldots X_n>u)$$

$=1-[P(X_1>u)]^n$ بنا به مستقل و همتوزیع بودن $X_1,\ldots,X_n$

$$=1-[1-F_{X_1}(u)]^n$$

با مشتقگیری نسبت به u چگالی $X_{(1)}$ را به دست می آوریم

$$g(u)=n[1-F_{X_1}(u)]^{n-1}f_{X_1}(u)$$

$$= \frac{n\alpha\beta^{n\alpha}}{u^{n\alpha+1}} \qquad u > \beta$$

بنابراین

$$U = \min(X_1,...,X_n) = X_{(1)} \sim Pa(n\alpha,\beta)$$

(ج) از قسمت (الف) می دانیم

$$Y_i = \ln(\frac{X_i}{\beta}) \sim E(\alpha) \qquad i = 1,2,...,n$$

بنابراین

$$2\alpha Y_i \sim \chi^2_{(2)} \qquad i = 1,2,...,n$$

چون X_i ها مستقل اند داریم

$$W = 2\alpha\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \chi^2_{(2n)}$$

(د) از قسمت (الف) می دانیم

$$Y_i = \ln(\frac{X_i}{\beta}) \sim E(\alpha) \qquad i = 1,2,...,n$$

فرض کنید $Y_{(1)},Y_{(2)},...,Y_{(n)}$ آماره های ترتیبی نمونه تصادفی $Y_1,Y_2,...,Y_n$ باشند. از قسمت (۹-ط) می دانیم متغیرهای تصادفی

$$Z_1 = nY_{(1)}\ ,\ Z_2 = (n-1)(Y_{(2)} - Y_{(1)})\ ,\ Z_{(3)} = (n-2)(Y_{(3)} - Y_{(2)})\ ,...,$$

$$Z_n = (Y_{(n)} - Y_{(n-1)})$$

مستقل و همتوزیع با توزیع $E(\alpha)$ می باشند. بنابراین

$$2\alpha Z_i \sim \chi^2_{(2)} \qquad i = 1,2,...,n$$

$$\Rightarrow \qquad 2\alpha\sum_{i=2}^{n} Z_i \sim \chi^2_{(2n-2)}$$

از طرفی

$$2\alpha\sum_{i=2}^{n} Z_i = 2\alpha[(n-1)(Y_{(2)} - Y_{(1)}) + (n-2)(Y_{(3)} - Y_{(2)}) + ... + (Y_{(n)} - Y_{(n-1)})\ ]$$

$$= ۲\alpha\sum_{i=۲}^{n}(Y_{(i)} - (n-۱)Y_{(۱)}) = ۲\alpha\sum_{i=۱}^{n}(Y_{(i)} - Y_{(۱)})$$
$$= ۲\alpha\sum_{i=۱}^{n}[\ln(\frac{X_{(i)}}{\beta}) - \ln(\frac{X_{(۱)}}{\beta})]$$
$$= ۲\alpha\sum_{i=۱}^{n}\ln(\frac{X_{(i)}}{X_{(۱)}})$$
$$= V$$

پس

$$V = ۲\alpha\sum_{i=۱}^{n}\ln(\frac{X_i}{X_{(۱)}}) \sim \chi^۲_{(۲n-۲)}$$

■

۲۰- اگر $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $W(\alpha,\lambda)$ باشد، آن گاه

الف: $U = ۲\lambda X_۱^{\alpha} \sim \chi^۲_{(۲)}$

ب: $V = X_{(۱)} \sim W(\alpha, n\lambda)$

حل:

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}} \quad ; \quad x > 0\,,\ \alpha,\lambda > 0$$

(الف) با استفاده از روش تبدیل متغیر مساله را حل می کنیم

چون $u = ۲\lambda x_۱^{\alpha}$ **پس**

$$x_۱ = (\frac{u}{۲\lambda})^{\frac{۱}{\alpha}} \qquad و \qquad J = \frac{dx_۱}{du} = \frac{۱}{۲\alpha\lambda}(\frac{u}{۲\lambda})^{\frac{۱}{\alpha}-۱}$$

درنتیجه

$$f_U(u) = f_{X_۱}((\frac{u}{۲\lambda})^{\frac{۱}{\alpha}})\,|\,J\,| = \frac{۱}{۲}e^{-\frac{u}{۲}} \quad ; \quad u > ۰$$

بنابراین

$$U = ۲\lambda X_۱^{\alpha} \sim \chi^۲_{(۲)}$$

(ب) به سادگی داریم

$$f_{X_{(1)}}(x)=n[1-F_{X_1}(x)]^{n-1}f_{X_1}(x)$$

از طرفی برای هر $x>0$

$$P(X>x)=\int_x^\infty \alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^\alpha}dt=\int_{\lambda t^\alpha}^\infty e^{-u}du=e^{-\lambda x^\alpha}$$

که در انتگرال اول از تغییر متغیر $u=\lambda x^\alpha$ استفاده شده است.

بنابراین

$$F_{X_{(1)}}(x)=1-e^{-\lambda x^\alpha} \qquad x>0$$

$$f_{X_{(1)}}(x)=n\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-n\lambda x^\alpha} \qquad ; \quad x>0,\ \alpha,\lambda>0$$

در نتیجه

$$V=X_{(1)}\sim W(\alpha,n\lambda)$$

■

۲۱- اگر $X\sim t_{(n)}$، آن گاه

الف: $Y=X^2\sim F_{(1,n)}$

ب: $Z=\dfrac{1}{1+\dfrac{X^2}{n}}\sim Beta(\dfrac{n}{2},\dfrac{1}{2})$

حل:

$$f_X(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \quad x\in R$$

(الف) فرض کنید Z و V دو متغیر تصادفی مستقل با توزیعهای به ترتیب $N(0,1)$ و $\chi^2_{(n)}$ باشند. بنا به قسمت ١٤ داریم

$$X=\frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}\sim t_{(n)}$$

می دانیم $Z^{۲}\sim\chi^{۲}_{(۱)}$ ، بنابراین با توجه به قسمت (۱۲-ب) متغیر تصادفی $X^{۲}$ دارای توزیع $F_{(1,n)}$ می باشد.

(ب) ابتدا تابع توزیع Z را محاسبه می کنیم . برای هر $z>۰$ داریم

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\frac{۱}{۱+\frac{X^{۲}}{n}}\le z)=۱-P(X^{۲}\le n(\frac{۱}{z}-۱))$$

با شرط $z<۱$ (یامعادل آن $\frac{۱}{z}-۱>۰$) داریم

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=۱-P(-\sqrt{n(\tfrac{۱}{z}-۱)}\le X\le\sqrt{n(\tfrac{۱}{z}-۱)})\\&=۱-F_X(\sqrt{n(\tfrac{۱}{z}-۱)})+F_X(-\sqrt{n(\tfrac{۱}{z}-۱)})\end{aligned}$$

با مشتق گیری نسبت به z تابع چگالی متغیر تصادفی Z را به دست می آوریم

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\frac{\sqrt{n}}{۲z^{۲}}\sqrt{\frac{z}{۱-z}}\{f_X(\sqrt{n(\tfrac{۱}{z}-۱)})+f_X(-\sqrt{n(\tfrac{۱}{z}-۱)})\}\\&=\frac{\sqrt{n}}{۲z^{۲}}\sqrt{\frac{z}{۱-z}}\{\frac{۲\Gamma(\frac{n+۱}{۲})}{\Gamma(\frac{n}{۲})\sqrt{n\pi}}z^{-\frac{n+۱}{۲}}\}\\&=\frac{\Gamma(\frac{n+۱}{۲})}{\Gamma(\frac{n}{۲})\sqrt{\pi}}z^{\frac{n}{۲}-۱}(۱-z)^{\frac{۱}{۲}-۱}\qquad;\quad ۰<z<۱\end{aligned}$$

درنتیجه

$$Z=\frac{۱}{۱+\frac{X^{۲}}{n}}\sim Beta(\frac{n}{۲},\frac{۱}{۲})$$

■

۲۲- اگر $X\sim Beta(\alpha,۱)$، آن گاه

الف: $Y=-\ln X\sim E(\alpha)$

ب: $Z=-۲\alpha\ln X \sim \chi^{۲}_{(۲)}$

حل:

$$f_X(x)=\alpha x^{\alpha-۱} \quad ; \quad ۰<x<۱\ ,\ \alpha>۰$$

(الف) با استفاده از روش تبدیل متغیر داریم

$$y=-\ln x \quad \Rightarrow \quad x=e^{-y} \quad , \quad J=\frac{dx}{dy}=-e^{-y} \quad , \quad y>۰$$

چگالی Y می شود

$$g_Y(y)=f_X(e^{-y})\left|J\right|=\alpha e^{-\alpha y} \quad ; \quad y>۰$$

درنتیجه

$$Y=-\ln X \sim E(\alpha)$$

(ب) با استفاده از روش تبدیل متغیر داریم

$$z=-۲\alpha\ln x \quad \Rightarrow \quad x=e^{-\frac{z}{۲\alpha}} \quad , \quad J=\frac{dx}{dz}=-\frac{۱}{۲\alpha}e^{-\frac{z}{۲\alpha}} \quad , \quad z>۰$$

چگالی Z می شود

$$h_Z(z)=f_X(e^{-\frac{z}{۲\alpha}})\left|J\right|=\frac{۱}{۲}e^{-\frac{z}{۲}} \quad ; \quad z>۰$$

درنتیجه

$$Z=-۲\alpha\ln X \sim \chi^{۲}_{(۲)}$$

■

۲۳- اگر $W \sim Beta(\frac{m}{۲},\frac{n}{۲})$، آن گاه

الف: $X=\frac{n}{m}\frac{W}{۱-W} \sim F_{(m,n)}$

حل:

$$f_W(w) = \frac{۱}{B(\frac{m}{۲}, \frac{n}{۲})} w^{\frac{m}{۲}-۱}(۱-w)^{\frac{n}{۲}-۱} \qquad ۰ < w < ۱$$

(الف) برای هر $x > ۰$ داریم

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \le x) \\
&= P(\frac{n}{m}\frac{W}{۱-W} \le x) \\
&= P(\frac{W}{۱-W} \le x\frac{m}{n}) \\
&= P(W \le \frac{\frac{m}{n}x}{۱+\frac{m}{n}x}) \\
&= F_W(\frac{\frac{m}{n}x}{۱+\frac{m}{n}x})
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{\frac{m}{n}}{(۱+\frac{m}{n}x)^۲} \times \frac{۱}{B(\frac{m}{۲}, \frac{n}{۲})} (\frac{\frac{m}{n}x}{۱+\frac{m}{n}x})^{\frac{m}{۲}-۱}(۱-\frac{\frac{m}{n}x}{۱+\frac{m}{n}x})^{\frac{n}{۲}-۱} \\
&= \frac{۱}{B(\frac{m}{۲}, \frac{n}{۲})}(\frac{m}{n})^{\frac{m}{۲}} \frac{x^{\frac{m}{۲}-۱}}{(۱+\frac{m}{n}x)^{\frac{m+n}{۲}}}
\end{aligned}$$

پس X دارای توزیع $F_{(m,n)}$ است.

■

۲٤- فرض کنید $X_۱ \sim Beta(\alpha_۱, \alpha_۲+\alpha_۳+\alpha_۴)$ ، $X_۲ \sim Beta(\alpha_۲, \alpha_۳+\alpha_۴)$، $X_۳ \sim Beta(\alpha_۳, \alpha_۴)$، **به طوری که** $\alpha_i > ۰$ ، $i = ۱,...,۴$ ، **سه متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر تعریف کنیم** $Y_۱ = X_۱$ ، $Y_۲ = X_۲(۱-X_۱)$ **و** $Y_3 = X_3(1-X_1)(1-X_2)$، **آن گاه**

$$\underline{Y} = (Y_۱, Y_۲, Y_۳) \sim D_۳(\alpha_۴, \alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)$$

حل:

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)} x_1^{\alpha_1 - 1}(1 - x_1)^{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 1}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{B(\alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4)} x_2^{\alpha_2 - 1}(1 - x_2)^{\alpha_3 + \alpha_4 - 1}$$

$$f_{X_3}(x_3) = \frac{1}{B(\alpha_3, \alpha_4)} x_3^{\alpha_3 - 1}(1 - x_3)^{\alpha_4 - 1}$$

$$0 < x_i < 1 \ , \ i = 1,2,3,4 \quad , \quad \alpha_i > 0 \qquad i = 1,2,3$$

متغیرهای تصادفی X_1, X_2, X_3 **مستقل هستند پس**

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3)$$

چون $y_1 = x_1$ ، $y_2 = x_2(1 - x_1)$ **و** $y_3 = x_3(1 - x_1)(1 - x_2)$ ، **بنابراین**

$x_1 = y_1$ ، $x_2 = \frac{y_2}{1 - y_1}$ **و** $x_3 = \frac{y_3}{1 - y_1 - y_2}$ **و ژاکوبین تبدیل برابر است با**

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{y_2}{(1 - y_1)^2} & \frac{1}{1 - y_1} & 0 \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{1}{1 - y_1 - y_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1 - y_1)(1 - y_1 - y_2)}$$

بنابراین

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) = f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3)|J|$$

$$= \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)} \frac{1}{B(\alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4)} \frac{1}{B(\alpha_3, \alpha_4)} y_1^{\alpha_1 - 1}(1 - y_1)^{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 1}$$

$$\times (\frac{y_۲}{۱-y_۱})^{\alpha_۲-۱}(۱-\frac{y_۲}{۱-y_۱})^{\alpha_۳+\alpha_۴-۱}(\frac{y_۳}{۱-y_۱-y_۲})^{\alpha_۳-۱}(۱-\frac{y_۳}{۱-y_۱-y_۲})^{\alpha_۴-۱}$$

$$\times \frac{۱}{(۱-y_۱)(۱-y_۱-y_۲)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳+\alpha_۴)}{\Gamma(\alpha_۱)\Gamma(\alpha_۲)\Gamma(\alpha_۳)\Gamma(\alpha_۴)} y_۱^{\alpha_۱-۱} y_۲^{\alpha_۲-۱} y_۳^{\alpha_۳-۱}(۱-y_۱-y_۲-y_۳)^{\alpha_۴-۱}$$

بطوریکه

$$y_i \geq ۰ \quad , i = ۱,۲,۳ \quad , \sum_{i=۱}^{۴} y_i \leq ۱$$

پس

$$\underline{Y} = (Y_۱, Y_۲, Y_۳) \sim D_۳(\alpha_۴, \alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)$$

■

۲۵- اگر $X_۱, X_۲, X_۳$ سه متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، به طوری که $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$، $i = ۱,۲,۳$ آن گاه $Y_۱ = \frac{X_۱}{X_۱+X_۲+X_۳}$ ، $Y_۲ = \frac{X_۲}{X_۱+X_۲+X_۳}$

$Y_۳ = X_۱ + X_۲ + X_۳$ ، دارای توزیع توأم دریخله با پارامترهای $\alpha_۳, \alpha_۱, \alpha_۲$ است، یعنی

$$\underline{Y} = (Y_۱, Y_۲) \sim D_۲(\alpha_۳, \alpha_۱, \alpha_۲)$$

حل: چون $X_۱, X_۲, X_۳$ مستقل اند ، بنابراین

$$f_{X_۱,X_۲,X_۳}(x_۱, x_۲, x_۳) = f_{X_۱}(x_۱) f_{X_۲}(x_۲) f_{X_۳}(x_۳)$$

و داریم

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} \\ y_2 = \dfrac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 y_3 \\ x_2 = y_2 y_3 \\ x_3 = y_3(1 - y_1 - y_2) \end{cases}$$

ژاکوبین تبدیل فوق برابر است با

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_3 & 0 & y_1 \\ 0 & y_3 & y_2 \\ -y_3 & -y_3 & 1 - y_1 - y_2 \end{vmatrix} = y_3^2$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) &= f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3)|J| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} \lambda^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} (y_1 y_3)^{\alpha_1-1} (y_2 y_3)^{\alpha_2-1} (y_3(1 - y_1 - y_2))^{\alpha_3-1} e^{-\lambda y_3} y_3^2 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} \lambda^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} y_3^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} (1 - y_1 - y_2)^{\alpha_3-1} e^{-\lambda y_3} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) &= \int_0^\infty f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) dy_3 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} (1 - y_1 - y_2)^{\alpha_3-1} \int_0^\infty \lambda^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} y_3^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1} e^{-\lambda y_3} dy_3 \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} (1 - y_1 - y_2)^{\alpha_3-1} \end{aligned}$$

بطوریکه

$$y_i \geq 0 \quad , i = 1,2 \quad , \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

بنابراین

$$\underline{Y}=(Y_1,Y_2)\sim D_2(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2)$$

■

۲۶- فرض کنید $X_1,\dots,X_k,X_{k+1}$ متغیرهای تصادفی مستقل ازهم باشند، به طوری که $X_i\sim\Gamma(\alpha_i,\lambda)$، $i=1,\dots,k,k+1$. **اگر** $Y_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}X_j$ **و** $Y_i=\dfrac{X_i}{Y_{k+1}}$ ، $i=1,2,\dots,k$ ، **باشند آن گاه**

الف: $\underline{Y}=(Y_1,\dots,Y_k)\sim D_k(\alpha_{k+1},\alpha_1,\dots,\alpha_k)$

ب: $Y_1\sim Beta(\alpha_1,\alpha_2+\dots+\alpha_{k+1})$

ج: $Y_1+\dots+Y_r\sim Beta(\alpha_1+\dots+\alpha_r,\alpha_{r+1}+\dots+\alpha_k)\ ,\ r\le k$

حل:

(الف) متغیرهای تصادفی $X_1,\dots,X_k,X_{k+1}$ مستقل اند، بنابراین

$$f_{X_1,\dots,X_{k+1}}(x_1,\dots,x_{k+1})=\prod_{i=1}^{k+1}f_{X_i}(x_i)$$

و داریم

$$\begin{cases} y_i=\dfrac{x_i}{y_{k+1}} & i=1,2,\dots,k\\ y_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}x_j \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} x_1=y_1y_{k+1}\\ x_2=y_2y_{k+1}\\ \quad\dots\\ x_k=y_ky_{k+1}\\ x_{k+1}=y_{k+1}(1-\sum_{i=1}^{k}y_i) \end{cases}$$

ژاکوبین تبدیل فوق برابر است با

$$J=\begin{vmatrix} y_{k+1} & 0 & 0 & \dots & y_1 \\ 0 & y_{k+1} & 0 & \dots & y_2 \\ 0 & 0 & y_{k+1} & \dots & y_3 \\ \dots & & & & \\ -y_{k+1} & -y_{k+1} & -y_{k+1} & \dots & (1-\sum_{i=1}^{k} y_i) \end{vmatrix}=(y_{k+1})^k$$

بنابراین

$$f_{Y_1,\dots,Y_{k+1}}(y_1,\dots,y_{k+1})=f_{X_1,\dots,X_{k+1}}(x_1,\dots,x_{k+1})|J|$$

$$=\frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1}\Gamma(\alpha_j)}(y_1y_{k+1})^{\alpha_1-1}(y_2y_{k+1})^{\alpha_2-1}\dots(y_ky_{k+1})^{\alpha_1-1}$$

$$\times(y_{k+1}(1-y_1-\dots-y_k)^{\alpha_{k+1}-1})y_{k+1}{}^{k}e^{-y_{k+1}}$$

$$=\frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1}\Gamma(\alpha_j)}(y_1y_{k+1})^{\alpha_1-1}(y_2y_{k+1})^{\alpha_2-1}\dots(y_ky_{k+1})^{\alpha_1-1}$$

$$=\frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1}\Gamma(\alpha_j)}y_1{}^{\alpha_1-1}y_2{}^{\alpha_2-1}\dots y_k{}^{\alpha_k-1}(1-y_1-\dots-y_k)^{\alpha_{k+1}-1})y_{k+1}{}^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{k+1}-1}e^{-y_{k+1}}$$

درنتیجه

$$f_{Y_1,\dots,Y_k}(y_1,\dots,y_k)=\frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1}\Gamma(\alpha_j)}y_1{}^{\alpha_1-1}y_2{}^{\alpha_2-1}\dots y_k{}^{\alpha_k-1}(1-y_1-\dots-y_k)^{\alpha_{k+1}-1})$$

$$\times\int_0^{\infty}y_{k+1}{}^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{k+1}-1}e^{-y_{k+1}}dy_{k+1}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k+1})}{\prod_{j=1}^{k+1} \Gamma(\alpha_j)} y_1^{\alpha_1 - 1} y_2^{\alpha_2 - 1} \ldots y_k^{\alpha_k - 1} (1 - y_1 - \ldots - y_k)^{\alpha_{k+1} - 1}$$

بنابراین

$$\underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_k) \sim D_k(\alpha_{k+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

(ب) می دانیم X_1 و $\sum_{j=2}^{k+1} X_j$ مستقل از هم و به ترتیب دارای توزیع $\Gamma(\alpha,1)$ و $\Gamma(\sum_{j=2}^{k+1} \alpha_j, 1)$ هستند. با استفاده از قسمت (۱۱-الف) و اینکه $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + \sum_{j=2}^{k+1} X_j}$ به سادگی داریم

$$Y_1 \sim Beta(\alpha_1, \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k+1})$$

(ج) می دانیم $\sum_{j=1}^{r} X_j$ و $\sum_{j=r+1}^{k+1} X_j$ مستقل از هم و به ترتیب دارای توزیع و $\Gamma(\sum_{j=r+1}^{k+1} \alpha_j, 1)$ هستند. با استفاده از قسمت (۱۱-الف) و اینکه

$$Y_1 + \ldots + Y_r = \frac{X_1}{\sum_{j=1}^{k+1} X_j} + \frac{X_2}{\sum_{j=1}^{k+1} X_j} + \ldots + \frac{X_r}{\sum_{j=1}^{k+1} X_j} = \frac{\sum_{j=1}^{r} X_j}{\sum_{j=1}^{r} X_j + \sum_{j=r+1}^{k+1} X_j}$$

به سادگی داریم

$$Y_1 + \ldots + Y_r \sim Beta(\alpha_1 + \ldots + \alpha_r, \alpha_{r+1} + \ldots + \alpha_k), \; r \le k$$

■

مسائل فصل دوم

بسندگی، بسندگی مینیمال و کامل بودن

۱- فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد . در هر یک از موارد زیر،

الف: آماره بسنده پارامتر(ها) را به دست آورید.

ب: آماره بسنده مینیمال پارامتر(ها) را به دست آورید.

ج: تحقیق کنید آیا آماره بسنده مینیمال به دست آمده کامل است؟

i) $f_{\alpha,\beta}(x) = (1-\beta)\beta^{x-\alpha} \; , x = \alpha, \alpha+1, ... \quad , \alpha \in R \; , \; 0 < \beta < 1$

(کامل بودن برای $n=1$)

ii) $f_\theta(x) = \dfrac{\binom{\theta}{x}\binom{N-\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad x = 0, 1, ..., \min(n, \theta)$

iii) $f_{\alpha,\beta}(x) = (1-\alpha)^{x^\beta} - (1-\alpha)^{(x+1)^\beta} \quad , \quad x = 0, 1, ... \quad , \alpha \in (0, 1)$

(β معلوم)

iv) $f_\theta(x) = \binom{n+x-1}{x}\theta^n(1-\theta)^x \quad , \quad x = 0, 1, ... \quad , \theta \in (0, 1)$

v) $f_\theta(x) = \left(\dfrac{\theta}{2}\right)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|} \quad , \quad x = -1, 0, 1 \quad , \quad \theta \in (0, 1)$

حل:

i) تابع احتمال توأم به صورت زیر می باشد

$$f_{\alpha,\beta}(\underline{x})=\prod_{i=1}^{n} f_{\alpha,\beta}(x_i)=(1-\beta)^n \beta^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\alpha} \underset{\{\alpha,\alpha+1,\ldots\}}{I}(x_{(1)})$$

با استفاده از قضیه دسته بندی نیمن دیده می شود که آماره $T(\underline{X})=(X_{(1)},\sum_{i=1}^{n} X_i)$ آماره بسنده برای (α,β) می باشد. اکنون با استفاده از دستور العمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی آماره بسنده مینیمال را به دست می آوریم.

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}}=\{(\alpha,\beta)\,|\,\alpha\le x_{(1)}, 0<\beta<1\}=(-\infty,x_{(1)})\times(0,1)$$

گام دوم

$$\underline{x}\sim\underline{y} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\Theta_{\underline{x}}=\Theta_{\underline{y}}\\ \dfrac{f_\theta(\underline{y})}{f_\theta(\underline{x})}=k \quad ; \quad \underline{\theta}=(\alpha,\beta)\in\Theta_{\underline{x}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x_{(1)}=y_{(1)}\\ \beta^{\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i}=k \quad ; \quad \underline{\theta}\in\Theta_{\underline{x}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x_{(1)}=y_{(1)}\\ \sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad (x_{(1)},\sum_{i=1}^{n}x_i)=(y_{(1)},\sum_{i=1}^{n}y_i)$$

بنابراین آماره بسنده $T(\underline{X})=(X_{(1)},\sum_{i=1}^{n} X_i)$ ، بسنده مینیمال نیز می باشد.

به ازای $n=1$، آماره بسنده مینیمال، $T(X)=X$ می باشد. نشان می دهیم خانواده X کامل می باشد.

به ازای هر آماره دلخواه $h(X)$ و هر $\alpha\in(-\infty,x_{(1)})$, $0<\beta<1$

$$E_{\alpha,\beta}[h(X)]=0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{x=\alpha}^{\infty} h(x)\beta^{x-\alpha}=0$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{x=0}^{\infty} h(x+\alpha)\beta^{x}=0$$

سری فوق یک سری توانی از β است. برای اینکه برای هر $0<\beta<1$ داشته باشیم

$$\sum_{x=0}^{\infty} h(x+\alpha)\beta^{x}=0$$

باید

$$h(x+\alpha)=0 \quad , \quad x=0,1,2,\ldots$$

در نتیجه

$$h(x)=0 \quad , \quad x=\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\ldots$$

بنابراین خانواده X کامل است.

(ii

$$f_{\theta}(\underline{x})=\binom{N}{n}^{-n}\prod_{i=1}^{n}\left\{\binom{\theta}{x_i}\binom{N-\theta}{n-x_i}\underset{\{0,1,\ldots,\min(n,\theta)\}}{I}(x_i)\right\}$$

توسط قضیه دسته بندی نیمن دیده می شود که آماره های $T(\underline{X})=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ و $U(\underline{X})=(X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)})$ بسنده می باشد.

اکنون توسط روش لهمن-شفه آماره بسنده مینیمال را به دست می آوریم.

$$\frac{f_{\theta}(\underline{x})}{f_{\theta}(\underline{y})}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left\{\binom{\theta}{x_i}\binom{N-\theta}{n-x_i}\underset{\{0,1,\ldots,\min(n,\theta)\}}{I}(x_i)\right\}}{\prod_{i=1}^{n}\left\{\binom{\theta}{y_i}\binom{N-\theta}{n-y_i}\underset{\{0,1,\ldots,\min(n,\theta)\}}{I}(y_i)\right\}}$$

نسبت فوق مستقل از θ است اگر وتنها اگر

$$(x_{(۱)}, x_{(۲)}, \dots, x_{(n)}) = (y_{(۱)}, y_{(۲)}, \dots, y_{(n)})$$

بنابر این آماره $T(\underline{X}) = (X_{(۱)}, X_{(۲)}, \dots, X_{(n)})$ بسنده مینیمال برای θاست.

اکنون نشان می دهیم خانواده توزیعهای

$$\mathrm{P} = \{P_\theta : \theta = ۰,۱,۲,\dots, N\}$$

که در آن

$$P_\theta(x) = P_\theta(X = x) = \binom{N}{n}^{-۱} \binom{\theta}{x}\binom{N-\theta}{n-x} \qquad x = ۰,۱,۲,\dots, \min\{n,\theta\}$$

کامل است.

فرض کنید $g(X)$ تابع دلخواهی از Xباشد بطوریکه برای هر θ که $\theta \in \{۰,۱,۲,\dots, N\}$ داشته باشیم

$$E_\theta[g(X)] = ۰$$

درنتیجه

$$\sum_{x=۰}^{\theta} g(x)\binom{\theta}{x}\binom{N-\theta}{n-x} = ۰ \qquad \forall \theta \in \{۰,۱,\dots, N\}$$

به ازای $\theta = ۰$داریم

$$E_۰[g(x)] = ۰ \quad \Rightarrow \quad g(۰) = ۰$$

به ازای $\theta = 1$داریم

$$E_۱[g(x)] = ۰ \;\Rightarrow\; g(۰)\binom{۱}{۰}\binom{N-۱}{n-۰} + g(۱)\binom{۱}{۱}\binom{N-۱}{n-۱} = ۰ \;\Rightarrow\; g(۱) = ۰$$

و...

با ادامه همین روش برای هر $\theta \in \{۰,۱,۲,\dots, N\}$ داریم

$$g(x) = ۰ \quad x = ۰,۱,۲,\dots, \min(n,\theta)$$

پس خانواده توزیعهای تولید شده توسط X کامل است.

(iii

$$f_\alpha(\underline{x})=\prod_{i=1}^{n}\left\{(1-\alpha)^{x_i^\beta}-(1-\alpha)^{(x_i+1)^\beta}\right\}$$

طبق قضیه دسته بندی نیمن آماره های $T(\underline{X})=(X_1,X_2,...,X_n)$ و $U(\underline{X})=(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ آماره هایی بسنده برای α هستند.

اکنون توسط روش لهمن- شفه آماره بسنده مینیمال را به دست می آوریم.

$$\frac{f_\theta(\underline{x})}{f_\theta(\underline{y})}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left\{(1-\alpha)^{x_i^\beta}-(1-\alpha)^{(x_i+1)^\beta}\right\}}{\prod_{i=1}^{n}\left\{(1-\alpha)^{y_i^\beta}-(1-\alpha)^{(y_i+1)^\beta}\right\}}$$

نسبت فوق مستقل است از α اگر و تنها اگر

$$(x_{(1)},x_{(2)},...,x_{(n)})=(y_{(1)},y_{(2)},...,y_{(n)})$$

بنابراین آماره $T(\underline{X})=(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ آماره بسنده مینیمال برای αاست.

(iv

$$f_\theta(x)=\binom{n+x-1}{x}\theta^n(1-\theta)^x=\binom{n+x-1}{x}e^{x\ln(1-\theta)+n\ln\theta}$$

خانواده فوق نمایی یک پارامتری می باشد. طبق خواص این خانواده آماره $T(\underline{X})=\sum_{i=1}^{n}X_i$، بسنده کامل می باشد.

(v $$f_\theta(x)=(\frac{\theta}{2})^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}=(1-\theta)(\frac{1}{2})^{|x|}e^{|x|\ln(\frac{\theta}{1-\theta})}$$

خانواده فوق نمایی یک پارامتری است. بنابراین آماره $T(\underline{X})=\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ **آماره بسنده مینیمال و کامل می باشد.**

■

تعریف: فرض کنید $X_1,...,X_n$ دارای توزیع توأم $F_{\underline{\theta}}$ باشد ، به طوریکه $\underline{\theta}=(\theta_1,...,\theta_p)$ یك پارامتر مجهول باشد.

گوییم خانواده توزیعهای $\{F_{\underline{\theta}}:\underline{\theta}\in\Theta\}$ یك خانواده نمایی k پارامتری است اگر چگالی توأم (تابع احتمال توأم) $X_1,...,X_n$ به ازای مقدار $\underline{x}=(x_1,...,x_n)\in\chi$ به شکل

$$f(\underline{x},\underline{\theta})=a(\underline{\theta})b(\underline{x})\exp[\sum_{i=1}^{k}c_i(\underline{\theta})T_i(\underline{x})]$$

باشد و فضای χ نیز به پارامتر $\underline{\theta}$ بستگی نداشته باشد.

▪

توجه کنید که لازم نیست k با p ، بعد فضای پارامتر برابر باشد. هر چند در بسیاری موارد آنها با هم برابرند.

توسط قضیه دسته بندی نیمن به سادگی دیده می شود که آماره $T=(T_1(\underline{X}),...,T_k(\underline{X}))$ بسنده برای $\underline{\theta}$ است.

همچنین توسط روش لهمن- شفه می توان نشان داد که آماره بسنده $T=(T_1(\underline{X}),...,T_k(\underline{X}))$، بسنده مینیمال نیز است.

مجموعه C را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$C=\{(c_1(\underline{\theta}),...,c_k(\underline{\theta})):\underline{\theta}\in\Theta\}$$

اگر مجموعه C شامل یک مجموعه (مستطیل) باز به شکل $(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_k,b_k)$ شود، آنگاه آماره $T=(T_1(\underline{X}),\ldots,T_k(\underline{X}))$ کامل است.

صرف نظر از جزئیات، مطا لب قبل بیان می کند که یك آماره بسنده k بعدی در یك خانواده نمائی k پارامتری کامل است اگر بعد فضای پارامتر نیز k باشد.

توجه کنید که از یکسان نبودن بعد فضای پارامتر با بعد آماره بسنده $T=(T_1(\underline{X}),\ldots,T_k(\underline{X}))$، نمی توان نتیجه ای در مورد کامل بودن یا نبودن این آماره گرفت.

۲- فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد. آماره بسنده مینیمال برای θ را به دست آورید.

$$\textbf{i)}\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=1,2\\[4pt] \frac{1+\theta}{4} & x=3\\[4pt] \frac{1-\theta}{4} & x=4\end{cases}\qquad 0\le\theta\le 1$$

$$\textbf{ii)}\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\theta & x=-1\\ (1-\theta)^2\theta^x & x=0,1,2,\ldots\end{cases}\qquad 0\le\theta\le 1$$

iii) $$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴}-\theta & x=-۲\\ \frac{۱}{۴}-\frac{\theta}{۲} & x=-۱\\ \frac{۱}{۴}+\frac{\theta}{۲} & x=۱\\ \frac{۱}{۴}+\theta & x=۲\end{cases}\qquad -\frac{۱}{۴}\le\theta\le\frac{۱}{۴}$$

iv) $$f_\theta(x)=\begin{cases}\theta & x=-۱,۱\\ ۱-۲\theta & x=۰\end{cases}\qquad ۰\le\theta\le\frac{۱}{۲}$$

v) $$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱-\theta}{۲} & x=y_۱\\ \frac{۱}{۲} & x=y_۲\\ \frac{\theta}{۲} & x=y_۳\end{cases}\qquad ۰\le\theta\le ۱$$

vi) $$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴}-\theta & x=y_۱\\ \frac{۱}{۲} & x=y_۲\\ \frac{۱}{۴}+\theta & x=y_۳\end{cases}\qquad -\frac{۱}{۴}\le\theta\le\frac{۱}{۴}$$

vii) $$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=y_۱,y_۲\\ \theta & x=y_۳,y_۴\\ \frac{۱}{۴}-\theta & x=y_۵,y_۶\end{cases}\qquad ۰\le\theta\le\frac{۱}{۴}$$

$$\textbf{viii)}\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱-\theta}{۱۲} & x=۱\\ \frac{۲-\theta}{۱۲} & x=۲\\ \frac{۳-\theta}{۱۲} & x=۳\\ \frac{۱+\theta}{۱۲} & x=۴\\ \frac{۲+\theta}{۱۲} & x=۵\\ \frac{۳+\theta}{۱۲} & x=۶\end{cases}\qquad -۱\le\theta\le ۱$$

$$\textbf{ix)}\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=۱\\ \frac{۱-\theta}{۴} & x=۲\\ \frac{۱-\theta}{۲} & x=۳\\ \frac{۳\theta}{۴} & x=۴\end{cases}\qquad ۰\le\theta\le ۱$$

حل:

i) **به سادگی داریم**

$$\begin{aligned}f_\theta(x)&=\frac{۱}{۴}I_{\{۱,۲\}}(x)+\frac{۱+\theta}{۴}I_{\{۳\}}(x)+\frac{۱-\theta}{۴}I_{\{۴\}}(x)\\&=\{\frac{۱}{۴}+\frac{\theta}{۴}(I_{\{۳\}}(x)-I_{\{۴\}}(x)\}I_{\{۱,۲,۳,۴\}}(x)\\&=\{\frac{۱}{۴}+\frac{\theta}{۴}T(x)\}I_{\{۱,۲,۳,۴\}}(x)\end{aligned}$$

که در آن

$$T(x)=I_{\{۳\}}(x)-I_{\{۴\}}(x)=\begin{cases}۰ & x=۱,۲\\ ۱ & x=۳\\ -۱ & x=۴\end{cases}$$

طبق قضیه دسته بندی نیمن آماره $T(X)$ آماره بسنده برای θ است.

نشان می دهیم این آماره بسنده مینیمال نیز است. با فرض $\theta_{\cdot}=\cdot$ داریم

$$\frac{f_\theta(x)}{f_{\theta_\cdot}(x)}=\frac{\{\frac{۱}{۴}+\frac{\theta}{۴}T(x)\}I_{\{۱,۲,۳,۴\}}(x)}{\frac{۱}{۴}I_{\{۱,۲,۳,۴\}}(x)}=۱+\theta T(x)$$

بنابراین طبق قضیه (۲-۲) صفحه ۷۰ کتاب آمار ریاضی آماره $T(X)$ بسنده مینیمال برای θ است.

اکنون فرض کنید

$$S(X)=\begin{cases} a_۱ & x=۱,۲ \\ a_۲ & x=۳ \\ a_۳ & x=۴ \end{cases} \qquad a_۱\neq a_۲\neq a_۳$$

آماره های $T(X)$ و $S(X)$ هر دو افراز یکسان تولید می کنند. بنابراین آماره $S(X)$ نیز آماره بسنده مینیمال است.

ii) به سادگی داریم

$$f_\theta(X)=\left(\frac{\theta}{(۱-\theta)^۲}\right)^{I_{(x=-۱)}}(۱-\theta)^۲\theta^{xI_{(x\geq\cdot)}}$$
$$=(۱-\theta)^۲\exp\{I(x=-۱)\ln\tfrac{\theta}{(۱-\theta)^۲}+xI(x\geq\cdot)\ln\theta\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی دوپارامتری است. آماره $T=(I_{(X=-۱)},XI_{(X\geq\cdot)})$ بسنده مینیمال برای θ است.

نکته:

خانواده فوق کامل نمی باشد. زیرا با فرض $h(X)=X$ داریم

$$E_\theta X = -\theta + \sum_{x=0}^{\infty} x(1-\theta)^2\theta^x = 0$$

اما

$$P_\theta(X=0) = (1-\theta)^2 < 1$$

همینطورتوسط رابطه زیربه سادگی می توان نشان داد که آماره بسنده مینیمال $T = (I_{(X=-۱)}, XI_{(X\geq ۰)})$ نیز کامل نمی باشد.

$$X = XI(X \geq ۰) - I(X=-۱)$$

iii) داریم

$$f_\theta(x) = [\frac{۱}{۴} + \theta(-۱ I_{\{-۲\}}(x) - \frac{۱}{۲} I_{\{-۱\}}(x) + \frac{۱}{۲} I_{\{۱\}}(x) + I_{\{۲\}}(x))] I_{\{-۲,-۱,,۱,۲\}}(x)$$
$$= [\frac{۱}{۴} + \theta S(x)] I_{\{-۲,-۱,۱,۲\}}(x)$$

که درآن

$$S(x) = -۱ I_{\{-۲\}}(x) - \tfrac{۱}{۲} I_{\{-۱\}}(x) + \tfrac{۱}{۲} I_{\{۱\}}(x) + I_{\{۲\}}(x)$$

طبق قضیه دسته بندی نیمن $S(X)$ آماره بسنده برای θاست.

نشان می دهیم این آماره بسنده مینیمال نیز می باشد. با فرض $\theta_. = ۰$داریم

$$\frac{f_\theta(x)}{f_{\theta_.}(x)} = \frac{\{\frac{۱}{۴} + \theta S(x)\} I_{\{-۲,-۱,۱,۲\}}(x)}{\frac{۱}{۴} I_{\{-۲,-۱,۱,۲\}}(x)} = ۱ + ۴\theta S(x)$$

چون عبارت فوق تنها از طریق $S(x)$ به x بستگی دارد، بنابراین $S(X)$ آماره بسنده مینیمال است.

iv)

$$f_\theta(x)=\theta^{|x|}(1-2\theta)^{1-|x|}\qquad x=-1,0,1\quad,\quad 0\le\theta\le\tfrac{1}{2}$$

$$=(1-2\theta)\exp\{|x|\ln\frac{\theta}{1-2\theta}\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده(مینیمال) کامل $|X|$ است.

(v

$$f_\theta(x)=\frac{1-\theta}{2}\underset{\{y_1\}}{I}(x)+\frac{1}{2}\underset{\{y_2\}}{I}(x)+\frac{\theta}{2}\underset{\{y_3\}}{I}(x)=g(\theta,S(x)).h(x)$$

که در آن

$$S(x)=(\underset{\{y_1\}}{I}(x),\underset{\{y_2\}}{I}(x),\underset{\{y_3\}}{I}(x))\quad,\quad h(x)=1$$

طبق قضیه دسته بندی نیمن $S(X)$ آماره بسنده است.

با فرض $\theta_0=0$ داریم

$$\frac{f_\theta(x)}{f_{\theta_0}(x)}=\frac{g(\theta,S(x))}{\frac{1}{2}\underset{\{y_1\}}{I}(x)+\frac{1}{2}\underset{\{y_2\}}{I}(x)}$$

نسبت فوق تنها از طریق $S(x)$ به x بستگی دارد، بنابراین $S(X)$ آماره بسنده مینیمال است.

آماره

$$a\ne b\ne c\qquad,\qquad T(x)=\begin{cases}a & x=y_1\\ b & x=y_2\\ c & x=y_3\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. این آماره با آماره بسنده مینیمال $S(X)$ افراز یکسان روی فضای نمونه ایجاد می کنند بنابراین $T(X)$ نیز یک آماره بسنده مینیمال است.

شماره های **vi**، **vii**، **viii** و **ix** نیز مانند موارد قبلی حل می شوند.

■

۳- فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد. در هر یک از موارد زیر،

الف: آماره بسنده پارامتر(ها) را به دست آورید.

ب: آماره بسنده مینیمال پارامتر(ها) را به دست آورید.

ج: تحقیق کنید آیا آماره بسنده مینیمال به دست آمده کامل است؟

i) $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\{-\frac{1}{2\theta}(x-\theta)^2\} \quad , \quad x \in R \quad , \quad \theta > 0$

ii) $f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} \exp\{-\frac{1}{2\theta^2}(x-\theta)^2\} \quad , \quad x \in R \quad , \quad \theta > 0$

iii) $f_\theta(x) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} \quad , \quad x > 0 \; , \quad \theta > 0$

iv) $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \quad , \quad \theta < x < 2\theta \; , \quad \theta > 0$

v) $f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \quad , \quad 0 < x < \theta \; , \quad \theta > 0$

vi) $f_\theta(x) = \frac{1}{2}\exp\{-|x-\theta|\} \quad , \quad x \in R \; , \quad \theta \in R$

vii) $f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta}\exp\{-\frac{|x|}{\theta}\} \quad , \quad x \in R \; , \quad \theta > 0$

viii) $f_\theta(x) = \exp\{-(x-\theta) + \exp[-(x-\theta)]\} \quad , \quad x \in R \; , \quad \theta \in R$

ix) $f_{\theta,\sigma^2}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \theta)^2\} \quad , x > 0 \, , \theta \in R \, , \sigma > 0$

x) $f_{\theta,\sigma}(x) = \frac{1}{\pi\sigma}[1 + (\frac{x-\theta}{\sigma})^2]^{-1} \quad , x \in R \, , \theta \in R \, , \sigma > 0$

xi) $f_\theta(x)=\exp\{-(x-\theta)\}[1+\exp\{-(x-\theta)\}]^{-2} \quad , \quad x\in R \ , \quad \theta\in R$

xii) $f_\theta(x)=\frac{2}{\theta^2}(\theta-x) \quad , \quad 0<x<\theta \ , \quad \theta>0$

xiii) $f_\theta(x)=\frac{x+1}{\theta(\theta+1)}e^{-\frac{x}{\theta}} \quad , \quad x>0 \ , \quad \theta>0$

xiv) $f_\theta(x)=\frac{\theta}{x^2} \quad , \quad x>\theta \ , \quad \theta>0$

xv) $f_\theta(x)=\frac{\theta}{1-\theta}x^{\frac{2\theta-1}{\theta-1}} \quad , \quad 0<x<1 \ , \quad \frac{1}{2}<\theta<1$

xvi) $f_\theta(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-\theta}-e^{-b}} \quad , \quad \theta<x<b \ ,$ **b** معلوم

xvii) $f_\theta(x)=\frac{b\theta}{(b-\theta)x^2} \quad , \quad \theta<x<b \ ,$ **b** معلوم

xviii) $f_\theta(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-a}-e^{-\theta}} \quad , \quad a<x<\theta \ ,$ **a** معلوم

xix) $f_\theta(x)=\frac{1}{1-\theta} \quad , \quad \theta\le x\le 1$

xx) $f_\theta(x)=(1+\theta)+\frac{\theta}{2\sqrt{x}} \quad , \quad 0<x<1 \ , \quad \theta\in(0,1)$

xxi) $f_\theta(x)=(\ln\frac{\theta}{\theta-1})\theta^{x} \quad , \quad 0<x<1 \ , \quad \theta>1$

xxii) $f_\theta(x)=\frac{1}{B(\theta,\theta)}x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1} \quad , \quad 0<x<1 \ , \quad \theta>0$

xxiii) $f_\theta(x)=\theta x^{\theta-1} \quad , \quad 0<x<1 \ , \quad \theta>0$

حل:

i) $f_\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{1}{2\theta}(x-\theta)^2} \qquad x\in R \quad , \quad \theta>0$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x^2}{2\theta}-\frac{\theta}{2}+x}$$

با توجه به شکل توزیع ، به سادگی دیده می شود که توزیع فوق ($N(\theta,\theta)$) متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ است.
با توجه به اینکه بعد آمارهT با بعد فضای پارامتر یکی است بنابراین آماره T نیز کامل است.

ii) $$f_\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}}\exp\{-\frac{1}{2\theta^2}(x-\theta)^2\} \qquad x\in R \quad , \quad \theta>0$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}}\exp\{-\frac{x^2}{2\theta^2}+\frac{x}{\theta}-\frac{1}{2}\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی دو پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=(\sum_{i=1}^{n} X_i,\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$ (یا معادل آن $T'=(\overline{X},\sum_{i=0}^{n}(X_i-\overline{X})^2)$) است.
این آماره کامل نیست زیرا می دانیم

$$E[(\overline{X})^2]=\frac{n+1}{n}\theta^2 \quad , \quad E(S^2)=\theta^2$$

که $$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

بنابراین

$$E_\theta(\frac{n}{n+1}\overline{X}^2-S^2)=0 \qquad \forall\theta>0$$

اما

$$P_\theta(\frac{n}{n+1}\overline{X}^2=S^2)=0<1 \qquad \forall\theta>0$$

بنابراین آماره T کامل نیست.

iii) $$f_\theta(x)=\theta(1+x)^{-(1+\theta)}=\theta\exp\{-(1+\theta)\ln(1+x)\} \qquad x>0 \quad , \quad \theta>0$$

با توجه به شکل توزیع به سادگی دیده می شود که توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$ است، با توجه به اینکه بعد آماره T با بعد فضای پارامتر یکی است پس آماره T کامل نیز است.

$$\textbf{iv)}\quad f_\theta(x_1,x_2,\dots,x_n)=\theta^{-n}u\left(\theta-\frac{x_{(n)}}{2}\right)u(x_{(1)}-\theta)\qquad \theta>0$$

طبق قضیه دسته بندی نیمن آماره $T=(X_{(1)},X_{(n)})$ آماره بسنده برای θ است. اکنون با استفاده از دستور العمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی آماره بسنده مینیمال را به دست می آوریم.

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}}=\{\theta\,|\,\frac{x_{(n)}}{2}\le\theta\le x_{(1)}\}=(\frac{x_{(n)}}{2},x_{(1)})$$

گام دوم

$$\underline{x}\sim\underline{y}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\Theta_{\underline{x}}=\Theta_{\underline{y}}\\ \dfrac{f_\theta(\underline{y})}{f_\theta(\underline{x})}=k\quad;\quad\theta\in\Theta_{\underline{x}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}(x_{(1)},x_{(n)})=(y_{(1)},y_{(n)})\\ \dfrac{U(\theta-\frac{y_{(n)}}{2})U(y_{(1)}-\theta)}{U(\theta-\frac{x_{(n)}}{2})U(x_{(1)}-\theta)}=k\qquad;\quad\theta\in\Theta_x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\qquad (x_{(1)},x_{(n)})=(y_{(1)},y_{(n)})$$

بنابراین $T=(X_{(1)},X_{(n)})$ آماره بسنده مینیمال است.

آماره T کامل نیست زیرا

$$E_\theta(X_{(1)})=E_1\left(\frac{X_{(1)}-\theta}{\theta}\right).\theta+\theta=\frac{\theta}{n+1}+\theta=\theta.\frac{n+2}{n+1}$$

$$E_{\theta}(X_{(n)})=E_{۱}(\frac{X_{(n)}-\theta}{\theta}).\theta+\theta=\frac{n\theta}{n+۱}+\theta=\frac{۲n+۱}{n+۱}.\theta$$

پس

$$E_{\theta}(\frac{n+۱}{۲n+۱}X_{(n)}-\frac{n+۱}{n+۲}X_{(۱)})=۰ \quad \forall\theta>۰$$

اما

$$P_{\theta}(\frac{n+۱}{۲n+۱}X_{(n)}=\frac{n+۱}{n+۲}X_{(۱)})=۰<۱ \qquad \forall\theta>۰$$

توجه

وقتی $X\sim U(\alpha,\beta)$ **، آنگاه** $\frac{X-\alpha}{\beta-\alpha}\sim U(۰,۱)$ **. و بنابراین**

$$\frac{X_{(n)}-\alpha}{\beta-\alpha}\sim Beta(n,۱) \quad \text{و} \quad \frac{X_{(۱)}-\alpha}{\beta-\alpha}\sim Beta(۱,n)$$

v) $$f_{\theta}(x_{۱},...,x_{n})=۲^{n}\theta^{-۲n}(\prod_{i=۱}^{n}x_{i})u(\theta-x_{(n)}) \qquad \theta>۰$$

طبق قضیه دسته بندی نیمن آماره $T=X_{(n)}$ **بسنده است. نشان می دهیم این آماره بسنده مینیمال نیز است.**

با استفاده از دستور العمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی، داریم

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}}=\{\theta\,|\,\theta>x_{(n)}\}=(x_{(n)},\infty)$$

گام دوم

$$\underline{x} \sim \underline{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{y}} \\ \dfrac{f_\theta(\underline{y})}{f_\theta(\underline{x})} = k \quad ; \quad \forall \theta \in \Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{(n)} = y_{(n)} \\ \dfrac{\prod_{i=1}^{n} y_i}{\prod_{i=1}^{n} x_i} = k \qquad \forall \theta \in \Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x_{(n)} = y_{(n)}$$

بنابراین $T = X_{(n)}$ آماره بسنده مینیمال است.

ثابت می کنیم آماره T کامل است. ابتدا توزیع T را بدست می آوریم.

$$P(T < t) = P(X_{(n)} < t) = (P(X_1 < t))^n = (\frac{t}{\theta})^{2n} \qquad 0 < t < \theta$$

$$\Rightarrow \quad f_T(t) = 2n\frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}} \qquad 0 < t < \theta$$

فرض کنید $h(t)$ تابع دلخواهی از باشد، آنگاه

$$E_\theta[h(T)] = 0 \qquad \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^\theta h(t)t^{2n-1}dt = 0 \qquad \forall \theta > 0$$

با مشتق گیری از عبارت فوق برحسب θداریم

$$h(\theta)\theta^{2n-1} = 0 \qquad \forall \theta > 0$$

$$h(\theta) = 0 \qquad \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \qquad h(t) = 0 \qquad \forall t > 0$$

بنابراین T، آماره بسنده کامل است.

vi) $$f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = 2^{-n}e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|} \qquad x \in R \quad , \quad \theta > 0$$

طبق قضیه دسته بندی نیمن، می توان گفت آماره های $T_1=(X_1,X_2,...,X_n)$ **و** $T_2=(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ **بسنده هستند.**

با استفاده از قضیه ۲-۲ صفحه ۷۰ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم که آماره T_2 **بسنده مینیمال است.**

فرض کنید $\theta_0=0$ **داریم**

$$\frac{f_\theta(x_1,...,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,...,x_n)}=e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|+\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

مشاهده می شود که نسبت فوق از طریق $(x_1,....,x_n)$ **یا** $(x_{(1)},x_{(2)},...,x_{(n)})$ **به** $(x_1,....,x_n)$ **بستگی دارد.**

چون تلخیص $(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ **از** $(X_1,X_2,...,X_n)$ **بیشتر است لذا** $T_2=(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ **یک آماره بسنده مینیمال برای** θ**است.**

آماره بسنده مینیمال T_2 **کامل نیست زیرا می توان از این آماره بسنده یک آماره فرعی به دست آورد مثلاً آماره فرعی** $V=(X_{(n)}-X_{(1)},X_{(n)}-X_{(2)},...,X_{(n)}-X_{(n-1)})$ **بنابراین** T_2 **کامل نیست.**

توضیح:

کامل بودن یك آماره ضرورتاً به این معنی است که آن آماره شامل اطلاع فرعی درباره θ نمی شود.

فرض کنید آماره T کامل باشد و $g(T)$ تابعی از T و یك آماره فرعی باشد.(یعنی توزیع آن به پارامتر بستگی ندارد، بنابراین هیچگونه اطلاعی درباره پارامتر به ما نمی دهد.)

آنگاه برای هر $\theta\in\Theta$ داریم

$$E_\theta[g(T)] = c$$

که c مقدار ثابتی است

پس

$$E_\theta[g(T) - c] = ۰$$

چون T کامل است

$$P_\theta(g(T) = c) = ۱$$

بنابراین $g(T)$ باید ثابت باشد.

نتیجه آنکه اگر آماره T بخواهد کامل باشد ، نباید تابعی از آن يك آماره فرعی باشد(مگر تابع ثابت) در غیر این صورت آماره T کامل نخواهد بود.

vii) $f_\theta(x) = \frac{۱}{۲\theta} e^{\frac{-|x|}{\theta}} \quad x \in R \quad , \quad \theta > ۰$

با توجه به شکل توزیع به سادگی معلوم می شود که توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T = \sum_{i=۱}^{n} |X_i|$ است، با توجه به اینکه بعد آماره بسنده T با بعد فضای پارامتر یکی است پس آماره T کامل است.

viii) $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)+e^{-(x-\theta)}} \quad x \in R \quad , \quad \theta \in R$

$$= \exp\{-(x-\theta) + e^{-x} e^{-\theta}\}$$

با توجه به شکل توزیع به سادگی معلوم می شود که توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=\sum_{i=1}^{n} e^{-x_i}$ است،با توجه به اینکه بعد آماره T با بعد فضای پارامتر یکی است پس آماره T کامل نیز است.

ix) $f_{\theta,\sigma^2}(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\ln x-\theta)^2}{2\sigma^2}} \quad x>0 \quad , \quad \theta\in R \quad , \quad \sigma>0$

$$=\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}+\frac{\theta\ln x}{\sigma^2}-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} \quad x>0 \quad , \quad \theta\in R,\sigma>0$$

الف) فرض کنید (θ,σ) مجهول باشد.

با توجه به شکل توزیع به سادگی معلوم می شود که توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی دو پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i,\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i)^2)$ است. با توجه به اینکه بعد آماره T با بعد فضای پارامتربرابر است پس آماره T کامل نیز است.

ب) فرض کنید σ معلوم و θ مجهول باشد.

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال کامل $T=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ است.

ج) فرض کنید σ مجهول و θ معلوم باشد.

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال کامل $T=\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\theta)^2$ است.

x) $f_{\theta,\sigma}(x)=\frac{1}{\pi\sigma}[1+(\frac{x-\theta}{\sigma})^2]^{-1} \quad x\in R \quad , \quad \theta\in R \quad , \quad \sigma>0$

الف) فرض کنید σ معلوم و θ مجهول باشد.

$$f_\theta(x_1,...,x_n)=(\pi\sigma)^{-n}\prod_{i=1}^{n}[1+(\frac{x_i-\theta}{\sigma})^2]^{-1}$$

طبق قضیه دسته بندی نیمن آماره $T_1=(X_1,X_2,...,X_n)$ و $T_2=(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ بسنده برای θ هستند.

با استفاده از قضیه ۲-۲ صفحه ۷۰ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم که آماره T_2 بسنده مینیمال است.

فرض کنید $\theta_0=0$ داریم

$$\frac{f_\theta(x_1,...,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,...,x_n)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}[\sigma^2+x_i^2]}{\prod_{i=1}^{n}[\sigma^2+(x_i-\theta)^2]}$$

مشاهده می شود که نسبت فوق از طریق $(x_1,...,x_n)$ یا $(x_{(1)},x_{(2)},...,x_{(n)})$ به $(x_1,...,x_n)$بستگی دارد، چون تلخیص $(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ از $(X_1,X_2,...,X_n)$ بیشتر است لذا $T_2=(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ یک آماره بسنده مینیمال برای θاست.

آماره بسنده مینیمال T_2 کامل نیست زیرا می توان از این آماره بسنده مینیمال یک آماره فرعی به دست آورد مثلاً $V=(X_{(n)}-X_{(1)},X_{(n)}-X_{(2)},...,X_{(n)}-X_{(n-1)})$ بنابراین T_2 کامل نیست(به توضیح بعد از vi مراجعه کنید).

ب) فرض کنید σ مجهول و θ معلوم باشد.

مشابه (الف) می توان نشان داد که $T_2=(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ آماره بسنده مینیمال برای σ است.

فرض کنید $\sigma_{\circ}=1$

$$\frac{f_{\sigma}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\sigma_{\circ}}(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}[\sigma^2+(x_i-\theta)^2]^{-1}}{\prod_{i=1}^{n}[1+(x_i-\theta)^2]^{-1}}$$

عبارت فوق از طریق $(x_{(1)},x_{(2)},\ldots,x_{(n)})$ به $(x_1,\ldots,x_n)$بستگی دارد. همینطور در این حالت نیز آماره T_2 کامل نیست زیرا آماره فرعی

$$V=(\frac{X_{(n)}-X_{(1)}}{X_{(n)}-X_{(n-1)}},\frac{X_{(n)}-X_{(2)}}{X_{(n)}-X_{(n-1)}},\ldots,\frac{X_{(n)}-X_{(n-2)}}{X_{(n)}-X_{(n-1)}})$$

تابعی از T_2است. بنابراین T_2 کامل نیست.

ج) σ و θ هر دو مجهول باشند.

در این حالت نیز آماره $T_2=(X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)})$ بسنده مینیمال است. همینطور کامل نیست زیرا آماره فرعی**V** در قسمت(ب) تابعی از T_2 است.

xi) $f_{\theta}(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-(x_i-\theta)}}{[1+e^{-(x_i-\theta)}]^2}\qquad x\in R\quad,\quad \theta\in R$

با استفاده از قضیه دسته بندی می توان گفت آماره های $T_1=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ و $T_2=(X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)})$ بسنده هستند.

با فرض $\theta_{\circ}=0$ داریم

$$\frac{f_{\theta}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_{\circ}}(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}e^{-(x_i-\theta)}}{\prod_{i=1}^{n}[1+e^{-(x_i-\theta)}]^2}.\prod_{i=1}^{n}[(1+e^{-x_i})^2.e^{x_i}]=e^{n\theta}\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+e^{-x_i})^2}{[1+e^{-(x_i-\theta)}]^2}$$

نسبت فوق از طریق $(x_1,\ldots,x_n)$ یا $(x_{(1)},x_{(2)},\ldots,x_{(n)})$ به $(x_1,\ldots,x_n)$ بستگی

دارد، چون تلخیص $(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ از $(X_1,X_2,...,X_n)$ بیشتر است لذا $T_2=(X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)})$ یک آماره بسنده مینیمال برای θ است.

آماره بسنده مینیمال T_2 کامل نیست زیرا می توان از این آماره بسنده مینیمال یک آماره فرعی به دست آورد مثلاً $V=(X_{(n)}-X_{(1)},X_{(n)}-X_{(2)},...,X_{(n)}-X_{(n-1)})$ بنابراین T_2 کامل نیست.(به توضیح بعد از vi مراجعه کنید.)

xii)

این تمرین در صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی به عنوان مثال حل شده است.

xiii)

$$f_\theta(x)=\frac{x+1}{\theta(\theta+1)}e^{-\frac{x}{\theta}} \quad , \quad x>0 \quad , \quad \theta>0$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ است. چون بعد آماره با بعد فضای پارامتر یکسان است پس آماره T کامل نیز است.

xiv) $f_\theta(x)=\dfrac{\theta}{x^2} \qquad x>\theta \quad , \quad \theta>0$

$$f_\theta(x_1,...,x_n)=\frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^{n}x_i^2}u(x_{(1)}-\theta)$$

طبق قضیه دسته بندی نیمن آماره $T=X_{(1)}$ بسنده است.

نشان می دهیم آماره T بسنده مینیمال نیز است، با استفاده از دستورالعمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی داریم

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}}=\{\theta \mid \theta<x_{(1)}\}=(0\ ,x_{(1)})$$

گام دوم

$$\underline{x} \sim \underline{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{y}} \\ \dfrac{f_\theta(\underline{y})}{f_\theta(\underline{x})} = k \quad ; \quad \theta \in \Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{(۱)} = y_{(۱)} \\ \dfrac{\prod_{i=۱}^{n} x_i^۲}{\prod_{i=۱}^{n} y_i^۲} = k \end{cases} \qquad \theta \in \Theta_{\underline{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{(۱)} = y_{(۱)}$$

بنابراین آماره بسنده $T = X_{(۱)}$ بسنده مینیمال است.

نشان می دهیم آماره T کامل است. ابتدا توزیع T را به دست می آوریم

$$P(T > t) = [P(X_۱ > t)]^n = (\frac{\theta}{t})^n$$

$$\Rightarrow \quad F_T(t) = ۱ - (\frac{\theta}{t})^n \quad , \quad f_T(t) = \frac{n\theta^n}{t^{n-۱}} \qquad \theta < t$$

فرض کنید $h(T)$ آماره دلخواهی از T باشد، به طوریکه

$$E_\theta[h(T)] = ۰ \qquad \forall\, \theta > ۰$$

$$\Rightarrow \quad \int_\theta^\infty h(t).\frac{n\theta^n}{t^{n-۱}} dt = ۰ \quad \Rightarrow \quad \int_\theta^\infty \frac{h(t)}{t^{n-۱}} dt = ۰$$

با مشتق گیری از θ داریم

$$-h(\theta)\theta^{۱-n} = ۰ \qquad \forall\, \theta > ۰$$

$$\Rightarrow \qquad h(\theta) = ۰ \qquad \forall\, \theta > ۰$$

$$\Rightarrow \qquad h(t) = ۰ \qquad \forall t > ۰$$

بنابراین T کامل است.

xv)

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{۱-\theta} x.e^{\frac{\theta}{\theta-۱}\ln x} \qquad ۰ < x < ۱ \quad , \quad \tfrac{۱}{۲} < \theta < ۱$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمـایی یـک پـارامتری بـا آمـاره بـسنده مینیمـال $T=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ است.

با توجه به اینکه بعد آماره T با بعد فضای پارامتر برابر اسـت بنـابراین آمـاره T کامل است.

xvi) $f_\theta(x_1,\dots,x_n)=\dfrac{e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i}}{(e^{-\theta}-e^{-b})^n}u(x_{(1)}-\theta)u(b-x_{(n)})$

بنابر قضیه دسته بندی نیمن به آسانی دیده می شود که آماره $T=X_{(1)}$ آماره بسنده است.

با استفاده از دستور العمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم، این آماره بسنده مینیمال است.

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}}=\{\theta\mid\theta<x_{(1)}\}=(-\infty,x_{(1)})$$

گام دوم

$$\underline{x}\sim\underline{y}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\Theta_{\underline{x}}=\Theta_{\underline{y}}\\ \dfrac{f_\theta(\underline{y})}{f_\theta(\underline{x})}=k\quad;\quad\theta\in\Theta_{\underline{x}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_{(1)}=y_{(1)}\\ e^{-\sum_{i=1}^{n}y_i+\sum_{i=1}^{n}x_i}=k\qquad;\quad\theta\in\Theta_{\underline{x}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_{(1)}=y_{(1)}$$

بنابراین آماره بسنده $T=X_{(1)}$ ، بسنده مینیمال نیز است.

برای بررسی کامل بودن T ابتدا توزیع T را محاسبه می کنیم.

$$P(T>t)=[P(X_{۱}>t)]^n=[\int_t^b (e^{-\theta}-e^{-b})^{-۱}e^{-x}dx]^n=\left(\frac{e^{-t}-e^{-b}}{e^{-\theta}-e^{-b}}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad F_T(t)=۱-\left(\frac{e^{-t}-e^{-b}}{e^{-\theta}-e^{-b}}\right)^n \qquad \theta<t<b$$

و

$$f_T(t)=\frac{ne^{-t}(e^{-t}-e^{-b})^{n-۱}}{(e^{-\theta}-e^{-b})^n} \qquad \theta<t<b$$

فرض کنید $h(T)$ تابع دلخواهی از T باشد به طوریکه برای هر $\theta\in(-\infty,b)$ داشته باشیم

$$E_\theta[h(T)]=۰$$

آنگاه

$$\int_\theta^b h(t)e^{-t}(e^{-t}-e^{-b})^{n-۱}dt=۰$$

با مشتق گیری نسبت به θ از معادله اخیر خواهیم داشت

$$-h(\theta)e^{-\theta}(e^{-\theta}-e^{-b})^{n-۱}=۰ \qquad \forall\theta\in(-\infty,b)$$

$$\Rightarrow \quad h(\theta)=۰ \qquad \forall\theta\in(-\infty,b)$$
$$\Rightarrow \quad h(t)=۰ \qquad \forall \ \theta<t<b$$

بنابراین آماره بسنده مینیمال T کامل خواهد بود.

xvii) $f_\theta(x_{۱},...,x_n)=(\frac{b\theta}{b-\theta})^n\prod_{i=۱}^n x_i^{-۲}u(x_{(۱)}-\theta)u(b-x_{(n)})$

بنابر قضیه دسته بندی نیمن به آسانی دیده می شود که آماره $T=X_{(۱)}$ آماره بسنده است.

با استفاده از دستور العمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم، این آماره بسنده مینیمال است.

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}} = \{\theta \mid \theta < x_{(1)}\} = (-\infty, x_{(1)})$$

گام دوم

$$\underline{x} \sim \underline{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{y}} \\ \dfrac{f_\theta(\underline{y})}{f_\theta(\underline{x})} = k \end{cases} ; \quad \theta \in \Theta_{\underline{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{(1)} = y_{(1)} \\ \dfrac{\prod_{i=1}^{n} x_i^2}{\prod_{i=1}^{n} y_i^2} = k \end{cases} ; \quad \theta \in \Theta_{\underline{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{(1)} = y_{(1)}$$

بنابراین آماره بسنده $T = X_{(1)}$ ، بسنده مینیمال نیز است.

برای بررسی کامل بودن T، ابتدا توزیع T را محاسبه می کنیم.

$$P(T > t) = [P(X_1 > t)]^n = [\int_t^b \frac{b\theta}{(b-\theta)x^2} dx]^n = \left(\frac{\theta}{b-\theta}\right)^n (\frac{b}{t} - 1)^n$$

$$\Rightarrow \quad F_T(t) = 1 - \left(\frac{\theta}{b-\theta}\right)^n (\frac{b}{t} - 1)^n \qquad \theta < t < b$$

$$f_T(t) = b(\frac{\theta}{b-\theta})^n \frac{1}{t^2} (\frac{b}{t} - 1)^{n-1} \qquad \theta < t < b$$

فرض کنید $h(T)$ تابع دلخواهی از T باشد بطوریکه برای هر $\theta \in (-\infty, b)$ داشته باشیم

$$E_\theta[h(T)] = 0$$

آنگاه

$$\int_\theta^b h(t) \frac{1}{t^2} (\frac{b}{t} - 1)^{n-1} dt = 0$$

با مشتق گیری نسبت به θ از معادله اخیر خواهیم داشت

$$-h(\theta)\theta^{-۲}(\frac{b}{\theta}-۱)^{n-۱}=۰ \qquad \forall\theta\in(-\infty,b)$$

با توجه به اینکه $\frac{b}{\theta}>۱$ است داریم

$$\Rightarrow \quad h(\theta)=۰ \qquad \forall\theta\in(-\infty,b)$$

پس

$$h(t)=۰ \qquad \forall \ \ \theta<t<b$$

بنابراین آماره بسنده مینیمال T کامل خواهد بود.

xviii) آماره $T=X_{(n)}$ بسنده کامل خواهد بود. (حل مشابه **xvi** است)

xix) $f_\theta(x_۱,...,x_n)=(۱-\theta)^{-n}u(x_{(۱)}-\theta)u(۱-x_{(n)})$

بنابرقضیه دسته بندی نیمن آماره $T=X_{(۱)}$ بسنده است.

با استفاده از دستور العمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی نشان میدهیم ایـن آمـاره بسنده مینیمال است.

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}}=\{\theta\mid\theta\le x_{(۱)}\}=(-\infty,x_{(۱)})$$

گام دوم

$$\underline{x}\sim\underline{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\Theta_{\underline{x}}=\Theta_{\underline{y}}\\ \dfrac{f_\theta(\underline{y})}{f_\theta(\underline{x})}=k \quad ; \quad \theta\in\Theta_{\underline{x}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{(1)} = y_{(1)} \\ \dfrac{u(1-y_{(n)})}{u(1-x_{(n)})} = k \end{cases} \qquad ; \quad \theta \in \Theta_{\underline{x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{(1)} = y_{(1)}$$

بنابراین آماره بسنده $T = X_{(1)}$، بسنده مینیمال است.

برای بررسی کامل بودن T ابتدا توزیع T را محاسبه می کنیم.

$$P(T > t) = [P(X_1 > t)]^n = [\int_t^1 \frac{1}{1-\theta} dx]^n = \left(\frac{1-t}{1-\theta}\right)^n$$

بنابراین

$$F_T(t) = 1 - \left(\frac{1-t}{1-\theta}\right)^n \qquad \theta \le t \le 1$$

$$f_T(t) = \frac{n(1-t)^{n-1}}{(1-\theta)^n} \qquad \theta \le t \le 1$$

فرض کنید $h(T)$ تابع دلخواهی از T باشد بطوریکه برای هر $\theta \in (-\infty,1)$ داشته باشیم $E_\theta[h(T)] = 0$

آنگاه

$$\int_\theta^1 h(t)(1-t)^{n-1} dt = 0$$

با مشتق گیری نسبت به θ از معادله اخیر خواهیم داشت

$$-h(\theta)(1-\theta)^{n-1} = 0 \qquad \forall \theta \in (-\infty,1)$$

چون $\theta < 1$ است داریم

$$h(\theta) = 0 \qquad , \qquad \forall \theta \in (-\infty,1)$$

پس

$$h(t) = ۰ \quad , \quad \forall t : \theta \le t \le ۱$$

بنابراین آماره بسنده مینیمال T کامل است.

xx)

$$f_\theta(x_۱,...,x_n) = \prod_{i=۱}^{n}[(۱+\theta) + \frac{\theta}{۲\sqrt{x_i}}] \quad ۰ < x_i < ۱ \quad i = ۱,۲,...,n \quad , \quad \theta \in (۰,۱)$$

بنابر قضیه دسته بندی نیمن آماره های $T = (X_{(۱)}, X_{(۲)},..., X_{(n)})$ و $T_۱ = (X_۱, X_۲,..., X_n)$ بسنده هستند.

با استفاده از قضیه ۲-۲ صفحه ۷۰ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم که آماره T بسنده مینیمال است، فرض کنید $\theta_۰ = \frac{۱}{۲}$ داریم

$$\frac{f_\theta(x_۱,...,x_n)}{f_{\theta_۰}(x_۱,...,x_n)} = \frac{\prod_{i=۱}^{n}[(۱+\theta) + \frac{\theta}{۲\sqrt{x_i}}]}{\prod_{i=۱}^{n}[\frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۴\sqrt{x_i}}]}$$

مشاهده می شود که نسبت فوق ازطریق $(x_{(۱)}, x_{(۲)},..., x_{(n)})$ یا $(x_1,..., x_n)$ به $\underline{x} = (x_۱,..., x_n)$ بستگی دارد.

چون تلخیص $(X_{(۱)}, X_{(۲)},..., X_{(n)})$ از $(X_۱, X_۲,..., X_n)$ بیشتر است لذا $T = (X_{(۱)}, X_{(۲)},..., X_{(n)})$ یک آماره بسنده مینیمال برای θاست.

xxi) $$f_\theta(x) = (\ln\frac{\theta}{\theta - ۱})e^{x\ln\theta} \quad ۰ < x < ۱ \quad , \quad \theta > ۱$$

توزیع فوق متعلق به خانواده توزیعهای نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ است.

چون بعد آماره با بعد فضای پارامتر برابر است بنابراین آماره بسنده مینیمال $T = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ کامل نیز است.

xxii) $f_\theta(x)=\dfrac{۱}{B(\theta,\theta)}.\dfrac{۱}{x(۱-x)}e^{\theta\ln x(۱-x)} \quad ۰<x<۱ \;,\; \theta>۰$

توزیع فوق متعلق به خانواده توزیعهای نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=\sum_{i=۱}^{n}\ln[X_i(۱-X_i)]$ است.

چون بعد آماره با بعد فضای پارامتر برابر است. پس آماره بسنده مینیمال T کامل نیز است.

xxiii) $f_\theta(x)=\dfrac{\theta}{x}e^{\theta\ln x} \quad ۰<x<۱ \;,\; \theta>۰$

توزیع فوق متعلق به خانواده توزیعهای نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i$ است.

چون بعد آماره با بعد فضای پارامتر برابر است، پس آماره بسنده مینیمال T کامل نیز است.

■

٤- فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع زیر باشند. در هر یک از موارد زیر آماره بسنده مینیمال را برای پارامتر (ها) به دست آورید.

i) $X_i\sim N(i\theta,۱)\,,\; i=۱,\dots,n$

ii) $X_i\sim N(\alpha+\beta y_i,\sigma^۲)\,,\; i=۱,\dots,n\,;$

$y_۱,\dots,y_n$ مقادیر معلوم اند

iii) $X_i\sim E(i\theta)\,,\; i=۱,\dots,n$

iv) $X_i\sim P(i\theta)\,,\; i=۱,\dots,n$

v) $X_i\sim E(i\theta,۱)\,,\; i=۱,\dots,n$

vi) $X_i \sim E(i\theta,\lambda)$, $i=1,\ldots,n$

vii) $X_i \sim U(-i(\theta-۱),i(\theta+۱))$, $i=۱,\ldots,n$

viii) $X_i \sim \Gamma(\alpha,i\lambda)$, $i=۱,\ldots,n$

ix) $X_i \sim \Gamma(\alpha_i,\lambda)$, $i=۱,\ldots,n$

x) $X_i \sim N(\theta,a\theta^{۲})$, $i=۱,\ldots,n$

حل:

i) $$f_\theta(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x_i-i\theta)^2}{2}} \qquad i=1,\ldots,n$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\{\frac{-x_i^{۲}}{۲}-\frac{i^{۲}\theta^{۲}}{۲}+\theta i x_i\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده توزیعهای نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال (و کامل) $T=\sum_{i=۱}^{n} iX_i$ است.

ii) $$f_{\alpha,\beta,\sigma}(x_i)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^{۲}}}\exp\{-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}}(x_i-\alpha-\beta y_i)^{۲}\}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^{۲}}}\exp\{\frac{x_i\alpha}{\sigma^{۲}}+\frac{\beta x_i y_i}{\sigma^{۲}}-\frac{x_i^{۲}}{۲\sigma^{۲}}-\frac{\alpha^{۲}}{۲\sigma^{۲}}-\frac{\beta^{۲}y_i^{۲}}{۲\sigma^{۲}}-\frac{\alpha\beta y_i}{\sigma^{۲}}\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده توزیعهای نمایی۳ پارامتری با آماره بسنده مینیمال (و کامل) $T=(\sum_{i=۱}^{n}X_i,\sum_{i=۱}^{n}X_i y_i,\sum_{i=۱}^{n}X_i^{۲})$ است.

iii) $$f_\theta(x_i)=i\theta e^{-i\theta x_i}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده توزیعهای نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال (و کامل) $T=\sum_{i=1}^{n} iX_i$ است.

iv) $$f_\theta(x_i)=\frac{e^{-i\theta}(i\theta)^{x_i}}{x_i}=\frac{e^{-i\theta}i^{x_i}}{x_i}e^{x_i\ln\theta}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده توزیعهای نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال (و کامل) $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ است.

v) $f_\theta(x_i)=e^{-(x_i-i\theta)} \qquad x_i \ge i\theta \qquad i=1,\ldots,n$

فرض کنید $y_i=\dfrac{x_i}{i}$

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n)=e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-i\theta)}u(y_{(1)}-\theta)$$

زیرا

$$\begin{aligned} x_i \ge i\theta \quad i=1,\ldots,n \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \le \frac{x_i}{i} \quad i=1,\ldots,n \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \le y_i \quad i=1,\ldots,n \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \le \min y_i \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \le y_{(1)} \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه دسته بندی نیمن به سادگی دیده می شود که آماره $T=y_{(1)}$ بسنده است، با استفاده از دستور العمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم T بسنده مینیمال نیز است.

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}}=\{\theta\in\Theta:\theta\le y_{(1)}\}=(-\infty,y_{(1)})$$

گام دوم

$$\underline{x}\sim\underline{x}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Theta_{\underline{x}}=\Theta_{\underline{x}'} \\ \dfrac{f_\theta(\underline{x})}{f_\theta(\underline{x}')}=k \quad ; \quad \theta\in\Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_{(1)}=y'_{(1)} \\ e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}x'_i}=k \quad ; \quad \theta\in\Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{(1)} = y'_{(1)}$$

بنابراین آماره $T = Y_{(1)}$ بسنده مینیمال است.

vi) $f_{\theta,\lambda}(x_i) = \lambda e^{-\lambda(x_i - i\theta)} \qquad \lambda > 0 \quad , \quad x_i \geq i\theta \qquad i = 1,\dots,n$

فرض کنید $y_i = \frac{x_i}{i}$، **آنگاه**

$$f_{\theta,\lambda}(x_1,\dots,x_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n}(x_i - i\theta)} u(y_{(1)} - \theta)$$

زیرا

$$\theta i \leq x_i \qquad i = 1,\dots,n \quad \Leftrightarrow \quad \theta \leq \frac{x_i}{i} \qquad i = 1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta \leq y_i \qquad i = 1,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta \leq y_{(1)}$$

با استفاده از قضیه دسته بندی نیمن به سادگی دیده می شود که آماره $T = (\sum_{i=1}^{n} X_i, Y_{(1)})$ بسنده است.

با استفاده از دستور العمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم آماره T بسنده مینیمال نیز است.

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}} = \{(\theta,\lambda) \mid \lambda > 0 \, , \; \theta \leq y_{(1)}\} = (0,\infty) \times (-\infty, y_{(1)})$$

گام دوم

$$\underline{x} \sim \underline{x}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{x}'} \\ \dfrac{f_{\theta,\lambda}(\underline{x})}{f_{\theta,\lambda}(\underline{x}')} = k \quad ; \quad \theta \in \Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_{(1)} = y'_{(1)} \\ e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x'_i)} = k \qquad ; \quad \theta \in \Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (y_{(۱)}, \sum_{i=۱}^{n} x_i) = (y'_{(۱)}, \sum_{i=۱}^{n} x'_i)$$

بنابراین آماره $T = (Y_{(۱)}, \sum_{i=۱}^{n} X_i)$ بسنده مینیمال است.

vii) $f_\theta(x_i) = \frac{۱}{۲i\theta} \qquad -i(\theta-۱) < x_i < i(\theta+۱) \qquad i=۱,\dots,n$

فرض کنید $y_i = \frac{x_i}{i}$ بنابراین

$$-i(\theta-۱) < x_i < i(\theta+۱) \qquad i=۱,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\theta-۱) < \frac{x_i}{i} < (\theta+۱) \qquad i=۱,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow \quad -\theta+۱ < y_i < \theta+۱ \qquad i=۱,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow \quad -\theta < y_i - ۱ < \theta \qquad i=۱,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow \quad -\theta < y_{(۱)} - ۱ < y_{(n)} - ۱ < \theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta > y_{(n)} - ۱ \quad , \quad \theta > ۱ - y_{(۱)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta > t = \max\{۱ - y_{(۱)}, y_{(n)} - ۱\}$$

توزیع توأم می شود

$$f_\theta(x_۱,\dots,x_n) = \prod_{i=۱}^{n} (۲i\theta)^{-۱} u(\theta - t)$$

توسط قضیه دسته بندی نیمن به سادگی دیده می شود که

$$T = \max\{۱ - Y_{(۱)}, Y_{(n)} - ۱\}$$

آماره بسنده است. این آماره بسنده مینیمال نیز است زیرا

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}} = \{\theta \mid \theta > t\} = (t, \infty)$$

گام دوم

$$\underline{x} \sim \underline{x}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{x}'} \\ \dfrac{f_\theta(\underline{x})}{f_\theta(\underline{x}')} = k \quad ; \quad \theta \in \Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = t' \\ \dfrac{u(\theta - t)}{u(\theta - t')} = k \qquad ; \quad \theta \in \Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = t'$$

بنابراین آماره $T = \max\{۱ - Y_{(۱)}, Y_{(n)} - ۱\}$ بسنده مینیمال است.

در حل این مسأله می توان به جای $y_i = \frac{x_i}{i}$ از $y_i = \frac{x_i}{i} - ۱$ نیز استفاده کرد.

viii) $$f_{\alpha,\lambda}(x_i) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}(i\lambda)^\alpha x_i^{\alpha-۱} e^{-i\lambda x_i} \qquad i = ۱,\dots,n$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}(i\lambda)^\alpha \exp\{-i\lambda x_i + (\alpha - 1)\ln \mathrm{x_i}\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی دو پارامتری با آماره بسنده مینیمال (و کامل) $T = (\sum_{i=۱}^n \ln X_i, \sum_{i=۱}^n iX_i)$ برای پارامتر (α, λ) است.

ix) $$f_{\alpha_i,\lambda}(x_i) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha_i)} \lambda^{\alpha_i} x_i^{\alpha_i - ۱} e^{-\lambda x_i} \qquad i = ۱,\dots,n$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i) x_i} e^{-\lambda \mathrm{x_i} + \alpha_i \ln x_i}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی دو پارامتری است.

توزیع توأم نمونه تصادفی می شود

$$f(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \dots, \mathrm{x_n}) = \prod_{i=۱}^n f_{\alpha_i,\lambda}(\mathrm{x_i})$$

$$=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\alpha_i)\prod_{i=1}^{n}x_i}\exp\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2+\ldots+\alpha_n\ln x_n\}$$

چنانکه ملاحظه می شود توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی $(n+1)$ پارامتری با آماره بسنده مینیمال

$$T=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\ln X_1,\ln X_2,\ldots,\ln X_n)$$

برای پارامتر $(\lambda,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ است.

x) $$f_\theta(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a\theta^2}}e^{-\frac{1}{2a\theta^2}(x_i-\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi a\theta^2}}\exp\{-\frac{x_i^2}{2a\theta^2}-\frac{1}{2a}+\frac{x_i}{a\theta}\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ است.

■

۵- فرض کنید $X_1,X_2,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد.آماره بسنده مینیمال برای θ را به دست آورید.$(-1<\theta<1)$

x	۱	۲	۳	٤
$f_\theta(x)$	$\frac{1-\theta}{6}$	$\frac{1+\theta}{6}$	$\frac{2-\theta}{6}$	$\frac{2+\theta}{6}$

(راهنمایی: اگر N_x، $x=۱,...,۴$، نمایانگر تعداد دفعاتی باشد که x در نمونه مشاهده می شود آن گاه در مورد $(N_{۱},...,N_{۴})$ چه می توان گفت؟)

حل:

فرض کنید متغیر تصادفی N_x، $x=۱,۲,۳,۴$، تعداد دفعاتی باشد که x در نمونه مشاهده می شود.

به سادگی داریم

$$(N_{۱},N_{۲},N_{۳},N_{۴}) \sim \mathrm{MB}(\mathrm{n},\mathrm{p}_1,p_{۲},p_{۳},p_{۴})$$

که

$$p_{۱}=\frac{۱-\theta}{۶}\quad,\quad p_{۲}=\frac{۱+\theta}{۶}\quad,\quad p_{۳}=\frac{۲-\theta}{۶}\quad,\quad p_{۴}=\frac{۲+\theta}{۶}$$

توزیع توأم $(N_{۱},N_{۲},N_{۳},N_{۴})$ می شود

$$\begin{aligned}
&f(n_{۱},n_{۲},n_{۳},n_{۴})=p(N_{۱}=n_{۱},N_{۲}=n_{۲},N_{۳}=n_{۳},N_{۴}=n_{۴})\\
&=\binom{n}{n_{۱},n_{۲},n_{۳},n_{۴}}(\frac{۱-\theta}{۶})^{n_{۱}}(\frac{۱+\theta}{۶})^{n_{۲}}(\frac{۲-\theta}{۶})^{n_{۳}}(\frac{۲+\theta}{۶})^{n_{۴}}\\
&=\binom{n}{n_1,n_2,n_3,n_4}(\tfrac{1}{6})^n\exp\{n_1\ln(1-\theta)+n_2\ln(1+\theta)+n_3\ln(2-\theta)+(n-n_1-n_2-n_3)\ln(2+\theta)\}\\
&=\binom{n}{n_{۱},n_{۲},n_{۳},n_{۴}}(\tfrac{۱}{۶})^n\exp\{n_{۱}\ln(\frac{۱-\theta}{۲+\theta})+n_{۲}\ln(\frac{۱+\theta}{۲+\theta})+n_{۳}\ln(\frac{۲-\theta}{۲+\theta})+n\ln(۲+\theta)\}\\
&=\binom{n}{n_{۱},n_{۲},n_{۳},n_{۴}}(\tfrac{۱}{۶})^n(۲+\theta)^n\exp\{n_{۱}\ln(\frac{۱-\theta}{۲+\theta})+n_{۲}\ln(\frac{۱+\theta}{۲+\theta})+n_{۳}\ln(\frac{۲-\theta}{۲+\theta})\}
\end{aligned}$$

همانطور که دیده می شود توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی ۳ پارامتری با آماره بسنده مینیمال $(N_{۱},N_{۲},N_{۳})$ است.

■

٦- کدام یک از جفت آماره های زیر افراز یکسان تولید می کنند؟ چرا؟

i) $T=\prod_{i=1}^{n}X_i \ , \ S=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \quad , \quad X_i>0$

ii) $T=\sum_{i=1}^{n}X_i \ , \ S=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \quad , \quad X_i>0$

iii) $T=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2) \ , \ S=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)$

iv) $T=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^3) \ , \ S=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^3)$

حل:

i)

تابع $f(t)=\ln t$ ، $t>0$، تابعی ۱-۱ است. پس آماره های S و T توابعی ۱-۱ از یکدیگر هستند، بنابراین افرازهای یکسان تولید می کنند.

ii)

S و T دارای افرازهای یکسان نیستند. زیرا مثلاً برای نقاط $\underline{x}=(2,2,2) \quad , \quad \underline{y}=(1,8,1)$ داریم

$$S(\underline{x})=S(\underline{y})$$

اما

$$T(\underline{x})\neq T(\underline{y})$$

بنابراین $\underline{x}$ و $\underline{y}$ در داخل یک مجموعه از افرازی که توسط S ایجاد شده است، هستند اما در دو مجموعه مختلف از افرازی که توسط T ایجاد شده است قرار دارند. بنابراین S و T دارای افرازهای متفاوت هستند.

iii)

S و T توابعی ۱-۱ از یکدیگر هستند، بنابراین دارای افرازهای یکسان اند.

توضیح:

$S=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2)$ بنابراین با داشتن مقادیر S، مقادیر T معلوم خواهد بـود و بالعکس. بنابراین T و S توابعی یك به یك از یکدیگر هستند.

iv)

$$S=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^3)$$
$$=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^3-3\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i^2+3\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i-n\bar{X}^3)$$

همانطور که ملاحظه می شود S,T توابعی ۱-۱ از یکدیگر نیستند.

■

۷- فرض کنید $X_1,X_2,...,X_n$ ، $n\geq 4$،یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\theta^3} & 0<x<\theta\\ \dfrac{3\theta^2-x^2}{\theta^3} & \theta\leq x<2\theta\end{cases}\qquad \theta>0$$

نشان دهید $T(\underline{X})=(\bar{X},X_{(n)})$ یک آماره بسنده توأم برای θ نیست.

حل: با استفاده از قضیه(۲-٤) صفحه ۸۲ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم که آماره $T(\underline{X})=(\bar{X},X_{(n)})$ بسنده توأم برای θ نیست.

$\theta_2,\theta_1,\underline{y},\underline{x}$ را به صورت زیر انتخاب می کنیم.

$\theta_1=1 \quad , \quad \theta_2=\frac{2}{3}$

$\underline{x}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,...,1)$

$\underline{y}=(\frac{1}{4},\frac{3}{4},1,...,1)$

به سادگی داریم

$$T(\underline{x}) = T(\underline{y})$$

اما

$$f_{\theta_1}(\underline{x})\, f_{\theta_2}(\underline{y}) = 3^{2n+1} 2^{-2n-14} \times 37$$

$$f_{\theta_2}(\underline{x})\, f_{\theta_1}(\underline{y}) = 3^{2n+4} 2^{-2n-14}$$

بنابراین

$$f_{\theta_1}(\underline{x})\, f_{\theta_2}(\underline{y}) \neq f_{\theta_2}(\underline{x})\, f_{\theta_1}(\underline{y})$$

در نتیجه T یک آماره بسنده نیست.

■

۸- فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی $n(\geq 4)$ از تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta} & 0 < x < \theta \\ \dfrac{2(1-x)}{1-\theta} & \theta \leq x < 1 \end{cases} \qquad 0 < \theta < 1$$

نشان دهید $T(\underline{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آماره بسنده توأم برای θ نیست.

حل:

با استفاده از قضیه (۲-٤) صفحه ۸۲ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم که $T(\underline{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آماره بسنده برای θ نیست.

$\underline{x}$، $\underline{y}$، θ_1 و θ_2 را به صورت زیر انتخاب می کنیم.

$$\underline{x} = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}) \quad , \quad \theta_1 = \tfrac{1}{3}$$

$$\underline{y} = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}) \quad , \quad \theta_2 = \tfrac{1}{2}$$

آنگاه

$$T(\underline{x}) = (\tfrac{۱}{۴}, \tfrac{۳}{۴}) = T(\underline{y})$$

اما

$$f_{\theta_۱}(\underline{x}) f_{\theta_۲}(\underline{y}) = \frac{۱}{۴} ۳^{n-۱}$$

$$f_{\theta_۲}(\underline{x}) f_{\theta_۱}(\underline{y}) = \frac{۱}{۲} ۳^{n-۱}$$

بنابراین

$$f_{\theta_۱}(\underline{x}) f_{\theta_۲}(\underline{y}) \neq f_{\theta_۲}(\underline{x}) f_{\theta_۱}(\underline{y})$$

در نتیجه T یک آماره بسنده نیست.

■

۹- فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی $n(\geq ۳)$ از تابع چگالی احتمال زیرباشد.

$$f_\theta(x) = \frac{۱}{۲} \exp\{-|x-\theta|\} \quad , \quad x \in R \quad , \quad \theta \in R$$

نشان دهید $T(\underline{X}) = (X_{(۱)}, X_{(n)})$ یک آماره بسنده توأم برای θ نیست.

حل:

با استفاده از قضیه (۲-٤) صفحه ۸۲ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم که $T(\underline{X}) = (X_{(۱)}, X_{(n)})$ یک آماره بسنده برای θ نیست.

$\underline{x}$، $\underline{y}$، $\theta_۱$ و $\theta_۲$ را به صورت زیر انتخاب می کنیم(فرض می کنیم $n = ۳$)

$$\underline{x} = (۱,۱,۳) \quad , \quad \underline{y} = (۱,۲,۳) \quad , \quad \theta_۱ = ۰ \quad , \quad \theta_۲ = ۴$$

آنگاه

$$T(\underline{x}) = (۱,۳) = T(\underline{y})$$

اما

$$f_{\theta_1}(\underline{x})f_{\theta_2}(\underline{y}) = 2^{-6}e^{-5}e^{-6} = 2^{-6}e^{-11}$$
$$f_{\theta_2}(\underline{x})f_{\theta_1}(\underline{y}) = 2^{-6}e^{-7}e^{-6} = 2^{-6}e^{-13}$$

بنابراین

$$f_{\theta_1}(\underline{x})f_{\theta_2}(\underline{y}) \neq f_{\theta_2}(\underline{x})f_{\theta_1}(\underline{y})$$

در نتیجه T یک آماره بسنده نیست.

■

۱۰- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد. کدام یک از آماره های زیر بسنده است؟

(i) $T(X_1,...,X_n) = X_1$

(ii) $T(X_1,...,X_n) = (X_1, X_n)$

(iii) $T(X_1,...,X_n) = (X_1,...,X_{n-1})$

حل: با استفاده از تعریف بسندگی نشان می دهیم آماره های قسمتهای i, ii و iii هیچکدام بسنده نمی باشند.

i)

$$P_\theta(X_1 = x_1, X_2 = x_2,..., X_n = x_n \mid X_1 = x_1')$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P_\theta(X_1 = x_1, X_2 = x_2,..., X_n = x_n)}{P_\theta(X_1 = x_1)} & x_1 = x_1' \\ 0 & x_1 \neq x_1' \end{cases}$$

بنا به استقلال

$$= \begin{cases} \dfrac{P_\theta(X_1 = x_1).P_\theta(X_2 = x_2)...P_\theta(X_n = x_n)}{P_\theta(X_1 = x_1)} & x_1 = x_1' \\ 0 & x_1 \neq x_1' \end{cases}$$

$$=\begin{cases} P_\theta(X_2=x_2)\ldots P_\theta(X_n=x_n) & x_1=x_1' \\ 0 & x_1\neq x_1' \end{cases}$$

همانطور که دیده می شود توزیع شـرطی فـوق بـه θبـستگی دارد بنـابراین X_1 بسنده نیست.

ii)

$$P_\theta(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n \mid (X_1,X_n)=(x_1',x_n'))$$

$$=\begin{cases} \dfrac{P_\theta(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n)}{P_\theta(X_1=x_1,X_n=x_n)} & (x_1,x_n)=(x_1',x_n') \\ 0 & (x_1,x_n)\neq(x_1',x_n') \end{cases}$$

بنا به استقلال

$$=\begin{cases} \dfrac{P_\theta(X_1=x_1).P_\theta(X_2=x_2)\ldots P_\theta(X_n=x_n)}{P_\theta(X_1=x_1)P_\theta(X_n=x_n)} & (x_1,x_n)=(x_1',x_n') \\ 0 & (x_1,x_n)\neq(x_1',x_n') \end{cases}$$

$$=\begin{cases} P_\theta(X_2=x_2)\ldots P_\theta(X_{n-1}=x_{n-1}) & (x_1,x_n)=(x_1',x_n') \\ 0 & (x_1,x_n)\neq(x_1',x_n') \end{cases}$$

توزیع شرطی فوق به θ بستگی دارد بنابراین (X_1,X_n) آماره بسنده نیست.

iii)

مشابه موارد فوق داریم

$$P_\theta(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n \mid (X_1,\ldots,X_{n-1})=(x_1',x_2',\ldots,x_{n-1}'))$$
$$=\begin{cases} P_\theta(X_n=x_n) & (x_1,\ldots,x_{n-1})=(x_1',\ldots x_{n-1}') \\ 0 & (x_1,\ldots,x_{n-1})\neq(x_1',\ldots x_{n-1}') \end{cases}$$

توزیع شرطی فوق به θ بستگی دارد بنابراین $(X_1,\ldots,X_{n-1})$ آماره بسنده نیست.

■

۱۱- فرض کنید $X=(X_۱,X_۲)$ دارای تابع احتمال زیر باشد. $(۱<\theta<۳)$

$(x_۱,x_۲)$	$(۰,۰)$	$(۰,۱)$	$(۱,۰)$	$(۱,۱)$
$f_\theta(x_۱,x_۲)$	$\frac{(۴-\theta)(۳-\theta)}{۱۲}$	$\frac{\theta(۴-\theta)}{۱۲}$	$\frac{\theta(۴-\theta)}{۱۲}$	$\frac{\theta(\theta-۱)}{۱۲}$

الف: آیا $T_۱(X)=X_۱+X_۲$ یک آماره بسنده برای θاست؟

ب: آیا $T_۲(X)=X_۱-X_۲$ یک آماره بسنده برای θاست؟

ج: آیا $T_۳(X)=X_۱X_۲$ یک آماره بسنده برای θاست؟

حل:

(الف) با استفاده از تعریف آماره بسنده نشان می دهیم آماره $T_۱(X)$ آماره بسنده می باشد. همچنان که در جدول زیر دیده میشود توزیع شـرطی نمونــه بـا شــرط معلوم بودن مقادیر $T_۱$ به θ بستگی ندارد.

	مقادیر $T_۱$	$f(x_۱,x_۲\mid t_۱)$
$(۰,۰)$	۰	۱
$(۰,۱)$	۱	$\frac{۱}{۲}$
$(۱,۰)$	۱	$\frac{۱}{۲}$
$(۱,۱)$	۲	۱

برای مثال یکی از توزیعهای شرطی به صورت زیر محاسبه می شود

$$P(X_۱=۰,X_۲=۱\mid X_۱+X_۲=۱)=\frac{P(X_۱=۰,X_۲=۱)}{P(X_۱+X_۲=۱)}$$
$$=\frac{P(X_۱=۰,X_۲=۱)}{P(X_۱=۰,X_۲=۱)+P(X_۱=۱,X_۲=۰)}$$
$$=\frac{\frac{\theta(۴-\theta)}{۱۲}}{\frac{\theta(۴-\theta)}{۱۲}+\frac{\theta(۴-\theta)}{۱۲}}=\frac{۱}{۲}$$

با مثال های نقض نشان می دهیم که آمـاره هـای قـسمتهای(ب) و (ج) بـسنده نیستند.

(ب)

$$
\begin{aligned}
&P(X_۱=۱, X_۲=۱ \mid X_۱-X_۲=۰)\\
&\qquad=\frac{P(X_۱=۱, X_۲=۱)}{P(X_۱=۱, X_۲=۱)+P(X_۱=۰, X_۲=۰)}\\
&\qquad=\frac{\frac{\theta(\theta-۱)}{۱۲}}{\frac{\theta(\theta-۱)}{۱۲}+\frac{(۴-\theta)(۳-\theta)}{۱۲}}\\
&\qquad=\frac{\theta(\theta-۱)}{\theta(\theta-۱)+(۴-\theta)(۳-\theta)}
\end{aligned}
$$

توزیع شرطی فوق به θ بستگی دارد بنابراین آماره $T_۲$ بسنده نمی باشد.

(ج)

$$
\begin{aligned}
P(X_۱=۰, X_۲=۱ \mid X_۱X_۲=۰)&=\frac{P(X_۱=۰, X_۲=۱)}{f(۰,۰)+f(۰,۱)+f(۱,۰)}\\
&=\frac{\frac{\theta(۴-\theta)}{۱۲}}{۲\times\frac{\theta(۴-\theta)}{۱۲}+\frac{(۴-\theta)(۳-\theta)}{۱۲}}\\
&=\frac{\theta(۴-\theta)}{۲\theta(۴-\theta)+(۴-\theta)(۳-\theta)}
\end{aligned}
$$

توزیع شرطی فوق به θ بستگی دارد بنابراین آماره $T_۲$ بسنده نمی باشد.

■

۱۲- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با توابع احتمال زیر باشد.

	$f_{\theta_۱}(x)$	$f_{\theta_۲}(x)$	$f_{\theta_۳}(x)$

x_1	۰/۴	۰/۶	۰/۲
x_2	۰/۲	۰/۳	۰/۱
x_3	۰/۴	۰/۱	۰/۷

الف: اگر $A=\{x_3\}$ و $B=\{x_1,x_2\}$ ، آیا افراز $\Pi=\{A,B\}$ بسنده است؟

ب: اگر $T(x)=\begin{cases} 0 & x=x_1 \\ 1 & x=x_2 \ or \ x_3 \end{cases}$**، آیا آماره $T(X)$ بسنده برای θ است؟**

حل:

(الف) توزیعهای شرطی $f(x_i \mid A)$ و $f(x_i \mid B)$ در جدول زیر محاسبه شده اند.

	$f(x_1 \mid A)$	$f(x_2 \mid A)$	$f(x_3 \mid A)$
θ_1	۰	۰	۱
θ_2	۰	۰	۱
θ_3	۰	۰	۱

	$f(x_1 \mid B)$	$f(x_2 \mid B)$	$f(x_3 \mid B)$
θ_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	۰
θ_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	۰
θ_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	۰

به عنوان مثال

$$f_{\theta_2}(x_1 \mid A)=\frac{P_{\theta_2}(X=x_1,A)}{P_{\theta_2}(A)}=\frac{P_{\theta_2}(X=x_1,X=x_3)}{P_{\theta_2}(X=x_3)}=\frac{0}{0.1}=0$$

$$f_{\theta_2}(x_2 \mid B)=\frac{P_{\theta_2}(X=x_2,B)}{P_{\theta_2}(B)}=\frac{P_{\theta_2}(X=x_2)}{P_{\theta_2}(B)}=\frac{0.3}{0.6+0.3}=\frac{1}{3}$$

همانطور که در جدولها می توان دید، توزیع شرطی نمونه به شرط هر مجموعه افراز مستقل از θ می باشد.

به عنوان مثال

$$f_{\theta_۱}(x_۱ \mid A) = f_{\theta_۲}(x_۱ \mid A) = f_{\theta_۳}(x_۱ \mid A)$$

یا مثلاً

$$f_{\theta_۱}(x_۲ \mid B) = f_{\theta_۲}(x_۲ \mid B) = f_{\theta_۳}(x_۲ \mid B)$$

بنابراین افراز فوق بسنده است.

(ب) با یک مثال نقض نشان می دهیم آماره $T(X)$ بسنده نمی باشد.

همانطور که در جدول زیر دیده می شود، توزیع شرطی $X = x_۲$ به شرط آماره بسنده مستقل از θ نمی باشد. بنابراین $T(X)$ بسنده نیست.

	$P(X = x_۲ \mid T = ۱)$
$\theta_۱$	$\frac{۱}{۲}$
$\theta_۲$	$\frac{۳}{۴}$
$\theta_۳$	$\frac{۱}{۷}$

■

۱۳- فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = a(x)\frac{\theta^x}{g(\theta)} \quad , \quad x = ۰,۱,۲,\dots \quad , \quad \theta > ۰$$

الف: آماره بسنده مینیمال برای θ را به دست آورید.

ب: آیا آماره به دست آمده کامل است؟

حل:

$$f_\theta(x)=a(x)\frac{\theta^x}{g(\theta)}=a(x)\frac{1}{g(\theta)}e^{x\ln\theta}\qquad x=0,1,2,\ldots,\quad \theta>0$$

با توجه به شکل توزیع، توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری است و آماره بسنده کامل برای θ، $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ است.

■

۱۴- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ و $Y_1,\ldots,Y_m$ دو نمونه تصادفی مستقل از توزیعهای به ترتیب $N(\mu,\sigma_1^2)$ و $N(\mu,\sigma_2^2)$ باشند. نشان دهید آماره $T=(\sum X_i,\sum X_i^2,\sum Y_i,\sum Y_i^2)$ یک آماره بسنده برای $\theta=(\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ است اما کامل نیست.

حل:

توزیع توأم برابر است با

$$f(x_1,..x_n,y_1,\ldots,y_m)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\prod_{j=1}^{m}f(y_j)$$

$$=(2\pi)^{-\frac{m+n}{2}}(\sigma_1^2)^{-\frac{n}{2}}(\sigma_2^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{m}(y_j-\mu)^2\}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\{\frac{\mu}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\mu}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}y_i-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

$$+C(\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2)\}$$

که $C(\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ تابعی تنها از μ، σ_1^2 و σ_2^2 است.

توزیع فوق متعلق به خانواده توزیعهای نمایی ٤ پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=(\sum X_i,\sum X_i^2,\sum Y_i,\sum Y_i^2)$ برای $\underline{\theta}=(\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$ است.

از طرفی

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n\mu \quad , \qquad E(\sum_{i=1}^{m} Y_i) = m\mu$$

در نتیجه

$$E(\overline{X} - \overline{Y}) = 0$$

اما

$$P(\overline{X} = \overline{Y}) = 0 < 1$$

بنابراین آماره T کامل نیست.

■

۱۵- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Beta(\alpha,\beta)$ باشد که در آن α معلوم و β نامعلوم است. نشان دهید آماره $T = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{1-X_i})^4$ یک آماره بسنده برای β است.

حل:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad \alpha,\beta > 0 \quad , \quad 0 < x < 1$$
$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1} e^{(\beta-1)\ln(1-x)}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری است و آماره $T_2 = \sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i)$ آماره بسنده کامل برای βاست. هر تابع یک به یک ازآماره بسنده نیز اماره ای بسنده است مانند توابع

$$T_1 = -\sum_{i=1}^{n} \ln(1-X_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{1-X_i}$$

یا

$$T=\frac{۱}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n}\ln\frac{۱}{۱-X_i}\right)^۴$$

بنابراین آماره T بسنده است.

■

۱۶- فرض کنید $X_۱,X_۲$ یک نمونه تصادفی ۲ تایی از توزیع $P(\lambda)$، $\lambda>۰$، باشد. با استفاده از تعریف بسندگی تحقیق کنید، آیا آماره $T(X)=X_۱+\alpha X_۲$، به ازاء هر $\alpha>۱$ صحیح، بسنده است یا نه؟ آیاروش ساده تری برای نشان دادن عدم بسندگی T وجود دارد؟

حل:

$$\begin{aligned}P(X_۱=\alpha,X_۲=۰\mid T=\alpha)&=\frac{P(X_۱=\alpha,X_۲=۰)}{P(T(X)=\alpha)}\\&=\frac{P(X_۱=\alpha)P(X_۲=۰)}{P(X_۱+\alpha X_۲=\alpha)}\\&=\frac{P(X_۱=\alpha)P(X_۲=۰)}{P(X_۱=۰,X_۲=۱)+P(X_۱=\alpha,X_۲=۰)}\\&=\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^\alpha}{\alpha!}.e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}.e^{-\lambda}\lambda+\frac{e^{-\lambda}\lambda^\alpha}{\alpha!}.e^{-\lambda}}\\&=\frac{\frac{\lambda^\alpha}{\alpha!}}{\lambda+\frac{\lambda^\alpha}{\alpha!}}\end{aligned}$$

همانطور که دیده می شود توزیع شرطی نمونه به شرط آماره بسنده به λ بستگی دارد.

بنابراین T بسنده نیست.

قضیه (۲-۵) صفحه ۸۳ راه ساده تری برای نشان دادن عدم بسند گی T است.

فرض کنید

$$(x_1, x_2) = (\alpha, 0) \quad \text{و} \quad (y_1, y_2) = (0, 1)$$

برای آماره بسنده مینیمال $S(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ داریم

$$S(x_1, x_2) = \alpha \neq 1 = S(y_1, y_2)$$

اما

$$T(x_1, x_2) = T(y_1, y_2)$$

■

۱۷- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی ۳ تایی از توزیع $B(1,\theta)$ باشد. تحقیق کنید

الف: آیا $T_1(\underline{X}) = X_1 + X_2 + 2X_3$ یک آماره بسنده برای θ است؟ چرا؟

ب: آیا $T_2(\underline{X}) = X_1 + 2X_2 + 2X_3$ یک آماره بسنده برای θ است؟ چرا؟

ج: آیا $T_3(\underline{X}) = 3X_1 + 2X_2 + 2X_3$ یک آماره بسنده برای θ است؟ چرا؟

د: آیا $T_4(\underline{X}) = 5X_1 + X_2 + X_3$ یک آماره بسنده برای θ است؟ چرا؟

ه: در صورت مثبت بودن جواب در هر یک از بندهای الف- د، تحقیق کنید آیا آماره بسنده، مینیمال هم است؟ آیا می توان در حالت کلی ادعا کرد که چه ترکیب خطی از X_i ها یک آماره بسنده است؟

حل:

(الف) آماره T_1 بسنده نیست. برای این منظور کافی است نشان دهیم احتمال شرطی مثلاً

$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0 \mid T_1 = 2)$ به θ بستگی دارد.

$$P(X_1=1,X_2=1,X_3=0\,|\,T_1=2)=\frac{P(X_1=1,X_2=1,X_3=0,T_1=2)}{P(T_1=2)}$$
$$=\frac{P(X_1=1,X_2=1,X_3=0)}{P(T_1=2)}$$
$$=\frac{\theta^2(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta)+\theta(1-\theta)^2}=\theta$$

(ب) آماره T_2 بسنده است. زیرا می دانیم آماره $T=X_1+X_2+X_3$ برای θ بسنده است، از طرفی به سادگی توسط جدول زیر می توان دید که T تابعی از T_2 است.بنابراین T_2 بسنده است.

(x_1,x_2,x_3)	مقادیر T_2	مقادیر T
(۰،۰،۰)	۰	۰
(۱،۰،۰)	۱	۱
(۰،۱،۰)	۲	۱
(۰،۰،۱)	۲	۱
(۱،۱،۰)	۳	۲
(۱،۰،۱)	۳	۲
(۰،۱،۱)	٤	۲
(۱،۱،۱)	۵	۳

(ج) مشابه قسمت (ب) بسادگی می توان نشان داد که آماره T_3 تابعی از آماره بسنده T است.بنابراین T_3 بسنده است.

(د) مشابه قسمت (ب) بسادگی می توان نشان داد که آماره T_4 تـابعی از آمـاره بسنده T است.بنابراین T_4 بسنده است.

(ه) آماره های بسنده T_4, T_3, T_2 مینیمال نیستند. زیرا آمـاره بـسنده مینیمـال T تابعی (نه یک به یک) از T_4, T_3, T_2 است و بنابراین افرازهایی که آمـاره هـای T_4, T_3, T_2 روی فضای نمونه دارند با افـراز T یکـسان نیـست. پـس T_4, T_3, T_2 بسنده مینیمال نیستند.

راه دیگر برای اینکه نشان دهیم آمـاره هـای T_4, T_3, T_2 بـسنده مینیمـال نیـستند استفاده از قضیه (۲-۶) از صفحه ۸۶ کتاب آمار ریاضی می باشد.

آماره های $T_۴, T_۳, T_۲, T$ بسنده هستند.

برای دو نقطه

$$\underline{x} = (۱,۰,۰) \quad \text{و} \quad \underline{y} = (۰,۱,۰)$$

داریم

$$T(\underline{x}) = T(\underline{y})$$

اما

$$T_۲(\underline{x}) \neq T_۲(\underline{y}) \quad \text{و} \quad T_۳(\underline{x}) \neq T_۳(\underline{y}) \quad \text{و} \quad T_۴(\underline{x}) \neq T_۴(\underline{y}).$$

هر ترکیب خطی از $X_۱, X_۲, X_۳$ که مجموع ضرایب آن بزرگترمـساوی ۵ باشـد بسنده است.

■

۱۸- فرض کنید $X_۱, ..., X_n$ و $Y_۱, ..., Y_n$ دو نمونه تصادفی مستقل از توزیعهای به ترتیب $E(\theta)$ و $E(\frac{1}{\theta})$ باشند. یک آماره بسنده مینیمال برای θ به دست آورید. آیا آماره به دست آمده کامل است؟

حل:

می خواهیم برپایه مشاهدات $(X_1, X_2,..., X_n, Y_1, Y_2,..., Y_n)$ یک آماره بسنده مینیمال برای θ پیدا کنیم.

چگالی توأم نمونه برابر است با

$$f(x_1,..., x_1, y_1,... y_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \prod_{i=1}^{n} f_\theta(y_i) = \theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i}$$
$$= e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی دو پارامتری با آماره بسنده مینیمال $(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i)$ است.

آماره فوق کامل نیست زیرا

$$E_\theta(\bar{Y}) = E_\theta(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i) = \theta$$

همچنین

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \theta)$$

$$\Rightarrow \qquad E_\theta[\frac{1}{T}] = \int_0^\infty \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \theta^n t^{n-1} e^{-\theta t} dt$$
$$= \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} \theta \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n-1)} \theta^{n-1} t^{n-2} e^{-\theta t} dt$$
$$= \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} \theta = \frac{\theta}{n-1}$$

$$\Rightarrow \qquad E(\frac{n-1}{T}) = \theta$$

بنابراین برای هر $\theta > 0$

$$E_\theta[\bar{Y} - \tfrac{n-1}{T}] = 0$$

اما برای هر $\theta>0$ داریم

$$P_\theta(\overline{Y}=\frac{n-1}{T})=0<1$$

بنابراین آماره بسنده $(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i)$ کامل نیست.

■

۱۹- فرض کنید $(X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(0,0,1,1,\rho)$ باشد. یک آماره بسنده مینیمال با کمترین بعد برای ρ به دست آورید.

حل:

$$f_\rho(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2xy\rho)} \qquad , \quad |\rho|<1$$

پس

$$f_\rho(\underline{x},\underline{y})=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)=(2\pi)^{-n}(1-\rho^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\rho\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)\}$$

توسط قضیه فاکتور گیری آماره $T=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i$ یک آماره بسنده برای ρ به دست می آید. این آماره مینیمال نیز می باشد. فرض کنید $\rho_\circ=0$ و نسبت زیر را تشکیل می دهیم

$$\frac{f_\rho(\underline{x},\underline{y})}{f_{\rho_\circ}(\underline{x},\underline{y})}=e^{-2\rho\sum x_iy_i}$$

نسبت فوق تنها از طریق $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ به نمونه بستگی دارد بنابراین $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ ، یک آماره بسنده مینیمال است.

■

۲۰- فرض کنید $X \sim U(\theta,\theta+1)$ ، $\theta \in \{۰,\pm ۱,\pm ۲,...\}$،باشد.نشان دهید

الف: $T(X)=[X]$ یک آماره بسنده مینیمال برای θاست.

ب: $T(X)$و X مستقل از هم هستند.

حل:

$$P_\theta(x)=I_{(\theta,\theta+۱)}(x)$$

(الف) فرض کنید $\theta_.=[x]$، نسبت زیر را تشکیل می دهیم

$$\frac{P_\theta(x)}{P_{\theta_.}(x)}=\frac{\underset{(\theta,\theta+۱)}{I(x)}}{\underset{(\theta_.,\theta_.+۱)}{I(x)}}=\frac{I_{\{\theta\}}([x])}{۱}=g(\theta,[x])$$

نسبت فوق تنها از طریق $[x]$ به x بستگی دارد، بنـابراین $T=[X]$ آمـاره بـسنده مینیمال برای θ است.

توجه کنید که

$$\theta \le x < \theta+۱ \quad \Leftrightarrow \quad [x]=\theta$$

(ب) برای استقلال بین $T(X)$ و X ، کافی است نشان دهیم

$$P_\theta(X \le x \mid T(X)=t)=P_\theta(X \le x)$$

$$P_\theta(X \le x \mid T(X)=t)=\frac{P_\theta(X \le x, T(X)=t)}{P_\theta(T(X)=t)}$$

$$=\frac{P_\theta(X \le x,[X]=t)}{P_\theta([X]=t)}$$

چون $t=\theta$ است.(در غیر این صورت نسبت فوق معنی دار نیست.)

$$=\frac{P_\theta(X \le x,[X]=\theta)}{P_\theta([X]=t)}$$

$$=\frac{P_\theta(X \le x,\theta < X < \theta+۱)}{P_\theta(\theta \le X < \theta+۱)}$$

$$= P_\theta(X < x, \theta < X < \theta+1)$$

$$= \begin{cases} 0 & x < \theta \\ \int_\theta^x dt = x-\theta & \theta < x < \theta+1 \\ 1 & \theta+1 < x \end{cases}$$

$$= P_\theta(X \le x)$$

■

۲۱- فرض کنید (X_1, X_2) یک متغیر تصادفی دو بعدی باشد اگر $X_1 \sim B(1, p)$ ، $X_2 \mid X_1 = 1 \sim B(1, p)$ ، $X_2 \mid X_1 = 0 \sim B(1, \frac{1}{2})$ ، $p \in (0,1)$ ، باشند، یک آماره بسنده مینیمال برای p به دست آورید.

حل:

ابتدا فرض کنید X_2 مانند X_1 دو مقدار صفر ویک را می گیرد، توزیع توأم (X_1, X_2) را به دست می آوریم.

$$f(0,0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0) = \tfrac{1-p}{2}$$

$$f(0,1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0) = \tfrac{1-p}{2}$$

$$f(1,0) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1) = (1-p)p$$

$$f(1,1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1) = p^2$$

(x_1, x_2)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$f(x_1, x_2)$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	$p(1-p)$	p^2

اکنون توسط روش لهمن – شفه، یک افراز بسنده مینیمال روی فضای نمونه ایجاد می کنیم. چنانچه به فضای نمونه دقت شود، به سادگی دیده می شود که نقاط $(0,0)$ با $(0,1)$ هم ارزند و نقاط $(1,0)$ و $(1,1)$ با خودشان هم ارزند. به این معنی که

$$(۰,۰) \sim (۰,۱) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(۰,۰)}{f(۰,۱)} = p \text{ مستقل از }$$

$$(۱,۰) \sim (۱,۰) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(۱,۰)}{f(۱,۰)} = p \text{ مستقل از }$$

$$(۱,۱) \sim (۱,۱) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(۱,۱)}{f(۱,۱)} = p \text{ مستقل از }$$

بنابراین افراز $\Pi = \{c_۰, c_۱, c_۲\}$ که در آن

$$c_۰ = \{(۰,۰),(۰,۱)\} \text{ و } c_۱ = \{(۱,۰)\} \text{ و } c_۲ = \{(۱,۱)\}$$

یک افراز بسنده مینیمال روی فضای نمونه است.

آماره زیر که افراز Π را تولید می کند یک آماره بسنده مینیمال برای p است.

$$T(x_۱, x_۲) = \begin{cases} a & (x_۱, x_۲) = (۰,۰) \, or \, (۰,۱) \\ \mathrm{b} & (x_۱, x_۲) = (۱,۰) \\ c & (x_۱, x_۲) = (۱,۱) \end{cases}$$

که $a \neq b \neq c$ ■

۲۲- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$P(X_j = z_i) = p_i \ , i = 1,...,k \ , \ j = 1,...,n \ , \ p_i \in [0,1] \, , \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

یک آماره بسنده مینیمال برای $(p_1,..., p_k)$ به دست آورید.

حل:

تعریف می کنیم

Y_i = تعداد X_j هایی که مقدار Z_i را می گیرد

$$(Y_1, Y_2, ..., Y_k) \sim MB(n, p_1, p_2, ..., p_k) \qquad \sum_{i=1}^{k} y_i = n \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

پس

$$f(y_1, ..., y_k) = \frac{n!}{y_1! ... y_k!} p_1^{y_1} p_2^{y_2} ... p_k^{y_k}$$
$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} y_i!} \exp\{y_1 \ln \frac{p_1}{p_k} + y_2 \ln \frac{p_2}{p_k} + ... + y_{k-1} \ln \frac{p_{k-1}}{p_k} + n \ln p_k\}$$

توزیع فوق یک خانواده نمایی $k-1$ پارامتری با آماره بسنده مینیمال $(Y_1, Y_2, ..., Y_{k-1})$ است.

■

۲۳- فرض کنید (X, Y) دارای تابع احتمال به شکل زیر باشد

$$p_\theta(x, y) = \frac{n!}{x! y! (n-x-y)!} (\theta^2)^x (2\theta(1-\theta))^y ((1-\theta)^2)^{n-x-y}$$

$$x, y = 0,1, ..., n \quad , \quad x + y \le n$$

الف: نشان دهید $T = 2X + Y$ یک آماره بسنده برای θ است.

ب: آیا آماره T کامل است؟

توزیع فوق ، مدل " موازنه هاردی- واین برگ" نامیده می شود و در ژنتیک کاربرد دارد.

حل :

$$p_\theta(x, y) = \frac{n!}{x! y! (n-x-y)!} (\theta^2)^x (2\theta(1-\theta))^y ((1-\theta)^2)^{n-x-y}$$
$$= \frac{n!}{x! y! (n-x-y)!} (\frac{\theta}{1-\theta})^{2x} (\frac{\theta}{1-\theta})^y 2^y (1-\theta)^{2n}$$

$$= \frac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!} ۲^{y} (۱-\theta)^{۲n} \exp\{(۲x+y)\ln(\frac{\theta}{۱-\theta})\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده کامل $۲X+Y$ است.

■

۲٤- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \frac{g(x)}{h\theta)} \quad , \quad a(\theta) < x < b(\theta) \quad ; \ \theta \in \Theta$$

الف: اگر $a(\theta)$ و $b(\theta)$ توابع صعودی از θ باشند، یک آماره بسنده با کمترین بعد برای θ

به دست آورید.

ب: اگر $a(\theta)$ تابعی صعودی و $b(\theta)$ تابعی نزولی از θ باشند، یک آماره بسنده با کمترین بعد برای θبه دست آورید.

حل :

از قضیه فاکتورگیری استفاده کرده و آماره بسنده را پیدا می کنیم، برای این منظور توزیع توأم نمونه تصادفی را می نویسیم

$$f_\theta(x_۱,...,x_n) = \prod_{i=۱}^{n} f_\theta(x_i) = \frac{\prod_{i=۱}^{n} g(x_i)}{h^n(\theta)} u(b(\theta) - x_{(n)}) u(x_{(۱)} - a(\theta))$$

همانطور که مشاهده می شود آماره دوبعدی $T = (X_{(۱)}, X_{(n)})$ برای θ بسنده است.

اکنون می خواهیم ببینیم آیا آماره بسنده دیگری برای θ وجود دارد که دارای بعد کمتری از T باشد، چنانچه چنین آماره ای وجود داشته باشد باید تابعی از $X_{(1)}$, $X_{(n)}$ باشد، برای این منظور دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

(الف) $a(\theta)$ و $b(\theta)$ توابع صعودی از θ باشند، داریم

$$u(b(\theta)-x_{(n)})u(x_{(1)}-a(\theta))=1 \Leftrightarrow a(\theta)<x_{(1)}<x_{(n)}<b(\theta)$$
$$\Leftrightarrow \quad b^{-1}(x_{(n)})<\theta<a^{-1}(x_{(1)})$$

در نتیجه

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\prod_{i=1}^n g(x_i)}{h^n(\theta)}u(\theta-b^{-1}(x_{(n)})).u(a^{-1}(x_{(1)})-\theta)$$

همانطور که مشاهده می شود در این حالت مجدداً آماره بسنده دو بعدی $T=(X_{(1)},X_{(n)})$ (یا معادل آن $(T'=(a^{-1}(X_{(1)}),b^{-1}(X_{(n)}))$ به دست می آید و کمترین بعد آماره بسنده، برای θ، دو است.

(ب) $a(\theta)$ تابعی صعودی و $b(\theta)$ تابعی نزولی از θ باشند.

داریم

$$u(x_{(n)}-b(\theta))u(x_{(1)}-a(\theta))=1 \;\Leftrightarrow\; a(\theta)<x_{(1)}<x_{(n)}<b(\theta)$$
$$\Leftrightarrow \quad \theta<a^{-1}(x_{(1)}) \quad , \quad \theta<b^{-1}(x_{(n)})$$
$$\Leftrightarrow \quad \theta<t_1=\min[a^{-1}(x_{(1)}),b^{-1}(x_{(n)})]$$
$$\Leftrightarrow \quad u(t_1-\theta)=1$$

در نتیجه

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\prod_{i=1}^n g(x_i)}{h^n(\theta)}u(t_1-\theta)$$

همانطور که مشاهده می شود آماره بسنده یک بعدی $T_1 = \min[a^{-1}(X_{(1)}), b^{-1}(X_{(n)})]$ برای θ وجود دارد.

توجه : برای این مسأله دو حالت دیگر زیر را نیز می توان در نظر گرفت.

(ج) $a(\theta)$ و $b(\theta)$ توابع نزولی از θ باشند.

(د) $a(\theta)$ تابعی نزولی و $b(\theta)$ تابعی صعودی از θ باشد.

مشابه موارد (الف) و(ب) می توان نشان داد که برای قسمت (ج) آماره بسنده دوبعدی $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$ (یا معادل آن $(T' = (a^{-1}(X_{(1)}), b^{-1}(X_{(n)}))$ برای θ وجود دارد.

برای قسمت(د) آماره بسنده یك بعدی $T_2 = \max[a^{-1}(X_{(1)}), b^{-1}(X_{(n)})]$ به دست می آید.

■

۲۵- فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. در هر حالت، یک آماره بسنده برای θ به دست آورید.

(i) $f_\theta(x) = (\frac{x}{\theta})^{\theta A'(\theta)} \exp\{A(\theta) + B(x)\}$

(ii) $f_\theta(x) = \exp\{\frac{1}{x}[\theta A'(\theta) - A(\theta)] - A'(\theta) + B(x)\}$

حل:

i)

$$f_\theta(x) = (\tfrac{x}{\theta})^{\theta A'(\theta)} \exp\{A(\theta) + B(x)\}$$
$$= \exp\{A(\theta) - \theta A'(\theta)\ln\theta + B(x) + \theta A'(\theta)\ln x\}$$

تابع چگالی توام نمونه تصادفی عبارت است از

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$
$$=\exp\{nA(\theta)-n\theta A'(\theta)\ln\theta+\sum_{i=۱}^{n}B(x_i)+\theta A'(\theta)\sum_{i=۱}^{n}\ln x_i\}$$

توزیع فوق متعلق بـه خـانواده نمـایی یـک پـارامتری بـا آمـاره بـسنده کامـل $T=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ است.

ii)

$$f_\theta(x)=\exp\{\tfrac{1}{x}[\theta A'(\theta)-A(\theta)]-A'(\theta)+B(x)\}$$

تابع چگالی توأم نمونه تصادفی عبارت است از

$$f_\theta(x_۱,\ldots,x_n)=\exp\{[\theta A'(\theta)-A(\theta)]\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i}-nA'(\theta)+\sum_{i=۱}^{n}B(x_i)\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده کامل $T=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{X_i}$ است.

■

۲۶- فرض کنید X یک متغیر تـصادفی گسـسته بـا تـابع احتمـال زیـر باشـد. $۰<\theta<\frac{۱}{۲}$

x	-۱	۰	۱
$f_\theta(x)$	θ	$۱-۲\theta$	θ

الف: آماره بسنده مینیمال برای θ کدام است؟

ب: آیا X یک آماره کامل برای θ است؟

ج: آیا آماره به دست آمده در الف کامل است؟

حل:

تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است

$$f_\theta(x) = \theta^{|x|}(۱-۲\theta)^{۱-|x|} = (۱-۲\theta)\exp\{|x|\ln(\tfrac{\theta}{۱-۲\theta})\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری است.

(الف) $T=|X|$ آماره بسنده مینیمال برای θ است.

(ب) خیر، زیرا

$$E_\theta(X) = ۰ \qquad \forall \quad ۰ < \theta < \tfrac{۱}{۲}$$

اما

$$P_\theta(X = ۰) = ۱ - ۲\theta < ۱ \qquad \forall \quad ۰ < \theta < \tfrac{۱}{۲}$$

(ج) بله، آماره T کامل است.(طبق خواص خانواده نمایی)

■

۲۷- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(\theta,2\theta)$ باشد. نشان دهید $(X_{(1)},X_{(n)})$ یک آماره بسنده مینیمال برای θ است اما کامل نیست.

حل: *این مساله قبلاً حل شده است. سوال ۳ شماره iv را ملاحظه کنید.*

■

۲۸- خانواده توزیعهای $\{B(\theta,\frac{۱}{۲}) : \theta \in \Theta\}$ را در نظر گیرید.در هر یک از حالات زیر نشان دهید که خانواده توزیعهای تعیین شده کامل نیست و کلاس برآوردگرهای نااریب صفر را به دست آورید.

الف: $\Theta = \{۰,۲,۳,...\}$

ب: $\Theta = \{۰,۱,۳,...\}$

ج: $\Theta=\{۰,۱,۲,۴,...\}$

د: با توجه به سه مورد فوق، آیا می توانید کلاس برآوردگرهای نااریب صفر را برای حالت $\Theta-\{n\}$ حدس بزنید؟

حل:

(الف) فرض کنید $g(X)$ یک آماره دلخواه باشد بطوریکه برای هر $\theta\in\Theta=\{۰,۲,۳,...\}$ داشته باشیم $E_\theta[g(X)]=۰$.

بنابراین داریم

$$E_۰[g(X)]=۰ \quad\Rightarrow\quad g(۰)=۰$$
$$E_۲[g(X)]=۰ \quad\Rightarrow\quad g(۰)+\binom{۲}{۱}g(۱)+g(۲)=۰ \quad\Rightarrow g(۲)=-۲g(۱)=-\binom{۲}{۱}g(۱)$$

فرض کنید $g(۱)=a \quad , \quad a\neq ۰$

به همین ترتیب داریم

$$E_۳[g(X)]=۰ \quad\Rightarrow\quad g(۳)=۳a=\binom{۳}{۱}a$$

$$E_۴[g(X)]=۰ \quad\Rightarrow\quad g(۴)=-۴a=-\binom{۴}{۱}a$$

$$E_۵[g(X)]=۰ \quad\Rightarrow\quad g(۵)=۵a=\binom{۵}{۱}a$$

$$\vdots$$

در نتیجه، به سادگی داریم

$$g_a(x)=g(x)=\begin{cases} ۰ & x=۰ \\ (-۱)^{x-۱}a\binom{x}{۱} & x=۱,۲,... \end{cases}$$

بنابراین کلاس براوردگرهای نااریب صفر می شود: $\{g_a(x)\,|\,a\in R\,,\,a\neq ۰\}$

با توجه به اینکه $g(x)$ یک برآوردگر نااریب (غیر صفر) صفر برای خانواده $\{B(\theta,\frac{۱}{۲}) : \theta \in \Theta = \{۰,۲,۳,...\}\}$ است، بنابراین خانواده مذکور کامل نیست.

(ب) فرض کنید $g(X)$ یک آماره دلخواه باشد بطوریکه برای هر $\theta \in \Theta = \{۰,۱,۳,...\}$ داشته باشیم $E_\theta[g(X)] = ۰$.

بنابراین داریم

$$E_۰[g(X)] = ۰ \quad \Rightarrow \quad g(۰) = ۰$$

$$E_۱[g(X)] = ۰ \quad \Rightarrow \quad g(۱) = ۰$$

$$E_۳[g(X)] = ۰ \quad \Rightarrow \quad g(۰) + ۳g(۱) + ۳g(۲) + g(۳) = ۰ \quad \Rightarrow \quad g(۳) = -۳g(۲)$$

فرض کنید $g(۲) = a \quad , \quad a \neq ۰$

به همین ترتیب داریم

$$E_۴[g(X)] = ۰ \quad \Rightarrow \quad g(۴) = ۶a = \binom{۴}{۲}a$$

$$E_۵[g(X)] = ۰ \quad \Rightarrow \quad g(۵) = -۱۰a = -\binom{۵}{۲}a$$

$$E_۶[g(X)] = ۰ \quad \Rightarrow \quad g(۶) = ۱۵a = \binom{۶}{۲}a$$

$$\vdots$$

در نتیجه، به سادگی داریم

$$g_a(x) = g(x) = \begin{cases} ۰ & x = ۰,۱ \\ (-۱)^x a\binom{x}{۲} & x = ۲,۳,... \end{cases}$$

بنابراین کلاس برآوردگرهای نااریب صفر می شود: $\{g_a(x) \mid a \in R , a \neq ۰\}$

با توجه به اینکه $g(x)$ یک برآوردگر نااریب (غیر صفر) صفر برای خانواده $\{B(\theta,\frac{۱}{۲}):\theta\in\Theta=\{۰,۱,۳,...\}\}$ است، بنابراین خانواده مذکور کامل نیست.

(ج) مشابه قسمت (الف) و(ب) به سادگی می توان کلاس برآوردگرهای نااریب صفررا به صورت زیر به دست آورد.

$$g_a(x)=g(x)=\begin{cases} ۰ & x=۰,۱,۲ \\ (-۱)^{x-۱}a\binom{x}{۳} & x=۳,۴,... \end{cases}$$

بنابراین کلاس برآوردگرهای نااریب صفر می شود: $\{g_a(x)\,|\,a\in R\,,\,a\neq ۰\}$

با توجه به اینکه $g(x)$ یک برآوردگر نااریب (غیر صفر) صفر برای خانواده $\{B(\theta,\frac{۱}{۲}):\theta\in\Theta=\{۰,۱,۲,۴,...\}\}$ است، بنابراین خانواده مذکور کامل نیست.

(د) اگر n فرد باشد، کلاس برآوردگرهای نااریب صفر می شود:

$$g_a(x)=g(x)=\begin{cases} ۰ & x=۰,۱,...,n-۱ \\ (-۱)^{x-۱}a\binom{x}{n} & x=n,n+۱,... \end{cases}$$

و اگر n زوج باشد، کلاس براوردگرهای نااریب صفر می شود:

$$g_a(x)=g(x)=\begin{cases} ۰ & x=۰,۱,...,n-۱ \\ (-۱)^{x}a\binom{x}{n} & x=n,n+۱,... \end{cases}$$

■

۲۹- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ باشد. با تعریف $M_n=\frac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})$ و $R_n=(X_{(n)}-X_{(1)})$، نشان دهید آماره (M_n,R_n) مستقل از بردار $(\frac{X_2-X_1}{X_n-X_1},...,\frac{X_{n-1}-X_1}{X_n-X_1})$ است.

حل :

ابتدا مسأله را پارامتری کرده وسپس از قضیه باسو استفاده می کنیم. می دانیم در توزیع $U(\theta_1,\theta_2)$، آماره $(X_{(1)},X_{(n)})$ بسنده کامل برای (θ_1,θ_2) است. همینطور هر تابع یک به یک از آن مانند تابع (M_n,R_n) نیز بسنده کامل است.

از طرفی بردار $(\frac{X_2-X_1}{X_n-X_1},...,\frac{X_{n-1}-X_1}{X_n-X_1})$ نیز یک آماره فرعی است. پس طبق قضیه باسو آماره (M_n,R_n) از بردار فوق مستقل است ($\forall\theta_1<\theta_2$)

اکنون به ازای $\theta_1=-\frac{1}{2}$ و $\theta_2=\frac{1}{2}$ نیز این استقلال برقرار است.

توجه:

$$(\frac{X_2-X_1}{X_n-X_1},...,\frac{X_{n-1}-X_1}{X_n-X_1})=(\frac{Z_2-Z_1}{Z_n-Z_1},...,\frac{Z_{n-1}-Z_1}{Z_n-Z_1})$$

که در بالا $Z_i=\frac{X_i-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$ ، $i=1,2,...,n$، و به آسانی دیده می شود که $Z_i\sim U(0,1)$.

پس توزیع بردار $(\frac{Z_2-Z_1}{Z_n-Z_1},...,\frac{Z_{n-1}-Z_1}{Z_n-Z_1})$ به پارامتر بستگی ندارد و بنابراین یک آماره فرعی است.

■

۳۰- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$، $\mu \in R$ و $\sigma > ۰$ باشد. با تعریف $T_1(X) = \bar{X}$ و $T_۲(X) = \sum_{i=۱}^{n} a_i X_i$، $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$، نشان دهید $T_۱$ و T_2 مستقل از هم هستند.

حل : در توزیع $N(\mu,\sigma^۲)$ آماره $(\bar{X},S^۲)$ بسنده کامل برای پارامتر $(\mu,\sigma^۲)$ است.

از طرفی برای هر σ^2 ثابت، $\bar{X}$ یک آماره بسنده کامل برای μ است و توزیع T_2 که $N(۰,\sigma^۲\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲)$ است به μ بستگی ندارد. بنابر قضیه باسو برای هر σ^2 ثابت و برای هر μ ، $T,\bar{X}$ مستقل اند. در نتیجه برای هر μ و هر σ^2 نتیجه می شود که $T,\bar{X}$ مستقل از هم هستند.

■

۳۱- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(۰,۱)$ باشند. نشان دهید $\bar{X}$ و $X_{(n)} - X_{(۱)}$ مستقل از هم هستند.

حل:

می دانیم در توزیع $N(\mu,۱)$، $\bar{X}$ آماره بسنده کامل برای μ است. همینطور $X_{(n)} - X_{(۱)}$ دارای توزیعی است که به μ بستگی ندارد. طبق قضیه باسو $\bar{X}$ و $X_{(n)} - X_{(۱)}$ برای هر μ مستقل از هم هستند. بنابراین برای $\mu = ۰$ نیز ، $\bar{X}$ و $X_{(n)} - X_{(۱)}$ از هم مستقل اند.

توجه : با تعریف $Z_i = X_i - \mu$ ، $i = ۱,...,n$ ، ملاحظه می شود که توزیع Z_i به μ بستگی ندارد. بنابراین آماره $Z_{(n)} - Z_{(۱)}$ فرعی است. از طرف

$$X_{(n)} - X_{(۱)} = Z_{(n)} - Z_{(۱)}$$

پس $X_{(n)} - X_{(۱)}$ نیز یك آماره فرعی است.

■

۳۲- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(۰,۱)$ باشد. مطلوب است محاسبه $E(\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}})$.

حل:

می دانیم در توزیع $U(۰,\theta)$، $X_{(n)}$ آماره بسنده کامل برای θ است. از طرفی توزیع $\frac{X_{(۱)}}{X_{(n)}}$ به θ بستگی ندارد. طبق قضیه باسو، $X_{(n)}$ و $\frac{X_{(۱)}}{X_{(n)}}$ به ازای هر $\theta > 0$ مستقل از هم هستند. به ازای $\theta = 1$ نیز مستقل از هم می شوند.

بنابراین

$$E_۱(X_{(۱)}) = E_۱(\tfrac{X_{(۱)}}{X_{(n)}}.X_{(n)}) = E_۱(\frac{X_{(۱)}}{X_{(n)}})E_۱(X_{(n)})$$

$$\Rightarrow \qquad E_۱(\frac{X_{(۱)}}{X_{(n)}}) = \frac{E_۱(X_{(۱)})}{E_۱(X_{(n)})} = \frac{\frac{۱}{n+۱}}{\frac{n}{n+۱}} = \frac{۱}{n}$$

توجه :

$U(۰,۱) \sim \frac{X_i}{\theta} = Y_i$ ، $i = ۱,۲,...,n$ ، پس توزیع $Y_{(i)}$ بـه θ بـستگی نـدارد بنـابراین توزیع $\frac{X_{(۱)}}{X_{(n)}} = \frac{Y_{(۱)}}{Y_{(n)}}$ نیز بستگی به θ ندارد.

■

۳۳- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Beta(\theta+1,1)$ باشد. مطلوب است محاسبه $E[\frac{\ln X_۱}{\sum \ln X_i}]$.

حل :

$$f_\theta(x)=(\theta+۱)x^\theta \quad \theta>۰ \quad , \quad ۰<x<۱$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری است و آماره $T=\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i$ بسنده کامل برای θ است.

از طرفی توزیع $\frac{\ln X_۱}{\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i}$ به θ بستگی ندارد، بنابراین طبق قضیه باسو $\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i$ مستقل از $\frac{\ln X_۱}{\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i}$ است. در نتیجه

$$E(\ln X_۱)=E(\frac{\ln X_۱}{\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i}.\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i)=E(\frac{\ln X_۱}{\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i})E(\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i)$$

$$\Rightarrow \qquad E(\frac{\ln X_۱}{\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i})=\frac{E(\ln X_۱)}{E(\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i)}=\frac{۲}{۲n}=\frac{۱}{n}$$

توجه:

می دانیم $-۲(\theta+۱)\ln X_۱ \sim \chi^۲_{(۲)}$ است (فصل اول قسمت (**۲۲**-ب)).

بنابراین توزیع $\frac{-۲(\theta+۱)\ln X_۱}{-\sum_{i=۱}^{n}۲(\theta+۱)\ln X_i}$ به θ بستگی ندارد، در نتیجه آماره $\frac{\ln X_۱}{\sum_{i=۱}^{n}\ln X_i}$ فرعی است.

■

۳٤- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\lambda)$ باشد. با تعریف $T=\frac{X_1}{X_1+X_2}$، $Q=\frac{X_1-X_2}{X_1+X_2}$، $R=\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ و $F=\frac{X_1}{X_2}$، نشان دهید جفت آماره های T و $\sum_{i=1}^{n} X_i$، Q و $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ، R و $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ، F و $\sum_{i=1}^{n} X_i$ مستقل از هم هستند.

حل :

در توزیع $E(\lambda)$ ، $\sum_{i=1}^{n} X_i$ آماره بسنده کامل است. همینطور آماره های T و Q و R و F آماره های فرعی هستند. (مراجعه کنید به فصل اول به ترتیب شماره های (۹- و) ،(۹- ز) ، (۱۱-الف) و(۹-ح))

طبق قضیه باسو $\sum_{i=1}^{n} X_i$ از آماره های T و Q و R و F مستقل است.

■

۳۵- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\mu,\lambda)$ باشد. نشان دهید آماره های $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ مستقل از هم هستند.

حل:

در توزیع $E(\mu,\lambda)$ با λ ثابت، $X_{(1)}$ آماره بسنده کامل است از طرفی توزیع $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ به μ بستگی ندارد (فصل اول قسمت (۱۰-ب)) .

بنابر قضیه باسو برای هر λ ثابت و هر μ، $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ مستقل ازهم هستند. در نتیجه برای هر μ و هر $\lambda > 0$ نتیجه می شود که $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ مستقل ازهم هستند.

توجه:

توسط قسمت (۱۰–الف) از فصل اول داریم

$$f_{X_{(1)}}(x) = n\lambda e^{-n\lambda(x-\mu)} \qquad x \ge \mu \quad , \quad \lambda > 0 \quad , \quad \mu \in R$$

λ را معلوم فرض کنید و $g(X_{(1)})$ را تابع دلخواهی از $X_{(1)}$ فرض کنید بطوریکه

$$E_{\mu} g(X_{(1)}) = 0$$

پس

$$\int_{\mu}^{\infty} g(x) n\lambda e^{-n\lambda(x-\mu)} dx = 0$$

یا

$$\int_{0}^{\infty} g(x+\mu) n\lambda e^{-n\lambda x} dx = 0$$

در نتیجه بنابر خاصیت یکتایی تبدیل های لاپلاس

$$g(x+\mu) = 0 \qquad \forall x > 0$$

یا

$$g(t) = 0 \qquad \forall t \ge \mu$$

بنابراین $X_{(1)}$ کامل است.

■

۳۶- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $Pa(\alpha,\beta)$ باشد. نشان دهید آماره های $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{X_i}{X_{(1)}}$ مستقل از هم هستند.

حل:

در توزیع $Pa(\alpha,\beta)$ با α ثابت، $X_{(1)}$ آماره بسنده کامل برای β است. از طرفی توزیع $\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{X_i}{X_{(1)}})$ به β بستگی ندارد. (به فصل اول قسمت (۱۹- د) مراجعه شود.)

بنابر قضیه باسو برای α ثابت وهر $\beta > 0$ ، $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{X_i}{X_{(1)}})$ از هم مستقل اند. در نتیجه برای هر $\beta > 0$ و $\alpha > 0$ نتیجه می شود که $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{X_i}{X_{(1)}})$ مستقل از هم هستند.

■

۳۷- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n از توزیع زیر باشد. در هر یک از موارد زیر آماره بسنده مینیمال توام برای پارامترهای مجهول را به دست آورید.

i) $U(\mu-\sigma,\mu+\sigma)\ ;\ \mu\in R\ ,\ \sigma>0$

ii) $U(\theta_1,\theta_2)\ ;\ -\infty<\theta_1<\theta_2<\infty$

iii) $\Gamma(\alpha,\beta)\ ;\ \alpha>0,\beta>0$

iv) $Beta(\alpha,\beta)\ ;\ \alpha>0,\beta>0$

v) $IG(\mu,\lambda)\ ;\ \mu>0,\lambda>0$

vi) $C(\theta,\sigma)\ ;\ \theta\in R,\sigma>0$

vii) $LN(\mu,\sigma^2)\ ;\ \mu\in R,\sigma>0$

viii) $E(\mu,\lambda)\ ;\ \mu\in R,\lambda>0$

حل:

i) $f_{\mu,\sigma}(x)=\frac{۱}{۲\sigma} \qquad \mu-\sigma<x<\mu+\sigma$

تابع چگالی توأم نمونه تصادفی به صورت زیر است

$f_{\mu,\sigma}(x_۱,...,x_n)=(۲\sigma)^{-n}u(\mu+\sigma-x_{(n)})u(x_{(۱)}-\mu+\sigma)$

به سادگی توسط قضیه دسته بندی نیمن دیده می شود که آماره $T(\underline{X})=(X_{(۱)},X_{(n)})$ بسنده است. با استفاده ازقضیه صفحه ۷۰ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم آماره T بسنده مینیمال نیز است.

با فرض $(\mu,\sigma)=(۰,۱)$ داریم

$$\frac{f_{\mu,\sigma}(\underline{x})}{f_{۱,۰}(\underline{x})}=\frac{\sigma^{-n}u(\mu+\sigma-x_{(n)})u(x_{(۱)}-\mu+\sigma)}{u(۱-x_{(n)})u(x_{(۱)}+۱)}$$

نسبت فوق تنها از طریق $(x_{(۱)},x_{(n)})$ به $\underline{x}$ بستگی دارد. بنابراین آماره بسنده $T(\underline{X})=(X_{(۱)},X_{(n)})$، بسنده مینیمال نیز است.

توجه:

آماره بسنده مینیمال T ، کامل نیز است. برای اثبات از شماره **(ii)** استفاده کنید.

ii) $f_{\theta_۱,\theta_۲}(x)=\frac{۱}{\theta_۲-\theta_۱} \qquad \theta_۱<x<\theta_۲$

تابع چگالی توأم نمونه تصادفی به صورت زیر است

$f_{\theta_۱,\theta_۲}(x_۱,...,x_n)=(\theta_۲-\theta_۱)^{-n}u(\theta_۲-x_{(n)})u(x_{(۱)}-\theta_۱)$

به سادگی توسط قضیه دسته بندی نیمن دیده می شود که آماره $T(\underline{X})=(X_{(۱)},X_{(n)})$ بسنده است. توسط دستور العمل صفحه ۷۵ کتاب آمار ریاضی نشان می دهیم، آماره T بسنده مینیمال نیز است.

گام اول

$$\Theta_{\underline{x}} = \{(\theta_۱,\theta_۲) \mid \theta_۱ < x_{(۱)} < x_{(n)} < \theta_۲\} = (-\infty, x_{(۱)}) \times (x_{(n)}, +\infty)$$

گام دوم

فرض کنید $\underline{\theta} = (\theta_۱,\theta_۲)$

$$\underline{x} \sim \underline{y} \iff \begin{cases} \Theta_{\underline{x}} = \Theta_{\underline{y}} \\ \dfrac{f_{\underline{\theta}}(\underline{y})}{f_{\underline{\theta}}(\underline{x})} = k \quad ; \quad \theta \in \Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x_{(۱)}, x_{(n)}) = (y_{(۱)}, y_{(n)}) \\ \dfrac{u(\theta_۲ - y_{(n)})u(y_{(۱)} - \theta_۱)}{u(\theta_۲ - x_{(n)})u(x_{(۱)} - \theta_۱)} = k \qquad ; \qquad \underline{\theta} \in \Theta_{\underline{x}} \end{cases}$$

$$\iff (x_{(۱)}, x_{(n)}) = (y_{(۱)}, y_{(n)})$$

بنابراین آماره بسنده $T(\underline{X}) = (X_{(۱)}, X_{(n)})$، بسنده مینیمال است.

توجه:

آماره T کامل است.

اثبات: فرض کنید $h(X_{(۱)}, X_{(n)})$ یك برآورد گر ناااریب صفر باشد، یعنی

$$\forall \underline{\theta} \in \Theta \qquad E_{\underline{\theta}}[h(X_{(۱)}, X_{(n)})] = ۰$$

پس

$$۰ = \iint h(x_{(۱)}, x_{(n)}) f_{X_{(۱)},X_{(n)}}(x_{(۱)}, x_{(n)}) dx_{(۱)} dx_{(n)}$$
$$= \int_{\theta_۱}^{\theta_۲} \int_{\theta_۱}^{x_{(n)}} h(x_{(۱)}, x_{(n)}) n(n-۱)(x_{(n)} - x_{(۱)})^{n-۲} \frac{۱}{(\theta_۲ - \theta_۱)^n} dx_{(۱)} dx_{(n)} \qquad \forall \theta_۱ < \theta_۲$$

بنابراین

$$\cdot = \int_{\theta_۱}^{\theta_۲} \int_{\theta_۱}^{x_{(n)}} h(x_{(۱)}, x_{(n)})(x_{(n)} - x_{(۱)})^{n-۲} dx_{(۱)} dx_{(n)} \qquad \forall \theta_۱ < \theta_۲$$

از دو طرف تساوی فوق نسبت به $\theta_۲$ مشتق می گیریم، داریم

$$\int_{\theta_۱}^{\theta_۲} h(x_{(۱)}, \theta_۲)(\theta_۲ - x_{(۱)})^{n-۲} dx_{(۱)} = \cdot \qquad \forall \theta_۱ < \theta_۲$$

اکنون از دو طرف تساوی فوق نسبت به $\theta_۱$ مشتق می گیریم، داریم

$$-h(\theta_۱, \theta_۲)(\theta_۲ - \theta_۱)^{n-۲} dx_{(۱)} = \cdot \qquad \forall \theta_۱ < \theta_۲$$

یا

$$h(\theta_۱, \theta_۲) = \cdot \qquad \forall \theta_۱ < \theta_۲$$

درنتیجه

$$h(x_{(۱)}, x_{(n)}) = \cdot \qquad \forall x_{(۱)} < x_{(n)}$$

پس آماره توام $T(X) = (X_{(۱)}, X_{(n)})$ کامل است.

iii) $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-۱} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad \alpha, \beta > \cdot \quad , \quad x > \cdot$

$$= \frac{۱}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \exp\{-\tfrac{x}{\beta} + (\alpha - ۱)\ln x\}$$

$$f_{\alpha,\beta}(x_۱, \ldots, x_n) = (\frac{۱}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}})^n \exp\{-\tfrac{۱}{\beta}\sum_{i=۱}^{n} x_i + (\alpha - ۱)\sum_{i=۱}^{n} \ln x_i\}$$

توزیع متعلق به خانواده نمایی ۲ پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T = (\sum_{i=۱}^{n} X_i, \sum_{i=۱}^{n} \ln X_i)$ است. چون بعد فضای پارامتر با بعد آماره بسنده یکی است پس آماره T کامل نیز است.

iv) $f_{\alpha,\beta}(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad 0<x<1\ ,\ \alpha,\beta>0$ (β,α مجهول)

$$=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\exp\{(\alpha-1)\ln x+(\beta-1)\ln(1-x)\}$$

$$f_{\alpha,\beta}(x_1,...,x_n)=\frac{1}{[B(\alpha,\beta)]^n}\exp\{(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی دو پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i,\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i))$ است. چون بعد فضای پارامتر با بعد آماره بسنده یکی است پس آماره T کامل نیز است.

v) $f_{\mu,\lambda}(x)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\} \quad x>0\ ,\ \mu,\lambda>0$

$$=\sqrt{\tfrac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\{-\frac{\lambda x}{2\mu^2}-\frac{\lambda}{2x}+\frac{\lambda}{\mu}\}$$

$$f_{\mu,\lambda}(x_1,...,x_n)=(\frac{\lambda}{2\pi})^{\frac{n}{2}}(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\frac{3}{2}})^{-1}\exp\{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+\frac{n\lambda}{\mu}\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی دو پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i})$ است.

با توجه به اینکه بعد فضای پارامتر با بعد آماره بسنده برابر است، آماره T کامل نیز است.

vi)

در سوال ۳ قسمت x حل شده است.

vii)

در سوال ۳ قسمت ix حل شده است.

viii)

در مثال ۲-۳۶ صفحه ۷۷ حل شده است.

■

۳۸- فرض کنید $(X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ باشد.

الف: آماره بسنده مینیمال توأم برای پارامترهای مجهول را به دست آورید.

ب: اگر $\mu_1=\mu_2$ باشد، آماره بسنده مینیمال توأم برای پارامترهای مجهول را به دست آورده ، نشان دهید که کامل نیست.

حل:

فرض کنید $\underline{\theta}=(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$f_{\underline{\theta}}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{1}{\sigma_1^2}x^2-\frac{2\mu_1}{\sigma_1^2}x-\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}xy+\frac{\rho\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}x+\frac{\rho\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}y$$
$$+\frac{1}{\sigma_2^2}y^2-\frac{2\mu_2}{\sigma_2^2}y+h(\underline{\theta})]\}$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{\rho\mu_2}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{2\mu_1}{\sigma_1^2})x+(\frac{\rho\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{2\mu_2}{\sigma_2^2})y+\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}$$
$$+(\frac{-2\rho}{\sigma_1\sigma_2})xy+h(\underline{\theta})]\}$$

که در آن $h(\underline{\theta})$ تابعی تنها از $\underline{\theta}$ است.

(الف)

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی ۵ پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2,\sum_{i=1}^{n}Y_i^2,\sum_{i=1}^{n}X_iY_i)$ است.

با توجه به اینکه بعد فضای پارامتر با بعد آماره بسنده برابر است بنابراین آماره T کامل است.

(ب)

چنانچه $\mu_۱ = \mu_۲$ باشد، $\underline{\theta} = (\mu, \sigma_۱, \sigma_۲, \rho)$ و داریم

$$f_{\underline{\theta}}(x,y) = \frac{۱}{۲\pi\sigma_۱\sigma_۲\sqrt{۱-\rho^۲}} \exp\{-\frac{۱}{۲(۱-\rho^۲)}[x\mu(\frac{\rho}{\sigma_۱\sigma_۲} - \frac{۲}{\sigma_۱^۲}) + y\mu(\frac{\rho}{\sigma_۱\sigma_۲} - \frac{۲}{\sigma_۲^۲})]$$

$$+ \frac{x^۲}{\sigma_۱^۲} + \frac{y^۲}{\sigma_۲^۲} + xy(-\frac{۲\rho}{\sigma_۱\sigma_۲}) + h(\underline{\theta})\}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی ٤ پارامتری با آماره بسنده مینیمال $T = (\sum_{i=۱}^{n} X_i, \sum_{i=۱}^{n} Y_i, \sum_{i=۱}^{n} X_i^۲, \sum_{i=۱}^{n} Y_i^۲, \sum_{i=۱}^{n} X_i Y_i)$ است.

آماره T کامل نیست زیرا مثلا

$$E_{\underline{\theta}}(\overline{X} - \overline{Y}) = \mu - \mu = ۰ \qquad \forall \underline{\theta} \in \Theta$$

اما برای هر $\underline{\theta} \in \Theta$ $\quad P_{\underline{\theta}}(\overline{X} = \overline{Y}) = ۰ < ۱$.

■

مسائل فصل سوم

روشهای برآوردیابی

۲- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تـایی از توزیـع زیـر باشـد. در صورت وجود، برآوردگر MME و MLE پارامتر مجهول را بدست آورید.

i) $U(\{1,2,\ldots,\theta\})\ ,\ \theta\in\{1,2,\ldots,\theta_0\}\quad ,\quad \theta_0\in N$

ii) $B(1,\theta)\ ,\ \theta\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$

iii) $B(1,\theta)\ ,\ \theta\in[0,\frac{1}{2}]$

iv) $Beta(1,\theta)\ ,\ \theta>0$

v) $N(0,\theta)\ ,\ 0<\theta<b$ $\quad b$ معلوم

حل:

i) $f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}\qquad x=1,2\ldots,\theta\qquad \theta\in\{1,2,\ldots,\theta_0\}\qquad \theta_0\in N$

- برآورد MM

به سادگی داریم

$$\mu_1=E(X)=\frac{\theta+1}{2}$$

بنابراین از حل معادله $\mu_1 = M_1(=\overline{X})$ برآوردگر گشتاوری به صورت زیر به دست می آید.

$$\tilde{\theta} = 2\overline{X} - 1$$

- برآورد ML

تابع درستنمایی به صورت زیر است

$$L(\theta) = \theta^{-n} u(\theta - x_{(n)})$$

$L(\theta)$ تابع نزولی نسبت به θ است. وقتی ماکزیمم می شود که θ کمترین مقدار خود را که $x_{(n)}$ است، بگیرد، بنابراین

$$\hat{\theta} = X_{(n)}$$

ii) $f_\theta(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \qquad \theta \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

- براورد MM

می دانیم $\mu_1 = E(X) = \theta$

از حل معادله $\mu_1 = M_1$ داریم $\tilde{\theta} = \overline{X}$

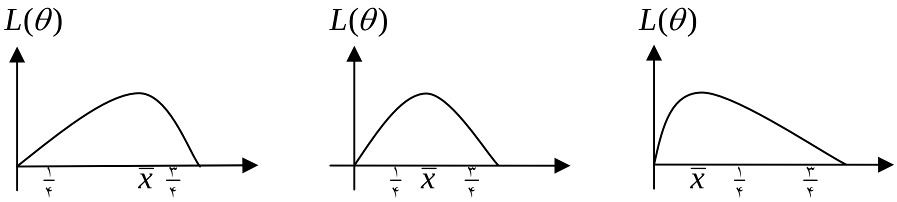
- برآورد ML

تابع درستنمایی می شود

$$L(\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

چنانچه $L(\theta)$ را نسبت به θ ماکزیمم کنیم نقطه ماکزیمم $\bar{x}$ می شود ($0 \le \bar{x} \le 1$). با توجه به محدودیت روی فضای پارامتر و منحنی تابع $L(\theta)$ (شکلهای زیر ملاحظه شوند) برآورد ML به صورت زیر به دست می آید:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \overline{X} \le \frac{1}{4} \\ \overline{X} & \frac{1}{4} < \overline{X} < \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \le \overline{X} \end{cases}$$



iii)

حل این قسمت مشابه قسمت ii می باشد.

برآورد MM آن به صورت $\tilde{\theta} = \overline{X}$ و

برآورد ML آن به صورت $\hat{\theta} = \begin{cases} \overline{X} & \overline{X} \leq \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \overline{X} > \frac{۱}{۲} \end{cases}$ **است.**

iv) $f_\theta(x) = \theta(۱-x)^{\theta-۱} \quad , \quad \theta > ۰ \quad , \quad ۰ < x < ۱$

- برآورد MM

به سادگی داریم

$$\mu_۱ = E(X) = \frac{۱}{۱+\theta}$$

از حل معادله $\mu_۱ = M_۱$ برآوردگر گشتاوری می شود:

$$\tilde{\theta} = \frac{۱}{\overline{X}} - ۱$$

- برآورد ML

تابع درستنمایی می شود

$$L(\theta) = \theta^n \prod_{i=۱}^{n} (۱-x_i)^{\theta-۱}$$

با استفاده از مشتق گیری از تابع درستنمایی (یا لگاریتم آن) بـرآورد درسـتنمایی را به دست می آوریم

$$l(\theta)=\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)[\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)]$$

$$l'(\theta)=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)$$

$$l'(\theta)=0 \quad\Rightarrow\quad \theta=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)}$$

$$l''(\theta)=\frac{-n}{\theta^2}<0$$

بنابراین نقطه $\theta=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)}$ **نقطه ماکزیمم است. پس برآوردگر ML می شود**

$$\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i)}$$

v) $f_\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad 0<\theta<b \quad$ b معلوم،

- برآورد MM

به سادگی داریم $\mu_2=E(X^2)=\theta$

از حل معادله $\mu_2=M_2$ **برآورد گشتاوری می شود**

$$\tilde{\theta}=\overline{X}^2$$

- برآورد ML

تابع درستنمایی می شود

$$L(\theta)=(2\pi\theta)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n\overline{x^2}}{2\theta}}$$

داریم

$$l(\theta)=\ln L(\theta)=-\frac{n}{۲}\ln(۲\pi\theta)-\frac{n\overline{x^{۲}}}{۲\theta}$$

$$l'(\theta)=-\frac{n}{۲\theta}+\frac{n\overline{x^{۲}}}{۲\theta^{۲}}$$

$$l'(\theta)=۰ \quad \Rightarrow \quad \theta=\overline{x^{۲}}$$

$$l''(\theta)=(\frac{n}{۲\theta^{۲}}-\frac{n\overline{x^{۲}}}{\theta^{۳}})|_{\theta=\overline{x^{۲}}} \quad <۰$$

اکنون با توجه به محدودیت $۰<\theta<b$ ، برآورد گر درستنمایی ماکزیمم می شود

$$\hat{\theta}=\begin{cases}\overline{X^{۲}} & \overline{X^{۲}}\le b\\ b & \overline{X^{۲}}>b\end{cases}$$

■

۳- فرض کنید $X_{۱},...,X_{n}$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. در صورت وجود MME و MLE پارامتر نامعلوم θ را به دست آورید.

i) $$f_{\theta}(x)=\begin{cases}\frac{۱-\theta}{۲} & x=y_{۱}\\ \frac{۱}{۲} & x=y_{۲}\\ \frac{\theta}{۲} & x=y_{۳}\end{cases} \qquad ۰\le\theta\le۱$$

ii) $f_{\theta}(x)=\frac{۱}{۲}(۱-e^{-\theta})^{-۱}\exp\{-|x|\}$, $|x|<\theta , \theta>۰$

iii) $f_{\theta}(x)=\theta(۱-\theta)^{-۱}x^{\frac{۲\theta-۱}{۱-\theta}}$, $۰<x\le۱$, $\theta\in(\frac{۱}{۲},۱)$

iv) $f_{\theta}(x)=\beta\exp\{-(\theta+\beta x)\}[۱+\exp\{-(\theta+\beta x)\}]^{-۲}$, $x\in R , \theta\in R$,
β معلوم

v) $f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^۲} \exp\{-\frac{x}{\theta}\} \quad , \quad x > ۰, \theta > ۰$

حل:

i)

- برآورد MM

$$\mu_۱ = E(X) = \frac{۱-\theta}{۲} y_۱ + \frac{۱}{۲} y_۲ + \frac{\theta}{۲} y_۳ = \frac{\theta}{۲}(y_۳ - y_۱) + \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲)$$

از حل معادله $\mu_۱ = M_۱$ **داریم**

$$\tilde{\theta} = \frac{۲\overline{X} - (y_۱ + y_۲)}{y_۳ - y_۱}$$

- برآورد ML

فرض کنید N_i، $i = ۱,۲,۳$، **تعداد دفعاتی باشد که** y_i **در نمونه مشاهده شده است.**

بدیهی است که

$$(N_۱, N_۲, N_۳) \sim Mb(n, \frac{۱-\theta}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{\theta}{۲})$$

پس

$$L(\theta) = f_\theta(n_۱, n_۲, n_۳) = \frac{n!}{n_۱! n_۲! n_۳!} (\frac{۱-\theta}{۲})^{n_۱} (\frac{۱}{۲})^{n_۲} (\frac{\theta}{۲})^{n_۳}$$

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln \frac{n!}{n_۱! n_۲! n_۳!} + (n_۱ + n_۲ + n_۳) \ln(\frac{۱}{۲}) + n_۱ \ln(۱-\theta) + n_۳ \ln\theta$$

$$l'(\theta) = \frac{-n_۱}{۱-\theta} + \frac{n_۳}{\theta}$$

$$l'(\theta) = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\theta} = \frac{N_۳}{N_۱ + N_۳}$$

توجه کنید که $\ell''(\theta)\big|_{\hat{\theta}} < ۰$.

ii)

- برآورد MM

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{2}(1-e^{-\theta})^{-1} x e^{-|x|} dx = \frac{1}{2}(1-e^{-\theta})^{-1} \int_{-\theta}^{\theta} x e^{-|x|} dx = 0$$

توجه کنید که تابع $g(x) = xe^{-|x|}$ تابعی فرد است.

چون $\mu_1 = 0$ است بنابراین از μ_2 استفاده می کنیم.

$$\mu_2 = E(X^2) = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{1}{2}(1-e^{-\theta})^{-1} x^2 e^{-|x|} dx$$

تابع داخل انتگرال زوج است پس

$$= (1-e^{-\theta})^{-1} \int_{0}^{\theta} x^2 e^{-x} dx$$

با استفاده از دو بار انتگرال گیری جزء به جز

$$= \frac{\theta^2 - 2\theta - 2 + 2e^{\theta}}{e^{\theta} - 1}$$

از برابری $\mu_2 = \overline{X^2}$ داریم

$$\frac{(\theta-1)^2 + 2e^{\theta} - 3}{e^{\theta} - 1} = \overline{X^2}$$

همانطور که دیده می شود عبارت صریحی برای $\tilde{\theta}$ به دست نمی آید.

به ازای یک نمونه تصادفی برآورد گشتاوری از حل معادله بالا توسط روشهای تکرار عددی به دست می آید.

- برآورد ML

تابع درستنمایی می شود

$$L(\theta) = 2^{-n}(1-e^{-\theta})^{-n} e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i|} \prod_{i=1}^{n} I_{(-\theta,\theta)}(x_i)$$

از طرفی داریم

$$\prod_{i=1}^{n} I_{(-\theta,\theta)}(x_i) = 1 \iff -\theta < x_{(1)} < x_{(n)} < \theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta > -x_{(1)} \quad , \quad \theta > x_{(n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta > \max(-x_{(1)}, x_{(n)}) = t$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta > \max(|x_{(1)}|, |x_{(n)}|) = t$$

$$\Leftrightarrow \quad u(\theta - t) = 1$$

(با توجه به اینکه $x_{(1)} < x_{(n)}$ است داریم

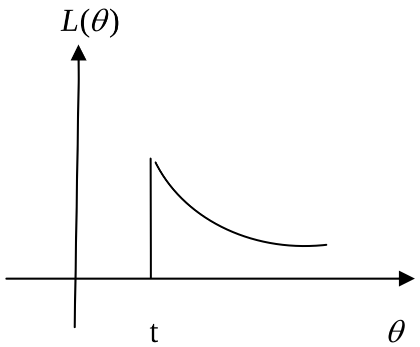
$$\max(-x_{(1)}, x_{(n)}) = \max(|x_{(1)}|, |x_{(n)}|))$$

درنتیجه

$$L(\theta) = 2^{-n}(1 - e^{-\theta})^{-n} e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i|} u(\theta - t) \qquad \theta > 0, t > 0$$

اکنون با توجه به منحنی تابع $L(\theta)$ در شکل زیر، بدیهی است که

$$\hat{\theta} = T = \max(|X_{(1)}|, |X_{(n)}|)$$



iii)

- برآورد MM

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{\theta}{1-\theta} - 1} \qquad 0 < x \le 1 \quad \theta \in (\frac{1}{2}, 1)$$

توزیع فوق $Beta(\frac{\theta}{1-\theta}, 1)$ است و داریم

$$\mu_1 = E(X) = \theta$$

از برابری $\mu_1 = M_1$ برآورد گر گشتاوری به صورت زیر حاصل می شود

$$\tilde{\theta} = \overline{X}$$

- برآورد ML

$$L(\theta) = \theta^n (1-\theta)^{-n} (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{\theta}{1-\theta}-1}$$

$$l(\theta) = n\ln\theta - n\ln(1-\theta) + (\frac{\theta}{1-\theta} - 1)\ln\prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$l'(\theta) = \frac{n}{\theta} + \frac{n}{1-\theta} + \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$l'(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{n}{n - \sum_{i=1}^{n}\ln X_i} = \frac{1}{1 - \overline{\ln X}}$$

iv)

- برآورد MM

$$\mu_1 = E(X) = \beta\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{e^{-(\theta+\beta x)}}{[1+e^{-(\theta+\beta x)}]^2} dx$$

تغییر متغیر $u = \theta + \beta x$ را در نظر می گیریم

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{u-\theta}{\beta}) \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} u \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du - \frac{\theta}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du$$

انتگرال دوم سمت راست بالا برابربا یک است، زیرا عبارت داخل انتگرال یک تابع چگالی لجستیک است.

اکنون انتگرال اول در بالا را محاسبه می کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ue^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du = \int_{0}^{\infty} \frac{ue^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du + \int_{-\infty}^{0} \frac{ue^{-u}}{(1+e^{-u})^2} du = I_1 + I_2$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{0}\frac{ue^{-u}}{(1-e^{-u})^2}du=-\int_{\infty}^{0}\frac{(-u)e^{u}}{(1+e^{u})^2}du=-\int_{0}^{\infty}\frac{ue^{u}}{(1+e^{u})^2}du=-\int_{0}^{\infty}\frac{ue^{-u}}{(1+e^{-u})^2}du=-I_1$$

بنابراین انتگرال اول صفر می شود. پس

$$E(X)=\frac{-\theta}{\beta}$$

از برابری $\mu_1=M_1$ داریم

$$\tilde{\theta}=-\beta\overline{X}$$

- برآورد ML

$$L(\theta)=\beta^n\frac{e^{-n(\theta+\beta\overline{x})}}{\prod_{i=1}^{n}[1+\exp\{-(\theta+\beta x_i)\}]^{-2}}$$

$$l(\theta)=-n\ln\beta-n(\theta+\beta\overline{x})+2\sum_{i=1}^{n}\ln[1+\exp\{-(\theta+\beta x_i)\}]$$

$$l'(\theta)=-n+2\sum_{i=1}^{n}\frac{-\exp\{-(\theta+\beta x_i)\}}{1+\exp\{-(\theta+\beta x_i)\}}$$

$$l'(\theta)=0\quad\Rightarrow\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{\exp\{-(\theta+\beta x_i)\}}{1+\exp\{-(\theta+\beta x_i)\}}=-n$$

همانطور که دیده می شود عبارت صریحی برای برآوردگر ML بدست نمی آید. مقدار $\hat{\theta}$ را به ازای داده های یک نمونه تصادفی باید به روشهای عددی محاسبه کنیم.

v)

- برآورد MM

با دوبار استفاده از روش جزء به جزء داریم

$$\mu_1=E(X)=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{\theta^2}\exp\{-\frac{x}{\theta}\}dx=2\theta$$

از برابری $\mu_1=M_1$ برآوردگر گشتاوری می شود

$$\tilde{\theta} = \frac{\overline{X}}{۲}$$

- برآورد ML

داریم

$$L(\theta) = \theta^{-۲n} \prod_{i=۱}^{n} x_i e^{-\frac{۱}{\theta}\sum_{i=۱}^{n} x_i}$$

$$l(\theta) = \ln \prod_{i=۱}^{n} x_i - ۲n \ln \theta - \frac{۱}{\theta} \sum_{i=۱}^{n} x_i \qquad \Rightarrow \quad l'(\theta) = -\frac{۲n}{\theta} + \frac{۱}{\theta^۲} \sum_{i=۱}^{n} x_i$$

$$l'(\theta) = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{۲}$$

■

٤- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با توابع احتمال زیر باشد، $\theta \in \{۱,۲,۳\}$. برآورد ML پارامتر θ را به دست آورید.

x	۰	۱	۲	۳	٤
$f_۱(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$
$f_۲(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۰
$f_3(x)$	۰	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

حل :

x	$\sup_i f_i(x)$	$\hat{\theta}$
۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
۱	$\frac{۱}{۳}$	۱
۲	$\frac{۱}{۴}$	۲و۳
۳	$\frac{۱}{۲}$	۳
٤	$\frac{۱}{۴}$	۳

به عنوان مثال چنانچه $x=۴$ مشاهده شود، $\max\limits_{۱\le i\le ۳} f_i(x)$ برابـر $\frac{1}{4}$ اسـت (بیـشترین مقدار تابع درستنمایی) که این مقدار به ازای $i=۳$ حاصل شده است.

■

۵- فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگـالی احتمال (یا تابع احتمـال) $f_\theta(x)$ باشـد. در صـورت وجـود ، MME و MLE پارامترها را به دست آورید.

i) $$f_\theta(x)=\frac{۱}{\theta_۲}\exp\{-(x-\theta_۱)/\theta_۲\}\ ,\quad x\ge\theta_۱\ ,\quad \theta=(\theta_۱,\theta_۲)\in R\times R^+$$

ii) $$f_\theta(x)=\frac{\theta_۱ x^{\theta_۱-۱}}{\theta_۲^{\theta_۱}}\ ,\quad ۰<x<\theta_۲\ ,\quad \theta=(\theta_۱,\theta_۲)\in R^+\times R^+$$

iii) $$f_\theta(x)=\begin{cases}\theta_۱ & x=۱\\ \dfrac{۱-\theta_۱}{\theta_۲-۱} & x=۲,\ldots,\theta_۲\end{cases}\qquad \begin{array}{c}\theta=(\theta_1,\theta_2)\\ 0\le\theta_1\le 1\ ,\ \theta_2\in N\end{array}$$

حل :

i)

- برآوردگر MM

$$\mu_۱=E(X)=\int_{\theta_۱}^{\infty}\frac{۱}{\theta_۲}xe^{-\frac{x-\theta_۱}{\theta_۲}}dx$$

$$=\int_۰^{\infty}(u\theta_۲+\theta_۱)e^{-u}du \qquad \text{با تغییر متغیر}\quad u=\frac{x-\theta_۱}{\theta_۲}$$

$$=\theta_۲\int_۰^{\infty}ue^{-u}du+\theta_۱\int_۰^{\infty}e^{-u}du=\theta_۲+\theta_۱$$

$$\mu_۲=E(X^۲)=\int_{\theta_۱}^{\infty}\frac{۱}{\theta_۲}x^۲e^{-\frac{x-\theta_۱}{\theta_۲}}dx$$

$$=\int_۰^{\infty}(u\theta_۲+\theta_۱)^۲e^{-u}du \qquad \text{با تغییر متغیر}\quad u=\frac{x-\theta_۱}{\theta_۲}$$

$$= \theta_۲^۲ \int_۰^\infty u^۲ e^{-u} du + \theta_۱^۲ \int_۰^\infty e^{-u} du + ۲\theta_۱\theta_۲ \int_۰^\infty u e^{-u} du$$

$$= ۲\theta_۲^۲ + \theta_۱^۲ + ۲\theta_۱\theta_۲$$

از حل معادلات $\begin{cases} \mu_۱ = M_۱ \\ \mu_۲ = M_۲ \end{cases}$ **برآوردگرهای گشتاوری** $\theta_۱ , \theta_۲$ **به صورت زیر حاصل می شود**

$$\tilde{\theta}_۱ = \bar{X} - \sqrt{\overline{X^۲} - \bar{X}^۲} \qquad , \qquad \tilde{\theta}_۲ = \sqrt{\overline{X^۲} - \bar{X}^۲}$$

- برآوردگر ML

تابع درستنمایی را تشکیل می دهیم، فرض کنید $\underline{\theta} = (\theta_۱, \theta_۲)$

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i;\theta_۱,\theta_۲) = \theta_۲^{-n} \exp\{-\frac{۱}{\theta_۲}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \theta_۱)\} u(x_{(۱)} - \theta_۱)$$

به سادگی دیده می شود که $L(\underline{\theta})$ **تابعی صعودی از** θ_1 **است بنابراین** $L(\underline{\theta})$ **بر حسب** $\theta_۱$ **وقتی ماکزیمم می شود که** $\theta_۱$ **مقدار** $x_{(۱)}$ **را بگیرد بنابراین**

$$\hat{\theta}_۱ = X_{(۱)}$$

با جایگذاری $\hat{\theta}_۱$ **در** $L(\underline{\theta})$**، اکنون** $L(\underline{\theta})$**را نسبت به** $\theta_۲$ **ماکزیمم می کنیم.**

$$L(x_{(۱)}, \theta_۲) = \theta_۲^{-n} \exp\{-\frac{۱}{\theta_۲}\sum_{i=۱۱}^{n}(x_i - x_{(۱)})\}$$

$$l(x_{(۱)}, \theta_۲) = -n \ln \theta_۲ - \frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - x_{(۱)})}{\theta_۲}$$

$$l'(x_{(۱)}, \theta_۲) = -\frac{n}{\theta_۲} + \frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - x_{(۱)})}{\theta_۲^۲}$$

$$l'(x_{(۱)}, \theta_۲) = ۰ \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - X_{(۱)})$$

ii)

- برآوردگر MM

$$\mu_۱ = E(X) = \int_۰^\infty \frac{\theta_۱}{\theta_۲^{\theta_۱}} x^{\theta_۱} dx = \frac{\theta_۱}{\theta_۱ + ۱} . \frac{۱}{\theta_۲^{\theta_۱}} \theta_۲^{\theta_۱ + ۱} = \frac{\theta_۱}{\theta_۱ + ۱} . \theta_۲$$

$$\mu_۲ = E(X^۲) = \int_۰^\infty \frac{\theta_۱}{\theta_۲^{\theta_۱}} x^{\theta_۱ + ۱} dx = \frac{\theta_۱}{\theta_۱ + ۲} . \frac{۱}{\theta_۲^{\theta_۱}} \theta_۲^{\theta_۱ + ۲} = \frac{\theta_۱}{\theta_۱ + ۲} . \theta_۲^۲$$

از حل معادلات $\begin{cases} \mu_۱ = M_۱ \\ \mu_۲ = M_۲ \end{cases}$ داریم

$$\tilde{\theta}_۱ = \frac{\bar{X}^۲}{\overline{X^۲} - \bar{X}^۲} \qquad , \qquad \tilde{\theta}_۲ = \frac{\overline{X^۲}}{\bar{X}}$$

- برآوردگر ML

ابتدا درستنمایی را تشکیل می دهیم ، فرض کنید $\underline{\theta} = (\theta_۱, \theta_۲)$

$$L(\underline{\theta}) = \frac{\theta_۱^n (\prod_{i=۱}^n x_i)^{\theta_۱ - ۱}}{\theta_۲^{\theta_۱}} u(\theta_۲ - x_{(n)})$$

به سادگی دیده می شود که $L(\theta)$ تابع نزولی از $\theta_۲$ است، بنابراین

$$\hat{\theta}_۲ = X_{(n)}$$

با جایگذاری $\hat{\theta}_۲$ در تابع تابع درستنمایی با استفاده از مشتق گیری $L(\underline{\theta})$ را نسبت به $\theta_۱$ ماکزیمم می کنیم.

$$\mathrm{L}(\theta_۱, x_{(n)}) = \frac{\theta_۱^n (\prod_{i=۱}^n x_i)^{\theta_۱ - ۱}}{x_{(n)}^{\theta_۱}}$$

$$l(\theta_۱, x_{(n)}) = n \ln \theta_۱ + (\theta_۱ - ۱) \ln(\prod_{i=۱}^n x_i) - \theta_۱ \ln x_{(n)}$$

$$l'(\theta_۱, x_{(n)}) = \frac{n}{\theta_۱} + \ln(\prod_{i=۱}^n x_i) - \ln x_{(n)}$$

$$l'(\theta_۱, x_{(n)}) = ۰ \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_۱ = \frac{-n}{\ln \prod_{i=۱}^n (\frac{X_i}{X_{(۱)}})}$$

iii)

- برآوردگر MM

$$\mu_1 = E(X) = \theta_1 + \frac{1-\theta_1}{\theta_2 - 1}\sum_{x=2}^{\theta_2} x = \theta_1 + \frac{1-\theta_1}{\theta_2 - 1}\left(\frac{\theta_2(\theta_2+1)}{2} - 1\right)$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \theta_1 + \frac{1-\theta_1}{\theta_2 - 1}\sum_{x=2}^{\theta_2} x^2 = \theta_1 + \frac{1-\theta_1}{\theta_2 - 1}\left(\frac{\theta_2(\theta_2+1)(2\theta_2+1)}{6} - 1\right)$$

از حل معادلات $\begin{cases} \mu_1 = M_1 \\ \mu_2 = M_2 \end{cases}$ **، به ازای داده های یک نمونه تصادفی، وبا استفاده از روشهای عددی می توان برآورد های گشتاوری را به دست آورد.**

- برآوردگر ML

فرض کنید $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$

$$L(\underline{\theta}) = \theta_1^{\sum_{i=1}^{n} I(x_i=1)}\left(\frac{1-\theta_1}{\theta_2 - 1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} I_{\{2,\dots,\theta_2\}}(x_i)} u(\theta_2 - x_{(n)})$$

حالت الف- چنانچه $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$**، آنگاه**

$$L(\underline{\theta}) = \theta_1^n \qquad 0 \le \theta_1 \le 1 \quad , \quad \theta_2 \in N$$

$L(\underline{\theta})$ **تابعی صعودی از** θ_1 **می شود. بنابراین** $\hat{\theta}_1 = 1$ **,** $\hat{\theta}_2$ **هر مقداری در N می تواند باشد.**

حالت ب- چنانچه $x_i \neq 1$ **برای هر،** $i = 1,2,\dots,n$ **، آنگاه**

$$L(\underline{\theta}) = \left(\frac{1-\theta_1}{\theta_2 - 1}\right)^n u(\theta_2 - x_{(n)})$$

$L(\underline{\theta})$ **تابعی نزولی از** θ_1 **است وقتی نسبت به** θ_1 **ماکزیمم می شود که** θ_1 **کمترین مقدار خود را بگیرد در نتیجه** $\hat{\theta}_1 = 0$ **و از طرفی** $L(\underline{\theta})$ **تابعی نزولی از** θ_2 **نیز می باشد. بنابراین**

$$\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$$

حالت ج- چنانچه مثلاً k مشاهده از نمونه یک باشند و n-k تای بقیه در $\{2,3,...,\theta_2\}$ قرار گیرند، آنگاه

$$L(\underline{\theta}) = \theta_1^k \left(\frac{1-\theta_1}{\theta_2 - 1}\right)^{n-k} u(\theta_2 - x_{(n)})$$

تابع $L(\underline{\theta})$ تابعی نزولی از θ_2 است بنابراین

$$\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$$

با جایگذاری $\hat{\theta}_2$ در $L(\underline{\theta})$ و استفاده از مشتق، ماکزیمم $L(\underline{\theta})$ را نسبت به θ_1 بدست می آوریم، خواهیم داشت

$$\hat{\theta}_1 = \frac{k}{n}$$

■

۶- از چهار جامعه نرمال با واریانس یکسان σ^2، هر کدام یک نمونه تصادفی n تایی انتخاب شده است. اگر میانگین چهار جامعه به ترتیب $a+b+c$ ، $a+b-c$ ، $a-b+c$ و $a-b-c$ باشند ، MLE و MME پارامترهای a ، b ، c و σ^2 را به دست آورید.

حل :

فرض کنید

$$X_{11}, X_{12},..., X_{1n} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma^2) \quad , \quad \mu_1 = a+b+c$$

$$X_{21}, X_{22},..., X_{2n} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma^2) \quad , \quad \mu_2 = a+b-c$$

$$X_{31}, X_{32},..., X_{3n} \overset{iid}{\sim} N(\mu_3, \sigma^2) \quad , \quad \mu_3 = a-b+c$$

$$X_{41}, X_{42},..., X_{4n} \overset{iid}{\sim} N(\mu_4, \sigma^2) \quad , \quad \mu_4 = a-b-c$$

$$\underline{\theta} = (a,b,c,\sigma^2)$$

و هر چهار جامعه نرمال مستقل از همدیگر باشند.

- برآوردگر ML

تابع درستنمایی به صورت زیر است

$$L(\underline{\theta})=\prod_{i=1}^{4}\prod_{j=1}^{n}f(x_{ij};\theta)=\prod_{i=1}^{4}(\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\mu_i)^2}$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-2n}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{j=1}^{n}(x_{1j}-(a+b+c))^2+\sum_{j=1}^{n}(x_{2j}-(a+b-c))^2$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(x_{3j}-(a-b+c))^2+\sum_{j=1}^{n}(x_{4j}-(a-b-c))^2]\}$$

از تابع درستنمایی ابتدا لگاریتم و سپس نسبت به σ^2,c,b,a مشتق مـی گیـریم ، آنگاه داریم

$$\frac{\partial l(\underline{\theta})}{\partial a}=0\quad,\quad\frac{\partial l(\underline{\theta})}{\partial b}=0\quad,\quad\frac{\partial l(\underline{\theta})}{\partial c}=0\quad\Rightarrow\quad\hat{a}=\hat{b}=\hat{c}=\frac{\overline{X}_1+\overline{X}_2+\overline{X}_3+\overline{X}_4}{4}$$

$$\frac{\partial l(\underline{\theta})}{\partial\sigma^2}=-\frac{2n}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}[\sum_{j=1}^{n}(x_{1j}-3\hat{a})^2+\sum_{j=1}^{n}(x_{2j}-\hat{a})^2+\sum_{j=1}^{n}(x_{3j}-\hat{a})^2+\sum_{j=1}^{n}(x_{4j}+\hat{a})^2]$$

$$\frac{\partial l(\underline{\theta})}{\partial\sigma^2}=0\quad\Rightarrow$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{4n}[\sum_{j=1}^{n}(x_{1j}-3\hat{a})^2+\sum_{j=1}^{n}(x_{2j}-\hat{a})^2+\sum_{j=1}^{n}(x_{3j}-\hat{a})^2+\sum_{j=1}^{n}(x_{4j}+\hat{a})^2]$$

■

۷- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $\Gamma(\alpha,\beta)$ باشد ، به طوری که $\alpha>0$ و $\beta>0$ هر دو نامعلوم اند. MME و MLE پارامترهای α و β را ، در صورت وجود به دست آورید. (راهنمایی: فرض کنید، برای x های بزرگ $\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x)\approx\ln x-\frac{1}{2x}$)

حل:

- برآوردگرهای MM

$$\mu_1 = E(X) = \alpha\beta$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2$$

از حل معادلات $\begin{cases}\mu_1 = M_1\\ \mu_2 = M_2\end{cases}$ **برآوردگرهای گشتاوری بدست می آیند.**

$$\begin{cases}\alpha\beta = \overline{X}\\ \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = \overline{X^2}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\tilde{\alpha} = \dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X^2} - \overline{X}^2}\\ \tilde{\beta} = \dfrac{\overline{X^2} - \overline{X}^2}{\overline{X}}\end{cases}$$

– **برآوردگرهای ML**

تابع درستنمایی به صورت زیر است

$$L(\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma^n(\alpha)\beta^{n\alpha}}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{n\bar{x}}{\beta}}$$

پس

$$l(\alpha,\beta) = \ln L(\alpha,\beta) = -n\ln\Gamma(\alpha) - n\alpha\ln\beta + (\alpha-1)\ln\prod_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\bar{x}}{\beta}$$

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = -\frac{n\alpha}{\beta} + \frac{n\bar{x}}{\beta^2} \qquad , \qquad \frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = -n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - n\ln\beta + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = 0 \qquad\Rightarrow\qquad \hat{\beta} = \frac{\overline{X}}{\hat{\alpha}}$$

همچنین

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \ln\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \ln\bar{x}$$

برای به دست آوردن $\hat{\alpha}$، باید معادله فوق را حل کرد. اما حل این معادله به سادگی انجام نمی شود وباید مقدار $\hat{\alpha}$ را به ازای یک نمونه تصادفی، به کمک روشهای عددی و استفاده از جدول $\dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ حساب کرد.

■

۸- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $IG(\mu,\lambda)$ باشد، به طوری که $\mu>0$ ، $\lambda>0$ است. در صورت وجود MME و MLE پارامترهای μ و λ را به دست آورید.

حل:

$$f_{\mu,\lambda}(x)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\} \quad ; \quad x>0, \quad \lambda,\mu>0$$

- برآوردگرهای MM

با مراجعه به فصل اول، قسمت ۱۶ ، می دانیم اگر $X\sim IG(\mu,\lambda)$ باشد، آنگاه تابع مولد گشتاور آن به صورت

$$M_X(t)=\exp\{\frac{\lambda}{\mu}(1-\sqrt{1-2\frac{t\mu^2}{\lambda}})\}$$

است.

به سادگی داریم

$$\mu_1=E(X)=M'_X(0)=\mu$$

$$\mu_2=E(X^2)=M''_X(0)=\mu^2(1+\frac{\mu}{\lambda})$$

با حل معادلات $\begin{cases}\mu_1=M_1\\ \mu_2=M_2\end{cases}$ **داریم**

$$\begin{cases}\mu=\overline{X}\\ \mu^2(1+\frac{\mu}{\lambda})=\overline{X^2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\tilde{\mu}=\overline{X}\\ \tilde{\lambda}=\frac{\overline{X}^3}{\overline{X^2}-\overline{X}^2}\end{cases}$$

- برآوردگرهای ML

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\mu,\lambda)=\lambda^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-\frac{3}{2}}\exp\{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\}$$

$$l(\mu,\lambda)=\ln L(\mu,\lambda)=\frac{n}{۲}\ln\lambda-\frac{n}{۲}\ln ۲\pi+\ln\prod_{i=۱}^{n}(x_i)^{-\frac{۳}{۲}}-\frac{\lambda}{۲\mu^۲}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x_i-\mu)^۲}{x_i}$$

$$\frac{\partial l(\mu,\lambda)}{\partial\mu}=\frac{\lambda}{\mu^۳}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x_i-\mu)^۲}{x_i}+\frac{\lambda}{\mu^۲}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x_i-\mu)}{x_i}$$

$$\frac{\partial l(\mu,\lambda)}{\partial\mu}=۰\quad\Rightarrow\quad\frac{۱}{\mu}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x_i-\mu)^۲}{x_i}+\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x_i-\mu)}{x_i}=۰$$

$$\Rightarrow\quad\frac{۱}{\mu}\sum_{i=۱}^{n}(x_i+\frac{\mu^۲}{x_i}-\mu)+n-\mu\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i}=۰$$

$$\Rightarrow\quad\hat{\mu}=\overline{X}$$

$$\frac{\partial l(\mu,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{n}{۲\lambda}-\frac{۱}{۲\mu^۲}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x_i-\mu)^۲}{x_i}$$

$$\frac{\partial l(\mu,\lambda)}{\partial\lambda}=۰\quad\Rightarrow\quad\frac{n}{\lambda}=\frac{۱}{\mu^۲}\sum_{i=۱}^{n}\frac{(x_i-\mu)^۲}{x_i}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{n}{\lambda}=\frac{۱}{\mu^۲}[n\overline{x}+\mu^۲\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i}-۲n\mu]$$

با جایگذاری $\overline{x}$ به جای μ در عبارت فوق داریم

$$\frac{n}{\lambda}=\frac{۱}{\overline{x}^۲}[n\overline{x}+\overline{x}^۲\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i}-۲n\overline{x}]$$

$$=\frac{n}{\overline{x}}+\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i}-\frac{۲n}{\overline{x}}$$

$$=\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{x_i}-\frac{۱}{\overline{x}})$$

درنتیجه

$$\frac{۱}{\hat{\lambda}}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۱}{x_i}-\frac{۱}{\overline{x}})$$

■

۹- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $P(\lambda)$، $\lambda>0$، باشد.

الف: MLE پارامتر $P_\lambda(X_1\leq 1)$ را به دست آورده، نشان دهید که یک برآوردگر سازگار است.

ب: MLE پارامتر $e^{-\lambda}$ را به دست آورید.

حل:

(الف) ابتدا $P_\lambda(X_1\leq 1)$ را محاسبه می کنیم

$$P_\lambda(X_1\leq 1)=P_\lambda(X_1=0)+P_\lambda(X_1=1)$$
$$=e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}=e^{-\lambda}(1+\lambda)$$

برای به دست آوردن برآوردگر ML پارامتر $e^{-\lambda}(1+\lambda)$ طبق خاصیت پایایی کافی است $\hat{\lambda}$ را پیدا کنیم. به سادگی دیده می شود که $\hat{\lambda}=\overline{X}$.

بنابراین برآوردگر ML پارامتر $e^{-\lambda}(1+\lambda)$ می شود

$$e^{-\overline{X}}(1+\overline{X})$$

بررسی سازگاری :

ابتدا نشان می دهیم $\overline{X}$ برآوردگر سازگار λ است.

$$E_\lambda(\overline{X})=\lambda$$
$$\mathrm{var}(\overline{X})=\frac{\lambda}{n}\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\mathrm{var}(\overline{X})=0$$

بنابراین شرایط کافی سازگاری برقرار است. (به قضیه (۴-۴) صفحه ۲۰۴ مراجعه شود.)

از طرفی تابع $g(t)=e^{-t}(1+t)$، تابعی پیوسته است. بنابراین $e^{-\overline{X}}(1+\overline{X})$ برآوردگر سازگار $e^{-\lambda}(1+\lambda)$ است.

توضیح: در نظریه احتمال ثابت می شود که اگر $\hat{\theta}_n$ دنباله ای از برآوردگرهای سازگار θ باشند. و $g(t)$ تابعی پیوسته از t باشد، آنگـاه $g(\hat{\theta}_n)$ دنبالـه ای از برآوردگرهـای سازگار برای $g(\theta)$ است.

(ب) به سادگی داریم $\hat{\lambda} = \overline{X}$. اکنون برآوردگر ML پارامتر $e^{-\lambda}$ بـا اسـتفاده از خاصیت پایایی برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم می شود

$$\widehat{e^{-\lambda}} = e^{-\overline{X}}$$

■

۱۰- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta,1)$ باشـد، در صورت وجود MLE پارامتر $P_\theta(X > 0)$ را به دست آورید.

حل:

ابتدا $P_\theta(X > 0)$ را محاسبه می کنیم.

$$P_\theta(X > 0) = P_\theta(Z > -\theta) = P_\theta(Z < \theta) = \Phi(\theta)$$

که در عبارت بالا $\Phi(0)$ تابع توزیع متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

به سادگی دیده می شود که $\hat{\theta} = \overline{X}$.

اکنون طبق خاصیت پایایی برآوردگرهای ML ، برآوردگر ML برای $P_\theta(X > 0)$ برابر است با $\Phi(\overline{X})$.

■

۱۱-فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\alpha,\beta)$ باشـد، در صورت وجود MLE پارامتر $P_{\alpha,\beta}(X_1 > 0)$ را به دست آورید.

حل:

ابتدا برآوردگرهای ML را برای β,α به دست می آوریم

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\alpha,\beta)=\beta^n e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)}u(x_{(1)}-\alpha)$$

$L(\alpha,\beta)$ تابعی صعودی از α است. بنابراین وقتی نسبت به α ماکزیمم می شود که α بیشترین مقدار خود را بگیرد بنابراین

$$\hat{\alpha}=X_{(1)}$$

با جایگذاری $x_{(1)}$ بجای α در $L(\alpha,\beta)$ ، اکنون تابع فوق را نسبت به β ماکزیمم می کنیم.

$$L(x_{(1)},\beta)=\beta^n e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{(1)})}$$

$$l(\beta)=\ln L(x_{(1)},\beta)=n\ln\beta-\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{(1)})$$

$$l'(\beta)=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{(1)})$$

$$l'(\beta)=0 \quad\Rightarrow\quad \hat{\beta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})$$

اکنون $P_{\alpha,\beta}(X_1>0)$ را محاسبه می کنیم. با توجه به اینکه $x\geq\alpha$, $\alpha\in R$ ، دو حالت زیر را داریم :

(الف) اگر $\alpha<0$ باشد

$$P_{\alpha,\beta}(X_1>0)=\int_0^{\infty}\beta e^{-\beta(x-\alpha)}dx=-e^{-\beta(x-\alpha)}\Big|_0^{\infty}=e^{-\beta\alpha}$$

طبق خاصیت پایایی برآوردگرهای ML، برآوردگر درستنمایی ماکزیمم $e^{-\beta\alpha}$ می شود

$$\exp\{-X_{(1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})\}$$

(ب) اگر $\alpha>0$ باشد

$$P_{\alpha,\beta}(X_1 > 0) = \int_{\alpha}^{\infty} \beta e^{-\beta(x-\alpha)}dx = -e^{-\beta(x-\alpha)}\Big|_{\alpha}^{\infty} = 1$$

که در این حالت $P_{\alpha,\beta}(X_1 > 0)$ احتیاج به برآورد کردن ندارد.

■

۱۲- فرض کنید $X_1,...,X_m$ و $Y_1,...,Y_n$ دو نمونه تصادفی مستقل از توزیعهای به ترتیب $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ و $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ باشند. MLE پارامترهای مجهول را در هر یک از حالات زیر به دست آورید.

الف: $\mu_1 = \mu_2$ ، σ_1^2 و σ_2^2

ب: μ_1,μ_2 و $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

ج: $\mu_1 - \mu_2$ و $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

حل:

فرض کنید $\underline{\theta} = (\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$. تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\underline{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}}(\sigma_1^2)^{-\frac{m}{2}}(\sigma_2^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2\}$$

و لگاریتم آن می شود

$$\ell(\underline{\theta}) = \ln L(\underline{\theta})$$
$$= -\frac{m+n}{2}\ln(2\pi) - \frac{m}{2}\ln\sigma_1^2 - \frac{n}{2}\ln\sigma_2^2 - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2$$

(الف) فرض کنید $\mu_1 = \mu_2 = \mu$

با جایگذاری μ در $\ell(\underline{\theta})$ بجای μ_1 و μ_2 و سپس مشتق گیری از $\ell(\underline{\theta})$ نسبت به μ، σ_1^2 و σ_2^2 ، برآوردگرهای ML آنها را به دست می آوریم.

$$\ell(\underline{\theta}) =$$

$$= -\frac{m+n}{2}\ln(2\pi) - \frac{m}{2}\ln\sigma_1^2 - \frac{n}{2}\ln\sigma_2^2 - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu) + \frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\sigma_1^2} = -\frac{m}{2}\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_1^4}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\sigma_2^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{2\sigma_2^4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$$

معادلات بالا را مساوی صفر قرار می دهیم

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{\sigma_1^2}(\bar{x}-\mu) = \frac{n}{\sigma_2^2}(\bar{y}-\mu) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\sigma_1^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\sigma_2^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2 \qquad (3)$$

برای به دست آوردن $\hat{\mu}$ ، در معادله (۱) بجای σ_1^2 و σ_2^2 مقادیرشان را از (۲) و (۳) قرار می دهیم، ومعادله (۱) را حل می کنیم.

به سادگی داریم

$$\mu^3(m-n) + \mu^2(\bar{y}(n-2m) + \bar{x}(2n-m)) + \mu(m\overline{y^2} + 2\bar{x}\bar{y}(m-n) - n\overline{x^2})$$
$$+ (n\bar{y}\overline{x^2} - m\bar{x}\overline{y^2}) = 0$$

همانطور که ملاحظه می شود به معادله درجه سومی بر حسب μ رسید یــم کــه حل آن بسیار مشکل است.

برای پیدا کردن ریشه (های) معادله فوق از روشهای عددی استفاده می کنیم وبــه ازای یک نمونه مشاهده شده از x_i ها و y_i ها مقدار μ را محاسبه کرده سپس در (۲) و (۳) جایگذاری می کنیم تا مقادیر عددی $\hat{\sigma}_1^2$ و $\hat{\sigma}_2^2$ به دست آیند.

(ب) فرض کنید $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$، به سادگی داریم

$$\ell(\underline{\theta})=-\frac{m+n}{2}\ln(2\pi)-\frac{m+n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu_1}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu_2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\sigma^2}=-\frac{m+n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}[\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2]\qquad(1)$$

پس

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu_1}=0\quad\Rightarrow\quad\hat{\mu}_1=\overline{X}$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu_2}=0\quad\Rightarrow\quad\hat{\mu}_2=\overline{Y}$$

با جایگذاری $\hat{\mu}_1$ و $\hat{\mu}_2$ در عبارت (۱) برآورد ML را برای σ^2به دست می آوریم

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{m+n}[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2]$$

(ج) برای به دست آوردن برآوردگرهای ML برای $\mu_1-\mu_2$ و $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ابتدا برآوردگرهای ML را برای μ_1،μ_2 ، σ_1^2 و σ_2^2 محاسبه کرده و سپس از خاصیت پایایی برآوردگرهای ML استفاده کرده و با جایگذاری برآوردگرهای $\hat{\mu}_1$،$\hat{\mu}_2$، $\hat{\sigma}_1^2$ و $\hat{\sigma}_2^2$ در $\mu_1-\mu_2$ و $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ برآوردگرهای ML آنها را به دست می آوریم.

$$\ell(\underline{\theta})=\ln L(\underline{\theta})$$

$$=-\frac{m+n}{2}\ln(2\pi)-\frac{m}{2}\ln\sigma_1^2-\frac{n}{2}\ln\sigma_2^2-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)^2$$

به سادگی داریم

$$\frac{\partial \ell(\underline{\theta})}{\partial \mu_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_1 = \overline{X}$$

$$\frac{\partial \ell(\underline{\theta})}{\partial \mu_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_2 = \overline{Y}$$

با جایگذاری $\hat{\mu}_1$ و $\hat{\mu}_2$ در $\ell(\underline{\theta})$ برآوردگر ML را برای σ_1^2 و σ_2^2 به دست می آوریم

$$\frac{\partial \ell(\underline{\theta})}{\partial \sigma_1^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\frac{\partial \ell(\underline{\theta})}{\partial \sigma_2^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$

برآوردگرهای ML برای $\mu_1 - \mu_2$ و $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ به ترتیب می شوند ، $\overline{X} - \overline{Y}$ و $\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$.

■

۱۳- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Beta(a,\beta)$ باشد، که در آن β معلوم و $\alpha > 0$ نامعلوم است.

الف: MLE پارامتر α را وقتی که $\beta = 1$ باشد به دست آورید.

ب: MLE پارامتر α را وقتی که $\beta = 2$ باشد به دست آورید.

ج: MLE پارامتر $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ را درهر دو حالت فوق به دست آورید.

حل:

(الف)

$$f_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad ; \quad 0 < x < 1 \, , \, \alpha > 0$$

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\alpha) = \alpha^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}$$

و

$$\ell(\alpha) = \ln L(\alpha) = n\ln\alpha + (\alpha - ۱)\ln(\prod_{i=۱}^{n} x_i)$$

بنابراین

$$\ell'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \ln(\prod_{i=۱}^{n} x_i)$$

$$\ell''(\alpha) = -\frac{n}{\alpha^۲} < ۰$$

$$\ell'(\alpha) = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=۱}^{n} \ln X_i}$$

(ب)

$$f_\alpha(x) = \frac{۱}{B(\alpha,۲)} x^{\alpha-۱}(۱-x) \quad ; \quad ۰ < x < ۱ , \alpha > ۰$$

$$= \alpha(\alpha+۱)x^{\alpha-۱}(۱-x)$$

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\alpha) = \alpha^n(\alpha+۱)^n \prod_{i=۱}^{n} x_i^{\alpha-۱}(۱-x_i)$$

و

$$\ell(\alpha) = \ln L(\alpha) = n\ln\alpha + n\ln(\alpha+۱) + (\alpha-۱)\ln\prod_{i=۱}^{n} x_i + \ln\prod_{i=۱}^{n}(۱-x_i)$$

$$\ell'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \frac{n}{\alpha+۱} + \sum_{i=۱}^{n}\ln x_i$$

$$\ell'(\alpha) = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\alpha+۱} = -\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\ln x_i$$

$$\Rightarrow \qquad c\alpha^۲ + (c-۲)\alpha - ۱ = ۰$$

که در آن $c = -\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\ln x_i$.

معادله درجه دوم فوق دو ریشه $\alpha_1 = -1$ و $\alpha_2 = \frac{2}{c}$ دارد. ریشه اول چون منفی است قابل قبول نیست، بنابراین

$$\hat{\alpha} = -\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

توجه کنید که $\ell''(\hat{\alpha}) < 0$ ، پس $\hat{\alpha}$ نقطه ماکزیمم است.

■

۱۴- فرض کنید $X_1,...,X_m$ یک نمونه تصادفی m تایی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ و $Y_1,...,Y_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu,\lambda\sigma^2)$ باشد، به طوری که دو نمونه مستقل از هم ، $\mu \in R$ و $\sigma > 0$ و $\lambda > 0$ است. MLE پارامتر λرا به دست آورید اگر

الف: پارامترهای μ و σ^2 هر دو معلوم باشند.

ب: پارامترهای μ و σ^2 هر دونامعلوم باشند.

حل:

فرض کنید $\underline{\theta} = (\mu, \sigma^2, \lambda)$. تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\underline{\theta}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{m+n}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{2\lambda\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\}$$

و لگاریتم آن می شود

$$\ell(\underline{\theta}) = \ln L(\underline{\theta})$$
$$= -\frac{m+n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{n}{2}\ln\lambda - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{2\lambda\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$$

(الف) با مشتق گیری از $\ell(\underline{\theta})$ نسبت به λ به سادگی برآورد درستنمایی ماکزیمم را به دست می آوریم.

$$\ell'(\underline{\theta}) = -\frac{n}{۲\lambda} + \frac{۱}{۲\sigma^۲\lambda^۲}\sum_{i=۱}^{n}(y_i - \mu)^۲$$

$$\ell'(\underline{\theta}) = ۰ \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{S_y^۲}{\sigma^۲}$$

که در آن $S_y^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۲}^{n}(Y_i - \mu)^۲$.

توجه کنید که $\ell''(\underline{\theta})\big|_{\hat{\lambda}} < ۰$.

(ب) چون μ و $\sigma^۲$ هر دو مجهول اند، در این حالت برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم این دو را نیز به دست می آوریم. با مشتق گیری از $\ell(\underline{\theta})$ نسبت به λ، μ و $\sigma^۲$ داریم

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu} = \frac{۱}{\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{m}(x_i - \mu) + \frac{۱}{\lambda\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{n}(y_i - \mu)$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\sigma^۲} = -\frac{m+n}{۲}.\frac{۱}{\sigma^۲} + \frac{۱}{۲\sigma^۴}[\sum_{i=۱}^{m}(x_i - \mu)^۲ + \frac{۱}{\lambda}\sum_{i=۱}^{n}(y_i - \mu)^۲]$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\lambda} = -\frac{n}{۲\lambda} + \frac{۱}{۲\sigma^۲\lambda^۲}\sum_{i=۱}^{n}(y_i - \mu)^۲$$

با مساوی صفر قرار دادن معادلات فوق و به ازای یک نمونه مشاهده شده می توان مقدارهای برآوردهای درستنمایی ماکزیمم را به دست آورد.

■

۱۵- فرض کنید $X_۱,\ldots,X_k$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند.اگر X_i دارای توزیع $B(n_i,\theta)$ ، n_i معلوم ، $i = ۱,۲,\ldots,k$ و $\theta \in [۰,۱]$ باشد، MLE پـارامتر θ را به دست آورید.

حل:

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta) = \prod_{i=۱}^{k} f_\theta(x_i) = \prod_{i=۱}^{k}\binom{n_i}{x_i}\theta^{x_i}(۱-\theta)^{n_i - x_i}$$

$$= \{\prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{x_i}\} \theta^{y} (1-\theta)^{n-y}$$

که در آن $y = \sum_{i=1}^{k} x_i$ و $n = \sum_{i=1}^{n} n_i$.

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = \ln \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{x_i} + y \ln\theta + (n-y)\ln(1-\theta)$$

$$\ell'(\theta) = \frac{y}{\theta} - \frac{n-y}{1-\theta}$$

$$\ell'(\theta) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\theta} = \frac{Y}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

توجه کنید که $\ell''(\theta)|_{\hat{\theta}} < 0$.

■

۱۶- فرض کنید $(X_1,...,X_k) \sim M(n,\theta_1,...,\theta_k)$، MLE پارامترهای $\theta_1,...,\theta_k$ را به دست آورید.

حل:

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k) = P(X_1 = x_1,..., X_k = x_k)$$
$$= \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_k!} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} ... \theta_k^{x_k} \qquad , \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n , \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \quad (1)$$

داریم

$$\ell(\underline{\theta}) = \ln L(\theta_1,...,\theta_k)$$
$$= \ln \frac{n!}{x_1! x_2! ... x_k!} + x_1 \ln\theta_1 + ... + x_{k-1} \ln\theta_{k-1} + (n - x_1 - ... - x_{k-1}) \ln(1 - \theta_1 - ... - \theta_{k-1})$$
$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{x_i}{\theta_i} - \frac{n - x_1 - ... - x_{k-1}}{1 - \theta_1 - ... - \theta_{k-1}} = \frac{x_i}{\theta_i} - c \quad , \quad i = 1,...,k-1$$

که

$$c=\frac{n-x_1-\ldots-x_{k-1}}{1-\theta_1-\ldots-\theta_{k-1}} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_i}=0 \quad \Rightarrow \quad x_i=c\theta_i \quad , \quad i=1,\ldots,k-1$$

اکنون مقدار c را تعیین می کنیم.

با توجه به رابطه (۲) داریم $x_n=c\theta_n$ ، پس برای هر $i=1,2,\ldots,k$ ، $x_i=c\theta_i$

بنابراین با استفاده از رابطه (۱) داریم

$$\sum_{i=1}^{k}x_i=c\sum_{i=1}^{k}\theta_i \quad \Rightarrow \quad n=c$$

درنتیجه

$$\hat{\theta}_i=\frac{X_i}{n} \quad , \quad i=1,2,\ldots,k$$

■

۱۷- فرض کنید $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ باشد. MLE پارامتر ρ را به دست اورید، اگر

الف: پارامترهای μ_1 ، μ_2 ، σ_1^2 و σ_2^2 همگی معلوم باشند.

ب: پارامترهای μ_1 ، μ_2 ، σ_1^2 و σ_2^2 همگی نامعلوم باشند.

حل:

فرض کنید $\underline{\theta}=(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ ، ابتدا تابع درستنمایی را تشکیل می دهیم

$$L(\underline{\theta})=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,\underline{\theta})=(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^{-n}\exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i)$$

که در آن

$$q_i=\frac{1}{1-\rho^2}[(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2})^2]$$

$$\ell(\underline{\theta})=\ln L(\underline{\theta})=-n\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma_1^2-\frac{n}{2}\ln\sigma_2^2-\frac{n}{2}\ln(1-\rho^2)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i$$

(الف) در این حالت از $\ell(\underline{\theta})$ نسبت به ρ مشتق می گیریم. به سادگی داریم

$$\ell'(\underline{\theta}) = \frac{n\rho}{1-\rho^2} - \frac{n\rho}{(1-\rho^2)^2}[s_x - 2\rho s_{xy} + s_y] + \frac{n}{(1-\rho^2)} s_{xy}$$

که در آن

$$s_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1})^2$$
$$s_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2})^2$$
$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2})$$

بنابراین

$$\ell'(\underline{\theta}) = 0 \;\Rightarrow\; \rho - \frac{\rho}{1-\rho^2}(s_x - 2\rho s_{xy} + s_y) + s_{xy} = 0$$
$$\Rightarrow\; \rho^3 - \rho^2 s_{xy} + \rho(s_x + s_y - 1) - s_{xy} = 0$$

همانطور که ملاحظه می شود، به معادله درجه سومی بر حسب ρ رسیدیم که حل آن مشکل است. برای پیدا کردن ریشه های معادله فوق از روشهای عددی استفاده می کنیم و به ازای یک نمونه مشاهده شده مقدار $\hat{\rho}$ رابه دست می آوریم.

(ب) چنانچه μ_1 ، μ_2 ، σ_1^2 و σ_2^2 مجهول باشند، از $\ell(\underline{\theta})$ نسبت به این پارامترها و همینطور ρ مشتق می گیریم تا برآوردگر ML آنها را به دست آوریم.

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu_1} = \frac{1}{(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1^2} - \rho\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_1\sigma_2})$$
$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu_2} = \frac{1}{(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2^2} - \rho\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1\sigma_2})$$

بنابراین

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu_۱}=۰\\ \dfrac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\mu_۲}=۰\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{\mu_۱}{\sigma_۱}-\rho\dfrac{\mu_۲}{\sigma_۲}=\dfrac{\bar{x}}{\sigma_۱}-\rho\dfrac{\bar{y}}{\sigma_۲}\\ \dfrac{\mu_۲}{\sigma_۲}-\rho\dfrac{\mu_۱}{\sigma_۱}=\dfrac{\bar{y}}{\sigma_۲}-\rho\dfrac{\bar{x}}{\sigma_۱}\end{cases}$$

به سادگی از حل دستگاه معادلات فوق برحسب μ_1 و μ_2 داریم

$$\hat{\mu}_۱=\overline{X}\quad,\quad\hat{\mu}_۲=\overline{Y}$$

با جایگذاری $\hat{\mu}_۱$ و $\hat{\mu}_۲$ در $\ell(\underline{\theta})$ و مشتق گیری از $\ell(\underline{\theta})$ نسبت به $\sigma_۱^۲$ ، $\sigma_۲^۲$ و ρ داریم

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\sigma_۱^۲}=۰\quad\Rightarrow\quad\frac{۱}{\sigma_۱^۲}s_x^۲-\frac{\rho}{\sigma_۱\sigma_۲}s_{xy}=۱-\rho^۲\qquad(۱)$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\sigma_۲^۲}=۰\quad\Rightarrow\quad\frac{۱}{\sigma_۲^۲}s_y^۲-\frac{\rho}{\sigma_۱\sigma_۲}s_{xy}=۱-\rho^۲\qquad(۲)$$

$$\frac{\partial\ell(\underline{\theta})}{\partial\rho}=۰\quad\Rightarrow$$

$$\rho-\frac{\rho}{(۱-\rho^۲)}[\frac{۱}{\sigma_۱^۲}s_x^۲-\frac{۲\rho}{\sigma_۱\sigma_۲}s_{xy}+\frac{۱}{\sigma_۲^۲}s_y^۲]+\frac{۱}{\sigma_۱\sigma_۲}s_{xy}=۰\quad(۳)$$

که در عبارت های بالا

$$s_x^۲=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^۲$$

$$s_y^۲=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(y_i-\bar{y})^۲$$

$$s_{xy}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

با جمع کردن (۱) و (۲) و جایگذاری آن در معادله (۳) به سادگی داریم

$$.\ \rho=\frac{s_{xy}}{\sigma_۱\sigma_۲}\qquad(۴)$$

اکنون با قرار دادن (٤) در معادلات (۱) و (۲) به سادگی داریم

$$\hat{\sigma}_x^۲=S_x^۲\quad و \quad\hat{\sigma}_y^۲=S_y^۲$$

پس داریم

$$\hat{\rho} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

■

۱۸- فرض کنید $X \sim E(\lambda)$ و $Y \sim E(\mu)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. هم چنین فرض کنید ، فقط مقادیر Z و W که به صورت زیر تعریف شده اند، قابل مشاهده است.

$$Z = \min(X,Y) \quad , \quad W = \begin{cases} ۱ & Z = X \\ ۰ & Z = Y \end{cases}$$

حال فرض کنید ، (Z_i, W_i) ، $i = ۱,...,n$ ، n مشاهده مستقل از توزیع (Z,W) باشند. در صورت وجود، MLE پارامترهای λ و μ را به دست آورید.

حل:

$$f_X(x) = \frac{۱}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad ; \quad x > ۰ , \lambda > ۰$$

$$f_Y(y) = \frac{۱}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} \quad ; \quad y > ۰ , \mu > ۰$$

چون Y, X مستقل اند داریم

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{۱}{\lambda\mu} e^{-(\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu})} \quad ; \quad x, y > ۰ \quad , \quad \lambda, \mu > ۰$$

حل را در چند مرحله انجام می دهیم

(الف) ابتدا ثابت می کنیم Z و W مستقل از هم هستند. برای این منظور کافی است نشان می دهیم

$$P(Z \le z \mid W = i) = P(Z \le z) \qquad i = ۱,۲$$

$$i)\ F_Z(z) = P(Z \le z) = ۱ - P(Z > z)$$
$$= ۱ - P(X > z, Y > z)$$
$$= ۱ - P(X > z)P(Y > z) \qquad \text{بنا به استقلال } X,Y$$

$$= ۱ - \exp\{-(\frac{۱}{\lambda} + \frac{۱}{\mu})z\}$$

زیرا مثلاً

$$P(X > z) = \int_z^\infty \frac{۱}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

پس

$$f_Z(z) = (\frac{۱}{\lambda} + \frac{۱}{\mu}) e^{-(\frac{۱}{\lambda} + \frac{۱}{\lambda})z} \qquad , \quad z > ۰$$

درنتیجه Z دارای توزیع $E(\frac{۱}{\lambda} + \frac{۱}{\mu})$ است.

$$ii)\ P(Z \le z \mid W = ۱) = \frac{P(Z \le z, W = ۱)}{P(W = ۱)}$$

$$= \frac{P(Z \le z, Z = X)}{P(Z = X)}$$

$$= \frac{P(X \le z, X < Y)}{P(X < Y)} \qquad (۱)$$

اکنون صورت و مخرج کسر فوق را محاسبه می کنیم

$$P(X \le z, X < Y) = \iint_{\substack{x \le z \\ x < y}} f_{(X,Y)}(x, y) dydx$$

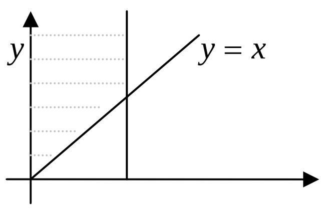
$$= \iint_{\substack{x \le z \\ x < y}} \frac{۱}{\lambda\mu} e^{-(\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu})} dydx$$

با توجه به شکل-۱-

$$= \int_۰^z \int_x^\infty \frac{۱}{\lambda\mu} e^{-(\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu})} dydx$$

$$= \int_۰^z \frac{۱}{\lambda} e^{-(\frac{۱}{\lambda} + \frac{۱}{\mu})x} dx$$

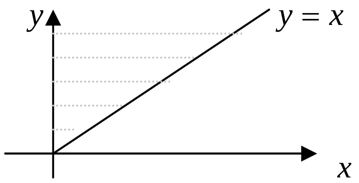
$$= \frac{\mu}{\mu + \lambda} (۱ - e^{-(\frac{۱}{\lambda} + \frac{۱}{\mu})z})$$



(شکل ۱ : ناحیه انتگرال گیری برای انتگرال دوگانه فوق) x z

با توجه به شکل- ۲-

$$P(X < Y) = \iint_{x<y} f_{(X,Y)}(x,y)dydx$$
$$= \int_{۰}^{\infty}\int_{x}^{\infty} \frac{۱}{\lambda\mu} e^{-(\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu})} dydx$$
$$= \int_{۰}^{\infty} \frac{۱}{\lambda} e^{-(\frac{۱}{\lambda}+\frac{۱}{\mu})x} dx$$
$$= \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$



(شکل۲: ناحیه هاشور زده ناحیه انتگرال گیری برای انتگرال دوگانه فوق است)

با جایگذاری عبارت های به دست آمده در (۱) داریم

$$P(Z \le z \mid W = ۱) = ۱ - e^{-(\frac{۱}{\lambda}+\frac{۱}{\mu})z}$$

با توجه به $(ii),(i)$ بدیهی است که

$$P(Z \le z \mid W = ۱) = P(Z \le z)$$

مشابه روابط بالا می توان نشان داد که

$$P(Z \le z \mid W = ۰) = P(Z \le z)$$

درنتیجه Z,W مستقل از هم هستند.

(ب) در این قسمت توزیع W را محاسبه می کنیم. توزیع Z در قسمت (الـف) به دست آمد.

$$P(W=1)=P(Z=X)=P(X<Y)$$

در قسمت (الف) دیدیم $P(X<Y)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$

پس

$$P(W=1)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

همچنین

$$P(W=0)=P(Y<X)=1-P(X<Y)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

درنتیجه W یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ است.

(ج) با استفاده از استقلال W,Z ، تابع درستنمایی برابر است با

$$\begin{aligned}L(\mu,\lambda)&=\prod_{i=1}^{n} f_{(Z,W)}(z_i,w_i)=\prod_{i=1}^{n} f_Z(z_i)f(w_i)\\&=\prod_{i=1}^{n}\{(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})e^{-(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})z_i}(\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{w_i}(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^{1-w_i}\}\\&=(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})^n e^{-(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})\sum_{i=1}^{n}z_i}(\frac{\mu}{\mu+\lambda})^{\sum_{i=1}^{n}w_i}(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^{n-\sum_{i=1}^{n}w_i}\end{aligned}$$

پس از کمی ساده کردن داریم

$$L(\mu,\lambda)=\lambda^{-n\overline{w}}\mu^{n(\overline{w}-1)}e^{-n(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})\overline{z}}$$

که $\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i$ و $\overline{w}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i$

داریم

$$\ell(\mu,\lambda)=\ln L(\mu,\lambda)=-n\overline{w}\ln\lambda+n(\overline{w}-1)\ln\mu-n(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})\overline{z}$$

اکنون نسبت به μ,λ مشتق می گیریم

$$\frac{\partial\ell(\mu,\lambda)}{\partial\lambda}=-\frac{n\overline{w}}{\lambda}+\frac{n\overline{z}}{\lambda^2}$$

و

$$\frac{\partial \ell(\mu,\lambda)}{\partial \mu} = \frac{n(\overline{w}-1)}{\mu} + \frac{n\overline{z}}{\mu^2}$$

با مساوی صفر قرار دادن معادلات بالا برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم به سادگی به دست می آیند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ell(\mu,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial \ell(\mu,\lambda)}{\partial \mu} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{\lambda} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} \\ \hat{\mu} = \dfrac{\overline{z}}{1-\overline{w}} \end{cases}$$

دو حالت فرین را جداگانه بررسی می کنیم:

حالت اول- $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 0$

حالت تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\mu,\lambda) = \mu^{-n} e^{-n(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})\overline{z}}$$

و

$$\ell(\mu,\lambda) = \ln L(\mu,\lambda) = -n\ln\mu - n(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})\overline{z}$$

$$\frac{\partial \ell(\mu,\lambda)}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \overline{z}$$

در این حالت برآوردگر ML **برای** λ **وجود ندارد.**

حالت دوم- $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 1$

مشابه حالت قبل به سادگی می توان نشان داد که $\hat{\lambda} = \overline{z}$.

در این حالت برآوردگر ML **برای** μ **وجود ندارد.**

■

۱۹- فرض کنید $f_i(x)$ **یک تابع چگالی احتمال با میانگین** μ_i **و واریانس** σ_i^2 ، $i=1,2$ ، **باشد. همچنین فرض کنید** Z_1 **و** Z_2 **یک نمونه تصادفی ۲ تایی از**

توزیعی با تابع چگالی مخلوط $f_\theta(x)=\theta f_1(x)+(1-\theta)f_2(x)$ ، $\theta\in[0,1]$ **باشد. اگر** μ_i **و** σ_i^2 **،** $i=1,2$ **، معلوم باشند،** MME **و** MLE **پارامتر** θ **را به دست آورید.**

حل:

- برآوردگر MM

ابتدا $E_\theta(Z_1)$ **را حساب می کنیم**

$$\mu_1=E_\theta(Z_1)=\int_{-\infty}^{\infty}z[\theta f_1(z)+(1-\theta)f_2(z)]dz$$
$$=\theta\int_{-\infty}^{\infty}zf_1(z)+(1-\theta)\int_{-\infty}^{\infty}zf_2(z)dz$$
$$=\theta\mu_1+(1-\theta)\mu_2$$

از حل معادله $\mu_1=M_1$ **داریم**

$$\bar{Z}=\theta\mu_1+(1-\theta)\mu_2$$

که $\bar{Z}=\dfrac{Z_1+Z_2}{2}$

بنابراین

$$\tilde{\theta}=\frac{\bar{Z}-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}$$

- برآوردگر ML

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{2}f_\theta(z_i)=\prod_{i=1}^{2}[\theta f_1(z_i)+(1-\theta)f_2(z_i)]$$
$$\ell'(\theta)=\sum_{i=1}^{2}\frac{f_1(z_i)-f_2(z_i)}{\theta f_1(z_i)+(1-\theta)f_2(z_i)}$$

همانطور که دیده می شود عبارت صریحی را برای برآوردگر ML نمی تـوان بـه دست آورد. بنابراین مقدار $\hat{\theta}$ را به ازای داده های یک نمونـه تـصادفی بایـد بـه کمک روشهای عددی محاسبه کنیم.

■

۲۰-فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگـالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = a(\theta)b(x) \quad , \quad 0 < x < \theta$$

به طوری که $a(.)$ و $b(.)$ دو تابع مثبت اند. در صورت وجود، MLE پـارامتر θ را به دست آورید.

حل:

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = [a(\theta)]^n \prod_{i=1}^{n} b(x_i) u(\theta - x_{(n)})$$

همانطور که ملاحظه می شود، اینکه $L(\theta)$ تابعی صعودی یا نزولی از θ است به سادگی تشخیص داده نمی شـود. زیـرا وضـعیت $a(\theta)$ نـسبت بـه θ از لحـاظ صعودی یا نزولی بودن مشخص نشده است.

توسط روابط زیر به سادگی می بینیم که $a(\theta)$ تابعی نزولی از θ است.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(x)dx \quad \Rightarrow \quad 1 = \int_0^\theta a(\theta)b(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad a(\theta) = \frac{1}{\int_0^\theta b(x)dx}$$

$$\Rightarrow \quad a'(\theta) = \frac{-b(\theta)}{(\int_0^\theta b(x)dx)^2} < 0$$

بنابراین $L(\theta)$ تابعی نزولی از θ است.

وقتی $L(\theta)$ ماکزیمم می شود که θ کمترین مقدار خود را بگیرد در نتیجه $\hat{\theta} = X_{(n)}$.

■

۲۱- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(\theta_1,\theta_2)$ ، $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty$ ، باشد. در صورت وجود، MME و MLE پارامترهای مجهول را به دست آورید.

حل:

- برآوردگرهای MM

به سادگی داریم

$$\mu_1 = E(X) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \frac{1}{3}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1\theta_2)$$

از حل معادلات $\begin{cases} \mu_1 = M_1 \\ \mu_2 = M_2 \end{cases}$ **برآوردگرهای گشتاوری را به دست می آوریم**

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2\overline{X} \\ \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1\theta_2 = 3\overline{X^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\theta}_1 = \overline{X} + \sqrt{3}(\overline{X^2} - \overline{X}^2) \\ \tilde{\theta}_2 = \overline{X} - \sqrt{3}(\overline{X^2} - \overline{X}^2) \end{cases}$$

- برآوردگرهای ML

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\underline{\theta}) = L(\theta_1,\theta_2) = (\theta_2 - \theta_1)^{-n} u(\theta_2 - x_{(n)}) u(x_{(1)} - \theta)$$

همانطور که مشاهده می شود $L(\underline{\theta})$ تابعی نزولی از θ_2 است. بنابراین وقتی نسبت به θ_2 ماکزیمم می شود که θ_2 کمترین مقدار خود را بگیرد بنابراین $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$.

همچنین $L(\underline{\theta})$ تابعی صعودی از θ_1 است. وقتی نسبت به θ_1 ماکزیمم می شود که θ_1 بیشترین مقدار خود را بگیرد بنابراین $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$.

■

۲۲- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $P(\theta)$، $\theta > 0$ باشد.

الف: MLE پارامتر θ را به دست آورید اگر حداقل یکی از مشاهدات مخالف صفر باشد.

ب: نشان دهید MLE پارامتر θ ، در صورتی که همه مشاهدات صفر باشند، وجود ندارد.

حل:

(الف) تابع درستنمایی برابراست با

$$L(\theta) = (\prod_{i=1}^{n} x_i!)^{-1} e^{-n\theta} \theta^{n\bar{x}}$$

$$\ell(\theta) = -\ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!) - n\theta + n\bar{x}\ln\theta$$

$$\ell'(\theta) = -n + \frac{n\bar{x}}{\theta}$$

$$\ell'(\theta) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\theta} = \bar{x}$$

(ب) در صورتی که همه مشاهدات صفرباشند تابع درستنمایی می شود

$$L(\theta) = e^{-n\theta}$$

همچنان که مشاهده می شود $\sup_{(0,\infty)} L(\theta) = 1$، که به ازای $\theta = 0$ حاصل شده است. اما چون صفر متعلق به فضای پارامتر یعنی $(0,\infty)$ نمی باشد، بنابراین با توجه به

تعریف تابع درستنمایی در این حالت می گوییم برآوردگر درستنمایی ماکزیمم وجود ندارد.

■

۲۳- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\frac{1}{\theta})$ باشد. MLE پارامتر $E_\theta(\frac{1}{\sqrt{X}})$ را به دست آورید .

حل:

ابتدا $E_\theta(\frac{1}{\sqrt{X}})$ را محاسبه می کنیم.

$$E_\theta(\frac{1}{\sqrt{X}}) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \int_0^\infty \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\theta}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}$$

برای به دست آوردن برآوردگر ML پارامتر $\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}$، کافی است ابتدا پارامتر θ را برآورد کرده و سپس از خاصیت پایایی برآوردگرهای ML استفاده کنیم.

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta) = \theta^{-n} e^{-\frac{n\bar{x}}{\theta}}$$

و

$$\ell(\theta) = -n\ln\theta - \frac{n\bar{x}}{\theta}$$

$$\ell'(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{n\bar{x}}{\theta^2}$$

$$\ell'(\theta)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\theta}=\overline{X}$$

بنابراین برآوردگر ML پارامتر $\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}$ می شود $\sqrt{\frac{\pi}{\overline{X}}}$.

■

۲٤- فرض کنید $U \sim N(0,1)$ ، $V \sim N(0,\theta)$ و $W \sim N(0,1)$ سه متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر $X=U+V$ و $Y=V+W$ باشند.

الف: نشان دهید (X,Y) دارای توزیع $N(0,0,1+\theta,1+\theta,\frac{\theta}{1+\theta})$ است.

ب: MLE پارامتر $h(\theta)=\frac{1}{1+2\theta}$ را بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی از (X,Y) به دست آورید.

حل:

(الف) ابتدا تابع مولد گشتاور توأم (X,Y) را به دست می آوریم

$$\begin{aligned} M_{(X,Y)}(t_1,t_2) &= E(e^{t_1X+t_2Y}) = E(e^{t_1(U+V)+t_2(V+W)}) \\ &= E(e^{t_1U+(t_1+t_2)V+t_2W}) \\ &= M_U(t_1).M_V(t_1+t_2).M_W(t_2) \end{aligned}$$

بنا به استقلال U,V,W

که $M_U(\cdot)$ ، $M_V(\cdot)$ و $M_W(\cdot)$ به ترتیب توابع مولد گشتاورهای W,V,U هستند.

با توجه به اینکه توزیعهای W,V,U نرمال هستند ، به سادگی داریم

$$\begin{aligned} M_{(X,Y)}(t_1,t_2) &= \exp\{\frac{t_1^2}{2}+\frac{1}{2}(t_1+t_2)^2\theta+\frac{t_2^2}{2}\} \\ &= \exp\{\frac{1}{2}[(1+\theta)t_1^2+(1+\theta)t_2^2+2\theta t_1t_2]\} \end{aligned}$$

با مقایسه با تابع مولد گشتاور توزیع نرمال توام به سادگی داریم

$$(X,Y) \sim N(0,0,1+\theta,1+\theta,\frac{\theta}{1+\theta})$$

(ب) ابتدا $\hat{\theta}$ را پیدا کرده و سپس با استفاده از خاصیت پایـایی ، MLE پـارامتر $h(\theta)$ را به دست می آوریم.

$$L(\theta)=\prod_{i=۱}^{n} f_{\theta}(x_i,y_i)$$
$$=(۲\pi)^{-n}(۱+۲\theta)^{-\frac{n}{۲}}\exp\{-\frac{(۱+\theta)^{۲}}{۲(۱+۲\theta)}[\frac{n\overline{x^{۲}}}{(۱+\theta)}+\frac{n\overline{y^{۲}}}{(۱+\theta)}-\frac{۲n\theta\overline{xy}}{(۱+\theta)^{۲}}]\}$$
$$=(۲\pi)^{-n}(۱+۲\theta)^{-\frac{n}{۲}}\exp\{-\frac{n(۱+\theta)}{۲(۱+۲\theta)}[\overline{x^{۲}}+\overline{y^{۲}}-\frac{۲\theta\overline{xy}}{(۱+\theta)}]\}$$

پس

$$\ell(\theta)=-n\ln ۲\pi-\frac{n}{۲}\ln(۱+۲\theta)-\frac{n(۱+\theta)}{۲(۱+۲\theta)}[\overline{x^{۲}}+\overline{y^{۲}}-\frac{۲\theta\overline{xy}}{(۱+\theta)}]$$

و

$$\ell'(\theta)=-\frac{n}{۱+۲\theta}-\frac{n}{۲}[-\frac{۱}{(۱+۲\theta)^{۲}}(\overline{x^{۲}}+\overline{y^{۲}}-\frac{۲\theta\overline{xy}}{(۱+\theta)})+\frac{۱+\theta}{۱+۲\theta}(-\frac{۲\overline{xy}}{(۱+\theta)^{۲}})]$$

بنابراین

$$\ell'(\theta)=۰ \qquad \Rightarrow$$
$$\frac{۱}{۱+۲\theta}+\frac{۱}{۲}[-\frac{۱}{(۱+۲\theta)^{۲}}(\overline{x^{۲}}+\overline{y^{۲}}-\frac{۲\theta\overline{xy}}{(۱+\theta)})+\frac{۱}{۱+۲\theta}(-\frac{۲\overline{xy}}{(۱+\theta)})]=۰$$

عبارت فوق را در $(۱+۲\theta)$ ضرب می کنیم و بعد از کمی محاسبات جبری داریم

$$\hat{\theta}=\frac{۱}{۴}(\overline{x^{۲}}+\overline{y^{۲}})+\frac{۱}{۲}\overline{xy}-\frac{۱}{۲}$$

درنتیجه

$$h(\hat{\theta})=\frac{۱}{۱+۲\hat{\theta}}=\frac{۲}{\overline{x^{۲}}+\overline{y^{۲}}+۲\overline{xy}}$$

■

۲۵- فرض کنید $X_{۱},...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با چگالی زیر باشد.

$$f_\theta(x) = (۱-\theta) + \frac{\theta}{۲\sqrt{x}} \quad , \quad ۰ < x < ۱ \quad , \quad ۰ < \theta < ۱$$

برآوردگرهای MM و ML پارامتر θ را به دست آورید.

حل:

- برآوردگر MM

$$\mu_{۱} = E(X) = \int_{۰}^{۱} x[(۱-\theta) + \frac{\theta}{۲\sqrt{x}}]dx = \frac{۱}{۲} - \frac{\theta}{۶}$$

از برابری $\mu_{۱} = M_{۱}$ داریم

$$\frac{۱}{۲} - \frac{\theta}{۶} = \overline{X} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\theta} = ۳(۱-۲\overline{X})$$

- برآوردگر ML

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n}[(۱-\theta) + \frac{\theta}{۲\sqrt{x_i}}]$$

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=۱}^{n} \ln[(۱-\theta) + \frac{\theta}{۲\sqrt{x_i}}]$$

$$\ell'(\theta) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱-۲\sqrt{x_i}}{\theta + ۲\sqrt{x_i}(۱-\theta)}$$

همانطور که ملاحظه می شود برای برآوردگر ML عبارت صریحی بدست نمی آید. برای به دست آوردن برآورد ML به ازای یک مقدار نمونه تصادفی از روشهای عددی کمک می گیریم.

■

۲۶-فرض کنید $X_{۱},...,X_{۴}$ یک نمونه تصادفی ٤ تایی از توزیع برنولی با پارامتر θ، به طوری که $\theta \in \{\frac{۱}{۴}, \frac{۲}{۴}, \frac{۳}{۴}\}$ ، باشد. براورد ML پارامتر θ را به دست آورید.

حل:

تابع درستنمایی می شود

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{4} f_\theta(x_i)=\prod_{i=1}^{4}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}=\theta^y(1-\theta)^{4-y}$$

که $y=\sum_{i=1}^{4}x_i$.

اکنون با توجه به مقدارهایی که y **می گیرد، برآورد درستنمایی را به دست می آوریم.**

الف- اگر $y=0$ **باشد، آنگاه** $L(\theta)=(1-\theta)^4$. **پس**

θ	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
$L(\theta)$	$(\frac{3}{4})^4$	$(\frac{1}{2})^4$	$(\frac{1}{4})^4$

در نتیجه $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$

ب- اگر $y=1$ **باشد، آنگاه** $L(\theta)=\theta(1-\theta)^3$. **پس**

θ	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
$L(\theta)$	$\frac{27}{256}$	$\frac{16}{256}$	$\frac{3}{256}$

در نتیجه $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$

ج- اگر $y=2$ **باشد، آنگاه** $L(\theta)=\theta^2(1-\theta)^2$. **پس**

θ	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{9}{256}$	$\frac{16}{256}$	$\frac{9}{256}$

$L(\theta)$			

در نتیجه $\hat{\theta}=\frac{۱}{۲}$

د- اگر $y=۳$ باشد، آنگاه $L(\theta)=\theta^{۳}(۱-\theta)$. پس

θ	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$
$L(\theta)$	$\frac{۳}{۲۵۶}$	$\frac{۱۶}{۲۵۶}$	$\frac{۳}{۲۵۶}$

در نتیجه $\hat{\theta}=\frac{۳}{۴}$

ه- اگر $y=۴$ باشد، آنگاه $L(\theta)=\theta^{۴}$.

در نتیجه $\hat{\theta}=\frac{۳}{۴}$

■

۲۷- فرض کنید $X_{۱},\dots,X_{n}$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_{\theta}(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳}\exp\{-|x-\theta|\} & x<\theta\\ \frac{۱}{۳} & \theta\le x<\theta+۱\\ \frac{۱}{۳}\exp\{-|x-(\theta+۱)|\} & \theta+۱\le x\end{cases}$$

برآوردگرهای MM و ML پارامتر θ را به دست آورید.

حل:

- برآوردگر MM

$$\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\theta(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{3} x e^{-|x-\theta|}dx + \int_{\theta}^{\theta+1} \frac{1}{3} x dx + \int_{\theta+1}^{\infty} \frac{1}{3} x e^{-|x-(\theta+1)|}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{3} x e^{-(x-\theta)}dx + \int_{\theta}^{\theta+1} \frac{1}{3} x dx + \int_{\theta+1}^{\infty} \frac{1}{3} x e^{-(x-(\theta+1))}dx$$
$$= \frac{1}{3}[e^{\theta} \int_{-\infty}^{\theta} x e^{-x}dx + \int_{\theta}^{\theta+1} x dx + e^{\theta+1} \int_{\theta+1}^{\infty} x e^{-x}dx]$$

با محاسبه هر یک از انتگرال های بالا به سادگی داریم

$$\mu_1 = E(X) = \theta + \frac{1}{2}$$

از برابری $\mu_1 = M_1$ برآورد گشتاوری به صورت زیر به دست می آید

$$\tilde{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{2}$$

- برآوردگر ML

ابتدا فرض کنید $n=1$ باشد.

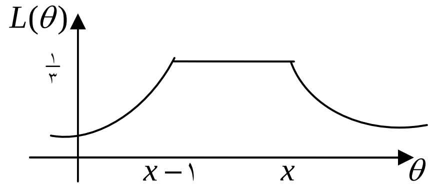
برای مقدار مشاهده شده x تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta) = \frac{1}{3}\exp\{-|x-\theta| I_{(x<\theta)} - |x-(\theta+1)| I_{(\theta+1\le x)}\}$$
$$= \frac{1}{3}\exp\{(x-\theta)I_{(x<\theta)} - (x-(\theta+1))I_{(\theta+1\le x)}\}$$
$$= \frac{1}{3}\exp\{(x-\theta)I_{(x<\theta)} - (x-(\theta+1))I_{(\theta\le x-1)}\}$$

اکنون

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x+\theta+1} & \theta \le x-1 \\ \frac{1}{3} & x-1 < \theta \le x \\ \frac{1}{3}e^{x-\theta} & x < \theta \end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع درستنمایی به صورت زیر می شود



با توجه به نمودار به سادگی ملاحظه می شود که هر مقدار $\hat{\theta}$ که از بازه $[x-۱,x]$ انتخاب شود، برآورد درستنمایی برای θ خواهد بود. پس برای هر $\alpha \in [۰,۱]$ ،

$$\hat{\theta}_\alpha = \alpha X + (۱-\alpha)(X-۱)$$

می تواند به عنوان یک MLE پارامتر θ انتخاب شود.

اکنون فرض کنید $n=۲$ باشد.

تابع درستنمایی به ازای مقادیر مشاهده شده $x_۱, x_۲$ برابر است با

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \frac{۱}{۹}\exp\{-\sum_{i=۱}^{۲} |x_i-\theta| I_{(x_i<\theta)} - \sum_{i=۱}^{۲} |x_i-(\theta+۱)| I_{(\theta+۱\le x_i)}\} \\
&= \frac{۱}{۹}\exp\{\sum_{i=۱}^{۲} (x_i-\theta) I_{(x_i<\theta)} - \sum_{i=۱}^{۲} (x_i-(\theta+۱)) I_{(\theta+۱\le x_i)}\} \\
&= \frac{۱}{۹}\exp\{\sum_{i=۱}^{۲} (x_i-\theta) I_{(x_i<\theta)} - \sum_{i=۱}^{۲} (x_i-(\theta+۱)) I_{(\theta\le x_i-۱)}\}
\end{aligned}$$

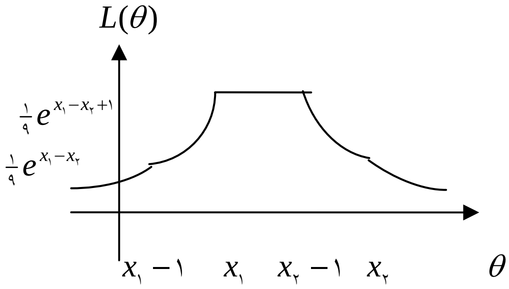
فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ به ترتیب صعودی باشند، یعنی $x_۱ < x_۲$

دو حالت ممکن زیر را در نظر می گیریم:

(الف) $x_۱ - ۱ < x_۱ < x_۲ - ۱ < x_۲$

(ب) $x_۱ - ۱ < x_۲ - ۱ < x_۱ < x_۲$

در حالت (الف) به سادگی نمودار $L(\theta)$ به صورت زیر به دست می آید.



زیرا

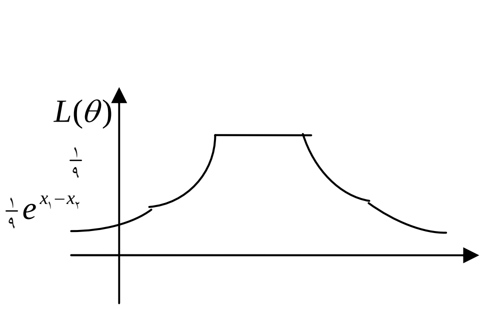
$$L(\theta)=\begin{cases}\frac{۱}{۹}e^{-(x_۱+x_۲)+۲(\theta+۱)} & \theta\le x_۱-۱\\ \frac{۱}{۹}e^{-x_۲+\theta+۱} & \mathrm{x}_1\text{ -}1<\theta\le \mathrm{x}_1\\ \frac{۱}{۹}e^{x_۱-x_۲+۱} & x_۱<\theta\le x_۲-۱\\ \frac{۱}{۹}e^{x_۱-\theta} & x_۲-۱<\theta\le x_۲\\ \frac{۱}{۹}e^{x_۱+x_۲-۲\theta} & x_۲<\theta\end{cases}$$

بنابراین برآورد درستنمایی هر مقدار در بازه $[x_۱,x_۲-۱]$ است. پس برای هر $\alpha\in[۰,۱]$،

$$\hat{\theta}_\alpha=\alpha(X_۲-۱)+(۱-\alpha)X_۱$$

می تواند به عنوان یک MLE پارامتر θ انتخاب شود.

مشابه قسمت (الف) در حالت (ب) نیز نمودار $L(\theta)$ به صورت زیر به دست می آید.



$x_1-1 \quad x_2-1 \quad\quad x_1 \quad x_2 \quad\quad\quad \theta$

بنابراین برآورد درستنمایی هر مقدار در بازه $[x_2-1, x_1]$ است. پس برای هر $\alpha \in [0,1]$،

$$\hat{\theta}_\alpha = \alpha X_1 + (1-\alpha)(X_2-1)$$

می تواند به عنوان یک MLE پارامتر θ انتخاب شود.

اکنون به طور کلی فرض کنید n مشاهده $x_1, x_2, ..., x_n$ را داریم. مقدارهای $x_1-1, x_2-1, ..., x_n-1$ را تشکیل می دهیم. این $2n$ مشاهده را با هم در نظر بگیرید و آنها را به ترتیب صعودی مرتب کنید مثلاً $y_1 < y_2 < ... < y_{2n}$

اکنون بازه $[y_n, y_{n+1}]$ را در نظر بگیرید.هر مقدار در این بازه یک برآورد درستنمایی است و برای هر $\alpha \in [0,1]$ ،

$$\hat{\theta}_\alpha = \alpha Y_{n+1} + (1-\alpha) Y_n$$

یک برآوردگر ML خواهد بود.

این مطلب در حالت $n=1$ و $n=2$ بررسی شد. به ازای $n \geq 3$ نیز می توان به سادگی این مطلب را نشان داد.

(به ازای هر $n \geq 3$ ، مشابه حالت های $n=1$ و $n=2$ دیده می شود که برای مقادیر $\theta \leq y_n$، تابع $L(\theta)$ تابعی صعودی و برای مقادیر $\theta \geq y_{n+1}$ ، تابع $L(\theta)$ تابعی نزولی است. برای $\theta \in [y_n, y_{n+1}]$، $L(\theta)$ ثابت است. بنابراین θ هیچگاه دارای برآورد یکتا نیست.)

■

۲۸- برای برآورد نسبت دانشجویانی که سیگار می کشند، یک نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی انتخاب می شود.اگر از این نمونه ۳۵ نفر سیگاری باشند، برآورد ML سیگاریها را به دست آورید.

حل:

متغیر تصادفی X را تعداد افراد سیگاری در ۱۰۰ نفر تعریف می کنیم. بدیهی است که $X \sim B(100, p)$، که p احتمال سیگار کشیدن هر فرد است.

تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta) = \binom{100}{x} p^x (1-p)^{100-x}$$

به سادگی دیده می شود که برآوردگر درستنمایی می شود

$$\hat{p} = \frac{X}{100}$$

با توجه به مقدار مشاهده شده $x = 35$، برآورد درستنمایی $\hat{p} = 0/35$ است.

■

۲۹- تعداد موفقیتها در ۷ بار مستقل از آزمایش برنولی با پارامتر θ برابر ٤ شده است. اگر $\theta \in \{0/1, 0/2, ..., 0/9\}$ باشد، برآورد ML پارامتر θ را به دست آورید.

حل:

متغیر تصادفی X را تعداد موفقیت ها در ۷ بار آزمایش برنولی با پارامتر θ در نظر می گیریم. X دارای توزیع $B(7, \theta)$ است.

با توجه به مقدار مشاهده شده $x = 4$ تابع درستنمایی می شود

$$L(\theta) = \binom{7}{4} \theta^4 (1-\theta)^3$$

برآورد ML مقداری از θ، $\theta \in \{۰/۱, ۰/۲,...,۰/۹\}$، است که $L(\theta)$ را ماکزیمم می کند.

مقدار $L(\theta)$ به ازای مقادیر مختلف θ در جدول زیر محاسبه شده است.

θ	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/٤	۰/٥	۰/٦	۰/۷	۰/۸	۰/۹
$L(\theta)$	۰/۰۰۲۵	۰/۰۲۸	۰/۰۹۷	۰/۱۹۳	۰/۲۷۳۵	۰/۲۹	۰/۲۲۶	۰/۱۱۴	۰/۰۲۲

بنابراین برآورد درستنمایی ، $\hat{\theta} = ۰/۶$است. ■

۳۰- شخصی هر روز به تصادف حداقل θ دقیقه و حداکثر ۱۵ دقیقه ، برای رفتن به محل کار خود، منتظر تاکسی می شود. هفته گذشته مدت انتظار او ۱۳ ، ۱۱ ، ۱۰ ،۹ ، ٦، ٥ و ۳ دقیقه بوده است. برآورد ML و MM پارامتر θ را به دست آورید.

حل:

متغیر تصادفی $\mathbf{X}$ را مدت زمان انتظار شخص برای سوار شدن به تاکسی تعریف میکنیم. $\mathbf{X}$ دارای توزیع $U(\theta,۱۵)$ است. با فرض گرفتن نمونه تصادفی $X_۱, X_۲,..., X_n$ از این توزیع برآوردگرهای MLو MM پارامتر θ را به دست می آوریم.

به سادگی داریم

$$E(X) = \frac{\theta + ۱۵}{۲}$$

از برابری $E(X) = \overline{X}$، برآوردگر گشتاوری θ را به دست می آوریم.

$$\text{برآورد گر گشتاوری} = \tilde{\theta} = ۲\overline{X} - ۱۵$$

با توجه به مقادیر عددی ۱۳، ۱۱، ۱۰، ۹، ٦، ۵ و ۳ مقدار $\bar{x} = ۸/۱۴$ و برآورد گشتاوری $\tilde{\theta} = ۱.۲۸$ است.

اکنون برای به دست آوردن برآوردگر درستنمایی، تابع درستنمایی را تشکیل می دهیم.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(15-\theta)} I_{(\theta,15)}(x_i)$$
$$= (15-\theta)^{-n} u(x_{(1)} - \theta) u(15 - x_{(n)})$$

همچنانکه دیده می شود تابع درستنمایی، تابعی صعودی از θ است. بنابراین وقتی ماکزیمم می شود که θ بیشترین مقدار خود را بگیرد در نتیجه برآوردگر درستنمایی $\hat{\theta} = X_{(1)}$ می شود. برآورد درستنمایی با توجه به مقادیر عددی داده شده $x_{(1)} = ۳$ است. ■

مسائل فصل چهارم

برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس

۲- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(\theta_1,\theta_2)$ باشد. UMVUE پارامترهای $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ و $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ را به دست آورید.

حل:

UMVUE برای $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

راه حل اول- در توزیع $U(\theta_1,\theta_2)$ ، آماره $T=\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)$ بسنده کامل است.(فصل دوم سوال ۳۷ قسمت ii.)

برای پیدا کردن UMVUE برای $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ ، حدس می‌زنیم بتوانیم از ترکیب خطی از $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ استفاده کرده و برآوردگر نااریب برای $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ را به دست آوریم. با توجه به اینکه X_i ، $i=1,2,\dots,n$ ، دارای توزیع $U(\theta_1,\theta_2)$ است، متغیر تصادفی $Y_i=\frac{X_i-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$ ، $i=1,2,\dots,n$ ، دارای توزیع $U(0,1)$ می‌شود و داریم

$$E(Y_{(1)})=\frac{1}{n+1},E(Y_{(n)})=\frac{n}{n+1}$$

درنتیجه

$$E(Y_{(1)}+Y_{(n)})=1$$

از طرفی

$$Y_{(1)}=\frac{X_{(1)}-\theta_1}{\theta_2-\theta_1} \quad \text{و} \quad Y_{(n)}=\frac{X_{(n)}-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$$

پس

$$E(\frac{X_{(1)}-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}+\frac{X_{(n)}-\theta_1}{\theta_2-\theta_1})=1$$

$$\Rightarrow \qquad E(\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2})=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

برآوردگر $\frac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$ نااریب برای $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ و تابعی از آماره بسنده کامل T می‌باشد. بنابراین UMVUE برای $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ می‌شود.

راه حل دوم- با استفاده از امید ریاضی، برآوردگر نااریب $\overline{X}$ به شرط آماره بسنده کامل $T=(X_{(1)},X_{(n)})$ ، برآوردگر UMVU برای $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ را پیدا می‌کنیم.

$$E(\overline{X})=E(X_1)=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

فرض کنید $g(T)=E\left[\overline{X}|T\right]$، اکنون $g(T)$ را محاسبه می‌کنیم.

فرض کنید $t=(x_{(1)},x_{(n)})$

$$g(t)=E\left[\overline{X}|T=t\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i|T=t\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[E\left(X_{(1)}+X_{(n)}+\sum_{i=2}^{n-1}X_{(i)}|T=t\right)\right]$$

$$=\frac{۱}{n}\left[x_{(۱)}+x_{(n)}+E\left(\sum_{i=۲}^{n-۱}X_{(i)}\middle|T=t\right)\right]$$

برای محاسبه $E\left(\sum_{i=۲}^{n-۱}X_{(i)}\middle|T=t\right)$ ابتدا به محاسبه چگالی شرطی $f(x_{(۲)},x_{(۳)},\ldots,x_{(n-۱)}|t)$ می‌پردازیم.

$$f_{(X_{(۱)},\ldots,X_{(n)})}(x_{(۱)},\ldots,x_{(n)})=\frac{n!}{(\theta_۲-\theta_۱)^n}\qquad \theta_۱<x_{(۱)}<x_{(۲)}<\ldots<x_{(n)}<\theta_۲$$

پس

$$f_{(X_{(۲)},\ldots,X_{(n-۱)})}(x_{(۲)},\ldots,x_{(n-۱)}|t)=\frac{f_{(X_{(۱)},\ldots,X_{(n)})}(x_{(۱)},\ldots,x_{(n)})}{f_{(X_{(۱)},X_{(n)})}(x_{(۱)},x_{(n)})}$$

$$=\frac{\dfrac{n!}{(\theta_۲-\theta_۱)^n}}{n(n-۱)\dfrac{(x_{(n)}-x_{(۱)})^{n-۲}}{(\theta_۲-\theta_۱)^n}}$$

$$=\frac{(n-۲)!}{(x_{(n)}-x_{(۱)})^{n-۲}}$$

چگالی شرطی فوق، مانند چگالی توأم آماره های ترتیبی، $(n-۲)$ متغیر تصادفی از توزیع $U(x_{(۱)},x_{(n)})$ است. با فرض اینکه $Y_۱,Y_۲,\ldots,Y_{n-۲}$ یک نمونه تصادفی $(n-۲)$ از توزیع $U(x_{(۱)},x_{(n)})$ هستند داریم

$$E\left(\sum_{i=۲}^{n-۱}X_{(i)}\middle|T=t\right)=E\left(\sum_{i=۱}^{n-۲}Y_{(i)}\right)=E\left(\sum_{i=۱}^{n-۲}Y_i\right)=(n-۲)\frac{(x_{(n)}+x_{(۱)})}{۲}$$

$$\Rightarrow\qquad g(t)=\frac{۱}{n}\left[x_{(۱)}+x_{(n)}+(n-۲)\frac{x_{(۱)}+x_{(n)}}{۲}\right]=\frac{x_{(۱)}+x_{(n)}}{۲}$$

بنابراین $g(T)=\dfrac{X_{(۱)}+X_{(n)}}{۲}$ ، برآوردگر UMVU برای پارامتر $\dfrac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}$ است.

UMVUE برای $\dfrac{\theta_۱}{\theta_۲}$

برای پیدا کردن UMVUE برای $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ از روش مشتقگیری استفاده می‌کنیم. فرض کنید $h(X_{(1)}, X_{(n)})$ برآوردگر نااریب $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ باشد. بنابراین داریم

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\theta_1}^{x_{(n)}} h(x_{(1)}, x_{(n)}) f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_{(1)}, x_{(n)}) dx_{(1)} dx_{(n)}$$

که در آن $f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_{(1)}, x_{(n)})$ تابع چگالی احتمال توأم $(X_{(1)}, X_{(n)})$ میباشد که به صورت زیر است

$$\theta_1 < x_{(1)} < x_{(n)} < \theta_2$$

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_{(1)}, x_{(n)}) = n(n-1)\frac{(x_{(n)} - x_{(1)})^{n-2}}{(\theta_2 - \theta_1)^n}$$

بنابراین

$$\frac{\theta_1}{\theta_2}(\theta_2 - \theta_1)^n = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\theta_1}^{x_{(n)}} n(n-1) h(x_{(1)}, x_{(n)})(x_{(n)} - x_{(1)})^{n-2} dx_{(1)} dx_{(n)}$$

با کمک دستور لایپزیک برای مشتقگیری از انتگرال[1]، از دو طرف تساوی فوق ابتدا نسبت به θ_2 و سپس نسبت به θ_1 مشتق می‌گیریم آنگاه عبارت زیر به سادگی حاصل می‌شود

$$h(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{n\theta_2^2}(\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{\theta_2}(\theta_2^2 - \theta_1^2) + (n-1)\frac{\theta_1}{\theta_2}\right] \quad \forall \theta_1 < \theta_2$$

---

[1] دستور لایپزیک برای مشتقگیری از انتگرال به صورت زیر است:

فرض کنید

$$I(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x;t) dx$$

که در آن f(. ; .) ، a(.) و b(.) مشتق پذیر فرض شده اند. در این صورت :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(b(t);t)\frac{db(t)}{dt} - f(a(t);t)\frac{da(t)}{dt}$$

بنابراین

$$h(X_{(1)},X_{(n)})=$$
$$\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{nX_{(n)}^{2}}(X_{(n)}-X_{(1)})^{2}-\frac{1}{X_{(n)}}(X_{(n)}^{2}-X_{(1)}^{2})+(n-1)\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}\right]$$

برآوردگر UMVU برای $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ است.

■

۳- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. نشان دهید :

الف) $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ برآوردگر نااریب μ است اگر و فقط اگر $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ باشد.

ب) $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ برآوردگر نااریب μ با کمترین واریانس است اگر و فقط اگر $a_i=\frac{1}{n}$، $i=1,2,\ldots,n$، باشد.

حل:

(الف)

$$E(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=\mu \iff \sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)=\mu \iff \sum_{i=1}^{n}a_i\mu=\mu \iff \sum_{i=1}^{n}a_i=1$$

(ب)

کفایت: ابتدا فرض کنید $a_i=\frac{1}{n}$، $i=1,2,\ldots,n$، باشد. نشان می‌دهیم $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ برآوردگر نااریب μ با کمترین واریانس است.

به سادگی داریم

$$E(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=\mu$$

پس $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ برآوردگر نااریب μ است.

با توجه به برابری $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ و استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز داریم

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{n}$$

اکنون ملاحظه می‌شود که با انتخاب $a_i = \frac{1}{n}$ ، $i = 1,2,...,n$، کمترین مقدار واریانس برای $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ به دست می‌آید. بنابراین با فرض $a_i = \frac{1}{n}$، $i = 1,2,...,n$، $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ برآوردگر نااریب μ با کمترین واریانس است.

لزوم:

فرض کنید $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ برآوردگر نااریب μ با کمترین واریانس است.

پس

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \mu \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

همچنین داریم

$$\delta = Var(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

می خواهیم a_i، $i = 1,...,n$، را طوری پیدا کنیم که δ می‌نیمم شود.

می نویسیم

$$\delta = \sigma^2[a_1^2 + ... + a_{n-1}^2 + (1 - a_1 - ... - a_{n-1})^2]$$

با مشتق گیری نسبت به $a_1,...,a_{n-1}$ داریم

$$\frac{\partial\delta}{\partial a_i}=2\sigma^2[a_i-(1-a_1-\ldots-a_{n-1})] \qquad i=1,\ldots,n-1$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial a_i}=0 \qquad \Rightarrow \qquad a_i=1-a_1-\ldots-a_{n-1}=a_n \qquad i=1,\ldots,n-1 \qquad (1)$$

پس

$$a_i=a_n \qquad i=1,\ldots,n$$

با گرفتن مجموع از طرفین رابطه بالا داریم ، $a_n=\frac{1}{n}$

درنتیجه با توجه به رابطه (۱) داریم $a_i=\frac{1}{n}$، $i=1,2,\ldots,n$**، و بنابراین نتیجه حاصل می‌شود.**

■

٤- فرض کنید X_1,X_2 **یک نمونه تصادفی ۲تایی از توزیع** $E(\theta)$ **باشد.**

الف) یک برآوردگر نااریب برای θ **به دست آورید.**

ب) بر مبنای میانگین هندسی X_1,X_2 **، یعنی** $\sqrt{X_1X_2}$**، یک برآوردگر نااریب برای** θ **به دست آورید.**

ج) کدام یک از برآوردگرهای نااریب به دست آمده در فوق را بر اساس معیار MSE ترجیح میدهید.

حل: $f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} \qquad x>0 \;,\quad \theta>0$

(الف) به سادگی داریم

$$E(\overline{X})=\theta$$

بنابراین $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ **یک برآوردگر نااریب برای** θ **است.**

(ب)

$$E(\sqrt{X_1})=\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\int_0^\infty\frac{1}{\theta}x^{\frac{3}{2}-1}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=$$

$$= \Gamma(\frac{3}{2})\sqrt{\theta}\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})\theta^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \quad = \frac{\sqrt{\theta\pi}}{2}$$

چون X_1, X_2 مستقل هستند داریم

$$E(\sqrt{X_1X_2}) = E(\sqrt{X_1})E(\sqrt{X_2}) = \frac{\theta\pi}{4}$$

درنتیجه

$$E(T) = \theta$$

که $T = \frac{4}{\pi}\sqrt{X_1X_2}$.

بنابراین T یک برآوردگر ناااریب برای θ بر مبنای $\sqrt{X_1X_2}$ می‌باشد.

(ج)

$$MSE_\theta(\bar{X}) = Var_\theta(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{2}$$

چون X_1, X_2 مستقل هستند داریم

$$E(T^2) = \frac{16}{\pi^2}E(X_1X_2) = \frac{16}{\pi^2}E(X_1)E(X_2) = \frac{16}{\pi^2}\theta^2$$

درنتیجه

$$MSE_\theta(T) = Var(T) = \frac{16}{\pi^2}\theta^2 - \theta^2 = \theta^2(\frac{16}{\pi^2} - 1)$$

با توجه به اینکه $\frac{16}{\pi^2} - 1 < \frac{1}{2}$ ، بنابراین بر اساس ملاک MSE ، برآوردگر $\bar{X}$ ترجیح داده می‌شود.

■

۵- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(۰,\theta)$ باشد. برآوردگرهای $T_۱(\underline{X}) = ۲\overline{X}$ و $T_۲(\underline{X}) = X_{(n)}$ را برای θ در نظر بگیرید.

الف) MSE برآوردگرهای $T_۱$ و $T_۲$ را به دست آورید.

ب) نشان دهید برای $n = 2$ ، MSE برآوردگرها با هم برابراست.

ج) برای $n = ۳$ کدام یک از برآوردگرها را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟

حل:

(الف) به سادگی داریم

$$E(\overline{X}) = E(X_۱) = \frac{\theta}{۲} \quad , \quad E(X_{(n)}) = \frac{n\theta}{n+۱}$$

پس

$$E(T_۱) = \theta \quad , \quad E(T_۲) = \frac{n}{n+۱}\theta$$

درنتیجه

$$MSE_\theta(T_۱) = Var_\theta(T_۱) = ۴Var_\theta(\overline{X}) = \frac{\theta^۲}{۳n}$$

و

$$MSE_\theta(T_۲) = Var(X_{(n)}) + \left(E(X_{(n)}) - \theta\right)^۲$$
$$= \frac{n}{(n+۲)(n+۱)^۲}\theta^۲ + \frac{۱}{(n+۱)^۲}\theta^۲$$
$$= \frac{۲}{(n+۱)(n+۲)}\theta^۲$$

(ب) با جایگذاری $n = ۲$ در MSE های قسمت (الف) داریم

$$MSE_\theta(T_۱) = \frac{\theta^۲}{۶} \quad , \quad MSE_\theta(T_۲) = \frac{\theta^۲}{۶}$$

(ج)

$$MSE_\theta(T_۱) = \frac{\theta^۲}{۹} \quad , \quad MSE_\theta(T_۲) = \frac{۱}{۱۰}\theta^۲$$

با توجه به اینکه $\frac{۱}{۱۰} < \frac{۱}{۹}$، برآوردگر $T_۲$ بر اساس ملاک MSE ترجیح دارد.

■

۶- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(\theta,۲\theta)$ باشد.

الف) MLE پارامتر θ ، یعنی $\hat{\theta}$ را به دست آورید.

ب) بر اساس $\hat{\theta}$، یک برآوردگر نااریب برای θ به دست آورید و آن را $\delta(X)$ بنامید.

ج) MSE برآوردگرهای $\hat{\theta}$ و $\delta(X)$ را به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

حل:

$$f(x_i;\theta) = \frac{۱}{\theta} \qquad ; \qquad \theta < x < ۲\theta$$

(الف) تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^{-n} u(x_{(۱)} - \theta) u(\theta - \frac{x_{(n)}}{۲})$$

تابع درستنمایی نسبت به θ وقتی ماکزیمم می‌شود که θ کمترین مقدار خود را بگیرد، بنابراین

$$\hat{\theta} = \frac{۱}{۲} X_{(n)}$$

(ب)

$$E(\hat{\theta}) = \frac{۱}{۲} E(X_{(n)}) = \frac{۱}{۲}\left[\theta E(\frac{X_{(n)} - \theta}{\theta}) + \theta\right] = \frac{۱}{۲}\left[\frac{n}{n+۱}\theta + \theta\right] = \frac{۲n+۱}{۲(n+۱)}\theta$$

بنابراین $\delta(\underline{X}) = \frac{۲(n+۱)}{۲n+۱}\hat{\theta}$ برآوردگر نااریب برای θ، براساس $\hat{\theta}$ می‌باشد.

(ج) به سادگی داریم

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{n}{\theta^n}(x-\theta)^{n-۱} \quad ; \quad \theta < x < ۲\theta$$

و

$$E(X_{(n)}^{۲}) = \int_{\theta}^{۲\theta} x^{۲} \frac{n}{\theta^n}(x-\theta)^{n-۱}\,dx$$

تغییر متغیر $u = x - \theta$

$$= \frac{n}{\theta^n}\int_{۰}^{\theta}(u^{۲}+\theta)u^{n-۱}\,du$$
$$= \frac{۴n^{۲}+۸n+۲}{(n+۱)(n+۲)}\theta^{۲}$$

پس

$$Var_\theta(X_{(n)}) = E(X_{(n)})^{۲} - E^{۲}(X_{(n)})$$
$$= \frac{n}{(n+۱)^{۲}(n+۲)}\theta^{۲}$$

درنتیجه

$$MSE_\theta(\hat{\theta}) = Var_\theta(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta})-\theta)^{۲}$$
$$= \frac{۱}{۴}Var_\theta(X_{(n)}) + \left(\frac{۲n+۱}{۲(n+۱)}\theta - \theta\right)^{۲}$$
$$= \frac{۱}{۲(n+۱)(n+۲)}\theta^{۲}$$

و

$$MSE_\theta(\delta) = Var_\theta(\delta) = \frac{(n+۱)^{۲}}{(۲n+۱)^{۲}}Var_\theta(X_{(n)})$$
$$= \frac{n}{(۲n+۱)^{۲}(n+۲)}\theta^{۲}$$

به سادگی دیده می‌شود که

$$MSE_\theta(\delta) < MSE_\theta(\hat{\theta})$$

■

۷- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی دو تایی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد. آماره های زیر را در نظر گیرید.

$$T_1=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2 \quad , \quad T_2=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2 \quad , \quad T_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$$

الف) نشان دهید T_i ، $i=1,2,3$ ، برآوردگر نااریب θ است.

ب) برای تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $3\theta^2$ ، تابع مخاطره برآوردگرها را محاسبه کنید.

حل:

(الف) با توجه به اینکه $E(X_1)=E(X_2)=\theta$، به سادگی داریم

$$E(T_1)=E(T_2)=E(T_3)=\theta$$

(ب)

$$Var(T_1)=\frac{5}{9} \quad , \quad Var(T_2)=\frac{5}{8} \quad , \quad Var(T_3)=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$MSE_\theta(T_1)=E_\theta\left[3\theta^2(T_1-\theta)^2\right]=3\theta^2E_\theta(T_1-\theta)^2=3\theta^2Var_\theta(T_1)=\frac{5}{3}\theta^2$$

بطور مشابه داریم

$$MSE_\theta(T_2)=\frac{15}{8}\theta^2 \quad , \quad MSE_\theta(T_3)=\frac{3}{2}\theta^2$$

درنتیجه

$$MSE(T_3)<MSE(T_1)<MSE(T_2)$$

■

۸- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد. تحقیق کنید آیا $e^{-\bar{X}}$ یک برآوردگر نااریب $e^{-\theta}$ است؟ در صورت منفی بودن جواب، یک برآوردگر نااریب $e^{-\theta}$ را به دست آورید.

حل:

مــــی دانــــیم $\overline{X}$ دارای توزیـــــع $N(\theta,\frac{1}{n})$ بـــــا تــــابع مولــــد گــــشتاور $M_{\overline{X}}(t)=\exp\{\theta t+\frac{t^2}{n}\}$ است.

بنابراین

$$E(e^{-\overline{X}})=M_{\overline{X}}(-1)=e^{-\theta+\frac{1}{2n}}$$

درنتیجه $e^{-\overline{X}}$ برآوردگر نااریب $e^{-\theta}$ نمی باشد. به سادگی دیـده مـی‌شـود کـه $e^{-\overline{X}-\frac{1}{2n}}$ برای $e^{-\theta}$ نااریب است.

■

۹- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تـصادفی n تـایی از توزیـع $N(\mu,\sigma^2)$، $\theta=(\mu,\sigma^2)$ نامعلوم، باشد. اگر برای مقدار مثبت و ثابـت c ، $\tau(\theta)$ در رابطـه زیر صدق کند، UMVUE پارامتر $\tau(\theta)$ را به دست آورید

$$\int_{\tau(\theta)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}dx=c$$

حل:

ابتدا $\tau(\theta)$ را به دست می‌آوریم

$$c=P(X>\tau(\theta))=P\left(Z>\frac{\tau(\theta)-\mu}{\sigma}\right)$$

بنابراین

$$\frac{\tau(\theta)-\mu}{\sigma}=z_c \quad\Rightarrow\quad \tau(\theta)=\mu+z_c\sigma$$

که z_c چندک مرتبه c ام در توزیع نرمال استاندارد است.

اکنون UMVUE برای $\tau(\theta)$ را به دست می‌آوریم. می‌دانیم در توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ آماره $(\overline{X},S^{۲})$ بسنده کامل برای θ است، از طرفی به سادگی داریم

$$E(\overline{X}+C_n z_c S)=\mu+z_c\sigma$$

که در آن

$$C_n=\sqrt{\frac{۲}{n-۱}}\frac{\Gamma(\frac{n}{۲})}{\Gamma(\frac{n-۱}{۲})}$$

بنابراین $\overline{X}+C_n z_c S$ برآوردگر UMVU برای $\mu+z_c\sigma$ است.

یادآوری: $E(S)=E(\sqrt{S^{۲}})=\frac{\sigma}{\sqrt{n-۱}}E\left(\sqrt{\frac{(n-۱)S^{۲}}{\sigma^{۲}}}\right)=\frac{\sigma}{n-۱}E(\sqrt{Y})=C_n\sigma$ که $Y\sim\chi^{۲}_{(n-۱)}$.

■

۱۰- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu,\sigma^{۲})$ باشد، نشان دهید $E(X_۱|\overline{X})$ یک برآوردگر MVU برای μ است.

حل:

راه حل اول- در توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ آماره $(\overline{X},S^{۲})$ بسنده کامل برای $\underline{\theta}=(\mu,\sigma^{۲})$ است و $\overline{X}$ نااریب برای μ و تابعی از آماره بسنده کامل می‌باشد. بنابراین UMVUE برای μ است.

از طرفی چون آماره $E(X_1|\overline{X})$ نااریب برای μ و تابعی از آماره بسنده کامل می‌باشد، بنابراین UMVUE برای μ است. اکنون نشان می‌دهیم $\overline{X}$ $E(X_1|\overline{X})=$.

می دانیم $(X_1,\overline{X})$ دارای توزیع نرمال توأم است.(این مطلب با استفاده از روش تابع مولد گشتاور به سادگی ثابت می‌شود.) و

$$Cov(X_1,\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

اکنون داریم

$$E(X_1|\overline{X}=\bar{x})=E(X_1)+\frac{Cov(X_1,\overline{X})}{\sigma^2_{\bar{x}}}(\bar{x}-E(\overline{X}))=\mu+\frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{n}}(\bar{x}-\mu)=\bar{x}$$

درنتیجه

$$E(X_1|\overline{X})=\overline{X}$$

راه حل دوم- همانطور که در قسمت قبل ذکر شد، $\overline{X}$ و $E(X_1|\overline{X})$ هردو UMVUE برای μ هستند. با توجه به اینکه UMVUE یکتاست، پس $E(X_1|\overline{X})=\overline{X}$.

راه حل سوم- همانطور که در راه حل اول ذکر شد، $\overline{X}$ و $E(X_1|\overline{X})$ هردو نااریب برای μ و تابعی از آماره کامل $(\overline{X},S^2)$ هستند.

برای هر $\underline{\theta}=(\mu,\sigma^2)$ داریم

$$E_{\underline{\theta}}(\overline{X}-E(X_1|\overline{X}))=0$$

درنتیجه

$$P_{\underline{\theta}}(\overline{X}=E(X_1|\overline{X}))=1\qquad\forall\underline{\theta}\in\Theta$$

توضیح: برآوردگر UMVU یکتاست. زیرا در غیر اینصورت، اگر دو برآوردگر $T_۱,T_۲$ هردو نااریب برای θ و با کمترین واریانس باشند، آنگاه باید برای هر θ، $V_\theta(T_۱)=V_\theta(T_۲)$.

برآوردگر $T^*=\frac{T_۱+T_۲}{۲}$ را که برای θ نااریب است در نظر می‌گیریم، داریم

$$V_\theta(\frac{T_۱+T_۲}{۲})=\frac{۱}{۴}\left[V_\theta(T_۱)+V_\theta(T_۲)+۲Cov_\theta(T_۱,T_۲)\right]$$

$$\overset{(۱)}{\leq}\frac{۱}{۴}\left[V_\theta(T_۱)+V_\theta(T_۲)+۲\sqrt{V_\theta(T_۱)V_\theta(T_۲)}\right]$$ طبق نامساوی کوشی-شوارتز

$$=V_\theta(T_۱)$$

اکنون چنانچه نامساوی بالا اکید باشد برآوردگر T^* دارای واریانس کمتری از $T_۱$ است و این با فرض UMVUE بودن $T_۱$ تناقض دارد. بنابراین باید برای هر θ نامساوی فوق به تساوی تبدیل شود. از کاربرد نامساوی کوشی-شوارتز می‌دانیم در صورتی تساوی در (۱) رخ می‌دهد که T_2,T_1 ترکیب خطی از یکدیگر، مانند $T_۲=a(\theta)T_۱+b(\theta)$، باشند.

اکنون داریم

$$Cov_\theta(T_۱,T_۲)=Cov_\theta(T_۱,a(\theta)T_۱+b(\theta))=a(\theta)V_\theta(T_۱)$$

و با توجه به اینکه $Cov_\theta(T_۱,T_۲)=V_\theta(T_۱)$ [زیرا نامساوی (۱) به تساوی تبدیل شده است]

پس $a(\theta)=۱$ است. همینطور چون $E_\theta(T_۲)=a(\theta)E_\theta(T_۱)+b(\theta)$ بنابراین $b(\theta)=0$ و در نتیجه $T_۱=T_۲$. پس برآوردگر UMVU یکتاست.

■

۱۱- فرض کنید X دارای توزیع دوجمله ای بریده در صفر با پارامترهای n و p باشد. UMVUE پارامتر $\frac{p}{1-q^n}$ را به دست آورید.

حل: ابتدا توزیع X را به دست می‌آوریم.

$$P(X=x)=c\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad c>0 \ , \ 0<p<1 \ , \ x=1,2,\dots,n$$

$$1=\sum_{x=1}^{n} c\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=c(1-q^n) \qquad \Rightarrow \qquad c=\frac{1}{1-q^n}$$

پس

$$P(X=x)=\frac{1}{1-q^n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\frac{1}{1-q^n}\binom{n}{x}q^n e^{x\ln\frac{p}{1-p}}$$

همانطو ر که دیده می‌شود توزیع X متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده کامل $T(X)=X$ برای p می‌باشد.

اکنون $E(T)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$E(X)=\sum_{x=1}^{n} x.\frac{1}{1-q^n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\frac{1}{1-q^n}\sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\frac{np}{1-q^n}$$

$$\Rightarrow \qquad E(\frac{X}{n})=\frac{p}{1-q^n}$$

بنابراین برآوردگر $\frac{X}{n}$ نااریب برای $\frac{p}{1-q^n}$ و تابعی از آماره بسنده کامل T است. پس UMVUE برای $\frac{p}{1-q^n}$ است.

■

۱۲- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\lambda)$ باشد. UMVUE پارامتر $\gamma(\lambda)=e^{-k\lambda}$، که در آن k مقدار مثبت و معلومی است، را به دست آورید.

حل: در توزیع $E(\lambda)$، آماره $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ ، یک آماره بسنده کامل برای λ است و دارای توزیع $\Gamma(n,\lambda)$ می‌باشد.

راه حل اول- با روش امتحان کردن برآوردگر UMVU را برای $\gamma(\lambda)=e^{-k\lambda}$ به دست می‌آوریم. فرض کنید $g(T)$ یک برآوردگر نااریب $\gamma(\lambda)$ باشد به طوریکه برای $0<t<k$ داشته باشیم $g(t)=0$.

داریم

$$e^{-k\lambda}=\int_0^\infty g(t)\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t}dt$$
$$=\int_k^\infty g(t)\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t}dt$$

پس

$$1=\int_k^\infty g(t)\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda(t-k)}dt$$

یا

$$1=\int_k^\infty h(t)\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^n (t-k)^{n-1}e^{-\lambda(t-k)}dt$$

که در آن $h(t)=g(t)\frac{t^{n-1}}{(t-k)^{n-1}}$.

همچنین

$$0=\int_k^\infty (h(t)-1)\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^n (t-k)^{n-1}e^{-\lambda(t-k)}dt$$

اکنون با استفاده از کامل بودن T ، برای هر $t>k$، داریم $h(t)-1=0$

بنابراین

$$g(t)=\begin{cases} ۰ & ۰<t<k \\ (۱-\frac{k}{t})^{n-۱} & t\geq k \end{cases}$$

و $g(T)$ **برآوردگر UMVU برای** $\gamma(\lambda)$ **است.**

راه حل دوم- داریم

$$E[u(X_1-k)]=e^{-k\lambda}$$

بنابراین $u(X_۱-k)$ **یک برآوردگر نااریب** $\gamma(\lambda)=e^{-k\lambda}$ **است. می‌دانیم** $T=\sum_{i=۱}^{n}X_i$ **یک آماره بسنده کامل برای** λ **است. برآوردگر UMVU عبارتست از**

$$g(T)=E[u(X_1-k)|T]$$

اکنون به محاسبه $g(T)$ **می‌پردازیم**

$$g(t)=E[u(X_۱-k)|T=t]=P(X_۱>k|T=t)$$
$$=P\left(\frac{X_۱}{T}>\frac{k}{t}\Big|T=t\right)$$
$$=P\left(\frac{X_۱}{T}>\frac{k}{t}\right)$$

که در تساوی آخر از استقلال T **و** $\frac{X_۱}{T}$ **استفاده کرده ایم. (**T **آماره بسنده کامل و** $\frac{X_1}{T}$ **یک آماره فرعی است.) از طرف دیگرمی دانیم که**

$$Y_۱=\frac{X_۱}{T}=\frac{X_۱}{X_۱+\sum_{i=۲}^{n}X_i}\sim Beta(۱,n-۱)$$

در نتیجه برای $t>k$ **، UMVUE پارامتر** $\gamma(\lambda)$ **برابر است با**

$$g(T)=P(Y_1>\frac{k}{T})=\int_{\frac{k}{T}}^{1}(n-1)(1-y)^{n-2}\,dy=(1-\frac{k}{T})^{n-1}$$

■

۱۳- فرض کنید $Z_1,Z_2,\ldots,Z_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(0,\theta^2)$ باشد. اگر $X_i=|Z_i|$، $i=1,\ldots,n$، تعریف شود، در صورت وجود، بر اساس $X_1,\ldots,X_n$

الف) UMVUE پارامتر θ^2 را به دست آورید.

ب) برآوردگر θ^2 با کمترین MSE را به دست آورید.

ج) UMVUE پارامتر θ را به دست آورید.

حل:

(الف) در توزیع $N(0,\theta^2)$ ، آماره $T=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2(=\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ بسنده کامل برای θ^2 است. از طرفی

$$E(T)=E(\sum_{i=1}^{n}Z_i^2)=\sum_{i=1}^{n}E(Z_i^2)=n\theta^2$$

پس

$$E(\frac{T}{n})=\theta^2$$

آماره $U=\frac{T}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$ ناااریب برای θ^2 و تابعی از آماره بسنده کامل T است، بنابراین UMVUE برای θ^2 می‌باشد.

(ب) برای به دست آوردن برآوردگر θ^2 با کمترین MSE باید کلاس برآوردگرهایی که می‌خواهیم بین آنها مقایسه انجام دهیم و برآوردگر با کمترین MSE را پیدا کنیم، مشخص باشد. چون این کلاس مشخص نشده است، لذا

کلاس برآوردگرهای θ^2 را به صورت $\{cT : c > 0\}$در نظر می‌گیریم. اکنون به دنبال c_0 مثبتی می‌گردیم، بطوریکه برآوردگر c_0T دارای کمترین MSE در کلاس

$\{cT : c > 0\}$ باشد.

$$\frac{T}{\theta^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i^2}{\theta^2} \sim \chi^2_{(n)} \quad \Rightarrow \quad E(T) = n\theta^2 \quad , \quad Var(T) = 2n\theta^4$$

$$MSE_\theta(cT) = E\left[(cT - \theta^2)^2\right] = Var(cT) + \left(E(cT) - \theta^2\right)^2$$

$$= c^2 Var(T) + (cn\theta^2 - \theta^2)^2$$

$$= c^2 2n\theta^4 + (cn-1)^2\theta^4$$

با مشتق گیری نسبت به c ، مقداری از c که MSE را می‌نیمم می‌کند، پیدا می‌کنیم.

به سادگی دیده می‌شود که این مقدار می‌شود: $c_0 = \frac{1}{n+2}$

بنابراین برآوردگر $\frac{T}{n+2}$ کمترین MSE را در بین کلاس برآوردگرهای به صورت $\{cT : c > 0\}$ دارد.

(ج) با توجه به اینکه $Y = \frac{T}{\theta^2} \sim \chi^2_{(n)}$ ، بنابراین به سادگی داریم

$$E(\sqrt{T}) = \theta E(\sqrt{\frac{T}{\theta^2}}) = \theta E(Y) = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\theta$$

پس $E(c_n\sqrt{T}) = \theta$ که در آن $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}$.

اکنون با توجه به اینکه برآوردگر $c_n\sqrt{T}$ برآوردگر نااریب برای θ و تابعی از آماره بسنده کامل T است، پس UMVUE برای θ می‌باشد.

■

۱٤- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Pa(\alpha,\beta)$ باشد. اگر تابع زیان برآورد α برابر با $L(\alpha,\delta)=\left(\frac{\delta}{\alpha}-1\right)^2$ باشد،

الف) تابع مخاطره برای MLE و UE پارامتر α را به دست آورید.

ب) در کلاس برآوردگرهایی به شکل $c\hat{\alpha}$ بهترین مقدار c را طوری بیابید که دارای کمترین مقدار تابع مخاطره باشد.

حل: $\alpha>0 \quad , \quad \beta>0 \quad , \quad x\geq\beta \qquad f_{\alpha,\beta}(x)=\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}$

برای حل این مساله دو حالت می‌توان در نظر گرفت.

حالت اول- β معلوم باشد.

حالت دوم- βمجهول باشد.

مسأله را در حالت اول حل می‌کنیم وحل حالت دوم را به عهده خوانندگان می‌گذاریم. حالت دوم مشابه حالت اول است، فقط در این حالت باید برآورد درستنمایی ماکزیمم β را نیز به دست آورد.

(الف) برای به دست آوردن MLE پارامتر α ، ابتدا تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha)=\frac{\alpha^n\beta^{n\alpha}}{(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\alpha+1}}$$

$$\ell(\alpha)=\ln L(\alpha)=n.\ln\alpha+(n\alpha)\ln\beta-(\alpha+1)\ln\prod_{i=1}^{n}x_i$$

$$\ell'(\alpha)=\frac{n}{\alpha}+n.\ln\beta-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{\alpha}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{X_i}{\beta})}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}Y_i}=\frac{n}{T}$$

که $Y_i = \ln\frac{X_i}{\beta}$ ، $i = 1,\ldots,n$،

$$E(\hat{\alpha}) = nE(\frac{1}{T}) = 2n\alpha E(\frac{1}{2\alpha T})$$

با استفاده از رابطه (۱۹-ج) از فصل اول داریم

$$2\alpha T \sim \chi^2_{(2n)}$$

بنابراین به سادگی داریم

$$E(\hat{\alpha}) = \frac{n}{n-1}\alpha$$

بنابراین MLE **، برآوردگری اریب برای** α **می‌باشد.**

همینطور داریم

$$E(\hat{\alpha})^2 = n^2 E(\frac{1}{T^2}) = 4n^2\alpha^2 E(\frac{1}{(2\alpha T)^2}) =$$

$$= 4n^2\alpha^2(\frac{1}{4(n-1)(n-2)})$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\alpha^2$$

درنتیجه

$$Var(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha})^2 - E^2(\hat{\alpha})$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\alpha^2 - \frac{n^2}{(n-1)^2}\alpha^2$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\alpha^2$$

اکنون با توجه به تابع زیان داده شده تابع مخاطره را برای $\hat{\alpha}$ **محاسبه می‌کنیم**

$$MLE \text{ مخاطره} = R(\alpha,\hat{\alpha}) = E\left[L(\alpha,\hat{\alpha})\right] = \frac{1}{\alpha^2}E\left(\hat{\alpha}(X)-\alpha\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\alpha^2 + \left(\frac{n}{n-1}\alpha - \alpha\right)^2\right]$$

$$= \frac{n^{۲}}{(n-۱)^{۲}(n-۲)} + \frac{۱}{(n-۱)^{۲}}$$
$$= \frac{n+۲}{(n-۱)(n-۲)}$$

اکنون برآوردگر نااریب α را به دست آورده و تابع مخاطره آن را محاسبه می‌کنیم.

با تصحیح اریبی $\hat{\alpha}$ ، به برآوردگر نااریب $U = \frac{n-۱}{n}\hat{\alpha}$ می‌رسیم. از طرفی

$$Var(U) = \left(\frac{n-۱}{n}\right)^{۲} Var(\hat{\alpha}) = \left(\frac{n-۱}{n}\right)^{۲} \frac{n^{۲}}{(n-۱)^{۲}(n-۲)}\alpha^{۲} = \frac{۱}{n-۲}\alpha^{۲}$$

درنتیجه

$$U \text{ مخاطره برآوردگر نااریب } = R(\alpha, U) = E[L(\alpha, U)]$$
$$= \frac{۱}{\alpha^{۲}} E(U-\alpha)^{۲}$$
$$= \frac{۱}{\alpha^{۲}} Var(U)$$
$$= \frac{۱}{n-۲}$$

(ب)

$$c\hat{\alpha} \text{ مخاطره } = R(\alpha, c\hat{\alpha}) = \frac{۱}{\alpha^{۲}} E(c\hat{\alpha}-\alpha)^{۲}$$
$$= \frac{۱}{\alpha^{۲}}\left[c^{۲}Var(\hat{\alpha}) + (cE(\hat{\alpha})-\alpha)^{۲}\right]$$
$$= \frac{۱}{\alpha^{۲}}\left[\frac{c^{۲}n^{۲}}{(n-۱)^{۲}(n-۲)}\alpha^{۲} + \left(c\frac{n}{n-۱}\alpha - \alpha\right)^{۲}\right]$$
$$= \frac{c^{۲}n^{۲}}{(n-۱)^{۲}(n-۲)} + \left(\frac{cn}{n-۱} - ۱\right)^{۲}$$

با مشتق گیری از عبارت بالا بر حسب c ، مقدار c ای که عبارت فوق را می‌نیمم کند، به صورت زیر به دست می‌آید

$$c = \frac{n-۲}{n}$$

بنابراین برآوردگر $\frac{n-۲}{n}\hat{\alpha}$ دارای کمترین مخاطره در بین برآوردگرهایی به شکل $c\hat{\alpha}$ است.

■

۱۵- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta,\theta^۲)$ باشد. آیا $\overline{X}$ برآوردگر UMVU پارامتر θ است؟ (راهنمایی: فرض کنید T یک برآوردگر نااریب صفر باشد، $Var(a\overline{X}+(۱-a)T)$ را محاسبه کنید.)

حل: می‌دانیم $\overline{X}$ و $T=c_nS$ دو برآوردگر نااریب θ هستند که $S^۲=\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\overline{X})^۲$ و $c_n=\sqrt{\frac{۲}{n-۱}}\frac{\Gamma(\frac{n-۱}{۲})}{\Gamma(\frac{n}{۲})}$.

با استفاده از این دو برآوردگر، برآوردگر نااریبی برای θ خواهیم ساخت بطوریکه واریانس آن از واریانس $\overline{X}$ کمتر باشد و در نتیجه $\overline{X}$ برآوردگر UMVU پارامتر θ نخواهد بود.

فرض کنید a یک ثابت باشد و $T^*=a\overline{X}+(۱-a)T$.

$$E(T^*)=E(a\overline{X}+(۱-a)T)=a\theta+(۱-a)\theta=\theta$$

$$\sigma=Var(T^*)=Var(a\overline{X}+(۱-a)T)$$

$$=a^۲Var(\overline{X})+(۱-a)^۲Var(T)$$ **بنا به استقلال $\overline{X}$ و T**

اکنون a را چنان پیدا می‌کنیم که σ می‌نیمم شود.

مشتق σ نسبت به a $=۲aVar(\overline{X})-۲(۱-a)Var(T)=۰$

$$\Rightarrow \qquad a=\frac{Var(T)}{Var(T)+Var(\overline{X})}$$

با جایگذاری a در σ داریم

$$Var(T^*) = \left(\frac{Var(T)}{Var(T)+Var(\overline{X})}\right)^{۲} Var(\overline{X}) + \left(\frac{Var(\overline{X})}{Var(T)+Var(\overline{X})}\right)^{۲} Var(T)$$
$$= \frac{Var(T)Var(\overline{X})}{Var(T)+Var(\overline{X})}$$
$$< Var(\overline{X})$$

بنابراین $\overline{X}$، UMVUE برای θ نخواهد بود.

■

۱۶- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta,\theta)$ باشد. نشان دهید $\overline{X}$ برآوردگر UMVU پارامتر θ نیست.

حل: می‌دانیم

$$E(\overline{X}) = \theta \quad , \quad E(S^{۲}) = \theta$$

که در آن $S^{۲} = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \overline{X})^{۲}$.

چنانچه $\overline{X}$ بخواهد UMVUE پارامتر θ باشد، باید با هر برآوردگر نااریب صفر، مانند $\overline{X} - S^{۲}$ ناهمبسته باشد. اما

$$Cov(\overline{X}, \overline{X} - S^{۲}) = Var(\overline{X}) = \frac{\theta^{۲}}{n} \neq ۰$$

بنابراین $\overline{X}$ برآوردگر UMVU پارامتر θ نمی باشد.

■

۱۷- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta & x = ۱ \\ (۱-\theta)^{۲}\theta^{x-۲} & x = ۲,۳,۴,... \end{cases}$$

الف) نشان دهید آماره $T(X) = I_{\{۲\}}(X)$ برآوردگر UMVU پارامتر $(۱-\theta)^{۲}$ است.

ب) نشان دهید آماره $S(X) = I_{\{1\}}(X)$ برآوردگر نااریب θ است، اما UMVUE پارامتر θ نیست.

حل:

(الف) به سادگی دیده می‌شود که

$$E_\theta(T(X)) = (1-\theta)^2$$

با استفاده از قضیه لهمن- شفه نشان می‌دهیم که آماره $T(X)$ برآوردگر UMVU پارامتر $(1-\theta)^2$ است. برای این منظور ابتدا کلاس برآوردگرهای نااریب صفر را به دست می‌آوریم. برای هر $0<\theta<1$ داریم

$$\begin{aligned} 0 = E_\theta(h(X)) &= \theta.h(1) + (1-\theta)^2 \sum_{x=2}^{\infty} h(x)\theta^{x-2} \\ &= \theta.h(1) + \sum_{x=2}^{\infty} h(x)\theta^{x-2} - 2\sum_{x=2}^{\infty} h(x)\theta^{x-1} + \sum_{x=2}^{\infty} h(x)\theta^{x} \\ &= \theta.h(1) + \sum_{x=0}^{\infty} h(x+2)\theta^{x} - 2\sum_{x=1}^{\infty} h(x+1)\theta^{x} + \sum_{x=2}^{\infty} h(x)\theta^{x} \\ &= h(2) + \sum_{x=1}^{\infty} \theta^{x}[h(x+2) - 2h(x+1) + h(x)] \end{aligned}$$

عبارت فوق یک سری توانی بر حسب θ است که برای هر $0<\theta<1$ مساوی صفر است. پس باید ضرایب θ^x مساوی صفر باشد، در نتیجه باید

$$h(2) = 0 \quad , \quad h(3) = h(1) \quad , \quad h(4) = 2h(3) = -2h(1)$$

$$h(5) = 2h(4) - h(3) = -3h(1) \quad ,...$$

بنابراین کلاس برآوردگرهای نااریب صفر به صورت

$$h(X) = -a(X-2)$$

است که در آن $a = h(1)$.

اکنون نشان می‌دهیم $h(X)$ با $T(X)$ ناهمبسته است.

$E_\theta(T(X)h(X)) = ۱.h(۲).P_\theta(X=۱) = ۰$

بنابراین $T(X)$ برآوردگر UMVU برای $(۱-\theta)^۲$ است.

ب) $E_\theta(S(X)) = P_\theta(X=۱) = \theta \qquad \forall ۰<\theta<۱$

بنابراین $S(X)$ برآوردگر ناریب θ است.

$E_\theta(S(X)h(X)) = ۱.h(۱).P_\theta(X=۱) = \theta.h(۱) \neq ۰$

طبق قضیه لهمن- شفه $S(X)$ برآوردگر UMVU برای θ نمی باشد.

■

۱۸- فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $NB(r,\theta)$، r معلوم و θ نامعلوم، باشد. UMVUE پارامتر $\frac{۱}{\theta}$ را، در صورت وجود، به دست آورید.

حل: $f_\theta(x) = \binom{r+x-۱}{x}\theta^r(۱-\theta)^x \qquad x=۰,۱,۲,\dots \qquad ۰<\theta<۱$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده کامل $T=\overline{X}$ است.

از طرفی

$$E(\overline{X}) = E(X_۱) = \frac{r(۱-\theta)}{\theta} = r(\frac{۱}{\theta}-۱)$$

$$\Rightarrow \qquad E(\frac{\overline{X}}{r}+۱) = \frac{۱}{\theta}$$

برآوردگر $\frac{\overline{X}}{r}+۱$ ناریب برای θ و تابعی از آماره بسنده کامل $\overline{X}$ است. بنابراین UMVUE برای $\frac{۱}{\theta}$ می‌باشد.

■

۱۹- فرض کنید $X_1,...,X_n$ **یک نمونه تصادفی** n **تایی از توزیع** $E(\lambda)$ **باشد. نشان دهید UMVUE پارامتر** $e^{-\lambda}$ **برابر با** $\left[\left(1-\frac{1}{\sum X_i}\right)^+\right]^{n-1}$ **، که در آن** $a^+ = \max(0,a)$ **است.**

حل:

راه حل اول- با توجه به اینکه برآوردگر $\left[\left(1-\frac{1}{\sum X_i}\right)^+\right]^{n-1}$ **تابعی از آماره بسنده کامل** $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ **است، کافی است نشان دهیم**

$$E\left[\left(1-\frac{1}{\sum X_i}\right)^+\right]^{n-1} = e^{-\lambda}$$

می دانیم: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$.

$$E\left[\left(1-\frac{1}{T}\right)^+\right]^{n-1} = \int_0^\infty \left[\left(1-\frac{1}{t}\right)^+\right]^{n-1} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \int_1^\infty \left(1-\frac{1}{t}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t} dt$$

زیرا $(1-\frac{1}{t})^+$ **برای مقادیر** $t<1$ **صفر است.**

$$= \int_1^\infty (t-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^n e^{-\lambda t} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u - \lambda} du \qquad u = t-1 \text{ با تغییر متغیر}$$

$$= e^{-\lambda}$$

بنابراین $\left[\left(1-\frac{1}{T}\right)^+\right]^{n-1}$ **، UMVUE برای** $e^{-\lambda}$ **است.**

راه حل دوم- با روش امتحان کردن برآوردگر UMVU را برای $\gamma(\lambda)=e^{-k\lambda}$ به دست می‌آوریم.

فرض کنید $g(T)$ یک برآوردگر نااریب $e^{-\lambda}$ باشد به طوریکه برای $۰<t<۱$ داشته باشیم $g(t)=۰$.

داریم

$$e^{-\lambda}=\int_۰^\infty g(t)\frac{۱}{\Gamma(n)}\lambda^n t^{n-۱}e^{-\lambda t}dt$$
$$=\int_۱^\infty g(t)\frac{۱}{\Gamma(n)}\lambda^n t^{n-۱}e^{-\lambda t}dt$$

پس

$$۱=\int_۱^\infty g(t)\frac{۱}{\Gamma(n)}\lambda^n t^{n-۱}e^{-\lambda(t-۱)}dt$$

یا

$$۱=\int_۱^\infty h(t)\frac{۱}{\Gamma(n)}\lambda^n (t-۱)^{n-۱}e^{-\lambda(t-۱)}dt$$

که در آن $h(t)=\frac{t^{n-۱}}{(t-۱)^{n-۱}}g(t)$.

همچنین

$$۰=\int_۱^\infty (h(t)-۱)\frac{۱}{\Gamma(n)}\lambda^n (t-۱)^{n-۱}e^{-\lambda(t-۱)}dt$$

اکنون با استفاده از کامل T ، برای هر $t>۱$ داریم $h(t)-۱=۰$.

درنتیجه

$$g(t)=\begin{cases}۰ & t<۱\\ (۱-\frac{۱}{t})^{n-۱} & t>۱\end{cases}=\left[\left(۱-\frac{۱}{t}\right)^+\right]^{n-۱}$$

بنابراین $g(T)$ برآوردگر UMVUE برای $e^{-\lambda}$ است.

■

۲۰- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, a\theta^۲)$، a معلوم و $\theta>۰$ نامعلوم باشد. اگر $\bar{X}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}X_i$ و $S^۲=\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\bar{X})^۲$ باشد،

الف) دو برآوردگر نااریب θ بر پایه $\bar{X}$ و $S^۲$ را به دست آورید.

ب) MSE برآوردگرهای به دست آمده را محاسبه و با هم مقایسه کنید. کدام یک بهتر است؟ چرا؟

حل:

(الف) $\bar{X}$ و c_nS دو برآوردگر نااریب θ هستند.

$$E(\bar{X})=\theta \quad , \quad E(c_nS)=\theta$$

که در آن: $c_n=\sqrt{\frac{2}{a}}.\frac{1}{n-1}.\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

(ب)

$$MSE_\theta(\bar{X})=Var(\bar{X})=\frac{a\theta^۲}{n}$$

$$\begin{aligned}MSE_\theta(c_nS)=Var(c_nS)&=c_n^۲Var(S)\\&=c_n^۲\left[E(S^۲)-E^۲(S)\right]\\&=c_n^۲\left[(n-۱)a\theta^۲-\frac{\theta^۲}{c_n^۲}\right]\\&=\theta^۲\left[\frac{۲}{n-۱}.\left(\frac{\Gamma(\frac{n-۱}{۲})}{\Gamma(\frac{n}{۲})}\right)^۲-۱\right]\end{aligned}$$

■

۲۱- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ ، n متغیر تصادفی مستقل باشند به طوری که $X_i \sim P(\lambda b_i)$، b_i ها مقادیر ثابت، مثبت و معلوم، $i=1,\ldots,n$ و λ نامعلوم است.

الف) بهترین برآوردگر نااریب λ را به دست آورید.

ب) نشان دهید $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ، بهترین برآوردگر نااریب λ است اگر و فقط اگر $\sum b_i = n$ باشد.

حل:

$$f_{X_i}(x)=\frac{e^{-\lambda b_i}(\lambda b_i)^x}{x!} \qquad x=0,1,2,\ldots$$

(الف)

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=(\prod_{i=1}^{n} x_i!)^{-1} e^{-\lambda\sum b_i}\lambda^{\sum x_i}.\prod_{i=1}^{n} b_i^{\,x_i}$$

به سادگی دیده می‌شود که توزیع فوق متعلق به خانواده فوق نمایی یک پارامتری با آماره بسنده کامل $\sum_{i=1}^{n} X_i$ است.

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda b_i=\lambda\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\Rightarrow \qquad E\left(\frac{\sum X_i}{\sum b_i}\right)=\lambda$$

بنابراین $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$ بهترین برآوردگر نااریب λ است.

(ب) توسط قسمت (الف) به سادگی دیده می‌شود اگر $\sum b_i = n$ ، آنگاه $\overline{X}$ بهترین برآوردگر نااریب λ است و چنانچه $\overline{X}$ بهترین برآوردگر نااریب λ باشد

باید $\sum b_i = n$ باشد، زیرا بهترین برآوردگر در صورت وجود یکتاست. (به توضیح بعد از سؤال ۱۰ مراجعه کنید.)

■

۲۲- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با میانگین θ و واریانس متناهی باشد. اگر $T=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ بهترین برآوردگر نااریب θ و T' یک برآوردگر نااریب θ باشد، نشان دهید: $Var_\theta(T)=Cov_\theta(T,T')$.

حل: طبق قضیه لهمن- شفه برآوردگر T با هر برآوردگر نااریب صفر، مانند $T-T'$ باید ناهمبسته باشد. پس

$$Cov_\theta(T,T-T')=0$$

$$\Rightarrow \qquad Var_\theta(T)=Cov_\theta(T,T')$$

■

۲۳- فرض کنید T_1 و T_2 دو برآوردگر نااریب θ با واریانس $\alpha\sigma^2$ ، $\alpha>1$، باشند به طوری که σ^2 واریانس بهترین برآوردگر نااریب θ است. نشان دهید:

$$corr(T_1,T_2)\ge \frac{2-\alpha}{\alpha}$$

حل: σ^2 واریانس بهترین برآوردگر نااریب θ از واریانس هر برآوردگر نااریب دیگر θ کوچکتر می‌باشد. بنابراین

$$\sigma^2 \le Var_\theta\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)$$

$$\sigma^2 \le \frac{1}{4}\left[\alpha\sigma^2+\alpha\sigma^2+2Cov_\theta(T_1,T_2)\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$Cov_\theta(T_1,T_2)\ge \sigma^2(2-\alpha)$$

$$\Rightarrow$$

$$corr(T_1, T_2) \geq \frac{2-\alpha}{\alpha}$$

$\Rightarrow$

■

۲٤- فرض کنید $X_1,...,X_n$ و $Y_1,...,Y_m$ دو نمونه تصادفی مستقل با توزیعهای به ترتیب $N(\mu,\sigma_1^2)$ و $N(\mu,\sigma_2^2)$ باشند که در آن هر سه پارامتر μ ، σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم اند. با انتخاب $\Delta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ و $\theta = \frac{m}{n}$ ، نشان دهید

الف) اگر Δ معلوم باشد، $T_1 = \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\overline{Y}$ که در آن $\alpha = \frac{\Delta}{\Delta+\theta}$ است، $UMVUE$ پارامتر μ است.

ب) اگر Δ نا معلوم باشد، $T_2 = \frac{1}{1+\theta}(\overline{X} + \theta\overline{Y})$ برآوردگر ناریب μ است و یک برآوردگر بهینه است اگر Δ در همسایگی ۱ باشد.

حل:

فرض کنید $\underline{\theta} = (\mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$.

چگالی توأم $X_1,...,X_n$ **و** $Y_1,...,Y_m$ **می‌شود**

$$f(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}} \sigma_1^{-n}\sigma_2^{-m} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu)^2\}$$
$$= C(\underline{\theta})\exp\{\frac{n\mu}{\sigma_1^2}\overline{x} + \frac{m\mu}{\sigma_2^2}\overline{y} - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\}$$

که در آن $C(\underline{\theta})$ تابعی تنها از $\underline{\theta}$ است.

(الف) به سادگی داریم

$$f(\underline{x},\underline{y};\underline{\theta}) = C(\underline{\theta})\exp\{\frac{n\mu}{\sigma_2^2}(\Delta\overline{x} + \theta\,\overline{y}) - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\}$$
$$= C(\underline{\theta})\exp\{\frac{n\mu(\Delta+\theta)}{\sigma_2^2}(\alpha\overline{x} + (1-\alpha)\overline{y}) - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\}$$

همانطور که دیده می‌شود توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی سه پارامتری با آماره بسنده کامل $T=(\alpha\overline{X}+(1-\alpha)\overline{Y},\sum_{i=1}^{n}X_i^2,\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)$ **است.**

داریم

$$E(T_1)=E(\alpha\overline{X}+(1-\alpha)\overline{Y})=\mu$$

آماره T_1 **نااریب برای** μ **و تا بعی از آماره بسنده کامل** T **است، بنابراین** $UMVUE$ **برای** μ **است.**

(ب) به سادگی می‌توان دید $E(T_2)=\mu$.

■

۲۵- فرض کنید $X_1,...,X_n$ **یک نمونه تصادفی** n **تایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد**

$$f_\theta(x)=\frac{a(x)}{h(\theta)}\theta^x \qquad , \quad \theta>0 \qquad x=0,1,2,...$$

UMVUE پارامتر θ^r ، $r\in N$ **را به دست آورید.**

حل: $\quad x=0,1,2,... \quad \theta>0$

$$f_\theta(x)=\frac{a(x)}{h(\theta)}\theta^x=\frac{a(x)}{h(\theta)}e^{x\ln\theta}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده کامل $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ **برای** θ **است. اکنون توزیع** T **را محاسبه می‌کنیم**

$$P_\theta(T=t)=P_\theta(\sum_{i=1}^{n}X_i=t)=\sum_{\substack{(x_1,...,x_n)\\ \sum x_i=t}}f_\theta(x_1,...,x_n)$$

$$=\sum_{\substack{(x_1,...,x_n)\\ \sum x_i=t}}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a(x_i)}{h(\theta)}\theta^{x_i}\right)$$

$$= \frac{c(t,n)}{[h(\theta)]^n}\theta^t \qquad ; \quad t = ۰,۱,۲,\ldots \quad ,\theta > ۰$$

که در آن $c(t,n) = \sum_{\substack{(x_۱,\ldots,x_n)\\ \sum x_i = t}} \prod_{i=۱}^{n} a(x_i)$.

فرض کنید $g(T)$ برآوردگر نااریب θ^r بر پایه T باشد، داریم

$$\theta^r = E(g(T)) = \sum_{t=۰}^{\infty} g(t) P_\theta(T=t) = \sum_{t=۰}^{\infty} g(t).\frac{c(t,n)}{h^n(\theta)}.\theta^t$$

$$\Rightarrow \qquad ۱ = \sum_{t=۰}^{\infty} g(t).\frac{c(t,n)}{h^n(\theta)}.\theta^{t-r}$$

$$۱ = \sum_{t=r}^{\infty} g(t).\frac{c(t,n)}{c(t-r,n)}.\frac{c(t-r,n)}{h^n(\theta)}.\theta^{t-r}$$

$\Rightarrow$

حال اگر برای $t<r$ مقادیر $g(t)$ را برابر صفر اختیار کنیم، با استفاده از کامل بودن T نتیجه می‌شود که

$$g(t) = \begin{cases} ۰ & t < r \\ \dfrac{c(t-r,n)}{c(t,n)} & t \geq r \end{cases}$$

بنابراین $g(T)$ برآوردگر UMVU برای θ^r است.

■

۲۶- فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $B(۲,\theta)$ باشد. در صورت وجود:

الف) UMVUE پارامترهای θ و $\theta^۲$ را به دست آورید.

ب) MSE برآوردگرهای به دست آمده را محاسبه کنید.

ج) آیا واریانس برآوردگرهای به دست آمده با کران پایین کرامر- رائو برابر است؟

حل:

(الف)

$$f(x) = \binom{۲}{x}\theta^x(۱-\theta)^{۲-x} \quad x = ۰,۱,۲ \quad , \quad ۰ < \theta < ۱$$

به سادگی دیده می‌شود که توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده کامل $T = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ است.

می دانیم $T \sim B(۲n,\theta)$ (این مطلب را توسط روش تابع مولد گشتاور می‌توان اثبات کرد.)

پس

$$E(T) = ۲n\theta$$

درنتیجه

$$E(\frac{T}{۲n}) = \theta$$

بنابراین $\frac{T}{۲n}$، برآوردگر UMVU پارامتر θ است.

$$E(T^۲) = Var(T) + E^۲(T) = ۲n\theta(۱-\theta) + ۴n^۲\theta^۲$$

$$= E(T) + ۲n\theta^۲(۲n-۱)$$

$$E\left(\frac{T^۲ - T}{۲n(۲n-۱)}\right) = \theta^۲$$

$\Rightarrow$

بنابراین $T^* = \frac{T(T-۱)}{۲n(۲n-۱)}$ ، UMVUE برای $\theta^۲$ است.

(ب)

$$MSE_\theta(\frac{T}{۲n}) = Var(\frac{T}{۲n}) = \frac{Var(T)}{۴n^۲} = \frac{۲n\theta(۱-\theta)}{۴n^۲} = \frac{\theta(۱-\theta)}{۲n}$$

$$MSE_\theta(T^*) = Var(T^*) = \frac{Var(T(T-1))}{4n^2(2n-1)^2}$$
$$= \frac{1}{4n^2(2n-1)^2}[E(T(T-1))^2 - E^2(T(T-1))] \quad (1)$$

اکنون $E^2(T(T-1))$ و $E(T(T-1))^2$ را محاسبه می‌کنیم

از قسمت (الف) داریم

$$E(T(T-1)) = 2n(2n-1)\theta^2$$

پس

$$E^2(T(T-1)) = 4n^2(2n-1)^2\theta^4 \qquad (2)$$

$$E(T(T-1))^2 = \sum_{t=0}^{2n} t^2(t-1)^2 \frac{(2n)!}{t!(2n-t)!}\theta^t(1-\theta)^{2n-t}$$
$$= \sum_{t=2}^{2n} t(t-1)\frac{(2n)!}{(t-2)!(2n-t)!}\theta^t(1-\theta)^{2n-t}$$
$$= 2n(2n-1)\theta^2\sum_{t=2}^{2n} t(t-1)\frac{(2n-2)!}{(t-2)!(2n-t)!}\theta^{t-2}(1-\theta)^{2n-t}$$

قرار می‌دهیم $y=t-2$ و $m=2n-2$ عبارت فوق به صورت

$$= 2n(2n-1)\theta^2\sum_{y=0}^{m}(y+1)(y+2)\frac{m!}{y!(m-y)!}\theta^y(1-\theta)^{m-y}$$
$$= 2n(2n-1)\theta^2 E[(Y+1)(Y+2)]$$

در می‌آید.

با توجه به اینکه آخرین سری مانند امید ریاضی $(Y+1)(Y+2)$است، وقتی که Y دارا ی توزیع $B(m,\theta)$ می‌باشد، پس داریم

$$E[(Y+1)(Y+2)] = E(Y^2) + 3E(Y) + 2 = Var(Y) + E^2(Y) + 3E(Y) + 2$$
$$= m\theta(1-\theta) + m^2\theta^2 + 3m\theta + 2$$
$$= m\theta^2(m-1) + 4m + 2$$

پس

$$E(T(T-1))^2 = 2n(2n-1)\theta^2[m\theta^2(m-1)+4m+2] \qquad (3)$$

با جایگذاری (۲) و(۳) در (۱) داریم

$$MSE_\theta(T^*) = \frac{2n(2n-1)\theta^2[m\theta^2(m-1)+4m+2]-4n^2(2n-1)^2\theta^4}{4n^2(2n-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2n(2n-1)}\{\theta^2[m\theta^2(m-1)+4m+2]-2n(2n-1)\theta^4\}$$

(ج)

$$\ln f_\theta(x) = \ln\binom{2}{x} + x\ln\theta + (2-x)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{2-x}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_\theta(x)}{\partial\theta^2} = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{2-x}{(1-\theta)^2}$$

درنتیجه

$$I_X(\theta) = \frac{2}{\theta(1-\theta)}$$

کران پایین کرامر- رائو برای واریانس هر برآوردگر نااریب θ برابر است با $\frac{\theta(1-\theta)}{2n}$ و کران پایین کرامر- رائو برای واریانس هر برآوردگر نااریب θ^2 برابر است با $\frac{2\theta^3(1-\theta)}{n}$.

همانطور که می‌بینید $Var(\frac{T}{2n})$ برابر با کران پایین کرامر- رائو است.

■

۲۷- فرض کنید $X \sim HG(N,M;n)$ باشد. در صورت وجود،

الف) اگر N معلوم باشد، UMVUE پارامتر M را به دست آورید.

ب) اگر M معلوم باشد، UMVUE پارامتر N را به دست آورید.

حل:

$$f_M(x) = P_M(X = x) = \binom{N}{n}^{-1}\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}$$

$$\max(0, M+N-n) \le x \le \min(M, n)$$

(الف) می‌دانیم خانواده توزیعهای $\{f_M(x) : M \in \{0,1,2,\ldots,N\}\}$ کامل است. (به فصل اول سؤال یک شماره ii مراجعه کنید.)

بنابراین X یک آماره بسنده کامل برای M است، از طرفی

$$E_M(X) = n.\frac{M}{N}$$

در نتیجه

$$E_M(N\frac{X}{n}) = M$$

بنابراین $T = N\frac{X}{n}$ ، برآوردگر UMVU برای M است.

(ب) در حالتی که M معلوم و N مجهول باشد، برآوردگر نااریب برای N وجود ندارد. بنابراین نمی توان UMVUE برای N به دست آورد.

■

۲۸- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(\theta, 2\theta)$ باشد. برای مقادیر ثابت a و b ، یک برآوردگر ناریب θ به صورت $aX_{(1)} + bX_{(n)}$ پیدا کنید به طوری که $P_\theta(\frac{1}{2}X_{(n)} \le aX_{(1)} + bX_{(n)} \le X_{(1)}) = 1$ باشد. چرا احتمال فوق باید برابر یک باشد؟

حل:

برای اینکه $aX_{(1)} + bX_{(n)}$ برآوردگر ناریب θ باشد باید برای هر $\theta > 0$، داشته باشیم

$$E_\theta(aX_{(1)}+bX_{(n)})=\theta$$

به سادگی داریم

$$E_\theta[a\theta(\frac{X_{(1)}}{\theta}-1)+b\theta(\frac{X_{(n)}}{\theta}-1)]+\theta(a+b)=\theta \qquad \forall\theta>0$$

$$\Rightarrow \qquad a\frac{1}{n+1}+b\frac{n}{n+1}+a+b=1$$

$$\Rightarrow \qquad (n+2)a+(2n+1)b=(n+1) \qquad (1)$$

بنابراین a و b باید در شرط (۱) صدق کنند.

از طرفی می‌خواهیم $P_\theta(\frac{1}{2}X_{(n)}\le aX_{(1)}+bX_{(n)}\le X_{(1)})=1$، پس باید $aX_{(1)}+bX_{(n)}$ ترکیب محدبی از $X_{(1)}$ و $\frac{1}{2}X_{(n)}$ باشد. یعنی برای یک $\alpha\in[0,1]$ داشته باشیم

$$\alpha X_{(1)}+(1-\alpha)\frac{1}{2}X_{(n)}=aX_{(1)}+bX_{(n)}$$

یعنی

$$a=\alpha \quad , \quad b=\frac{1-\alpha}{2}$$

پس داریم

$$a+2b=1 \qquad (2)$$

اکنون از حل معادلات (۱) و (۲) ، مقدارهای a و b را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}(n+2)a+(2n+1)b=(n+1)\\ a+2b=1\end{cases} \qquad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{3} \quad , \quad b=\frac{1}{3}$$

بنابراین $\frac{1}{3}X_{(1)}+\frac{1}{3}X_{(n)}$ برآوردگر نااریب θ است که در شرط

$$P_\theta(\frac{1}{2}X_{(n)}\le aX_{(1)}+bX_{(n)}\le X_{(1)})=1$$

صدق می‌کند.

با توجه به اینکه دامنه تغییرات θ می‌شود $\frac{۱}{۲}X_{(n)} \le \theta \le X_{(۱)}$ ، بنابراین از یک برآوردگر خوب انتظار می‌رود که در حدود $[\frac{۱}{۲}X_{(n)}, X_{(۱)}]$ مقادیر خود را برای برآورد پارامتر θ بگیرد. بنابراین $P_\theta(\frac{۱}{۲}X_{(n)} \le aX_{(۱)} + bX_{(n)} \le X_{(۱)}) = ۱$ مطلوب است.

■

۳۰- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\theta,۱)$ ، $\theta \in R$ ، باشد.

الف) برآوردگر نااریب θ را به دست آورید.

ب) واریانس برآوردگر نااریب به دست آمده را محاسبه کنید.

ج) کران پایین کرامر- رائو در برآورد نااریب θ را محاسبه کنید.

د) در مورد نتایج به دست آمده در ب و ج اظهار نظر کنید.

حل:

(الف) $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \qquad x \ge \theta \qquad \theta \in R$

$$\begin{aligned} E_\theta(X_۱) &= \int_\theta^\infty x e^{-(x-\theta)} dx \\ &= \int_۰^\infty (u+\theta) e^{-u} du \qquad\qquad u = x-\theta \\ &= \int_۰^\infty u e^{-u} du + \theta \int_۰^\infty e^{-u} du = ۱ + \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad E(\overline{X} - ۱) = \theta$$

بنابراین $T = \overline{X} - ۱$ یک برآوردگر نااریب برای θ است.

(ب)

$$Var_\theta(T)=Var_\theta(\overline{X})=\frac{Var_\theta(X_1)}{n}=\frac{1}{n}\left[E_\theta(X_1^2)-E_\theta^2(X_1)\right]$$

اکنون $E_\theta(X_1^2)$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}E_\theta(X_1^2)&=\int_\theta^\infty x^2 e^{-(x-\theta)}dx\\&=\int_0^\infty (u+\theta)^2 e^{-u}du\\&=\int_0^\infty (u^2+\theta^2+2u\theta)e^{-u}du\\&=\int_0^\infty u^2e^{-u}du+\theta^2\int_0^\infty e^{-u}du+2\theta\int_0^\infty ue^{-u}du\\&=\Gamma(3)+\theta^2+2\theta=\theta^2+2\theta+2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad Var_\theta(T)=\frac{1}{n}\left[\theta^2+2\theta+2-(\theta+1)^2\right]=\frac{1}{n}$$

(ج)

$$\ln f_\theta(x)=-(x-\theta)$$
$$\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}=1$$

درنتیجه

$$I_{X_1}(\theta)=E_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial\theta}\right)^2\right]=1$$

بنابراین

$$\text{کران پایین کرامر- رائو}=\frac{1}{n}$$

(د) همانطور که مشاهده می‌شود واریانس T ، برآوردگر نااریب θ، با کران پایین کرامر- رائو یکسان است. با توجه به اینکه در این توزیع شرایط نظم برقرار نیست (صفحه ۱۸۹ کتاب آمار ریاضی ملاحظه شود.) ممکن است برآوردگر

نااریبی برای θ وجود داشته باشد که واریانس آن کمتر از کران پایین کرامر- رائو باشد.

■

۳۱- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع مخلوط با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)=\theta f_1(x)+(1-\theta)f_2(x)$ ، که در آن $0<\theta<1$، f_1 و f_2 توابع چگالی احتمال معلومند که دامنه آنها بستگی به θ ندارد، باشد. کران پایین کرامر- رائو در برآورد نااریب θ بر پایه نمونه تصادفی n تایی را به دست آورید.

حل:

$$\ln f_\theta(x)=\ln(\theta f_1(x)+(1-\theta)f_2(x))$$

$$\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}=\frac{f_1(x)-f_2(x)}{\left(\theta f_1(x)+(1-\theta)f_2(x)\right)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f_\theta(x)}{\partial\theta^2}=\frac{-(f_1(x)-f_2(x))^2}{\left(\theta f_1(x)+(1-\theta)f_2(x)\right)^2}$$

پس

$$I_{X_1}(\theta)=-E_\theta\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f_\theta(X)}{\partial\theta^2}\right)\right]=E_\theta\left[\frac{\left(f_1(X)-f_2(X)\right)^2}{\left(\theta f_1(X)+(1-\theta)f_2(X)\right)^2}\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(f_1(x)-f_2(x))^2}{\theta f_1(x)+(1-\theta)f_2(x)}dx$$

بنابراین کران پایین کرامر- رائو در برآورد نااریب θ می‌شود

$$\frac{1}{nI_{X_1}(\theta)}=\frac{1}{n}\left\{E_\theta\left[\frac{\left(f_1(X)-f_2(X)\right)^2}{\left(\theta f_1(X)+(1-\theta)f_2(X)\right)^2}\right]\right\}^{-1}$$

با جایگذاری مقدارهای مشخص $f_۱$ و $f_۲$ عبارت بالا قابل محاسبه خواهد بود.

■

۳۳- نشان دهید تحت "شرایط مطلوب"

$$E_\theta\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\theta(X)\right]^۲\right\}=-E_\theta\left[\left(\frac{\partial^۲\ln f_\theta(X)}{\partial\theta^۲}\right)\right]$$

حل: می‌دانیم

$$E_\theta\left[\frac{\partial\ln f_\theta(X)}{\partial\theta}\right]=۰$$

یا

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\ln f_\theta(x)}{\partial\theta}f_\theta(x)dx=۰$$

با مشتق گیری از طرفین رابطه فوق و استفاده از شرط (ج) از شـرایط مطلـوب داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial\ln f_\theta(x)}{\partial\theta}f_\theta(x)\right]dx=۰$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^۲\ln f_\theta(x)}{\partial\theta^۲}f_\theta(x)+\frac{\partial\ln f_\theta(x)}{\partial\theta}\frac{\partial f_\theta(x)}{\partial\theta}\right)dx=۰$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^۲\ln f_\theta(x)}{\partial\theta^۲}f_\theta(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\ln f_\theta(x)}{\partial\theta}\frac{\partial\ln f_\theta(x)}{\partial\theta}f_\theta(x)dx=۰$$

$$E_\theta\left[\left(\frac{\partial^۲\ln f_\theta(X)}{\partial\theta^۲}\right)\right]+E_\theta\left[\left(\frac{\partial\ln f_\theta(X)}{\partial\theta}\right)^۲\right]=۰$$

درنتیجه

$$E_\theta\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\theta(X)\right]^۲\right\}=-E_\theta\left[\left(\frac{\partial^۲\ln f_\theta(X)}{\partial\theta^۲}\right)\right]$$

■

۳٤- فرض کنید $(X_۱,Y_۱),\ldots,(X_n,Y_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(۰,۰,۱,۱,\rho)$ باشد. اطلاع فیشر $I(\rho)$، را به دست آورید.

حل:

تابع چگالی احتمال توأم $(X_۱,Y_۱)$ به صورت زیر است

$$f_{(X_۱,Y_۱)}(x,y)=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{۱-\rho^۲}}\exp\left\{-\frac{۱}{۲(۱-\rho^۲)}\left(x^۲-۲xy\rho+y^۲\right)\right\}$$

$$|\rho|<۱\quad,\quad x,y\in R$$

$I(\rho)$ میزان اطلاع فیشر نسبت به ρ در نمونه تصادفی است. با توجه به اینکه

$$I(\rho)=nI_{(X_۱,Y_۱)}(\rho)$$

بنابراین ابتدا $I_{(X_۱,Y_۱)}(\rho)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\ln f_{(X_۱,Y_۱)}(x,y)=-\ln ۲\pi-\frac{۱}{۲}\ln(۱-\rho^۲)-\frac{۱}{۲(۱-\rho^۲)}(x^۲-۲xy\rho+y^۲)$$

پس

$$\frac{\partial\ln f_{(X_۱,Y_۱)}(x,y)}{\partial\rho}=\frac{\rho}{۱-\rho^۲}-\frac{\rho}{(۱-\rho^۲)^۲}(x^۲-۲xy\rho+y^۲)+\frac{xy}{۱-\rho^۲}$$
$$=\frac{\rho+xy}{۱-\rho^۲}-\frac{\rho}{(۱-\rho^۲)^۲}(x^۲-۲xy\rho+y^۲)$$

و

$$\frac{\partial^۲\ln f_{(X_۱,Y_۱)}(x,y)}{\partial\rho^۲}=$$
$$=\frac{\rho^۲+۲xy\rho+۱}{(۱-\rho^۲)^۲}-\frac{۱+۳\rho^۲}{(۱-\rho^۲)^۳}(x^۲-۲xy\rho+y^۲)+\frac{۲xy\rho}{(۱-\rho^۲)^۲}$$

$$=\frac{\rho^{۲}+۴xy\rho+۱}{(۱-\rho^{۲})^{۲}}-\frac{۱+۳\rho^{۲}}{(۱-\rho^{۲})^{۳}}(x^{۲}-۲xy\rho+y^{۲})$$

درنتیجه

$$I_{(X_۱,Y_۱)}(\rho)=\frac{(۱+۳\rho^{۲})}{(۱-\rho^{۲})^{۳}}\left[E(X^{۲})-۲\rho E(XY)+E(Y^{۲})\right]-\frac{\rho^{۲}+۴\rho E(XY)+۱}{(۱-\rho^{۲})^{۲}}$$

با توجه به اینکه توزیعهای حاشیه ای X و Y هرکدام $N(۰،۱)$ هستند، به سادگی داریم

$$I_{(X_۱,Y_۱)}(\rho)=\frac{(۱+۳\rho^{۲})}{(۱-\rho^{۲})^{۳}}\left[۱-۲\rho^{۲}+۱\right]-\frac{\rho^{۲}+۴\rho^{۲}+۱}{(۱-\rho^{۲})^{۲}}=\frac{n(۱+\rho^{۲})}{(۱-\rho^{۲})^{۲}}$$

بنابراین

$$I(\rho)=\frac{n(۱+\rho^{۲})}{(۱-\rho^{۲})^{۲}}$$

■

۳۵- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x)=\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^{۲}}{۲\theta}} \quad , \quad x>۰ \quad , \quad \theta>۰$$

الف) تحقیق کنید آیا برآوردگر نااریب $\theta^{۲}$ وجود دارد که واریانس آن با کران پایین کرامر- رائو برابر باشد؟

ب) برای چه توابعی از θ، مثلا $\gamma(\theta)$، واریانس برآوردگر نااریب $\gamma(\theta)$ با کران پایین کرامر- رائو برابر است؟

حل:

(الف) با توجه به اینکه $f_\theta(x)$ از خانواده توزیعهای نمایی با $d(X)=X^2$ است. بنابراین واریانس برآوردگر نااریب هر تابع خطی از $E_\theta(X^2)$ بر پایه $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ با کران پایین کرامر- رائو برابر خواهد بود.

با استفاده از رابطه $E_\theta(d(X))=-\frac{Q'(\theta)}{P'(\theta)}$، $E_\theta(X^2)$ را محاسبه می‌کنیم

$$f_\theta(x)=xe^{-\frac{x^2}{2\theta}-\ln\theta} \quad , \quad P(\theta)=-\frac{1}{2\theta} \quad , \quad Q(\theta)=-\ln\theta$$

پس

$$E_\theta(X^2)=2\theta \qquad \forall\theta>0$$

بنابراین هرتابع خطی برآوردپذیر از $E_\theta(X^2)$ بر پایه $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ دارای برآوردگر نااریب با واریانسی برابر با کران پایین کرامر- رائو است.

همینطور چون θ^2 تابع خطی از θ نیست، در صورت وجود داشتن برآوردگر نااریب، واریانس این برآوردگر نااریب با کران پایین کرامر- رائو برابر نیست.

(ب) برای توابع خطی از θ (قسمت (الف) ملاحظه شود.)

■

۳۶- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x)=\frac{x+1}{\theta(\theta+1)}e^{-\frac{x}{\theta}} \quad , \quad x>0 \quad , \quad \theta>0$$

الف) در صورت وجود، برآوردگر نااریب $\gamma_1(\theta)=\frac{2\theta^2-1}{\theta+1}$ ، $\gamma_2(\theta)=\frac{(3+2\theta)(2+\theta)}{\theta+1}$ **را به دست آورید که واریانس آن با کران پایین کرامر- رائو برابر باشد.**

ب) کلاس توابعی از θ **را به دست اورید که واریانس براوردگر نااریب آن با کران پایین کرامر- رائو برابر است.**

حل:

(الف)

$$f_\theta(x)=(x+1)e^{-\frac{x}{\theta}-\ln[\theta(\theta+1)]}$$
$$P(\theta)=-\frac{1}{\theta} \quad ، \quad Q(\theta)=-\ln[\theta(\theta+1)]$$

پس

$$E_\theta(X)=-\frac{Q'(\theta)}{P'(\theta)}=\frac{2\theta^2+\theta}{\theta+1}$$

بنابراین واریانس برآوردگر نااریب هر تابع خطی از $E_\theta(X)$ **بر پایه** $\sum_{i=1}^{n}X_i$ **با کران پایین کرامر- رائو برابر خواهد بود. اکنون نشان می‌دهیم که** $\gamma_1(\theta)$ **و** $\gamma_2(\theta)$ **دو تابع خطی از** $E_\theta(X)$ **هستند و سپس دو برآوردگر نااریب بر پایه** $\sum_{i=1}^{n}X_i$ **برای آنها پیدا می‌کنیم. با توجه به مطلب بالا، واریانس این برآوردگرها با کران پایین کرامر- رائو برابر خواهند بود.**

$$\gamma_1(\theta)=\frac{2\theta^2-1}{\theta+1}=\frac{2\theta^2+\theta-\theta-1}{\theta+1}=\frac{2\theta^2+\theta}{\theta+1}-1$$
$$\gamma_2(\theta)=\frac{(3+2\theta)(2+\theta)}{\theta+1}=\frac{2\theta^2+7\theta+6}{\theta+1}=\frac{2\theta^2+\theta+6\theta+6}{\theta+1}=\frac{2\theta^2+\theta}{\theta+1}+6$$

بنابراین γ_1 **و** γ_2 **ترکیبهای خطی از** $E_\theta(X)$ **هستند.**

$$E_\theta(\overline{X}) = E_\theta(X_۱) = \frac{۲\theta^۲ + \theta}{\theta + ۱}$$

$$\Rightarrow \qquad E_\theta(\overline{X} - ۱) = \frac{۲\theta^۲ + \theta}{\theta + ۱} - ۱ = \gamma_۱(\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad E_\theta(\overline{X} + ۶) = \frac{۲\theta^۲ + \theta}{\theta + ۱} + ۶ = \gamma_۲(\theta)$$

پس $T_۱ = \overline{X} - ۱$ و $T_۲ = \overline{X} + ۶$ دو برآوردگر نااریب $\gamma_1(\theta)$ و $\gamma_2(\theta)$ هستند که واریانس آنها با کران پایین کرامر- رائو برابر است.

(ب) هر ترکیب خطی از $\frac{۲\theta^۲ + \theta}{\theta + ۱}$ واریانس برآوردگر نااریب آن با کران پایین کرامر- رائو برابر است.

■

۳۷- فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $C(\theta,۱)$ باشد. نشان دهید کران پایین کرامر- رائو در برآورد نااریب پارامتر θ برابر با $\frac{۲}{n}$ است. کارایی مجانبی میانه نمونه را در برآورد پارامتر مکانی θ محاسبه کنید.

حل:

$$f_\theta(x) = \frac{۱}{\pi[۱ + (x-\theta)^۲]} \qquad x \in R \ ، \ \theta \in R$$

داریم

$$\ln f_\theta(x) = -\ln \pi - \ln[۱ + (x-\theta)^۲]$$

$$\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{۲(x-\theta)}{[۱ + (x-\theta)^۲]}$$

درنتیجه

$$I_{X_۱}(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta}\right)^۲\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{۴(x-\theta)^۲}{[۱ + (x-\theta)^۲]^۲} \cdot \frac{۱}{\pi[۱ + (x-\theta)^۲]} dx$$

با تغییر متغیر $u = x - \theta$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^2}{(1+u^2)^3}\,du$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+u^2)^2}\,du + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{(1+u^2)^3}\,du\right]$$

با تغییر متغیر $u = tg\theta$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+tg^2\theta)}{(1+tg^2\theta)^2}\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{(1+tg^2\theta)}{(1+tg^2\theta)^3}\,d\theta\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\theta.d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Cos^4\theta.d\theta\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Cos\ 2\theta\right)d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Cos\ 2\theta\right)^2 d\theta\right]$$

با حل هرکدام از انتگرالهای فوق به سادگی داریم

$$I_{X_1}(\theta) = \frac{1}{2}$$

توضیح: فرض کنید $\tilde{X}_n$ میانه نمونه ای به حجم n باشد. طبق تعریف کارایی مجانبی $\tilde{X}_n$ برابر است با

$$e_\infty(\tilde{X}_n) = \lim_{n\to\infty} e_n(\tilde{X}_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{V_\theta(\tilde{X}_n)I(\theta)} \qquad (*)$$

که در آن $I(\theta)$ اطلاع فیشر در نمونه نسبت به θ است و $V_\theta(\tilde{X}_n)$ واریانس $\tilde{X}_n$ است.

با توجه به اینکه توزیع $\tilde{X}_n$ به سادگی محاسبه نمی شود (و بنابراین $V_\theta(\tilde{X}_n)$ نیز ساده به دست نمی آید.) بنابراین به جای $V_\theta(\tilde{X}_n)$ از واریانس مجانبی $\tilde{X}_n$ استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن واریانس مجانبی $\tilde{X}_n$ به قضیه زیر که آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم[۲]، نیاز داریم:

قضیه: فرض کنید $X_1,...,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با تابع توزیع $G_\theta(x)=F(x-\theta)$ باشد. همینطور $F(\cdot)=\frac{۱}{۲}$ و F دارای چگالی f با $f(\cdot)>\cdot$ باشد. آنگاه $\tilde{X}_n$ به طور مجانبی دارای توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس $\frac{۱}{۴n[f(\cdot)]^۲}$ است.

□

همانطور که ملاحظه می‌کنید فرضهای قضیه بیان می‌دارد که θ تنها میانه توزیع X_i هاست.

به عنوان مثال اگر $f(x)=\phi(x)$ چگالی نرمال با میانگین θ و واریانس یک باشد، آنگاه میانه نمونه دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین θ و واریانس

$$\frac{۱}{۴n[f(\cdot)]^۲}=\frac{۱}{۴n[\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}]^۲}=\frac{n}{۲n}$$

است.

به عنوان مثال دیگر فرض کنید $f(x)$ چگالی کوشی استاندارد باشد ($C(0,1)$)، آنگاه میانه نمونه دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین θ و واریانس $\frac{۱}{۴n[f(\cdot)]^۲}=\frac{۱}{۴n(\frac{۱}{\pi})^۲}=\frac{\pi^۲}{۴n}$ است.

---

[۲] برای اثبات می‌توان به کتاب Lehmann, E.L. (۱۹۸۳)."Theory of Point Estimation". صفحه ۳٥٤ مراجعه کرد.

اکنون در مسأله فوق با جایگذاری واریانس مجانبی $\frac{\pi^۲}{۴n}$ و $I(\theta)=\frac{n}{۲}$ در فرمول (×) داریم

$$e_\infty(\widetilde{X}_n)=\frac{۸}{\pi^۲}\approx ۰.۸$$

■

۳۸- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد. کران پایین کرامر- رائو برای واریانس برآوردگرهای نااریب θ، $\theta^۲$، $P_\theta(X_۱>۰)$ و $P_\theta(X_۱>۲\theta)$ را به دست آورید.

حل: به سادگی داریم

$$I_{X_۱}(\theta)=۱$$

(الف) $$\gamma(\theta)=\theta$$

پس $\gamma'(\theta)=۱$ **درنتیجه کران پایین کرامر- رائو برای واریانس هر برآوردگر نااریب θ برابر است با $\frac{۱}{n}$.**

(ب) $$\gamma(\theta)=\theta^۲ \qquad \gamma'(\theta)=۲\theta$$

پس

$$\gamma'(\theta)=۲\theta$$

درنتیجه

$$\text{کران پایین کرامر- رائو}=\frac{۴\theta^۲}{n}$$

(ج)

$$\gamma(\theta)=P_\theta(X_۱>۰)=P_\theta(Z_۱>-\theta)=\phi(\theta)$$

که $\phi(.)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

پس

$$\gamma'(\theta)=\varphi(\theta)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{\theta^۲}{۲}}$$

درنتیجه

$$\text{کران پایین کرامر- رائو}=\frac{[\varphi(\theta)]^۲}{n}=\frac{e^{-\theta^۲}}{۲\pi n}$$

(د)

$$\gamma(\theta)=P_\theta(X_۱>۲\theta)=P_\theta(Z_۱>\theta)=۱-\phi(\theta)$$

پس

$$\gamma'(\theta)=-\varphi(\theta)=-\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{\theta^۲}{۲}}$$

درنتیجه

$$\text{کران پایین کرامر- رائو}=\frac{[-\varphi(\theta)]^۲}{n}=\frac{e^{-\theta^۲}}{۲\pi n}$$

■

۳۹- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با چگالی زیر باشد:

$$f_\theta(x)=\theta(۱+x)^{-(۱+\theta)} \qquad , \quad x>۰ \quad ، \quad \theta>۰$$

الف) کران پایین کرامر- رائو برای واریانس برآوردگرهای ناااریب $\frac{۱}{\theta}$، e^θ و $\theta^۲+۲$ را به دست آورید.

ب) UMVUE پارامتر $\frac{۱}{\theta}$ را به دست آورید.

ج) در صورت وجود، برآوردگر نااریبی از θ را بیابید که واریانس آن با کران پایین کرامر- رائو برابر باشد.

د) برای چه کلاسی از برآوردگرها، واریانس آن با کران پایین کرامر- رائو برابر است؟

ه) برای چه کلاسی از توابع θ، واریانس برآوردگر نااریب آن با کران پایین کرامر- رائو برابر است؟

حل:

$$f_\theta(x) = \exp\{-(۱+\theta)\ln(۱+x) + \ln\theta\} \qquad x>۰ \quad ، \quad \theta>۰$$

$$P(\theta) = -(۱+\theta) \quad ، \quad Q(\theta) = \ln\theta \quad ، \quad d(X) = \ln(۱+X)$$

(الف)

$$\ln f_\theta(x) = \ln\theta - (۱+\theta)\ln(۱+x)$$

$$\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta} = \frac{۱}{\theta} - \ln(۱+x)$$

$$\frac{\partial^۲ \ln f_\theta(x)}{\partial\theta^۲} = -\frac{۱}{\theta^۲} \qquad \Rightarrow \qquad I_{X_۱}(\theta) = \frac{۱}{\theta^۲}$$

$$\text{i)}\ \gamma(\theta) = \frac{۱}{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma'(\theta) = -\frac{۱}{\theta^۲}$$

$$\text{کران پایین کرامر- رائو} = \frac{(-\frac{۱}{\theta^۲})^۲}{\frac{n}{\theta^۲}} = \frac{۱}{n\theta^۲}$$

$$\text{ii)}\ \gamma(\theta) = e^\theta \qquad \Rightarrow \qquad \gamma'(\theta) = e^\theta$$

$$\text{کران پایین کرامر- رائو} = \frac{e^{۲\theta}}{\frac{n}{\theta^۲}} = \frac{\theta^۲ e^{۲\theta}}{n}$$

$$\text{iii)}\ \gamma(\theta) = \theta^۲ + ۲ \qquad \Rightarrow \qquad \gamma'(\theta) = ۲\theta$$

$$\text{کران پایین کرامر- رائو} = \frac{۴\theta^۲}{\frac{n}{\theta^۲}} = \frac{۴\theta^۴}{n}$$

(ب) چگالی فوق متعلق به خانواده توزیعهای نمایی یک پارامتری با آماره بسنده کامل $\sum_{i=۱}^{n}\ln(۱+X_i)$ است. به سادگی دیده می‌شود که

$$Y_i = \ln(۱+X_i) \sim E(\theta)$$

و

$$E(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \frac{n}{\theta}$$

$$E(\frac{\sum Y_i}{n}) = \frac{1}{\theta}$$

$\Rightarrow$

برآوردگر $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i)$ نااریب برای $\frac{1}{\theta}$ و تابعی از آماره بسنده کامل است.

پس UMVUE **برای $\frac{1}{\theta}$ است.**

ج) $x > 0$ ، $\theta > 0$ $\qquad \ln f_\theta(x) = \ln\theta - (1+\theta)\ln(1+x)$

$P(\theta) = -(1+\theta)$ ، $Q(\theta) = \ln\theta$ ، $d(X) = \ln(1+X)$

با توجه به قسمت (ب)

$$\Rightarrow \qquad E_\theta(d(X)) = E_\theta(\ln(1+X)) = \frac{1}{\theta}$$

بنابراین واریانس برآوردگر نااریب هر تابع خطی از $\frac{1}{\theta}$ بر پایه $\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i)$ با کران پایین کرامر- رائو برابر خواهد بود. با توجه به اینکه θ تابع خطی از $\frac{1}{\theta}$ نمی باشد، پس برآوردگر نااریب با واریانسی که برابر با کران پایین کرامر- رائو باشد ندارد.

د)

$$\ln f_\theta(x) = \ln\theta - (1+\theta)\ln(1+x)$$

$$\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta} - \ln(1+x)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f_\theta(x_i)}{\partial\theta} = -\left[\sum_{i=1}^{n} \ln(1+x_i) - \frac{n}{\theta}\right]$$

با توجه به اینکه $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f_\theta(x_i)}{\partial\theta}$ در یک ارتباط خطـی بـا $\sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i)$ اسـت.
بنــــــابراین واریــــــانس $\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$ در بــــــرآورد پــــــارامتر $\gamma(\theta)=E_\theta[\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)]=\frac{n}{\theta}$ کران پایین کرامر- رائو را به دسـت مـی‌دهـد.
(همینطــور هــر تــابع خطــی از $T=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$ ماننــد $aT+b$ در بــرآورد $a\gamma(\theta)+b$ کران پایین کرامر- رائو را به دست می‌دهد.)

ه) همچنانکه در قسمت (ج) ذکر شد، واریانس برآوردگر نااریب هر تابع خطـی از $\frac{1}{\theta}$ بر پایه $\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$ با کران پایین کرامر- رائو برابر خواهد بود.

■

۴۰- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x)=\exp\{-(x-\theta)-\exp[-(x-\theta)]\} \qquad ، \; x\in R \; ، \; \theta\in R$$

الف) کران پایین کرامر- رائو برای واریانس برآوردگر نااریـب θ را بـه دسـت آورید.

ب) در صورت وجود، کلاس توابعی از θ را بـه دسـت آوریـد کـه واریـانس برآوردگر نااریب آن با کران پایین کرامر- رائو برابر باشد.

حل:

$$f_\theta(x)=\exp\{-(x-\theta)-e^{-(x-\theta)}\}$$

$$P(\theta)=-e^{\theta} \quad ، \quad Q(\theta)=\theta \quad ، \quad d(X)=e^{-X}$$

(الف)

$$\ln f_\theta(x)=-(x-\theta)-e^{-(x-\theta)}$$

$$\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}=1-e^{-(x-\theta)}$$

$$\frac{\partial^{۲} \ln f_\theta(x)}{\partial\theta^{۲}} = -e^{-(x-\theta)} \qquad \Rightarrow \qquad I_{X_۱}(\theta) = E_\theta(e^{-(X-\theta)})$$

اکنون $E_\theta(e^{-(X-\theta)})$ را محاسبه می‌کنیم

$$E_\theta(e^{-(X-\theta)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\theta)}.e^{-(x-\theta)-e^{-(x-\theta)}}dx$$

با تغییر متغیر $u = e^{-(x-\theta)}$

$$= \int_{۰}^{\infty} ue^{-u}du = ۱$$

درنتیجه

$$\text{کران پایین کرامر- رائو} = \frac{۱}{n}$$

(ب) همانطور که ملاحظه می‌شود توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی با $d(X) = e^{-X}$ است.

$$E_\theta(e^{-X}) = e^{-\theta}E_\theta(e^{-(X-\theta)}) = e^{-\theta}$$

بنابراین واریانس برآوردگر ناریب هر تابع خطی از $e^{-\theta}$ بر پایه $\sum_{i=۱}^{n} e^{-X_i}$ با کران پایین کرامر- رائو برابر خواهد بود.

■

۴۱- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Ge(\theta)$ باشد.

الف) کران پایین کرامر- رائو برای واریانس برآوردگر ناریب $(۱-\theta)$ را به دست آورید.

ب) در صورت وجود، کلاس توابعی از θ، که واریانس برآوردگر ناریب آن با کران پایین کرامر- رائو برابر است را به دست آورید.

ج) در صورت وجود، UMVUE پارامتر $\frac{۱-\theta}{\theta}$ را به دست آورید.

د) نشان دهید میانگین نمونه، یک برآوردگر کارا برای میانگین جامعه است.

حل:

$$f_\theta(x)=\theta(1-\theta)^x \qquad x=0,1,2,\dots \quad 0<\theta<1$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری با آماره بسنده کامل $\sum_{i=1}^{n} X_i$ **است.**

(الف)

$$\ln f_\theta(x)=\ln\theta+x\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}-\frac{x}{1-\theta} \quad ، \quad \frac{\partial^2 \ln f_\theta(x)}{\partial\theta^2}=-\frac{1}{\theta^2}-\frac{x}{(1-\theta)^2}$$

پس

$$I_{X_1}(\theta)=\frac{1}{\theta^2}+\frac{E_\theta(X)}{(1-\theta)^2}=\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta(1-\theta)}=\frac{1}{\theta^2(1-\theta)}$$

درنتیجه

$$\text{کران پایین کرامر- رائو}=\frac{\theta^2(1-\theta)}{n}$$

(ب) $f_\theta(x)$ **از خانواده توزیعهای نمایی با** $d(X)=X$ **است، بنابراین واریانس برآوردگر نااریب هر تابع خطی از** $E_\theta(X)=\frac{1-\theta}{\theta}=\frac{1}{\theta}-1$**، با کران پایین کرامر- رائو برابر خواهد بود.**

(ج)

$$E_\theta(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\frac{n(1-\theta)}{\theta} \qquad \Rightarrow E_\theta(\overline{X})=\frac{1-\theta}{\theta}$$

بنابراین $\overline{X}$ **برآوردگر UMVU پارامتر** $\frac{1-\theta}{\theta}$ **است.**

(د) چون شرایط مطلوب برای خانواده توزیعهای $\{Ge(p): \cdot < p < 1\}$ برقرار است، با استفاده از تعریف کرامر برای کارایی نشان می‌دهیم که $\overline{X}$ یک برآوردگر کارا برای $\frac{1-\theta}{\theta}$ است.

$$Var_{\theta}(\overline{X}) = \frac{Var(X_1)}{n} = \frac{(1-\theta)}{n\theta^2}$$

از طرفی کران پایین کرامر- رائو برای واریانس برآوردگرهای نااریب $\frac{1-\theta}{\theta}$ به صورت زیر است

$$\text{کران پایین کرامر- رائو} = \frac{[(\frac{1-\theta}{\theta})']^2}{\frac{n}{\theta^2(1-\theta)}} = \frac{(1-\theta)}{n\theta^2}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود $Var(\overline{X})$ با کران پایین کرامر- رائو برابر است، پس $\overline{X}$ یک برآوردگر کارا برای میانگین جامعه است.

■

۴۲- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_{\theta}(x) = (1+\theta)x^{\theta} \qquad ، \quad \cdot < x < 1 \quad ، \quad \theta > -1$$

کلاس توابعی از θ را که واریانس برآوردگر نااریب آنها با کران پایین کرامر- رائو برابر است را به دست آورید.

حل:

$$f_{\theta}(x) = \exp\{\theta \ln x + \ln(\theta+1)\}$$

$$P(\theta) = \theta \quad ، \quad Q(\theta) = \ln(\theta+1) \quad ، \quad d(X) = \ln X$$

$$E_{\theta}(d(X)) = E_{\theta}(\ln X) = \int_{\cdot}^{1} (\theta+1)\ln x . x^{\theta} dx =$$

تغییر متغیر $u = -\ln x$

$$= \int_{0}^{\infty} (\theta+1) u e^{-u(\theta+1)} du = \frac{1}{\theta+1}$$

برای محاسبه انتگرال فوق، می‌دانیم $U \sim E(\theta+1)$، است. پس انتگرال فوق امید ریاضی U است.

بنابراین برای هر تابع خطی از $\frac{1}{\theta+1}$ که دارای برآوردگر نااریب بر پایه $\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ است، واریانس برآوردگر نااریب آن با کران پایین کرامر- رائو یکسان خواهد بود.

■

۴۳- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از جمعیتی با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 باشد. نشان دهید $T(X) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i$ یک برآوردگر سازگار برای μ است.

حل: شرایط کافی سازگاری را بررسی می‌کنیم. (به قضیه (۴-۴) صفحه ۲۰۴ مراجعه شود.)

$$T_n(X) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i$$

$$E(T_n) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iE(X_i) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i\mu$$

$$= \frac{2\mu}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{2\mu}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \mu$$

$$Var(T_n) = \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 Var(X_i) = \frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} \sigma^2$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} Var(T_n) = 0$$

بنابراین دنباله برآوردگرهای T_n سازگار برای μ می‌باشد.

■

٤٤- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0,\theta)$ باشـد. نشان دهید $T(X) = (\prod_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}$ یک برآوردگر سازگار برای $\frac{\theta}{e}$ است.

حل:

راه حل اول- شرایط کافی سازگاری را بررسی می‌کنیم. (نتیجـه(٤-٣) صـفحه ٢٠٤ ملاحظه شود.)

$$E(X_1^{\frac{1}{n}}) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{\theta}.\frac{n}{n+1} x^{\frac{1}{n}+1}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta^{\frac{1}{n}}$$

$$E(X_1^{\frac{2}{n}}) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} x^{\frac{2}{n}} dx = \frac{1}{\theta}.\frac{n}{n+2} x^{\frac{2}{n}+1}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+2}\theta^{\frac{2}{n}}$$

بنابر استقلال X_i ها $\quad E(T_n(X)) = E(\prod_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^n E(X_i^{\frac{1}{n}})$

بنابر همتوزیعی X_i ها $\quad = \prod_{i=1}^n (\frac{n}{n+1}\theta^{\frac{1}{n}})$

$$= (\frac{n}{n+1})^n \theta$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} E(T_n(X)) = \theta \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \theta \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{\theta}{e}$$

و

$$Var(T_n(X)) = E(T_n^2(X)) - E^2(T_n(X))$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E(X_i^{\frac{2}{n}}) - (\frac{n}{n+1})^{2n}\theta^2$$
$$= [(\frac{n}{n+2})^n - (\frac{n}{n+1})^{2n}]\theta^2$$
$$\lim_{n\to\infty} Var(T_n(X)) = \theta^2 \lim_{n\to\infty}[\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^n} - \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}] = \theta^2(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2}) = 0$$

بنابراین دنباله براوردگرهای T_n سازگار برای $\frac{\theta}{e}$ است.

راه حل دوم- ابتدا نشان می‌دهیم

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \xrightarrow{P} \ln\frac{\theta}{e}$$

برای این منظور از شرط کافی سازگاری استفاده می‌کنیم.

$$E_\theta(\ln X_1) = \int_0^\theta \frac{\ln x}{\theta}dx = \frac{1}{\theta}[x\ln x - x]\Big|_0^\theta = \frac{\theta\ln\theta - \theta}{\theta} = \ln\frac{\theta}{e}$$
$$E_\theta[(\ln X_1)^2] = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta (\ln x)^2 dx = \frac{1}{\theta}I_1$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء انتگرال I_1 را حل می‌کنیم.

$$u = (\ln x)^2 \quad \to \quad du = \frac{2}{x}\ln x$$
$$\to \quad v = x$$
$$dv = dx$$
$$I_1 = x(\ln x)^2\Big|_0^\theta - 2\int_0^\theta \ln x dx = \theta(\ln\theta)^2 - 2[x\ln x - x]\Big|_0^\theta$$
$$= \theta(\ln\theta)^2 - 2[\theta\ln\theta - \theta] = \theta(\ln\theta)^2 - 2\theta\ln\theta + 2\theta$$

درنتیجه

$$E_\theta[(\ln X_1)^2] = (\ln\theta)^2 - 2\ln\theta + 2$$
$$Var_\theta(\ln X_1) = E(\ln X_1)^2 - E^2(\ln X_1) = (\ln\theta)^2 - 2\ln\theta + 2 - (\ln\theta - 1)^2 = 1$$

اکنون به سادگی داریم

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)=\ln\frac{\theta}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)=\lim_{n\to\infty}\frac{Var_\theta(X_1)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

بنابراین شرایط کافی برای سازگاری برقرارند. درنتیجه

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\xrightarrow{P}\ln\frac{\theta}{e}$$

یا معادل آن

$$\ln(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\frac{1}{n}}\xrightarrow{P}\ln(\frac{\theta}{e})$$

با توجه به اینکه تابع $f(t)=e^t$ پیوسته است وبا استفاده از توضیح سـؤال ۹ در فصل سوم داریم

$$(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\frac{1}{n}}\xrightarrow{P}\frac{\theta}{e}$$ ■

٤٥- نشان دهید اگر $\gamma(\theta)=a\theta+b$ ، که در آن $a\neq 0$ و T یک برآوردگـر کـارا برای θ باشد، آنگاه $aT+b$ یک برآوردگر کارا برای $\gamma(\theta)$ است.

حل:

کافی است نشان دهیم $Var(aT+b)$ با کران پایین کرامر- رائو برابر است، یعنی

$$Var(aT+b)=\frac{[\gamma'(\theta)]^2}{I(\theta)}$$

چون T برآوردگر کارا برای θ است پس داریم

$$\frac{[\gamma'(\theta)]^2}{I(\theta)}=\frac{a^2}{I(\theta)}=a^2.\frac{1}{I(\theta)}=a^2Var(T)=Var(aT+b)$$

■

٤٦- فرض کنید X و Y دارای تابع احتمال توأم زیر باشند:

$$f_\theta(x,y)=\frac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}(\theta^2)^x[2\theta(1-\theta)]^y[(1-\theta)^2]^{n-x-y}$$

$$x, y = ۰,۱,\ldots, n \quad ، \quad x + y \le n$$

در صورت وجود، یک برآوردگر نااریب کارا برای θ به دست آورید.

حل:

می‌دانیم

$$(X, Y) \sim MB(n, \theta^۲, ۲\theta(۱-\theta), (۱-\theta)^۲)$$

پس $X \sim B(n, \theta^۲)$ **و** $Y \sim B(n, ۲\theta(۱-\theta))$.

$$\begin{aligned}
f_\theta(x, y) &= \frac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}\theta^{۲x}[۲\theta(۱-\theta)]^y(۱-\theta)^{۲n-۲x-۲y} \\
&= \frac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}۲^y\theta^{۲x+y}(۱-\theta)^{-۲x-y}(۱-\theta)^{۲n} \\
&= \frac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}۲^y(۱-\theta)^{۲n}\left(\frac{\theta}{۱-\theta}\right)^{۲x+y} \\
&= \frac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}۲^y(۱-\theta)^{۲n}\exp\{(۲x+y)\ln(\frac{\theta}{۱-\theta})\}
\end{aligned}$$

توزیع فوق متعلق به خانواده نمایی یک پارامتری است و آمـاره $۲X + Y$ آمـاره بسنده کامل است.

$$E_\theta(۲X+Y) = ۲E_\theta(X) + E_\theta(Y) = ۲(n\theta^۲) + ۲n\theta(۱-\theta) = ۲n\theta$$

$$\Rightarrow \qquad E_\theta(\frac{۲X+Y}{۲n}) = \theta$$

پس $\frac{۲X+Y}{۲n}$ برآوردگر UMVU برای پارامتر θ اســت. بنــابر تعریــف (۴-۵) ازصفحه ۲۰۱ کتاب آمار ریاضی این برآوردگر کارا می‌باشد.

■

۴۷- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با میانگین μ و واریـــانس متنـــاهی σ^2 باشـــد. برآوردگرهـــای $T_1=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$، $T_2=\overline{X}$ و $T_3=\frac{1}{4}X_1+\frac{X_2+...+X_{n-1}}{2(n-2)}+\frac{1}{4}X_n$ را در نظر گیرید.

الف) نشان دهید برآوردگرهای فوق برای μ ناااریب اند.

ب) کارایی نسبی T_2 نسبت به T_1 و T_3 را محاسبه کنید.

حل:

(الف)

$$E_\theta(T_1)=\frac{1}{2}(E_\theta(X_1)+E_\theta(X_2))=\frac{1}{2}(\mu+\mu)=\mu$$

$$E_\theta(T_2)=E_\theta(\overline{X})=E_\theta(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E_\theta(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$$

$$E_\theta(T_3)=\frac{1}{4}E_\theta(X_1)+\frac{E_\theta(X_2+...+X_{n-1})}{2(n-2)}+\frac{1}{4}E_\theta(X_n)=$$

$$=\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{2(n-2)}((n-2)\mu)+\frac{1}{4}\mu=\mu$$

(ب) ابتدا واریانسهای T_1 و T_2 و T_3 را به دست می‌آوریم.

$$Var(T_1)=\frac{1}{4}[Var(X_1)+Var(X_2)]=\frac{\sigma^2}{2}$$

$$Var(T_2)=\frac{Var(X_1)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$Var(T_3)=\frac{1}{16}Var(X_1)+\frac{Var(\sum_{2}^{n-1}X_i)}{4(n-2)^2}+\frac{1}{16}Var(X_n)$$

$$=\frac{\sigma^2}{16}+\frac{(n-2)\sigma^2}{4(n-2)^2}+\frac{\sigma^2}{16}=\frac{n\sigma^2}{8(n-2)}$$

کارایی نسبی T_2 نسبت به T_1

$$e_n(T_2,T_1)=\frac{Var(T_1)}{Var(T_2)}=\frac{\frac{\sigma^2}{2}}{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{n}{2}$$

همچنانکه ملاحظه می‌شود برای $n>2$ کارایی T_2 بیشتر از T_1 است.

کارایی نسبی $T_۲$ نسبت به $T_۳$

$$e_n(T_۲,T_۳)=\frac{Var(T_۳)}{Var(T_۲)}=\frac{n^۲}{۸(n-۲)}$$

برای $n\geq ۳$ ، $e_n(T_۲,T_۳)>۱$، **پس کارایی $T_۲$ بیشتر از $T_۳$ است.**

■

٤۸- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تـصادفی n تـایی از توزیـع $U(\theta,\theta+۱)$ باشد. برآوردگرهای $T_۱=\overline{X}-\frac{۱}{۲}$ ، $T_۲=X_{(n)}-\frac{n}{n+۱}$ برآوردگرهای نااریب θ را به دست آورید.

الف) نشان دهید $T_۱$ و $T_۲$ برآوردگرهای نااریب θ هستند.

ب) کارایی $T_۲$ نسبت به $T_۱$ را به دست آورید.

حل:

(الف) داریم

$$E_\theta(X_۱)=\frac{۲\theta+۱}{۲}=\theta+\frac{۱}{۲}$$

پس

$$E_\theta(T_۱)=E_\theta(\overline{X})-\frac{۱}{۲}=E_\theta(X_۱)-\frac{۱}{۲}=\theta$$

و

$$E_\theta(T_۲)=E_\theta(X_{(n)})-\frac{n}{n+۱}=E_۱(X_{(n)}-\theta)+\theta-\frac{n}{n+۱}$$
$$=\frac{n}{n+۱}+\theta-\frac{n}{n+۱}=\theta$$

پس $T_۱$ و T_2 برآوردگرهای نااریب θ هستند.

(ب) ابتدا واریانسهای $T_۱$ و $T_۲$ را محاسبه می‌کنیم.

$$Var_\theta(T_۱)=\frac{Var_\theta(X_۱)}{n}=\frac{۱}{۱۲n}$$

$$Var_\theta(T_۲)=Var_\theta(X_{(n)})=E_\theta(X_{(n)}^۲)-E_\theta^۲(X_{(n)})$$

با استفاده از توزیع $X_{(n)}$ ، $E_\theta(X_{(n)}^۲)$ را محاسبه می‌کنیم.

به سادگی داریم

$$f_{X_{(n)}}(x)=n(x-\theta)^{n-1} \qquad \theta<x<\theta+۱$$

$$E_\theta(X_{(n)}^۲)=\int_\theta^{\theta+۱} nx^۲(x-\theta)^{n-۱}dx=$$

با تغییر متغیر $u=x-\theta$ ،

$$=\int_۰^۱ n(u+\theta)^۲u^{n-۱}du$$

$$=\int_۰^۱ n(u^۲+\theta^۲+۲u\theta)u^{n-۱}du$$

$$=n\int_۰^۱ u^{n+۱}du+n\theta^۲\int_۰^۱ u^{n-۱}du+۲\theta n\int_۰^۱ u^n du$$

$$=\frac{n}{n+۲}+\theta^۲+\frac{۲n}{n+۱}\theta$$

بنابراین

$$Var_\theta(T_۲)=\frac{n}{n+۲}+\theta^۲+\frac{۲n}{n+۱}\theta-(\frac{n}{n+۱}+\theta)^۲$$

$$=\frac{n}{(n+۲)(n+۱)^۲}$$

$$e_n(T_۲,T_۱)=\frac{V_\theta(T_۱)}{V_\theta(T_۲)}=\frac{(n+۲)(n+۱)^۲}{۱۲n^۲}>۱ \qquad n\geq ۸$$

$$<۱ \qquad n<۸$$

■

۴۹- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 باشند. نشان دهید $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ یک برآوردگر سازگار σ^2 است.

حل:

توضیح:

قضیه۱) فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع باشند و

$$\mu'_k=E(X_1^k)$$

، $k=1,2,\dots$، فرض کنید $E|X_1^k|<\infty$، آنگاه داریم

$$\overline{X^k}\xrightarrow{P}\mu'_k$$

اثبات: شرایط کافی سازگاری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$E(\overline{X^k})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)=E(X_1^k)=\mu'_k$$

$$Var(\overline{X^k})=\frac{1}{n}Var(X_1^k)=\frac{1}{n}\{E(X_1^k)-[E(X_1)]^k\}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}Var(\overline{X^k})=0$$

و در نتیجه

$$\overline{X^k}\xrightarrow{P}\mu'_k$$

قضیه۲) فرض کنید $\{U_n\}$ و $\{T_n\}$، دو دنباله برآورد سازگار به ترتیب برای U و T باشند. یعنی

$$U_n\xrightarrow{P}U\quad,\quad T_n\xrightarrow{P}T$$

همچنین برای دنباله عددی $\{a_n\}$ داشته باشیم

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

آنگاه

(الف) $U_n + T_n \xrightarrow{P} U + T$

(ب) $a_n T_n \xrightarrow{P} aT$

با استفاده از توضیح قبل و همچنین توضیح بعد از سؤال ۹ از فصل ۳ داریم

$$\overline{X} \xrightarrow{P} \mu_1 = \mu \quad \Rightarrow \quad \overline{X}^2 \xrightarrow{P} \mu^2 \quad (1)$$

$$\overline{X^2} \xrightarrow{P} \mu_2' \quad (2)$$

$$(1),(2) \quad \Rightarrow \quad \overline{X^2} - \overline{X}^2 \xrightarrow{P} \mu_2' - \mu^2 = \sigma^2$$

چون $\frac{n}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ، **پس**

$$\frac{n}{n-1}(\overline{X^2} - \overline{X}^2) \xrightarrow{P} = \sigma^2$$

یا

$$S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

■

۵۰- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ **و** $Y_1,\dots,Y_n$ **دو نمونه تصادفی مستقل با میانگین و واریانس به ترتیب** μ_1 ، μ_2 **و** σ_1^2 ، σ_2^2 **باشند. نشان دهید** $\overline{X} - \overline{Y}$ **یک برآوردگر سازگار** $\mu_1 - \mu_2$ **است.**

حل:

شرایط کافی سازگاری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$E(\overline{X} - \overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2$$

$$Var(\overline{X} - \overline{Y}) = Var(\overline{X}) + Var(\overline{Y}) = \frac{1}{n}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} Var(\bar{X}-\bar{Y})=\text{۰}$$

بنابراین $\bar{X}-\bar{Y}$ برآوردگری سازگار برای $\mu_\text{۱}-\mu_\text{۲}$ است.

■

۵۱- فرض کنید $X_\text{۱},\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Beta(\theta,\text{۱})$ باشد. نشان دهید $\bar{X}$ یک برآوردگر سازگار $\frac{\theta}{\theta+\text{۱}}$ است.

حل: $\theta>\text{۰}$ ، $\text{۰}<x<\text{۱}$ $\quad f_\theta(x)=\theta x^{\theta-\text{۱}}$

شرایط کافی سازگاری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$E_\theta(\bar{X})=E_\theta(X_\text{۱})=\frac{\theta}{\theta+\text{۱}}$$

$$Var_\theta(\bar{X})=\frac{Var_\theta(X_\text{۱})}{n}=\frac{\frac{\theta}{(\theta+\text{۲})(\theta+\text{۱})^\text{۲}}}{n}=\frac{\theta}{n(\theta+\text{۲})(\theta+\text{۱})^\text{۲}}$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} V_\theta(\bar{X})=\text{۰}$$

بنابراین شرایط کافی سازگاری برقرار است و $\bar{X}$ برآوردگر سازگار $\frac{\theta}{\theta+\text{۱}}$ است.

■

مسائل فصل پنجم

برآوردگرهای بیز و کمین بیشینه

۵- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(1,\theta)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $E(1)$ و تابع زیان مربع خطا، برآوردگر بیز θ را به دست آورده و تابع مخاطره بیزی را محاسبه کنید.

حل:

$$f_\theta(x) = \theta e^{-\theta(x-1)} \quad ; \quad x \geq 1 \,, \theta > 0$$

داریم

$$f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}$$

و

$$g_\theta(\theta) = e^{-\theta} \quad ; \quad \theta > 0$$

پس

$$g(\theta|\underline{x}) \propto f_\theta(\underline{x})g(\theta) = \theta^n e^{-\theta(n\bar{x}-(n-1))}$$

بنابراین توزیع پسین می شود

$$\theta|\underline{x} \sim \Gamma(n+1, n\bar{x}-(n-1))$$

برآوردگر بیز θ با توزیع پیشین $E(1)$ و تابع زیان مربع خطا می شود

$$\delta_g(\underline{X}) = E[\theta|\underline{X}] = \frac{n+1}{n\bar{X}-(n-1)}$$

■

تابع مخاطره بیزی برآوردگر δ در برآورد $\gamma(\theta)$ نسبت به توزیع پیشین G و تابع زیان L به صورت

$$r(G,\delta) = E[R(\theta,\delta)] = \int_{\Theta} R(\theta,\delta)dG(\theta)$$

تعریف شده است.

$r(G,\delta)$ در واقع ریسك بیز برآوردگر δ نامیده می‌شود. (و یك عدد می‌باشد.)
برآوردگری که کوچکترین ریسك بیز را داشته باشد، برآوردگر بیز نامیده می‌شود.
در بعضی از مسائل این فصل تابع مخاطره بیزی (ریسك بیز) نیز خواسته شده است. با توجه به کلاس بزرگ برآوردگرها به نظرمؤلفین منظور از محاسبه تابع مخاطره بیزی، تابع مخاطره بیزی برآوردگر بیز (ریسك بیز برآورد گر بیز) بوده است. محاسبات مربوطه در این مورد را به عهده خوانندگان می گذاریم.

۶- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $\Gamma(\alpha,\beta)$ و تابع زیان مربع خطا، برآوردگر بیز λ را به دست آورده و تابع مخاطره بیزی را محاسبه کنید.

حل: داریم

$$f_\lambda(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(x_i) = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$g_\lambda(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\lambda^{\alpha-1}e^{-\frac{\lambda}{\beta}}$$

پس

$$g(\lambda|\underline{x}) \propto \lambda^{\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} e^{-\lambda(n+\frac{1}{\beta})}$$

بنابراین

$$\lambda|\underline{x} \sim \Gamma\left(\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i, n + \frac{1}{\beta}\right)$$

در نتیجه برآوردگر بیز پارامتر λ نسبت به توزیع پیشین $g_\lambda(\lambda)$ و تابع زیان مربع خطا برابر است با

$$\delta_g(\underline{X}) = E[\lambda|\underline{X}] = \frac{(\alpha + n\overline{X})\beta}{1 + n\beta}$$

■

۷- فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. با انتخاب توزیع پیشین $U(0,1)$ و تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $w(\theta) = \theta^2$ ، برآوردگر بیز θ را به دست آورده و تابع مخاطره بیزی را محاسبه کنید.

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \quad , \quad 0 < x < \theta \quad , \quad \theta > 0$$

حل:

داریم

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2}u(\theta - x) \qquad , \qquad g_\theta(\theta) = 1 \qquad 0 < \theta < 1$$

$$g(\theta|x) \propto f_\theta(x)g_\theta(\theta) = \frac{2x}{\theta^2}u(\theta - x)u(1-\theta)$$

یا

$$g(\theta|x) = c\frac{2x}{\theta^2}u(\theta - x)u(1-\theta)$$

که در آن c ثابت مثبتی است که به θ بستگی ندارد. اکنون برآورد بیز را محاسبه می کنیم.

$$\delta_g(x) = \frac{E[w(\theta)\theta|X = x]}{E[w(\theta)|X = x]} = \frac{E[\theta^3|X = x]}{E[\theta^2|X = x]}$$

$$= \frac{\int_x^1 2\theta.xd\theta}{\int_x^1 2.xd\theta} = \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x} = \frac{1+x}{2}$$

بنابراین برآوردگر بیز نسبت به توزیع پیشین $U(0,1)$ و تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $w(\theta) = \theta^2$ برابر است با

$$\delta_g(X) = \frac{1+X}{2}$$

■

۸- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0,\theta)$ باشد. با انتخاب تابع چگالی احتمال پیشین متناسب با $\theta^{-\alpha}$ ، $1<\theta<\infty$ و $\alpha>1$ ، تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $w(\theta)=\frac{1}{\theta^2}$ ، برآوردگر بیز θ را به دست آورده و تابع مخاطره بیزی را محاسبه کنید.

حل: داریم

$$f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^{-n}u(\theta - x_{(n)})$$

و

$$g_\theta(\theta) \propto \theta^{-\alpha} u(\theta - ۱) \quad , \quad \alpha > ۱$$

پس

$$g(\theta|\underline{x}) \propto \theta^{-(n+\alpha)} u(\theta - ۱) u(\theta - x_{(n)})$$

یا

$$g(\theta|\underline{x}) = c\theta^{-(n+\alpha)} u(\theta - ۱) u(\theta - x_{(n)})$$

که در آن c ثابت مثبتی است که به θ بستگی ندارد.

برای محاسبه برآورد بیز دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول- $۰ < x_{(n)} < ۱$

برآورد بیز می شود

$$\delta_g(\underline{x}) = \frac{E[w(\theta)\theta | X = x]}{E[w(\theta) | X = x]} = \frac{E[\frac{۱}{\theta} | X = x]}{E[\frac{۱}{\theta^۲} | X = x]}$$

$$= \frac{\int_۱^\infty \theta^{-(n+\alpha+۱)} d\theta}{\int_۱^\infty \theta^{-(n+\alpha+۲)} d\theta} = \frac{-\frac{۱}{(n+\alpha)} \theta^{-(n+\alpha)} \Big|_۱^\infty}{-\frac{۱}{(n+\alpha+۱)} \theta^{-(n+\alpha+۱)} \Big|_۱^\infty}$$

$$= \frac{n + \alpha + ۱}{n + \alpha}$$

در این حالت برآوردگر بیز یک مقدار ثابت است.

حالت دوم- $x_{(n)} > ۱$

برآوردگر بیز می شود

$$\delta_g(\underline{x}) = \frac{\int_{x_{(n)}}^{\infty} \theta^{-(n+\alpha+۱)} d\theta}{\int_{x_{(n)}}^{\infty} \theta^{-(n+\alpha+۲)} d\theta} = \frac{n+\alpha+۱}{n+\alpha} x_{(n)}$$

بنابراین برآوردگر بیز در این حالت عبارت است از

$$\delta_g(\underline{X}) = \frac{n+\alpha+۱}{n+\alpha} X_{(n)}$$

■

۹- فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Ge(\theta)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $U(۰,۱)$ و تابع زیان مربع خطا، برآوردگر بیز θ را به دست آورده و تابع مخاطره بیزی را حساب کنید.

حل: $f_\theta(x) = \theta(۱-\theta)^x \quad ; \quad x = ۰,۱,۲,\dots \quad ، \quad ۰ < \theta < ۱$

داریم

$$f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=۱}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^n (۱-\theta)^y$$

که $y = \sum_{i=۱}^{n} x_i$

و

$$g_\theta(\theta) = ۱ \qquad ۰ < \theta < ۱$$

پس

$$g(\theta|\underline{x}) \propto \theta^n (۱-\theta)^y \qquad ۰ < \theta < ۱$$

بنابراین

$$\theta|\underline{x} \sim Beta(n+۱, y+۱)$$

در نتیجه برآوردگر بیز پارامتر θ نسبت به توزیع پیشین $U(۰,۱)$ و تابع زیان مربع خطا برابر است با

$$\delta_g(\underline{X}) = E[\theta | \underline{X}] = \frac{n+۱}{n+Y+۲}$$

که در آن $Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i$.

■

۱۰- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $E(۱)$ و تابع زیان مربع خطا، برآوردگر بیز $\gamma(\lambda)=e^{-\lambda}$ را به دست آورید.

حل: داریم

$$f_\lambda(\underline{x}) = \prod_{i=۱}^{n} f_\lambda(x_i) = (\prod_{i=۱}^{n} x_i!)^{-۱} e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=۱}^{n} x_i}$$

$$\lambda > 0$$

و

$$g_\lambda(\lambda) = e^{-\lambda}$$

پس

$$g(\lambda | \underline{x}) \propto \lambda^{n\bar{x}} e^{-\lambda(n+۱)}$$

بنابراین

$$\lambda | \underline{x} \sim \Gamma(n\bar{x}+۱, n+۱)$$

اکنون برآورد بیز را محاسبه می کنیم.

$$\delta_g(\underline{x}) = E[\gamma(\lambda) | \underline{X} = \underline{x}] = E[e^{-\lambda} | \underline{X} = \underline{x}]$$
$$= \int_۰^\infty e^{-\lambda} . \frac{۱}{\Gamma(n\bar{x}+۱)} (n+۱)^{n\bar{x}+۱} . \lambda^{n\bar{x}} e^{-\lambda(n+۱)} d\lambda$$

$$= \int_۰^\infty \frac{۱}{\Gamma(n\bar{x}+۱)} (n+۱)^{n\bar{x}+۱} . \lambda^{n\bar{x}} e^{-\lambda(n+۲)} d\lambda$$

$$= \frac{(n+1)^{n\bar{x}+1}}{(n+2)^{n\bar{x}+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n\bar{x}+1)} (n+2)^{n\bar{x}+1} . \lambda^{n\bar{x}} e^{-\lambda(n+2)} d\lambda$$
$$= (\frac{n+1}{n+2})^{n\bar{x}+1}$$

در نتیجه برآوردگر بیز پارامتر $e^{-\lambda}$ نسبت به توزیع پیشین $E(1)$ و تابع زیان مربع خطا برابر است با

$$\delta_g(\underline{X}) = (1 - \frac{1}{n+2})^{n\bar{X}+1}$$

■

۱۱- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\lambda)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $E(1)$ و تابع زیان مربع خطا، برآوردگر بیز λ را به دست آورده و تابع مخاطره بیزی را حساب کنید.

حل: داریم

$$f_\lambda(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n f_\lambda(x_i) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$
$$\lambda > 0$$

و

$$g_\lambda(\lambda) = e^{-\lambda}$$

پس

$$g(\lambda|\underline{x}) \propto \lambda^n e^{-\lambda(n\bar{x}+1)}$$

بنابراین

$$\lambda|\underline{x} \sim \Gamma(n+1, n\bar{x}+1)$$

در نتیجه برآوردگر بیز پارامتر λ نسبت به توزیع پیشین $E(1)$ و تابع زیان مربع خطا برابر است با

$$\delta_g(\underline{X}) = \frac{n+1}{1+n\bar{X}}$$

■

۱۲- فرض کنید بدانیم θ نسبت محصولات معیوب یک کارخانه برابر ۰/۱ یا ۰/۲ است. اگر تابع احتمال پیشین به صورت $1-P(\theta=0/2)=P(\theta=0/1)=0/7$ انتخاب شود و از هشت محصول به تصادف انتخاب شده از محصول این کارخانه دقیقاً ۲ محصول معیوب مشاهده شود، تابع احتمال پسین θ را به دست آورید.

حل:

متغیر تصادفی X را تعداد محصولات معیوب در یک نمونه ۸ تایی تعریف می کنیم.

می دانیم $X \sim B(8,\theta)$

توزیع پیشین θ برابر است با

$\Theta=\theta$	۰/۱	۰/۲
$g(\theta)$	۰/۷	۰/۳

اکنون توزیع پسین θ را به دست می آوریم. فرض کنید $f_X(x)$ توزیع حاشیه ای X باشد.

$$g(\theta|X=2)=\frac{P_\theta(X=2)g(\theta)}{f_X(2)}=\frac{P_\theta(X=2)g(\theta)}{\sum_\theta P_\theta(X=2)g(\theta)}$$

$$=\frac{\theta^2(1-\theta)^6\,g(\theta)}{(0/1)^2(0/9)^6(0/7)+(0/2)^2(0/8)^6(0/3)}$$

بنابراین

$$g(0/1|X=2)=\frac{(0/1)^2(0/9)^6(0/7)}{(0/1)^2(0/9)^6(0/7)+(0/2)^2(0/8)^6(0/3)}\approx 0/54$$

و $g(۰/۲|X=۲) = ۱ - g(۰/۱|X=۲) = ۱ - ۰/۵۴ = ۰/۴۶$

توزیع پسین می شود

$\Theta=\theta$	۰/۱	۰/۲
$g(\theta|X=۲)$	۰/۵٤	۰/٤٦

■

۱۳- فرض کنید بدانیم θ نسبت محصولات معیوب یک کارخانه دارای توزیعی با چگالی احتمال زیر است. اگر در یک نمونه تصادفی n تایی، سه محصول معیوب مشاهده شود توزیع پسین θ رابه دست آورید.

$$g(\theta) = ۲(۱-\theta) \quad ، \quad ۰<\theta<۱$$

حل:

متغیر تصادفی X را تعداد محصولات معیوب در یک نمونه n تایی تعریف می کنیم.

می‌دانیم $X \sim B(n,\theta)$

توزیع پیشین برابر است با

$$g(\theta) = ۲(۱-\theta) \quad ، \quad 0<\theta<1$$

بنابراین

$$g(\theta|x) \propto \theta^{x}(۱-\theta)^{n-x+۱}$$

درنتیجه

$$\theta|x \sim Beta(x+۱, n-x+۲)$$

با توجه به اینکه در یک نمونه تصادفی n تایی، سه محصول معیوب مشاهده شده است پس توزیع پسین $Beta(۴, n-۱)$ است.

■

۱٤- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $Beta(\theta,1)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $\Gamma(\alpha,\beta)$ ، میانگین و واریانس توزیع پسین را به دست آورید.

حل: داریم

$$f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}$$

و

$$g(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}$$

پس

$$g(\theta|\underline{x}) \propto \theta^{n+\alpha-1}e^{-\theta(\frac{1}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)}$$

بنابراین

$$\theta|\underline{x} \sim \Gamma\left(n+\alpha, \frac{1}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)$$

میانگین توزیع پسین:

$$E[\theta|\underline{X}=\underline{x}] = \frac{\beta(n+\alpha)}{1-\beta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

واریانس توزیع پسین:

$$Var[\theta|\underline{X}=\underline{x}] = \frac{\beta^2(n+\alpha)}{(1-\beta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$$

■

۱۵- فرض کنید θ نسبت سیبهای خراب یک باغدار باشد. اگر توزیع پیشین $Beta(3,4)$ توزیع مناسبی باشد و در یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی سه سیب خراب مشاهده شود، برآورد بیز θ را تحت تابع زیان مربع خطا به دست آورید.

حل:

متغیر تصادفی X را تعداد سیبهای خراب در یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی تعریف می کنیم.

می دانیم $X \sim B(10,\theta)$

داریم

$$g(\theta) \propto \theta^{2}(1-\theta)^{3}$$

پس

$$g(\theta|x) \propto \theta^{x+2}(1-\theta)^{13-x}$$

بنابراین

$$\theta|x \sim Beta(x+3,14-x)$$

چون مقدار $x=3$ مشاهده شده است، پس

$$\theta|x=3 \sim Beta(6,11)$$

برآورد بیز پارامتر θ تحت توزیع پیشین $Beta(3,4)$ و تابع زیان مربع خطا برابر است با

$$E[\theta|X=3]=\frac{6}{17}$$

■

۱۶- فرض کنید $X \sim U(0,\theta)$ و $\theta \sim \Gamma(2,1)$ باشد. برآوردگر بیز θ را تحت تابع زیانهای مربع خطا و قدرمطلق خطا به دست آورید.

حل:

$$f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}u(\theta-x)$$

داریم

$\theta > 0$ ،

$$g_\theta(\theta) = \theta . e^{-\theta}$$

پس

$$g(\theta|x) \propto e^{-\theta} u(\theta - x)$$

یا

$$g(\theta|x) = ce^{-\theta} u(\theta - x)$$

که مقدار c **را از رابطه** $\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta|x) d\theta = ۱$ **به دست می آوریم.**

$$۱ = c\int_{x}^{+\infty} e^{-\theta} d\theta \qquad \Rightarrow \quad c = e^{x}$$

پس

$$g(\theta|x) = e^{-(\theta - x)} \qquad ، \quad \theta \geq x$$

برآوردگر بیز θ **تحت تابع زیان مربع خطا**

$$\delta_g(X) = E[\theta|X] = \int_X^{\infty} \theta . e^{-(\theta - X)} d\theta = \int_{۰}^{\infty} (\theta + X) e^{-\theta} d\theta$$

$$= \int_{۰}^{\infty} \theta . e^{-\theta} d\theta + X \int_{۰}^{\infty} e^{-\theta} d\theta = ۱ + X$$

برآوردگر بیز تحت تابع زیان قدرمطلق خطا، برابر است با میانه توزیع پسین.

$$\frac{۱}{۲} = \int_X^m e^{-(\theta - X)} d\theta = e^X \int_X^m e^{-\theta} d\theta$$

$$= e^X (e^{-X} - e^{-m}) = ۱ - e^{X - m}$$

درنتیجه برآوردگر بیز می‌شود

$$\delta_g(X) = X + \ln ۲$$

■

۱۷- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0,\theta)$ باشد.
اگر تابع چگالی احتمال پیشین به صورت زیر باشد: $\theta \geq 1$ ، $g(\theta)=\frac{1}{\theta^2}$.
الف) تحت تابع زیانهای مربع خطا و قدرمطلق خطا، برآوردگرهای بیز θ را به دست آورید.
ب) برای $n=4$ و مقادیر مشاهده شده ۰.۸,۰.۴,۰.۶ و ۰.۹ برآوردهای بیزی را محاسبه کنید.

حل: داریم

$$f_\theta(\underline{x})=\prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)=\theta^{-n}u(\theta-x_{(n)})$$

و

$$g(\theta)=\frac{1}{\theta^2}u(\theta-1)$$

پس

$$g(\theta|\underline{x})\propto\theta^{-n-2}u(\theta-x_{(n)})u(\theta-1)$$

یا

$$g(\theta\mid\underline{x})=c\theta^{-n-2}u(\theta-x_{(n)})u(\theta-1)$$

که c ثابت مثبتی می باشد که به θ بستگی ندارد.

(الف) برای محاسبه برآوردگرهای بیز دو حالت زیر را در نظر می گیریم

حالت اول- $0<x_{(n)}<1$

ابتدا c را توسط رابطه $\int_{-\infty}^{+\infty}g(\theta|\underline{x})d\theta=1$ به دست می آوریم.

$$1=c\int_1^{\infty}\theta^{-n-2}d\theta=\frac{c}{n+1}\qquad\Rightarrow\qquad c=n+1$$

پس

$$g(\theta|\underline{x})=(n+1)\theta^{-n-2}u(\theta-1)$$

برآوردگر بیز با تابع زیان مربع خطا و توزیع پیشین داده شده برابر است با

$$\delta_g(\underline{X}) = E[\theta|\underline{X}] = \int_1^{\infty}(n+1)\theta^{-n-1}d\theta = \frac{n+1}{n}$$

برآوردگر بیز تحت تابع زیان قدرمطلق خطا و توزیع پیشین داده شده برابر است با میانه توزیع پسین

$$\frac{1}{2} = \int_1^m (n+1)\theta^{-n-2}d\theta = 1 - m^{-(n+1)} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt[n+1]{2}$$

پس برآوردگر بیز می شود: $\sqrt[n+1]{2}$.

حالت دوم- $x_{(n)} > 1$

ابتدا c را به دست می آوریم.

$$1 = c\int_{x_{(n)}}^{+\infty}\theta^{-n-2}d\theta = \frac{cx_{(n)}^{-(n+1)}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad c = (n+1)x_{(n)}^{n+1}$$

پس

$$g(\theta|\underline{x}) \propto (n+1)x_{(n)}^{n+1}\theta^{-n-2}u(\theta - x_{(n)})$$

برآوردگر بیز با تابع زیان مربع خطا و توزیع پیشین داده شده، برابر است با

$$\delta_g(\underline{X}) = E[\theta|\underline{X}] = (n+1)X_{(n)}^{n+1}\int_{X_{(n)}}^{\infty}\theta^{-n-1}d\theta$$

$$= \frac{n+1}{n}X_{(n)}$$

اکنون میانه توزیع پسین را به دست می آوریم.

$$\frac{1}{2} = \int_{x_{(n)}}^{m}(n+1)x_{(n)}^{n+1}\theta^{-n-2}d\theta = x_{(n)}^{n+1}(x_{(n)}^{-n-1} - m^{-n-1}) = 1 - x_{(n)}^{n+1}m^{-n-1}$$

$$\Rightarrow \quad m = \sqrt[n+1]{2}x_{(n)}$$

پس برآوردگر بیز در این حالت برابر $\sqrt[n+1]{2}X_{(n)}$ **است.**

(ب) چون $x_{(۲)} = .۹$ کمتر از یک است، با استفاده از حالت اول ، برآورد بیز با تابع زیان مربع خطا برابر $\frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$ است و برآورد بیز با تابع زیان قدرمطلق خطا، برابر $\sqrt[۵]{۲} \approx ۲/۲۳$ است.

■

۱۸- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $B(n,\theta)$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین $U(۰,۱)$ و تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $w(\theta) = \frac{۱}{\theta(۱-\theta)}$، برآوردگر بیز θ و تابع مخاطره بیزی را به دست آورید.

حل: داریم

$$f_\theta(\underline{x}) = \prod_{i=۱}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=۱}^{n}\left[\binom{n}{x_i}\theta^{x_i}(۱-\theta)^{n-x_i}\right]$$

$$= \left[\prod_{i=۱}^{n}\binom{n}{x_i}\right]\theta^{\sum_{i=۱}^{n}x_i}(۱-\theta)^{n^۲-\sum_{i=۱}^{n}x_i}$$

و

$$g(\theta) = ۱ \quad ; \quad ۰ < \theta < ۱$$

پس

$$g(\theta|\underline{x}) \propto \theta^{n\bar{x}}(۱-\theta)^{n^۲-n\bar{x}}$$

بنابراین

$$\theta|\underline{x} \sim Beta(n\bar{x}+۱, n(n-\bar{x})+۱)$$

برآوردگر بیز می شود

$$\delta_g(\underline{X}) = \frac{E[\frac{۱}{\theta(۱-\theta)}\theta|\underline{X}]}{E[\frac{۱}{\theta(۱-\theta)}|\underline{X}]} = \frac{\int_۰^۱ \theta^{n\bar{X}}(۱-\theta)^{n(n-\bar{X})-۱}d\theta}{\int_۰^۱ \theta^{n\bar{X}-۱}(۱-\theta)^{n(n-\bar{X})-۱}d\theta}$$

$$= \frac{Beta(n\bar{X}+۱, n(n-\bar{X}))}{Beta(n\bar{X}, n(n-\bar{X}))}$$

$$= \frac{\Gamma(n\bar{X}+۱)\Gamma(n(n-\bar{X}))}{\Gamma(n^۲+۱)} \cdot \frac{\Gamma(n^۲)}{\Gamma(n\bar{X})\Gamma(n(n-\bar{X}))}$$

$$= \frac{\bar{X}}{n}$$

■

۱۹- فرض کنید $X \sim E(\theta)$ و بدانیم $\theta \in \{۱,۲,۳\}$. با انتخاب توزیع پیشین یکنواخت و تابع زیان مربع خطا، برآوردگر بیز θ را به دست آورید.

حل:

$$f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x} \quad ، \quad x > 0 \quad ، \quad \theta > ۰$$

$$g_\theta(\theta) = \frac{۱}{۳} \quad ، \quad \theta = ۱,۲,۳$$

ابتدا توزیع پسین را محاسبه می کنیم.

$$g_\theta(\theta | x) = \frac{f_\theta(x) g_\theta(\theta)}{f_X(x)} = \frac{f_\theta(x) g_\theta(\theta)}{\sum_{\theta=۱}^{۳} f_\theta(x) g_\theta(\theta)}$$

$$= \frac{f_\theta(x)}{\sum_{\theta=۱}^{۳} f_\theta(x)} = \frac{\theta . e^{-\theta x}}{e^{-x} + ۲e^{-۲x} + ۳e^{-۳x}} \quad ، \quad \theta = ۱,۲,۳$$

برآوردگر بیز با تابع زیان مربع خطا و توزیع پیشین یکنواخت برابر است با

$$\delta_g(X) = E[\theta | X] = \sum_{\theta=۱}^{۳} \frac{\theta^۲ . e^{-x\theta}}{e^{-x} + ۲e^{-۲x} + ۳e^{-۳x}}$$

$$= \frac{e^{-x} + ۴e^{-۲x} + ۹e^{-۳x}}{e^{-x} + ۲e^{-۲x} + ۳e^{-۳x}}$$

■

۲۰- فرض کنید $X \sim Ge(\theta)$ و بدانیم $P(\theta = \frac{۱}{۴}) = \frac{۲}{۳} = ۱ - P(\theta = ۱)$. تحت تابع زیان مربع خطا برآوردگر بیز θ را به دست آورید.

حل: داریم

$$f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

توزیع پسین برابر است با

$$g(\theta|x)=\frac{f_\theta(x)g_\theta(\theta)}{f_X(x)}=\frac{f_\theta(x)g_\theta(\theta)}{\sum_\theta f_\theta(x)g_\theta(\theta)}$$

اکنون دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

(الف) فرض کنید $x=۰$ باشد. پس $f_\theta(۰)=\theta$ و

$$g(\theta|۰)=\frac{f_\theta(۰)g_\theta(\theta)}{\sum_\theta f_\theta(۰)g_\theta(\theta)}=\frac{g_\theta(\theta)}{\sum_\theta g_\theta(\theta)}=\frac{g_\theta(\theta)}{۱}=g_\theta(\theta)$$

بنابراین

$$g(۱|۰)=g_\theta(۱)=\frac{۱}{۳}$$

و

$$g(\frac{۱}{۴}|۰)=g_\theta(\frac{۱}{۴})=\frac{۲}{۳}$$

در این حالت توزیع پسین می شود

$\Theta=\theta$	$\frac{۱}{۴}$	۱
$g(\theta|۰)$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$

در نتیجه برآوردگر بیز به ازای مقدار مشاهده شده $x=0$ و تابع زیان مربع خطا و پیشین داده شده برابر است با

$$\delta_g(۰)=E[\theta|X=۰]=\frac{۱}{۴}.\frac{۲}{۳}+۱.\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

(ب) فرض کنید $x>۰$ باشد. پس

$$g(\theta\mid x)=\frac{\theta(۱-\theta)^x g_\theta(\theta)}{\sum_\theta \theta(۱-\theta)^x g_\theta(\theta)}=\frac{\theta(۱-\theta)^x g_\theta(\theta)}{\frac{۱}{۴}.(\frac{۳}{۴})^x.\frac{۲}{۳}}$$

$$=(\frac{۴}{۳})^x.۶\theta(۱-\theta)^x g_\theta(\theta)$$

$$g(\tfrac{۱}{۴}|x) = ۱ - g(\tfrac{۱}{۴}|x) = ۱ \quad ، \quad g(۱|x) = ۰$$

در این حالت توزیع پسین می شود

$\Theta = \theta$	$\frac{۱}{۴}$	۱
$g(\theta\|x)$	۱	۰

پس

$$\delta_g(x) = E[\theta|X = x] = \frac{۱}{۴}$$

در نتیجه برآوردگر بیز به ازای $x > ۰$ **و تابع زیان مربع خطا و پیشین داده شده برابر است با**

$$\delta_g(X) = E[\theta|X] = \frac{۱}{۴}$$

■