به نام خدا

تشریح مسائل سری دوم ریاضی مهندسی:

۱- سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ را یافته و به کمک آن حاصل $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\cdots$ را بیابید.

حل: توجه کنید که چون بازه‌ای که تابع در آن تعریف شده است متقارن نیست پس تابع زوج نخواهد بود اما $b_n=0$ است.

دوره‌ی تناوب $P=2L=2\pi$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1\times\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}\quad,\quad b_n=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\times\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx=$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big]_0^{\pi/2}=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi}{2}n\Rightarrow a_n=\begin{cases}0 & n:\text{زوج}\\ \frac{2}{\pi n} & n:4n-3\\ -\frac{2}{\pi n} & n:4n-1\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(4n-3)}-\frac{2}{\pi(4n-1)}\right)$$

اتحاد پارسوال: $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+\cancel{b_n^2}^{\,0})$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)=\sqrt{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)\,dx-\frac{a_0^2}{2}}\qquad\frac{a_0^2}{2}=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{L}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)^2\,dx=1$$

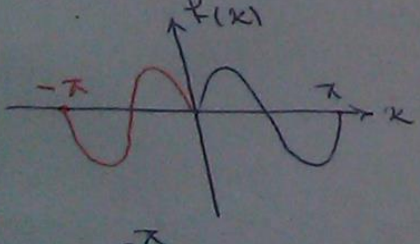
$$\Rightarrow\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\cdots\right)=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\cdots=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

۲- سری فوریه کسینوسی $0<x<\pi$ ؛ $f(x)=\sin 2x$ را یابید.

حل: چون سری فوریه‌ی کسینوسی خواسته شده است پس $b_n=0$ است.

دوره تناوب $p=2(\pi-0)=2\pi$



$$\text{سطح خالص زیر نمودار}=0\Rightarrow\frac{a_0}{2}=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(2+n)x+\sin(2-n)x]\,dx=$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2+n}\cos(2+n)x + \frac{1}{2-n}\cos(2-n)x\right]\Big|_0^{\pi} =$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[(-1)^n\left(\frac{1}{2+n}+\frac{1}{2-n}\right) - \left(\frac{1}{2+n}+\frac{1}{2-n}\right)\right] =$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2+n}+\frac{1}{2-n}\right)\left\{(-1)^n-1\right\} = \frac{-4}{\pi(4-n^2)}\left\{(-1)^n-1\right\}$$

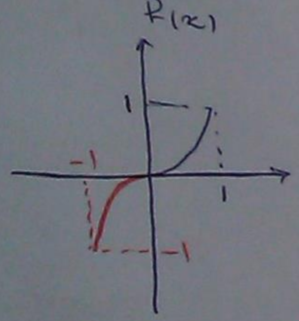
$$a_n = \begin{cases} 0 & n: \text{زوج} \\ \dfrac{8}{\pi(4-n^2)} & n: \text{فرد} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi(4-(2n-1)^2)}\right)\cos nx$$

۳- سری فوریه سینوسی $f(x)=x^2,\ 0<x<1$ را بیابید.

حل: چون سری فوریه ی سینوسی خواسته شده است: $a_n=0$

دوره تناوب $p=2(1-0)=2$



$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \sin n\pi x\, dx$$ حل انتگرال جزء به جزء

$$\begin{array}{ll} x^2 & \sin n\pi x \\ 2x & -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x \\ x & -\frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x \\ 0 & \frac{1}{(n\pi)^3}\cos n\pi x \end{array}$$

$$b_n = 2\left\{-\frac{x^2}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{2x}{(n\pi)^2}\sin n\pi x + \frac{2}{(n\pi)^3}\cos n\pi x\right\}\Big|_0^1 =$$

$$2\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{(n\pi)^3} - \frac{2}{(n\pi)^3}\right\}$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{-2}{n\pi} & n: \text{زوج} \\ 2\left(\dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{4}{(n\pi)^3}\right) & n: \text{فرد} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\left[\underbrace{\left(\frac{-1}{2k\pi}\right)}_{b_{2k}\ \text{تولید هارمونیک‌های زوج}} + \underbrace{\left(\frac{1}{(2k-1)\pi} - \frac{4}{((2k-1)\pi)^3}\right)}_{b_{2k-1}\ \text{تولید هارمونیک‌های فرد}}\right]\sin n\pi x$$

سری فوریه ی فوق با همه n در جمله تولید می کند.

۴) سری فوریه $f(x)=x$ ؛ $0<x<\pi$ را بیابید.

حل: $\frac{a_0}{2}=\frac{\frac{1}{2}\pi^2}{\pi}=\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $P=\pi$ دوره تناوب

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{2n}\sin 2nx+\frac{1}{4n^2}\cos 2nx\right)\Big|_0^\pi=$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{4n^2}\right)=0$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{2n}\cos 2nx+\frac{1}{4n^2}\sin 2nx\right)\Big|_0^\pi=$$

$$-\frac{\pi}{2n} \qquad f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\pi}{2n}\sin 2nx\right)$$

---

۵) انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ را بیابید و به کمک آن مقدار

$\int_0^\infty \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$ را بدست آورید.

حل: چون $f(x)$ تابعی زوج است پس $B(w)=0$ است.

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x^2)\cos wx\,dx$$

مشتق	انتگرال
$-x^2$	$\cos wx$
$-2x$	$\frac{1}{w}\sin wx$
-2	$-\frac{1}{w^2}\cos wx$
0	$-\frac{1}{w^3}\sin wx$

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{w}\sin wx-\frac{x^2}{w}\sin wx-\frac{2x}{w^2}\cos wx+\frac{2}{w^3}\sin wx\right)\Big|_0^1=$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{w}\sin w-\frac{1}{w}\sin w-\frac{2}{w^2}\cos w+\frac{2}{w^3}\sin w-0\right)=$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{w^2}\cos w+\frac{2}{w^3}\sin w\right)=-\frac{4}{\pi}\left(\frac{w\cos w-\sin w}{w^3}\right)$$

$$f(x)=-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{w\cos w-\sin w}{w^3}\right)\cos wx\,dw$$

طبق قضیه دیریکله: مقدار انتگرال فوریه در نقطه x_0 $=\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}=-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\right)\cos\left(\frac{\omega}{3}\right)d\omega$$

اکنون کافیست در تساوی فوق به جای ω، x قرار دهیم:

$$\int_0^\infty\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx=-\frac{2\pi}{9}$$

۴- با استفاده از انتگرال فوریه ثابت کنید:

الف) $$\int_0^\infty\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin(\omega x)\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0\le x<1\\ \frac{\pi}{4} & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

حل: با در نظر گرفتن $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0\le x<1\\ \frac{\pi}{4} & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$ می‌بینیم که عبارت جلوی انتگرال تنها دارای جمله‌ی سینوسی است لذا $f(x)$ را در بازه‌ی $(-\infty,0)$ گسترش فرد می‌دهیم. در نهایت $f(x)$ در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ است و حال انتگرال فوریه‌ی $f(x)$ را حساب می‌کنیم.

$$A(\omega)=0\quad,\quad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\pi}{2}\sin\omega x\,dx=\frac{-1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^1=\frac{1-\cos\omega}{\omega}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^\infty\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin(\omega x)\,d\omega$$

ب) $$\int_0^\infty\frac{\cos\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

حل: $$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cos x & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$B(\omega)=0\quad,\quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\cos x\cos\omega x\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)x+\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)x\right)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+\omega}\cos\frac{\pi}{2}\omega+\frac{1}{1-\omega}\cos\frac{\pi}{2}\omega\right\}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}$$

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2}\cos(\omega x)\,d\omega$$

۴- با یک انتگرال فوریه کسینوسی $x>0$ ، $f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-x}$ ثابت کنید:

$$\int_0^\infty\frac{\cos x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2e}$$

حل: $B(\omega)=0\ ,\quad A(\omega)=\frac{2}{\cancel{\pi}}\int_0^\infty\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}e^{-x}\cos\omega x\,dx$

e^{-x}	$\cos\omega x$
$-e^{-x}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega x$
e^{-x}	$-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x$

$+\ \ -\ \ +\int$

فرض: $I=\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x\,dx$

$$I=\frac{e^{-x}}{\omega}\sin\omega x-\frac{e^{-x}}{\omega^2}\cos\omega x-\frac{1}{\omega^2}I=$$

$$\Rightarrow I=\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\left(\frac{e^{-x}}{\omega}\sin\omega x-\frac{e^{-x}}{\omega^2}\cos\omega x\right)\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega$$

طبق قضیه ی دیریکله $f(1)=\frac{\pi}{2e}$ و با جایگذاری x به جای ω در انتگرال فوق داریم:

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{\cos x(1)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2e}$$