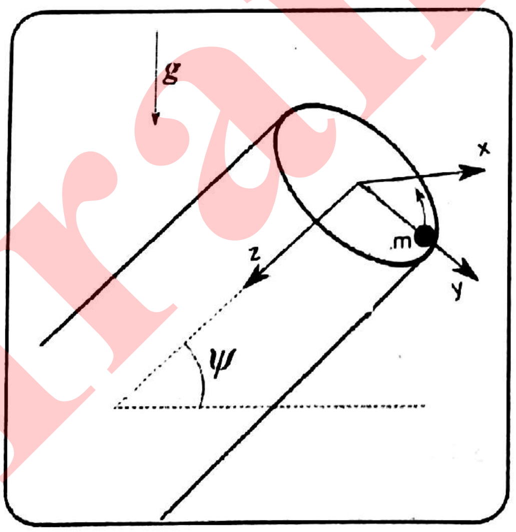
بسمه تعالی

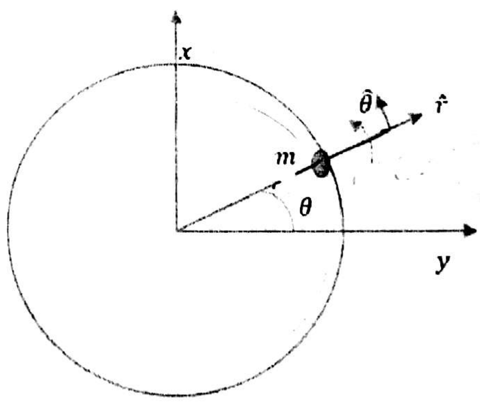
آزمون نهایی المپیاد فیزیک (تابستان 96) — مدت : 3 ساعت

96/6/7

مسئله ی 1)

استوانه ای به شعاعِ R داریم که محورِ آن با افق زاویه‌ی ψ می‌سازد. ذرّه‌ای به جرمِ m روی سطحِ داخلی این استوانه قرار دارد. دستگاهِ مختصات را طوری می‌گیریم که محورِ z منطبق بر محورِ استوانه باشد، و مؤلفّه‌ی شتابِ گرانش در راستای محورِ z مثبت باشد (مطابقِ شکلِ چپ). در لحظه ی t=0، ذرّه در مکانِ x=0, y=R, z=0 قرار دارد. زاویه‌ی بینِ محور y و خطِّ واصلِ مبدأ به ذرّه را با θ نشان می‌دهیم. یعنی در لحظه‌ی t=0، θ صفر است. ذرّه را با سرعتِ اوّلیّه‌ی v_0 به حرکت در می‌آوریم. سرعتِ اوّلیه در راستای z مؤلّفه ندارد، و تماماً در راستای $+\hat{\theta}$ است. در تمامِ این مسئله فرض می‌کنیم سرعتِ اوّلیه خیلی بزرگ است، طوری که بتوان از توان‌های دوم و بالاترِ $\frac{gR}{v_0^2}$ صرف‌نظر کرد. شکلِ سمتِ راست، نمای مقطعی است و در آن θ و جهتِ سرعتِ اوّلیه برای تصوّر بهتر مشخّص شده است. (برای سهولتِ پی گیری محاسبات، توجّه تان به توان‌های g باشد. توان‌های دوم و بالاتر را صرف‌نظر کنید)





الف) معادلاتِ نیرو را در مختصاتِ استوانه‌ای مشخّص شده $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{z})$ بنویسید.

ب) بردارِ سرعت را بر حسبِ زمان بیابید.

پ) θ را بر حسبِ زمان بیابید.

ت) نیروی عمودی سطح را بر حسبِ زمان بیابید.

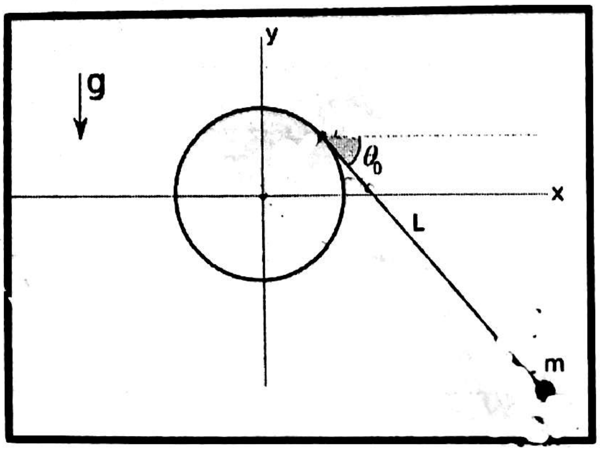
حالا فرض کنید ضریب اصطکاک بین سطح و ذرّه μ است.

ث) بردارِ نیروی اصطکاک را بر حسبِ زمان بیابید.

ج) حالا فرض کنید μ نیز کوچک است، و هم‌مرتبه‌ی $\frac{gR}{v_0^2}$ است. بردارِ سرعت را بر حسبِ زمان بیابید.

چ) θ را بر حسبِ زمان بیابید.

مسئله ی 2) ذرّه‌ای به جرمِ m به انتهای نخی بی‌جرم وصل شده است. نخ، مطابق شکل، حولِ دایره‌ای به شعاعِ R پیچیده شده و در ابتدا با افق زاویه ی θ_0 می‌سازد. ذرّه را با سرعتِ اوّلیّه‌ی v_0 به حرکت در می‌آوریم. سرعتِ اوّلیّه عمود بر راستای نخ است.



شتابِ گرانش g و به سمتِ پایین است. طولی از نخ که ابتدا آویزان است با L نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم L از محیطِ دایره بزرگ‌تر است. در هر لحظه، زاویه‌ی نخ با افق را با θ نشان می‌دهیم.

نکته: با دقّتِ زیاد پیش بروید و در همه‌ی قسمت‌های زیر، پاسخ ها را تا حدّ امکان ساده کنید، تا با صحّت به قسمت‌های پایانی مسئله برسید.

الف) بردارِ سرعت و بردارِ شتابِ جسم را بر حسبِ θ و مشتقّاتِ زمانی‌اش و ثوابتِ مسئله بیابید.

ب) معادلاتِ نیروی حاکم بر حرکتِ جسم را در مختصّاتِ دکارتی بنویسید.

پ، مشتق اوّلِ زمانی θ را به صورتِ تابعی از θ به دست آورید. (توجّه: راهنمایی‌هایی که در پایانِ سوال آمده‌اند ممکن است در محاسباتِ این قسمت مفید باشند.)

از این‌جا به بعد فرض کنید θ_0 صفر است، یعنی نخ در ابتدا افقی قرار گرفته. فرض کنید v_0 هم صفر است، یعنی جسم را از حالت سکون رها می‌کنیم. علاوه بر این‌ها، فرض کنید که L خیلی بزرگ‌تر از محیط دایره است.

ت) مشتقِ دومِ θ نسبت به زمان را به صورتِ تابعی از θ بیابید.

ث. نشان دهید کششِ نخ تا مرتبه ی اوّل $\frac{R}{L}$ به صورت $T = mg[\alpha sin^2\theta + (\beta\theta + \gamma \sin\theta \cos\theta)\frac{R}{L}]$ است. ضرایب α ، β، و γ را به دست آورید.

ج) در حدّ $L \to \infty$، محاسبه کنید که در نیم‌دورِ اوّل، یعنی در بازه‌ی $0 < \theta < \pi$ ، کششِ نخ در چه θ یی بیشینه می‌شود؟ این زاویه را با $\hat{\theta}_1$ نشان می‌دهیم. کششِ نخ در این زاویه را با T_1 نشان می‌دهیم. مقدارِ T_1 را نیز حساب کنید.

چ) در حدّ $L \to \infty$، محاسبه کنید که در نیم‌دورِ دوم، یعنی در بازه‌ی $\pi < \theta < 2\pi$ ، کششِ نخ در چه θ یی بیشینه می‌شود. این زاویه را با $\hat{\theta}_2$ نشان می‌دهیم. کششِ نخ در این زاویه را با T_2 نشان می‌دهیم. مقدارِ T_2 را نیز حساب کنید.

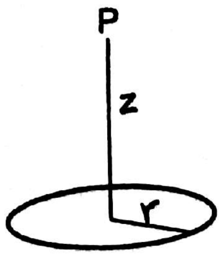
ح) برای L خیلی بزرگ ولی محدود، اوّلین تصحیح بر $\hat{\theta}_1$ را به دست آورید. اوّلین تصحیح بر T_1 را نیز به دست آورید. کشش نسبت به حالت $L \to \infty$ در زاویه‌ی کمتری بیشینه می‌شود یا در زاویه‌ی کمتری؟ کششِ بیشینه نسبت به حالتِ $L \to \infty$ بیشتر است یا کمتر؟

خ) برای L خیلی بزرگ ولی محدود، اوّلین تصحیح بر $\hat{\theta}_2$ را به دست آورید. اوّلین تصحیح بر T_2 را نیز به دست آورید.

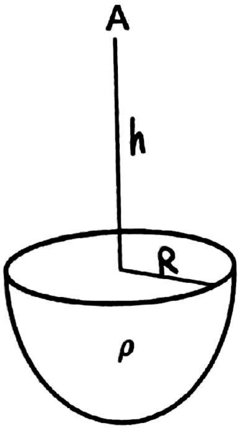
د) همچنان تا اوّلین مرتبه‌ی تصحیحی نسبت به حالتِ $L \to \infty$، محاسبه کنید که در نیم‌دورِ n اُم، یعنی در بازه‌ی $(n-1)\pi < \theta < n\pi$، کششِ نخ در چه θ یی بیشینه می‌شود، و مقدارِ کشش بیشینه را بیابید.

راهنمایی1 : حلِّ معادله ی دیفرانسیلی به شکل $\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$، به شکل $y = \frac{[C+\int g(x)\mu(x)dx]}{\mu(x)}$ است، که در آن C ثابت است، انتگرال غیرمعیّن است، و $\mu(x) = \exp\int f(x)dx$ تعریف شده است.

راهنمایی2 : این انتگرال ممکن است به درد بخورد: $\int \theta \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{\sin 2\theta - 2\theta\cos 2\theta}{8} + C$

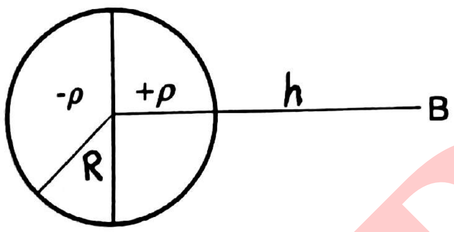


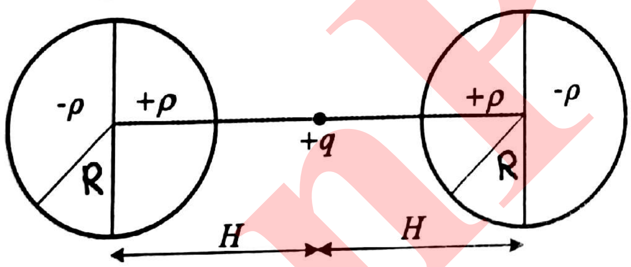
۳- آ) پتانسیل الکتریکی ناشی از قرص باردار نارسانای نازکی به شعاع r و چگالی بار سطحی یکنواخت σ را در نقطه‌ی P روی محور قرص و به فاصله‌ی z از مرکز قرص به دست آورید.



ب) نیم‌کره‌ای نارسانا به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ در نظر بگیرید. پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی ناشی از این توزیع بار را در نقطه‌ی A روی محور نیم‌کره و به فاصله‌ی h از دایره‌ی عظیمه‌ی نیم‌کره به دست آورید.

پ) اکنون دو نیم‌کره‌ی نارسانا به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت $\pm\rho$ مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی B به فاصله‌ی h ($h > R$) از مرکز کره به دست آورید.





ت) حالا فرض کنید دو کره‌ی مشابه به شعاع R داریم که هر کدام دارای آرایش باری هستند که در قسمت پ) توصیف شد. این دو کره را مقابل هم قرار می‌دهیم، طوری که نیم‌کره‌های حاوی $+\rho$ رو به هم قرار گیرند. فاصله‌ی مراکز کره‌ها را $2H$ در نظر بگیرید، به طوری که $H > R$ است. ذره‌ای با بار الکتریکی $+q$ و جرم m را در نقطه‌ی وسط بین دو مرکز قرار می‌دهیم. بنا به تقارن، میدان الکتریکی در این نقطه صفر است، در نتیجه بار ساکن می‌ماند. بسامد نوسانات کوچک ذرّه را حول این نقطه در راستای محور (خط واصل بین مراکز کره‌ها) حساب کنید.

ث) با این فرض که $\frac{R}{H}$ خیلی کوچک است، بسامد نوسانات را ساده کنید. یافتن اوّلین جمله‌ی ناصفر کافی است.

لطفاً نتایج را تا جایی که ممکن است ساده کنید.

۴) $N+2$ سکه در نظر بگیرید. هر سکه پس از پرتاب ممکن است با احتمال p شیر (H) و با احتمال q خط (T) بیاید به طوری که $p+q=1$. دو سکهٔ ابتدایی و انتهایی مطابق شکل روی میز قرار دارند و همواره در حالت خط (T) قرار گرفته‌اند.

T ... T H H H T ... T

N سکهٔ باقیمانده را پرتاب می‌کنیم. سکه‌ها هنگام فرود و افتادن روی میز از یکدیگر مستقل‌اند. همچنین فرض کنید سکه‌ها طوری پرتاب می‌شوند که هنگام افتادن روی میز، روی یک خط و بین دو سکهٔ ابتدایی و انتهایی که همواره در حالت T هستند قرار گیرند. پس از پرتاب N سکه و افتادن آن‌ها روی میز، ممکن است Mتا $(1 \leq M \leq N)$ سکهٔ متوالی شیر (H) بیاید که در دو انتها به وسیله‌ی دو سکه در حالت خط (هر طرف یک سکه) احاطه شده‌اند. به این M سکه یک خوشه به طول M می‌گوییم. مثلاً در شکل فوق یک خوشه به طول $M=3$ نشان داده شده است. روی شکل و جای نقطه‌چین‌ها امکان دارد سکه‌ها در حالت شیر یا خط باشند. فرض کنید پس از پرتاب N سکه و افتادن آن‌ها روی میز هیچوقت به تعداد دو خوشه یا بیشتر، خوشه‌ی با طول یکسان تشکیل نمی‌شود.

آ) احتمال این که یک سکه متعلق به خوشه‌ای به طول M باشد چقدر است؟ (۳ نمره)

ب) میانگین طول خوشه‌های مختلفی که امکان تشکیل دارند، $\overline{M}$، را محاسبه کنید. (۴ نمره)

پ) جواب قسمت ب) را در حد $N \to \infty$ به دست آورید. (۱ نمره)

می‌دانیم در دمای T و در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، ممان مغناطیسی ذره‌ای که دارای ممان مغناطیسی دائمی $\vec{m}$ است با احتمال‌های زیر موازی یا پاد موازی میدان $\vec{B}$ خواهد بود.

$$P\uparrow = \frac{e^{mB/kT}}{e^{-mB/kT}+e^{mB/kT}}, \qquad P\downarrow = \frac{e^{-mB/kT}}{e^{-mB/kT}+e^{mB/kT}}$$

ت) اگر به جای سکه، ممان‌های مغناطیسی مستقل از هم در حضور میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت در دمای T داشته باشیم که $\uparrow$ نقش H و $\downarrow$ نقش T را دارد پاسخ سؤال قسمت پ) را بر حسب دما به دست آورید. (۱ نمره)

ث) به ازای $N \to \infty$، در حد $T \to 0$ و $T \to \infty$ میانگین طول خوشه را به دست آورید.

(۱ نمره)