تمرینات ترکیبیات

- تمرین‌های شماره ۴ و ۱۰ تحویلی هستند.
- ۱۴ مرداد قبل از شروع کلاس ترکیبیات، تمرینات تحویلی این سری توسط مبسر جمع می‌شود.
- در صورتی که به پاسخ درست یک سوال نرسیدید، همان حاصل تلاش‌تان و نتایجی که به دست آورده‌اید را بنویسید؛ اما هرگز تقلب نکنید. هرگونه تقلب در تمرینات باعث افتادن در درس و (احتمالن) محرومیت از مدال می‌شود. هم‌چنین این نکته را مد نظر داشته باشید که تمرینات با ارفاق تصحیح می‌شوند.

ترکیبیات شمارشی و ابزارهای اثبات ترکیبیاتی

۱. به چند طریق می‌توان یک مهره‌ی اسب سفید و یک مهره‌ی اسب سیاه در یک تخته شترنج (!) ۸×۸ قرار داد؛ طوری که یک‌دیگر را تهدید نکنند؟

۲. ثابت کنید تعداد رشته‌های دودویی n رقمی که دقیقن m بلوک ۰۱ دارند،

$$\binom{n+۱}{۲m+۱}$$

است.

۳. ا) فرض کنید می‌خواهیم عدد طبیعی n را به صورت جمع چند عدد طبیعی ترتیب‌دار بنویسیم. به ۳ روش مختلف (استقرا، اصل تناظر یک به یک و معادلات سیاله) ثابت کنید تعداد روش‌های انجام این کار $۲^{n-۱}$ است.

ب) فرض کنید F_n عدد فیبوناچی nـام باشد. ثابت کنید:

$$F_n = \binom{n-۱}{۰} + \binom{n-۲}{۱} + \binom{n-۳}{۲} + \dots$$

ب) فرض کنید می‌خواهیم عدد طبیعی n را به صورت جمع چند عدد طبیعی ترتیب‌دار بیش‌تر یا مساوی ۲ بنویسیم. به ۳ روش مختلف (استقرا، اصل تناظر یک به یک و معادلات سیاله) ثابت کنید تعداد روش‌های انجام این کار برابر $F_{n-۱}$ است.

تمرینات ترکیبیات

ج) فرض کنید می‌خواهیم عدد طبیعی n را به صورت جمع چند عدد طبیعی ترتیب‌دار بیش‌تر یا مساوی k بنویسیم. یک رابطه‌ی بازگشتی برای تعداد روش‌های انجام این کار بیابید (آن‌هایی که با توابع مولد یا روش حل روابط بازگشتی همگن آشنایی دارند، می‌توانند جواب را به صورت صریح پیدا کنند).

۴. عدد استرلینگ نوع اول که آن را با $s(n,r)$ نشان می‌دهیم، به این صورت تعریف می‌شود:

"فرض کنید n میز گرد یک‌سان و r نفر داریم. $s(n,r)$ برابر با تعداد روش‌های قرار دادن این افراد، دور این میزهاست؛ طوری که هیچ میزی خالی نماند."

ثابت کنید:

$$s(۱,r)+s(۲,r)+\ldots+s(r,r)=r!$$

۵. ضریب $x^{۲۹}$ در بسط $(x^۲-\frac{۳}{x})^{۲۵}$ چیست؟

۶. ثابت کنید اگر m,n اعداد طبیعی و نسبت به هم اول باشند،

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$$

۷. فرض کنید n عددی طبیعی و C_n برابر با عدد کاتالان nـام باشد.

ا) عدد سلطانی نوع اول که آن را با $S_۱(n)$ نشان می‌دهیم، برابر با تعداد روش‌های قرار دادن اعداد $۱,۲,\ldots,n$ در یک جدول $n\times ۲$ است؛ طوری که هر عدد دست کم یک بار بیاید و از اعداد چپ و پایین‌ش (در صورت وجود)، کم‌تر نباشد. ثابت کنید

$$S_۱(n)\geq C_n$$

ب) عدد سلطانی نوع اول که آن را با $S_۲(n)$ نشان می‌دهیم، برابر با تعداد روش‌های قرار دادن اعداد $۱,۲,\ldots,n$ در یک جدول $n\times ۲$ است؛ طوری که هر عدد دقیقن دو بار بیاید و از اعداد چپ و پایین‌ش (در صورت وجود)، کم‌تر نباشد. ثابت کنید

$$S_۲(n)\leq C_n$$

۸. چندجمله‌ای درجه دوم $f(x)$ در هر مرحله می‌تواند با یکی از دو چندجمله‌ای $x^۲f(۱+\frac{۱}{x})$ یا $(x-۱)^۲f(\frac{۱}{x-۱})$ جای‌گزین شود. آیا می‌توان با تعدادی مرحله از چندجمله‌ای $x^۲+۴x+۳$ به چندجمله‌ای $x^۲+۱۰x+۹$ رسید؟

تمرینات ترکیبیات

۹. می‌خواهیم تعدادی مهره در خانه‌های یک جدول ۸×۸ قرار دهیم؛ طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- در هر خانه حداکثر یک مهره قرار بگیرد.
- هر سطر، ستون یا قطری در نظر بگیریم، تعداد زوجی مهره داشته باشد.

توجه کنید منظور از یک قطر، هر قطری (اعم از اصلی و فرعی) است؛ در واقع هر یک از خانه‌های گوشه به تنهایی یک قطر محسوب می‌شوند. بیشینه‌ی تعداد مهره‌هایی که می‌توانیم در جدول قرار دهیم چقدر است؟

۱۰. سلطان یک باغچه دارد که n خانه به شکل زیر دارد:

۱	۲	۳		n
			$\ldots$	

اخیرن ابوالفضل متوجه شده است که خاک باغچه‌ی سلطان، یک خاک عجیب است و با یک دانه‌ی خاک از باغچه‌ی سلطان، می‌توان به کارهای بزرگی دست زد! پس ابوالفضل تصمیم گرفت k مورچه را برای دزدی به باغچه‌ی سلطان بفرستد. هر مورچه یک دانه‌ی خاک را دزدید. مورچه‌ها در حال برگشت بودند که سلطان از ماجرا، خبردار شد. در آن لحظه، در هر خانه از باغچه، ۰، ۱ یا تعدادی مورچه قرار داشت. حال یک بازی مرگ‌بار شروع می‌شود. مورچه‌های ابوالفضل این خاصیت را دارند که می‌توانند مانند آفتاب‌پرست، رنگ‌شان را عوض کنند؛ اما فقط می‌توانند دو رنگ سیاه و قرمز را به خود بگیرند. سلطان دستگاهی دارد که یک رنگ می‌گیرد و تمام مورچه‌های باغچه به آن رنگ را می‌کشد. حال در هر مرحله، اتفاقات زیر رخ می‌دهد:

> "ابوالفضل هر مورچه را از راه دور، به رنگی که دوست دارد، در می‌آورد و سلطان یک بار از دستگاه‌ش استفاده می‌کند؛ به این ترتیب تعدادی از مورچه‌ها کشته می‌شوند. سپس هر مورچه‌ی زنده یک خانه به جلو می‌رود (یعنی از خانه‌ی i به خانه‌ی $i - 1$ می‌رود)."

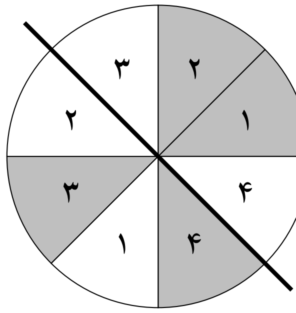
اگر حتی یک مورچه بتواند از باغچه‌ی سلطان خارج شود (یعنی از خانه‌ی ۱ نیز عبور کند و به بیرون باغچه برود)، آن دانه‌ی خاک به ابوالفضل می‌رسد و ابوالفضل می‌برد. اما اگر سلطان بتواند تمام مورچه‌ها را بکشد، پیروز می‌شود.

وضعیت اولیه‌ی مورچه‌ها را در نظر بگیرید. به ازای هر مورچه، اگر در خانه‌ی iـام باشد، عدد $\frac{1}{2^i}$ را به آن مورچه نسبت می‌دهیم. مجموع اعداد نسبت داده شده به مورچه‌ها را S بگیرید. ثابت کنید ابوالفضل می‌برد، اگر و تنها اگر $S \geq 1$ باشد.

تمرینات ترکیبیات

۱۱. جای‌گشتی از اعداد ۱۹۹۳ $,\ldots,$ ۲ $,$ ۱ داریم. در هر مرحله اگر عدد ابتدای جای‌گشت k باشد، ترتیب k عدد ابتدای جای‌گشت را برعکس می‌کنیم. ثابت کنید پس از تعدادی مرحله، عدد ابتدای جای‌گشت برابر ۱ می‌شود.

۱۲. ابوالفضل و سلطان یک دایره دارند که به ۲n قطاع برابر تقسیم شده است. n تا از قطاع‌های دایره خاکستری و بقیه، سفید هستند. ابوالفضل یکی از قطاع‌های سفید را انتخاب می‌کند و روی آن عدد ۱ را می‌نویسد. سپس با شروع از همان قطاع و حرکت در جهت ساعت‌گرد، روی قطاع‌های سفید بعدی به ترتیب اعداد ۲، ۳، ...و n را می‌نویسد. سلطان نیز یک قطاع خاکستری را انتخاب می‌کند و همین کار را در جهت پادساعت‌گرد با قطاع‌های سیاه می‌کند. شکل زیر، مثالی از ۴ $= n$ پس از کار این دو نفر است:



ثابت کنید خطی در صفحه وجود دارد که دایره را به دو قسمت (هر یک با n قطاع)، تقسیم کند و هر یک از اعداد $n,\ldots,$ ۲ $,$ ۱ ، در هر دو طرف آن خط بیایند. برای مثال، در شکل بالا، این خط کشیده شده است.

موفق باشید

ـ اسدی