

مقدمه:

سر فصل های درس:

فصل اول) نظریه بازیها (Game Theory)

فصل دوم) تصمیم گیری چند شاخصه (Multiple Attribute Decision Making- MADM)

فصل سوم) تصمیم گیری (با اهداف چند گانه) (Multiple Objective Decision Making- MODM)

فصل چهارم) تحلیل پوششی داده ها (DEA)

بارم بندی نمرات :

میان ترم ۸ نمره، فصول اول و دوم- جمعه ۱۳۹۴/۹/۶

پایان ترم ۱۲ نمره، فصول سوم و چهارم- چهارشنبه ۱۳۹۴/۱۰/۳۰

این کلاس تحقیق و پروژه ندارد، حل تمرین کلاسی در نمره پایان ترم موثر است.

منبع: پژوهش عملیاتی دکتر مهرگان، مباحثی نوین در تحقیق در عملیات دکتر منصور مومنی، تئوری بازیها
برنامه ریزی احتمالی دکتر سوخکیان

منبع ساده برای مطالعه جانبی تحقیقات جلد ۱ و ۲ دکتر آذر

یاد آوری سیمپلکس:

برنامه ریزی خطی زیر را به روش سیمپلکس حل کنید در صورت داشتن حالت خاص آن حالت را مشخص نمایید سپس با استفاده از قضیه مکمل زائد جواب بهینه مسئله دوگان متناظر فوق (مدل مربوطه) را نیز بدست آورید.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{st.} \quad & -x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

مسائل برنامه ریزی خطی:

در این مسئله سه جزء را باید بدانیم؛

۱- Min (کمینه سازی)، یا Max (افزونه سازی) با استفاده از متغیرهای کمکی (St) شرایط و محدودیت های مسئله را حل می کنیم.

۲- مقداری عددی را به x_1, x_2, x_3 اختصاص می دهیم تا در حالت غیر منفی قرار گیرند.

۳- محدودیت ها به صورت مساوی قرار گیرند.

در صورت پیدا شدن جواب صحیح ممکن است چندین جواب بدست آید، جواب بهینه جوابی است که بیشترین مقدار را به Z اختصاص دهد.

روش سیمپلکس:

اساس الگوریتم سیمپلکس جستجو است، جستجوی نقطه بهینه که مستلزم تهیه جدول سیمپلکس است، و بر مبنای عملیات و محاسباتی بنا شده است.

اولین اقدام ورود مسئله به جدول است، سپس انتخاب متغیر ورودی و منفی ترین عدد را در سطر تابع هدف (Z) انتخاب و ستون زیر آن را ستون لولا و متغیر مربوط به آن را متغیر ورودی مینامیم. مرحله بعدی انتخاب متغیر خروجی است و اعداد سمت راست جدول سیمپلکس را بر اعداد مثبت ستون لولا تقسیم کرده، در صورتیکه اعداد ستون لولا منفی یا صفر شد، حاصل تقسیم بی نهایت خواهد شد، آنگاه کوچکترین نسبت حاصل را انتخاب کرده، سطر مربوط به این نسبت را سطر لولا و متغیر اساسی مربوط به آن را متغیر خروجی مینامیم. محل تقاطع سطر لولا و ستون لولا، عدد لولا نامیده میشود.

$$\text{Min } Z = -2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$\text{st. } -x_1 + 4x_2 + x_3 + s_1 = 4$$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 + s_2 = 6$$

$$x_2 + x_3 + s_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 + s_1 + s_2 + s_3 \geq 0$$

ضرایب را به جدول سیمپلکس منتقل می کنیم:

عدد لولا

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS	
Z	-2	-3	-1	0	0	0	0	
s_1	-1	4	1	1	0	0	4	سطر لولا 1
s_2	-2	3	0	0	1	0	6	2
s_3	0	1	1	1	0	1	5	5
		ستون لولا						

ستون لولا ستونی است که بزرگترین عدد منفی روی سطر تابع هدف (Z) در آن قرار دارد، اعداد سمت راست (RHS) جدول سیمپلکس را بر ستون لولا تقسیم و سطر را که کمترین نسبت را می باشد،

سطر لولا نام می نهیم، **عدد لولا** از تلاقی سطر و ستون لولا بدست می آید، عدد لولا همیشه مثبت است. طول گام حرکت ردیفی است که در جدول سیمپلکس به آن می رسیم.

سپس جواب اساسی جدید را محاسبه میکنیم. روش محاسبه سطرهای جدول جدید از روابط زیر بدست می آید:

$$\text{سطر لولای جدید} = \frac{\text{سطر لولای قدیم}}{\text{عدد لولا}}$$

سایر سطرها به جز سطر لولای جدید از رابطه زیر بدست می آید:

$$[\text{سطر قدیم}] + \left[- \left(Z = \text{ستون لولا} \right) \times (\text{سطر لولای جدید}) \right] = \text{سطر جدید}$$

در صورتیکه تابع هدف Min بود با عدد ۱- تبدیل به Max میگردد. نحوه محاسبه سطر اول ستون اول در جدول جدید سیمپلکس، بقیه سلول ها نیز مشابه تکمیل میگردد:

$$\frac{-3}{4} + \frac{-2}{1} = \frac{-3-8}{4} = \frac{-11}{4}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
Z	$\frac{-11}{4}$	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	3	
x_2	$\frac{-1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1	
s_2	$\frac{-5}{4}$	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	1	0	3	
s_3	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	1	4	سطر لولا
	ستون لولا							

اگر عدد لولا کسری بود مانند جدول بالا بر معکوس آن ضرب می کنیم تا حاصل ۱ شود:

$$\frac{1}{4} \times \frac{4}{1} = 1$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
Z	0	0	8	-2	0	11	47	
x_2	0	1	1	3	0	0		
s_2	0	0	3	-2	1	5	23	
x_1	1	0	3	-2	0	4	16	
				ستون لولا				

چون در ستون لولا عددی مثبت وجود ندارد پس خروجی را نمی توان تعیین نمود، لذا توقف کرده اعلام میکنیم این مسئله دارای جواب بیکران یا (∞) بی نهایت است. برای مسئله دوگان باید متغیر هایی را مد نظر قرار دهیم:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{st. } Y_1 \rightarrow -x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4$$

$$Y_2 \rightarrow -2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$Y_3 \rightarrow x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

علامت ها در ماکزیمم گیری به جز سطر آخر همیشه $\leq$ است. به هنگام مینیمم گیری سطر اول از انتقال اعداد سمت راست $\leq$ به ترتیب از بالا به پائین منتقل میشود:

$$\text{Min } Y = 4y_1 + 6y_2 + 5y_3$$

$$-y_1 - 2y_2 \geq 2$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$$

$$y_1 + y_3 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

همه علامت ها در مینیمم گیری همیشه $\geq$ میباشد.

اعداد سمت راست علامت $\geq$ از سطر اول ماکزیمم گیری در فوق منتقل شده است.

وقتی جواب اولیه جواب بیکران دارد دوگان آن فاقد جواب است.

Max	Min
$\leq$	$\geq$
$\leq$	$\geq$
.	.
.	.
.	.
$\leq$	$\geq$

اگر جواب بهینه مثبت باشد دوگان دارای جواب های زیر خواهد بود:

Z_0	0	0	0	2	0	$\frac{11}{4}$	47
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	L_1	L_2	L_3	Y_1	Y_2	Y_3	

تمرین) مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید، این مسئله را با روش سیمپلکس حل کنید.
سپس دوگان مدل را تشکیل دهید و جواب دوگان را نیز از روی جدول حل اولیه با استفاده از قضیه مکمل مشخص کنید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 10x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ x_1 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

فصل اول - تئوری بازیها:

تئوری بازیها روشی برای تصمیم گیری شرایطی است که در آن هر گونه اقدام تصمیم گیران ممکن است بر سود و زیان تصمیم گیرنده دیگر اثر بگذارد و به عنوان مثال:

چنانچه کارخانه داری بخواهد راجع به خط تولید خود برنامه ریزی کند تنها در نظر گرفتن شخص این کارخانه دار کافی نیست، بلکه به منظور اتخاذ تصمیمی مناسب بهتر است این فرد اقدامات رقبای خویش را نیز در نظر بگیرد و بداند هرگونه تصمیم ممکن است در سود و زیان سایر رقبا اثر بگذارد، این اقدامات شامل نحوه قیمت گذاری، میزان و چگونگی تبلیغات و غیره می تواند باشد، در چنین شرایطی که در صحنه تصمیم گیری اهداف تصمیم گیرندگان در تعارض با یکدیگر است تئوری بازیها میتواند مفید واقع گردد.

این علم برای اولین بار توسط ریاضیدان فرانسوی بنام امیل بورل در سال ۱۹۲۱ ابداع شد و سپس توسط نیومن گسترش یافت، در این فصل تنها به ارائه مسائل بازی دو نفره (مجموع صفر) خواهیم پرداخت و چگونگی حل آنها را توضیح میدهیم.

بازیهای دو نفره مجموع صفر:

این بازیها دسته خاصی از بازیهای دو نفره هستند که در آنها شرایط زیر لحاظ شده است:

۱- در این بازیها معمولاً دو بازیکن حضور خواهند داشت، یک بازیکن سطری و یک بازیکن ستونی

بازیکن سطری از میان m استراتژی $A_1, A_2, \dots, A_m$ هر بار یکی را بر می گزیند.

بازیکن ستونی نیز از بین n استراتژی $B_1, B_2, \dots, B_n$ هر دفعه یکی را انتخاب میکند.

۲- در این بازیها ماتریسی تحت عنوان ماتریس پاداش وجود دارد به صورت زیر:

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}
A_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}

در این ماتریس اعداد C_{ij} میتوانند نشان دهنده سود بازیکن سطری و یا سود بازیکن ستونی باشد که این بستگی به صورت مسئله خواهد داشت.

بطور مثال اگر اعداد سودمندی بازیکن سطری را نشان دهند، عدد C_{21} میزان سود بدست آمده برای بازیکن سطری را بیان خواهد کرد، و زمانی که بازیکن سطری استراتژی A_2 و بازیکن ستونی استراتژی B_1 را انجام خواهد داد.

اما چرا به این بازیها مجموع صفر می گویند؟ این بازیها را از آن بعد مجموع صفر گویند که حاصل جمع امتیازات بازیکنان در آنها همواره برابر صفر میباشد، در واقع به میزان امتیازی که یکی از بازیکنان بدست می آورد بازیکن دیگری آن امتیاز را از دست خواهد داد.

مثال: در ماتریس پاداش زیر اعداد سودمندی بازیکن سطری را نشان میدهد:

عدد موجود در سطر دوم ستون اول و سطر دوم ستون سوم را تفسیر کنید:

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	4
A_2	2	1	-2

چنانچه بازیکن سطری A_2 و بازیکن ستونی B_2 را انتخاب کند آنگاه بازیکن سطری ۲ واحد از ستونی خواهد برد، و به همین ترتیب ستونی ۲ واحد به سطری خواهد باخت. اما اگر بازیکن سطری A_2 و بازیکن ستونی B_3 را انتخاب نمایند سطری ۲ واحد به ستونی می بازد و در مقابل ستونی سه واحد از سطری می برد. (نتیجه اینکه بازیکن سطری همواره استراتژی را انتخاب خواهد کرد که بیشترین عدد سود را نشان دهد و بازیکن ستونی نیز دنبال استراتژی خواهد بود که برای بازیکن ستونی بیشترین سود را در بر داشته باشد، لذا هر دو بازیکن بدنال ماکزیمم سازی سود هستند).

چگونگی حل مسئله نظریه بازیها:

منظور از حل این مسائل ارائه راه کار برای انتخاب استراتژی های مناسب توسط هر یک از بازیکنان است به گونه ای که سودمندی هر دو فرد در ازای انجام هر دو بازی ماکزیمم گردد. برای این منظور ابتدا بررسی خواهیم کرد چنانچه هر یک از بازیکنان شروع کننده بازی باشند با توجه به اقدامات طرف مقابل چگونه عمل کرده و کدام استراتژی را انتخاب می کنند.

چنانچه استراتژی های انتخاب شده به گونه ای باشد که نهایتاً به یک نقطه ختم شود آن نقطه را به عنوان جواب معرفی کرده، آنرا اصطلاحاً نقطه زینی یا تعادل مسئله می نامیم. و حل مسئله در همانجا خاتمه خواهد یافت اما اگر چنین نقطه ای در ماتریس پاداش یافت نشد، بایستی با روشهایی که در ادامه می آیند حل مسئله را ادامه داد. مثال های زیر بازی هایی را نشان میدهند که در آنها نقطه زینی وجود دارد:

	B_1	B_2	B_3	حداقل سطر
A_1	۳۵	۱۵	۶۰	۱۵
A_2	۴۵	۵۸	۵۰	۴۵
A_3	۳۸	۱۴	۷۰	۱۴
حداکثر ستون	۴۵	۵۸	۷۰	۴۵

ماکزیمم مینیمم ها

نقطه زینی یا تعادل

مینیمم ماکزیمم ها

$$\text{Max } \{45, 15, 14\} = 45$$

$$\text{Min } \{45, 55, 70\} = 45$$

نقطه تعادل یا نقطه زینی نقطه ای است که بیشینه کمینه های سطرها با کمینه بیشینه ستون ها برابر باشد:

$$\text{Max } \{ \min (\text{row}) \} = \text{Min } \{ \max (\text{column}) \}$$

چنانچه بازیکن سطری شروع کننده بازی باشد هریک از استراتژی های A_1 و A_2 و A_3 را جداگانه بررسی میکند، تا ببیند در ازای انتخاب این استراتژی ها بازیکن ستونی کدام بازی استراتژی را انجام خواهد داد، واضح است که بازیکن ستونی در هر سطر عددی را انتخاب میکند که کمترین مقدار باشد تا مقدار کمتری را ببازد پس نتیجه زیر برای بازیکن سطری بدست خواهد آمد:

استراتژی	سودمندی
A_1	۱۵
A_2	۴۵
A_3	۱۴

پس بهتر است بازیکن سطری A_2 را انتخاب نماید تا به این ترتیب مطمئن باشد که حداقل ۴۵ امتیاز بدست می آورد.

اگر بازیکن ستونی بازی را شروع کند این بار بازیکن سطری اقدامی را انجام خواهد داد که میزان بیشتری را ببرد، پس در هر ستون بازیکن سطری بیشترین مقدار را انتخاب خواهد کرد، لذا نتایج زیر برای بازیکن ستونی بدست خواهد آمد:

استراتژی	سودمندی
B_1	45
B_2	58
B_3	70

پس بین این استراتژی ها B_1 را انتخاب خواهد کرد و به این ترتیب مطمئن می باشد که حداکثر ۴۵ امتیاز می بازد و نه بیشتر.

مثال) اعداد مقابل سودمندی ستونی را نشان میدهند:

	B_1	B_2	B_3	B_4	حداکثر سطری
A_1	۹	۸	۴	۱	۹
A_2	6	14	-3	-1	14
A_3	-3	5	-2	4	5
نقطه تعادل یا زینی	-3	5	-3	-1	

$$5 = \text{Min} \{9, 14, 5\} \quad 5 = \text{Max} \{-3, 5, -3, -1\}$$

نقطه زینی یعنی اگر بازیکن سطری استراتژی A_3 را و بازیکن ستونی استراتژی B_2 را انتخاب کند در دراز مدت مطمئن خواهند بود که سطری بیش تر از ۵ امتیاز نخواهد باخت و ستونی نیز کمتر از ۵ امتیاز نخواهد برد. در این صورت ارزش بازی عدد ۵ میباشد.

اگر نقطه زینی در مسئله نداشت چه کنیم؟

حل مدل (مسئله) نظریه بازی ها در صورت عدم وجود نقطه زینی:

چنانچه مسئله ای فاقد نقطه زینی باشد آنگاه نمیتوان استراتژی قطعی را برای بازیکنان معرفی نمود، بنابر این لازم است در این حالت استراتژی های مخلوط یا مرکب را برای بازیکنان تعیین نمود.

اگر بازیکن سطری m استراتژی $A_1, A_2, \dots, A_m$ را در اختیار داشته باشد بردار

$p_1, p_2, \dots, p_m$ که در آن $p_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ را یک استراتژی مخلوط برای بازیکن سطری گویند.

همچنین اگر ستونی n استراتژی $B_1, B_2, \dots, B_n$ را بتواند انتخاب کند بردار $q_1, q_2, \dots, q_n$

که $q_i \geq 0$ و $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ را یک استراتژی مخلوط برای ستونی نامند.

پس در واقع می خواهیم احتمال انتخاب هر استراتژی را برای بازیکنان تعیین می کنیم.

اگر در مسئله ای سودمندی دو طرف مشخص نبود باید بر مبنای سودمندی هر دو طرف محاسبه نمود یا از طریق سیمپلکس آنرا بدست آورد. قبل از ارائه روش های ترسیمی و سیمپلکس جهت یافتن استراتژی مخلوط ابتدا چگونگی یافتن سطر و ستون مغلوب را ارائه خواهیم داد تا با حذف کردن آنها ماتریس پاداش، ساده تر و دارای ابعاد کوچکتری میشود.

	B_1	B_2	B_3
A_1	۹	۶	۵
A_2	۵	۲	۶
A_3	۸	۴	۷

روش ساده سازی ماتریس:

اگر سودمندی با سطری باشد: در سطری A_2 مغلوب A_3 میشود زیرا تمامی اعداد سطر A_3 بزرگتر از سطر A_2 میباشد. ستون B_1 توسط ستون B_2 مغلوب خواهد شد زیرا تمامی اعداد ستون B_2 کوچکتر از B_1 میباشد. (سطر کوچکتر و ستون بزرگتر مغلوب میشود)

	B_2	B_3
A_1	۶	۵
A_3	۴	۷

در انتها ماتریس باقی مانده بشکل زیر خواهد بود:

$$A_2 \text{ مغلوب: } p_2 = 0$$

$$B_1 \text{ مغلوب: } q_2 = 0$$

اگر سودمندی با ستونی باشد: در ستونی B_2 توسط B_1 مغلوب میشود، زیرا تمامی اعداد ستون B_1 بزرگتر از B_2 میباشد. سطر های A_3 توسط A_2 مغلوب میشود، زیرا تمامی اعداد سطر A_2 کوچکتر از A_3 میباشد. (ستون کوچکتر و سطر بزرگتر مغلوب و حذف میشود)

ماتریسی که باقی می ماند بشکل زیر خواهد بود:

	B_1	B_3
A_1	۹	۵
A_2	۵	۶

$$A_3 \text{ مغلوب: } p_3 = 0$$

$$B_2 \text{ مغلوب: } q_2 = 0$$

حل نظریه بازیها به روش ترسیمی :

ماتریس پاداش زیر را در نظر بگیرید:

	B_1	B_2	B_3	B_4	حداقل سطر
A_1	۱	۲	-۳	۷	-۳
A_2	۲	۵	۴	-۶	-۶
حداکثر ستون	۲	۵	۴	۷	-۳ و ۲

این ماتریس نقطه زینی ندارد زیرا حداکثر (حداقل ها) سطر ۳- میشود و حداقل (حداکثر ها) ستونی ۲ میشود لذا چون این دو عدد برابر نیست نقطه زینی ندارد.

حداقل {حداکثر ستونی} = ۲ # ۳ = {حداقل سطر} حداکثر $\leftarrow$ نقطه زینی ندارد.

$$\text{Max (Min)} = -3$$

$$\text{Min (Max)} = 2$$

یکبار فرض کنید اعداد نتیجه سودمندی بازیکن سطری هستند و بار دیگر فرض کنید اعداد سودمندی بازیکن ستونی را نشان دهند.

حل) الف- اگر اعداد سودمندی بازیکن سطری را نشان دهند (سطر کوچکتر مساوی و ستون بزرگتر مساوی مغلوب و حذف میشود):

سطرها و ستونهای مغلوب را مشخص مینماییم: اگر سودمندی با سطری باشد، سطری که کوچکتر مساوی است مغلوب و حذف میشود و ستونی که بزرگتر مساوی است مغلوب و حذف میشود. لذا ستون B_2 نسبت به B_1 بزرگتر و حذف میشود.

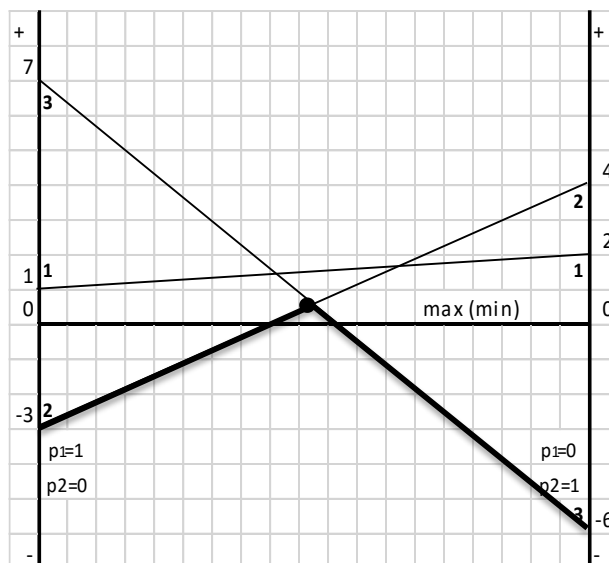
نقطه زینی ندارد چون یک نقطه مشترک بین سطر و ستون وجود ندارد، زمانی که اعداد سودمندی یک ستون را نشان میدهند میتوان یک ستون که از ستون دیگر کمتر باشد را مغلوب و حذف کرد.

به هنگام سودمندی سطری در سمت راست ماتریس ستون حداقل سطر و در سطر انتهای ماتریس حداکثر ستون را مینویسیم.

ستون مغلوب

	احتمال	q_1	q_2	q_3	q_4	حداقل سطر
احتمال		B_1	B_2	B_3	B_4	
p_1	A_1	۱	۲	-۳	۷	-۳
p_2	A_2	۲	۵	۴	-۶	-۶
حداکثر ستون		۲	۵	۴	۷	۳- و ۲

حال یک ماتریس 2×3 باقی می ماند.



ابتدا بین مقادیر ستونی ماکزیموم و سپس مینی موم آنرا انتخاب می کنیم، سپس بین مقادیر سطری مینی موم و سپس ماکزیموم آنرا انتخاب می کنیم، آنگاه وجود نقطه زینی را مشخص نموده، در صورتیکه نقطه زینی نداشت، سطر و ستون های مغلوب را نیز مشخص می نماییم، ماتریس باقی مانده به شکل زیر خواهد بود که از روی این ماتریس p ها و q های آنرا می نویسیم:

		q_1	q_3	q_4
		B_1	B_3	B_4
p_1	A_1	۱	-3	7
p_2	A_2	۲	4	-6

$$\begin{cases} 1) p_1 + 2p_2 \\ 2) -3p_1 + 4p_2 \\ 3) 7p_1 - 6p_2 \end{cases}$$

$$(2) = (3)$$

$$-3p_1 + 4p_2 = 7p_1 - 6p_2$$

$$10p_1 - 10p_2 = 0$$

$$p_1 = p_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

$$-3p_1 + 4p_2 = -3\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} -3q_3 + 7q_4 \\ 4q_3 - 6q_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7q_3 + 13q_4 = 0 \\ -7(1 - q_4) + 13q_4 = 0 \end{cases}$$

$$q_4 = \frac{7}{20} \quad q_3 = \frac{13}{20}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$$

$$0 + 0 + q_3 + q_4 = 1$$

$$q_3 = 1 - q_4$$

$$-3q_3 + 7q_4$$

$$-3\left(\frac{13}{20}\right) + 7\left(\frac{7}{20}\right) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} q_1; q_2; q_3; q_4 \\ 0; 0; \frac{13}{20}; \frac{7}{20} \end{bmatrix}$$

در حل ترسیمی مسائل بازی بعد اطمینان از اینکه مسئله فاقد نقطه زینی است سطر و ستونهای مغلوب را حذف کرده و از سمتی که ماتریس دو تایی شده بازی را شروع می کنیم، فرض کنید، سطرهای ماتریس دوتا باشد دو محور موازی با هم را رسم می کنیم روی یکی از این محور ها $p_1 = 1$ و $p_2 = 0$ میباشد و در محور مقابل دقیقاً برعکس یعنی $p_1 = 0$ و $p_2 = 1$ خواهد بود روی محوری که $p_1 = 1$ بوده اعداد سطر روبروی p_1 را مشخص می کنیم و در محوری که $p_2 = 1$ است اعداد سطر روبروی p_2 را خواهیم یافت، سپس اعداد روبروی هم در ماتریس سطر p_1 و p_2 را یافته و آنها را با خطی به هم وصل می کنیم.

حال اگر اعداد نشاندهنده سودمندی بازیکن سطری باشند ابتدا بایستی بین خطوط رسم شده در هر قسمت پائین خطوط را مشخص کنیم و در آخر بالاترین نقطه در آن قسمت را تعیین نماییم. اگر اعداد نشاندهنده

سودمندی ستونی باشند ابتدا بایستی بین خطوط رسم شده بالاترین خطوط را انتخاب نماییم سپس بین بالاترین ها پائین ترین نقطه را انتخاب نماییم.

با قطع دادن معادلات مربوط به خطوطی که نقطه جواب روی آنها واقع شده و همچنین در نظر گرفتن شرط اینکه مجموع احتمالات برابر یک است می توانیم مقدار p_1 و p_2 را بدست آوریم. بعد از یافتن p ها به یافتن q ها خواهیم پرداخت، توجه کنید که اگر ستونی مغلوب بوده یا نقطه جواب روی خط مربوط به آن ستون قرار نگرفته پس مقدار احتمال مربوط به آن ستونها برابر صفر میباشد و برای سایر احتمالات و معادلات آنها را با هم قطع خواهیم داد.

(ب) اگر اعداد سودمندی بازیکن ستونی را نشان دهند (ستون کوچکتر مساوی و سطر بزرگتر مساوی مغلوب و حذف میشود):

	احتمال	q_1	q_2	q_3	q_4	حداکثر سطرها
احتمال		B_1	B_2	B_3	B_4	
p_1	A_1	۱	۲	-۳	۷	۷
p_2	A_2	۲	۵	۴	-۶	۵
حداقل ستون ها		۱	۲	-۳	-۶	۲ و ۵

مغلوب

نقطه زینی ندارد ۲ # ۵

در مواردیکه سودمندی با بازیکن ستونی است در ستون انتهایی ماتریس حداکثر سطر و در سطر انتهایی ماتریس حداقل ستون ها را مینویسیم.

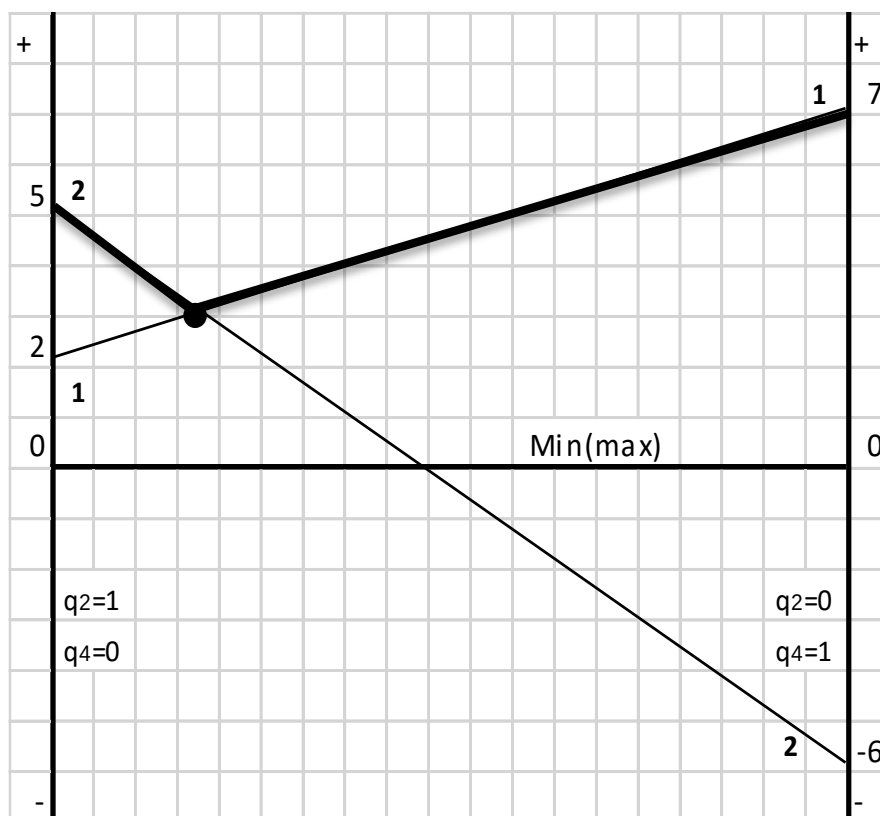
سطرها و ستونهای مغلوب را مشخص مینماییم:

اگر سود مندی با ستونی باشد، ستونی که کوچکتر مساوی است مغلوب و حذف میشود و سطری که بزرگتر

	q_2	q_4
p_1	۲	۷
p_2	۵	-۶

مساوی است مغلوب و حذف میشود.

ماتریس باقیمانده یک 2×2 میشود:



$$q_2 + 7q_4 = 5q_2 - 6q_4$$

$$3q_2 - 13q_4 = 0$$

$$3(1 - q_4) - 13q_4 = 0$$

$$-16q_4 = -3$$

$$q_4 = \frac{3}{16} \quad q_2 = \frac{13}{16}$$

$$\left[\begin{array}{l} q_1; q_2; q_3; q_4 \\ 0; \frac{13}{16}; 0; \frac{3}{16} \end{array} \right]$$

$$2\left(\frac{13}{16}\right) + 7\left(\frac{3}{16}\right) = \frac{47}{16}$$

	q_2	q_4
p_1	۲	۷
p_2	۵	-۶

$$2p_1 + 5p_2 = 7p_1 - 6p_2$$

$$5p_1 - 11p_2 = 0$$

$$5(1 - p_2) - 11p_2 = 0$$

$$-16p_2 = -5 \quad p_2 = \frac{5}{16} \quad p_1 = \frac{11}{16}$$

$$\left(p_1, p_2 \right) = \left(\frac{11}{16}, \frac{5}{16} \right)$$

$$2\left(\frac{11}{16}\right) + 5\left(\frac{5}{16}\right) = \frac{47}{16}$$

$$7\left(\frac{11}{16}\right) + 6\left(\frac{5}{16}\right) = \frac{47}{16}$$

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	2	5
A_2	8	4	۷
A_3	-1	۵	-۶

تمرین (۱)

الف) برد با سطری باشد

ب) برد با ستونی باشد

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	۵	-۷	-۴	۲
A_2	۲	۶	۹	۸	۱

تمرین (۲)

الف) برد با سطری باشد

ب) برد با ستونی باشد

حل تمرین ۱: ماتریس زیر را داریم:

		q_1	q_2	q_3	حداقل سطر
		B_1	B_2	B_3	
p_1	A_1	۱	۲	۵	۱
p_2	A_2	۸	۴	۷	۴
p_3	A_3	-۱	۵	-۶	-۶
حداکثر ستون		۸	۵	۷	۵ و ۴

الف) اگر اعداد سودمندی سطری را نشان دهند:

۱- نقطه زینی ندارد زیرا ۴ و ۵ برابر نیست (حداکثر حداقل سطر ۴ # حداقل حداکثر ستون ۵).

۲- به هنگام سودمندی سطری: سطر کوچکتر مساوی و ستون بزرگتر مساوی مغلوب و حذف میشود.

لذا سطر A_1 نسبت به A_2 کوچکتر است لذا مغلوب می شود. و ستون B_2 بزرگتر از ستون B_1 میباشد و مغلوب میگردد، نهایتاً یک ماتریس 2×2 باقی می ماند.

$$4p_2 + 5p_3 = 7p_2 + 6p_3$$

$$-3p_2 + 11p_3 = 0$$

$$-3p_2 + 11(1 - p_2) = 0$$

$$-14p_2 = -11$$

$$p_2 = \frac{11}{14}, \quad p_3 = \frac{3}{14}$$

$$\left[p_1, p_2, \right] p_3$$

$$0, \frac{11}{14}, \frac{3}{14}$$

$$4\left(\frac{11}{14}\right) + 5\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{59}{14} \text{ بیشترین سودمندی سطری}$$

$$q_1 = 0$$

$$4q_2 + 7q_3 = 5q_2 - 6q_3$$

$$-q_2 + 13q_3 = 0$$

$$q_2 + q_3 = 1$$

$$q_3 = (1 - q_2)$$

$$4q_2 + 7(1 - q_2) = 5q_2 - 6(1 - q_2)$$

$$4q_2 + 7 - 7q_2 = 5q_2 - 6 + 6q_2$$

$$7 + 6 = 3q_2 + 5q_2 - 6 + 6q_2$$

$$14q_2 = 13$$

$$q_3 = \frac{1}{14} \quad q_2 = \frac{13}{14}$$

$$(q_1 = 0, q_2 = \frac{13}{14}, q_3 = \frac{1}{14})$$

$$\left[\begin{array}{ccc} q_1 & , & q_2 & , \end{array} \right] q_3$$

$$0 \quad , \quad \frac{13}{14} \quad , \quad \frac{1}{14}$$

$$5q_2 - 6q_3$$

$$5\left(\frac{13}{14}\right) - 6\left(\frac{1}{14}\right) = \frac{59}{14} \text{ بیشترین سودمندی سطر}$$

ب) اگر اعداد سودمندی ستونی را نشان دهند:

۱- نقطه زینی ندارد زیرا ۵ و ۲ برابر نیست (حداقل حداکثر سطر ۵ # حداکثر حداقل ستون ۲).

۲- به هنگام سودمندی ستونی: سطر بزرگتر مساوی و ستون کوچکتر مساوی مغلوب و حذف میشود.

لذا سطر A_2 نسبت به A_1 بزرگتر است لذا مغلوب می شود. و ستون B_1 کوچکتر از ستون B_2

میباشد و مغلوب میگردد، نهایتاً یک ماتریس 2×2 باقی می ماند.

		q_1	q_2	q_3	حداکثر سطر
		B_1	B_2	B_3	
p_1	A_1	۱	۲	۵	۵
p_2	A_2	۸	۹	۷	۸
p_3	A_3	-۱	۵	-۶	۵
حداقل ستونی		-۱	۲	-۶	۲ و ۵

$$2p_1 + 5p_3 = 5p_1 - 6p_3$$

$$-3p_1 + 11p_3 = 0$$

$$-14p_2 = -11$$

$$p_1 = \frac{11}{14} \quad p_3 = \frac{3}{14}$$

$$\left(p_1 = \frac{11}{14}, p_2 = 0, p_3 = \frac{3}{14} \right)$$

$$\left[p_1, p_2, p_3 \right]$$

$$\frac{11}{14}, 0, \frac{3}{14}$$

$$2p_1 + 5p_3$$

$$2\left(\frac{11}{14}\right) + 5\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{37}{14} \text{ بیشترین سودمندی ستونی}$$

$$5p_1 - 6p_3$$

$$5\left(\frac{11}{14}\right) - 6\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{55}{14} - \frac{18}{14} = \frac{37}{14}$$

گامهای حل مسئله نظریه بازیها به روش ترسیمی:

۱- مشخص نمودن وجود یا عدم وجود نقطه زینی

۲- مشخص نمودن سطر و ستون غالب و مغلوب با

توجه به سودمندی سطر یا ستون

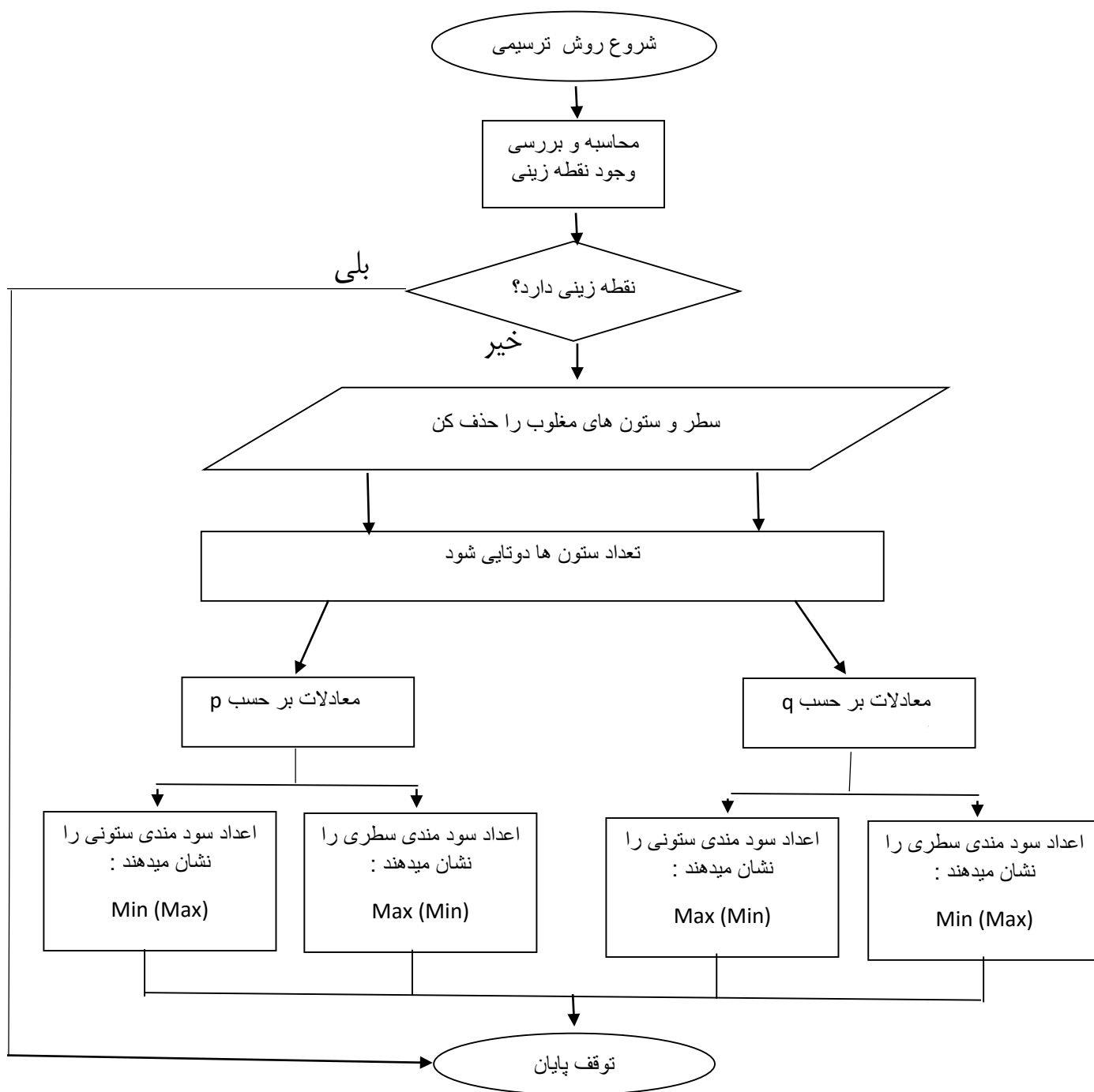
۳- رسم نمودار ترسیمی بر اساس p یا q مورد نظر با

توجه به ماتریس باقیمانده

۴- ساختن معادله بر اساس p یا q مورد نظر

۵- حل معادله و مشخص نمودن مقدار p و q ها

فلوچارت حل مسائل ترسیمی تئوری بازیها:



- برای جلسه آینده یک مثال برای سودمندی سطری و یک مثال برای اعداد سودمندی ستونی را نشان دهند که در انتها تعداد سطرها ۳ و ستونها ۲ عدد باشد.

استفاده از روش سیمپلکس برای حل مسائل نظریه بازیها:

چنانچه ماتریس پاداش در یک مسئله نظریه بازی نقطه زینی نداشته باشد و همچنین بعد از حذف سطر و ستونهای مغلوب باز هم تعداد سطرها و تعداد ستونها بیشتر از ۲ عدد باشد، دیگر نمیتوان از روش ترسیمی برای حل استفاده کرد، در چنین مواقعی روش سیمپلکس پیشنهاد میگردد در این روش گامهای زیر را بایستی طی کنیم:

گام اول- محدوده V (سودمندی بازی) را تعیین کنید، اگر این محدوده شامل اعداد منفی و یا صفر است کوچکترین عددی که بتواند محدوده را مثبت نماید به تمام اعداد ماتریس پاداش اضافه نمایید.

گام دوم- متغیرهای x_i را برای سطرها و متغیرهای y_j را برای ستونها انتخاب کنید و مسئله برنامه ریزی خطی مربوط به بازیکنی که اعداد ماتریس سودمندی آنرا نشان نمیدهند را تشکیل دهید، این مسئله از نوع ماکزیمم سازی (Max) محدودیت های آن همگی به فرم کوچکتر مساوی میباشد. در تابع هدف مجموع متغیرها قرار دارد و سمت راست همه محدودیت ها برابر ۱ است. مسئله بازیکن بعدی دقیقاً دوگان مسئله بازیکن بالا خواهد بود.

گام سوم- مسئله تشکیل شده را با روش سیمپلکس حل و جوابها را می یابیم همچنین طبق قضیه مکمل جواب بازیکن بعد را نیز میتوان از سطر صفر جدول بهینه بدست آمده استخراج کرد.

گام چهارم- قرار دهید: (مقدار تابع هدف Z^*)

$$v = \frac{1}{z^*}$$

$$p_i = x_i \times v$$

$$q_i = x_i \times v$$

تمرین و مثال) مسئله زیر را حل کنید (نمونه برای میان ترم) نظریه بازی زیر را در نظر بگیرید:

	B_1	B_2	B_3	حداکثر سطر
A_1	-۱	۱	۱	۱
A_2	۰	-۲	۲	۲
A_3	۲	۱	-۱	۲
حداقل ستون	-۱	-۲	-۱	۱ و -۱

چون حداقل حداکثر سطر با حداکثر حداقل ستون یک عدد برابر نیست نقطه زینی ندارد.

اعداد نشان دهنده سودمندی بازیکن ستونی میباشد، با روش سیمپلکس استراتژی های مخلوط هریک از بازیکنان را مشخص کنید.

۱- محدوده زینی ندارد.

۲- محدوده V بین ۱ و -۱ میباشد.

۳- کوچکترین عددی که می توان آنرا به مثبت تبدیل کرد با آن جمع می کنیم.

۴- سطر ها و ستونهای مغلوب را بررسی می کنیم، سطر و ستون مغلوب وجود ندارد.

۵- مناسب ترین عدد برای جمع با جدول که از حالت منفی خارج گردد عدد ۲ است پس جدول را با ۲ جمع می کنیم:

$$-1 \leq v \leq 1$$

		y_1	y_2	y_3
		B_1	B_2	B_3
x_1	A_1	۱	۳	۳
x_2	A_2	۲	۰	۴
x_3	A_3	۴	۳	۱

اعداد را برای بازیکن سطری می نویسیم:

$$\text{Max } z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{St: } x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_1 \leq 1$$

$$3x_1 + \quad \quad 3x_3 + s_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + s_3 \leq 1$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$$

حال اعداد را برای بازیکن ستونی می نویسیم:

$$\text{Min } y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$\text{St: } y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 1$$

$$2y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1$$

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3 \geq 0$$

حل مسئله بازیکن سطری:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z_0	-۱	-۱	-۱	۰	۰	۰	۰
s_1	۱	۲	۴	۱	۰	۰	۱
s_2	۳	۰	۳	۰	۱	۰	۱
s_3	۳	۴	۱	۰	۰	۱	۱

$$\text{Min } \left\{ \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{4}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	سطر جدید x_2 :
z_0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	
s_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	
s_2	3	0	3	0	1	0	\
x_2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{Min } \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{2}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	سطر جدید x_3 :
z_0	$-\frac{5}{14}$	0	0	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$
x_3	$-\frac{1}{7}$	0	1	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
s_2							
x_2							

$$z_0 x_1 = \left(\frac{3}{4} \times \frac{-1}{7} \right) + \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{-3}{28} - \frac{1}{4} = \frac{-3-7}{28} = \frac{-10}{28} = \frac{-5}{14}$$

این تمرین در جلسه بعد بطور کامل حل خواهد شد.

حل تمرین:

ماتریس زیر را داریم:

الف) اعداد سودمندی ستونی را نشان دهند:

۱. نقطه زینی ندارد زیرا ۱ و -۱ برابر نیست.

۲. چون کوچکترین عدد داخل جدول -۲ میباشد به منظور تبدیل نمودن به کوچکترین عدد مثبت، جدول قبل را با ۲ جمع می کنیم.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	-۱	۱	۱	۱
A_2	۰	-۲	۲	۲
A_3	۲	۱	-۱	۲
	-۱	-۲	-۱	۱ و -۱

-1+2

	B_1	B_2	B_3	حداکثر ستونی
x_1	۱	۳	۳	۳
x_2	۲	۰	۴	۴
x_3	۴	۳	۱	۴
حداقل ستون	۱	۰	۱	۱ و ۳

۳. اقدام به ماکزیمم سازی جدول می نماییم:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s.t} \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 1 \\
 & 3x_1 + 3x_3 \leq 1 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 1 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

۴. دوگان مسئله فوق میشود:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } z &= y_1 + y_2 + y_3 \\
 \text{s.t} \quad & y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 1
 \end{aligned}$$

$$2y_1 + 4y_3 \geq 1$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \leq 1$$

$$\text{Min } z = y_1 + y_2 + y_3 + s_1 + s_2 + s_3$$

$$\text{s.t } y_1 + 3y_2 + 3y_3 + s_1 = 1$$

$$2y_1 + 4y_3 + s_2 = 1$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 + s_3 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3, s_1, s_2, s_3 = 1$$

۵. اعداد را به جدول منتقل می کنیم:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS	نحوه محاسبه
Z_0	-۱	-۱	-۱	۰	۰	۰	۰	
s_1	۱	۲	۴	۱	۰	۰	۱	
s_2	۳	۰	۳	۰	۱	۰	۱	
s_3	۳	۴	۱	۰	۰	۱	۱	

۶. با توجه به اینکه ستون لولا مربوط به منفی ترین عدد در سطر Z_0 میباشد و x_1 و x_2 و x_3 در سطر

Z_0 هر سه عدد -۱ و در انتخاب نسبت به یکدیگر فرقی ندارد، لیکن در ستون x_2 و سطر s_2 عدد ۰

قرار دارد لذا حل آن ساده تر خواهد بود پس x_2 را به عنوان ستون لولا انتخاب میکنیم.

۷. نحوه پیدا کردن سطر لولا از تقسیم ستون RHS در سطرهای s_1 و s_2 و s_3 بر ستون لولا در

همان سطر که کوچکترین عدد مثبت باشد بدست می آید به این ترتیب:

در سطر S_1 میشود $\frac{1}{2}$ برابر 0.5

در سطر S_2 میشود $\frac{1}{0}$ برابر 0

در سطر S_3 میشود $\frac{1}{4}$ برابر 0.25

نتیجه اینکه سطر لولا سطری است که ۰/۲۵ در آن قرار دارد یعنی S_3

۸. از تقاطع سطر لولا بر ستون لولا عدد لولا که ۴ میباشد، بدست می آید.

۹. حال باید به قسمی محاسبه نمود که عددی را انتخاب نماییم که در سطر لولا ضرب شود و با سطر

متغیرهای کمکی جمع و حاصل در ستون لولا صفر شود.

ابتدا باید از سطر لولا شروع نمود، تمام سطر لولا را بر عددی باید ضرب نمود که حاصل عدد لولا ۱

شود، در اینجا چون عدد لولا ۴ میباشد سطر لولا را باید در $\frac{1}{4}$ ضرب نمود، لذا اعداد جدول جدید خواهند

بود:

$$S_3 \rightarrow X_1 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad X_2 = 4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1, \\ X_3 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = \frac{1}{4}, \\ HRS = \frac{1}{4}$$

سپس سطرهای دیگر را نیز باید بر مبنای ستون لولا به گونه ای ضرب نمود و با سطر لولای جدید جمع کرد که حاصل ستون لولای جدید صفر شود:

در ستون لولا X_2 و در سطر S_2 چون عدد مندرج در جدول برابر صفر است پس نیازی به تغییر جدول نیست و همان اعداد را داخل جدول جدید می گذاریم.

$$S_2 \rightarrow X_1 = 3, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 3, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 1, \\ S_3 = 0, \quad HRS = 1$$

در ستون لولا X_2 و در سطر S_1 چون عدد مندرج در جدول ۲ میباشد و باید این عدد نیز در نتیجه حاصله ضرب آن با سطر لولای جدید و جمع با عدد قبلی صفر شود پس عدد ۲- را انتخاب می کنیم:

$$S_1 \rightarrow X_1 = \left(-2 \times \frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{-6}{4} + \frac{1}{1} = \frac{-6 + 4}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \\ X_2 = (-2 \times 2) + 4 = 0, \\ X_3 = \left(-2 \times \frac{1}{4}\right) + 4 = \frac{-2 + 16}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}, \\ S_1 = -2 \times 0 + 1 = 1, \quad S_2 = -2 \times 0 + 0 = 0, \\ S_3 = -2 \times \frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{2}, \\ HRS = -2 \times \frac{1}{4} + 1 = \frac{1 + 4}{4} = \frac{1}{2}$$

در ستون لولا X_2 و در سطر Z_0 چون عدد مندرج در جدول برابر ۱- است پس باید در عددی ضرب گردد که حاصل با سطر لولا جمع گردد صفر شود و آن عدد ۱ میباشد:

$$Z_0 \rightarrow X_1 = \left(1 \times \frac{3}{4}\right) - 1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{1} = \frac{3 - 4}{4} = -\frac{1}{4}, \\ X_2 = \left(1 \times \frac{1}{4}\right) - 1 = \frac{1 - 4}{4} = -\frac{3}{4}, \\ X_3 = (1 \times 0) - 1 = 0, \quad S_1 = (1 \times 0) + 0 = 0, \\ S_2 = (1 \times 0 + 0 = 0, \quad S_3 = 1 \times 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \\ HRS = 1 \times 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

اعداد محاسبه شده را وارد جدول می کنیم:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS	نحوه محاسبه
z_0	$\frac{1}{4}$	$\cdot$	$\frac{3}{4}$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	سطر جدید $\times 1$
s_1	$\frac{1}{2}$	$\cdot$	$\frac{7}{2}$	$\cdot$	$\cdot$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	سطر جدید $\times -2$
s_2	3	$\cdot$	3	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	
x_2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	سطر جدید

- حال با توجه به اینکه مقادیر ستون لولا در جدول قبل صفر شد همان رویه را در جدول بعدی در نظر گرفته و سطر و ستون لولا را پیدا می کنیم و همان رویه را ادامه می دهیم تا ستون لولای جدول بعدی نیز صفر گردد:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		نحوه محاسبه
z_0	$\frac{5}{14}$	$\cdot$	$\cdot$	$\frac{3}{14}$	$\cdot$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	
x_3	$-\frac{1}{7}$	$\cdot$	1	$-\frac{2}{7}$	$\cdot$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	سطر جدید
s_2	$\frac{24}{7}$	$\cdot$	$\cdot$	$-\frac{6}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	
x_2	$\frac{11}{14}$	1	$\cdot$	$-\frac{1}{14}$	$\cdot$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{14}$	

- اعداد جدول قبل در همان سطر + سطر جدید $\times \frac{3}{4} = z$

$$s_2 = -3 \times \text{سطر جدید} + \text{سطر در همان سطر}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} \times \text{سطر جدید} + \text{سطر در همان سطر}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	نحوه محاسبه
z_0	.	.	.	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{12}$
x_3	.	.	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$
x_1	1	.	.	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$
x_2	.	1	.	$\frac{1}{8}$	$-\frac{11}{45}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{12}$

$$x_3 = \frac{1}{7} \times \text{سطر جدید} + \text{سطر در همان سطر}$$

$$z = \frac{5}{14} \times \text{سطر جدید} + \text{سطر در همان سطر}$$

$$x_2 = -\frac{11}{14} \times \text{سطر جدید} + \text{سطر در همان سطر}$$

چون دیگر سطر z_0 منفی ندارد جدول بهینه می شود.

$$z_0 = \frac{5}{12} \quad \equiv \text{معکوس} \gg \quad V = \frac{12}{5}$$

$$x_1 = \frac{1}{6} p_1 = x_1 \times V = \frac{1}{6} \times \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{12} p_2 = x_2 \times V = \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{1}{5}$$

$$x_3 = \frac{1}{6} p_3 = x_3 \times V = \frac{1}{6} \times \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

اگر حاصل جمع p_1 و p_2 و p_3 یک شد جواب بدست آمده صحیح است.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

ب) حال در صورتیکه برای جدول اولیه، سودمندی سطری را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \text{Max } Y &= y_1 + y_2 + y_3 \\ \text{s.t} \quad y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\geq 1 \\ 2y_1 + 4y_3 &\geq 1 \\ 4y_1 + 3y_2 + y_3 &\geq 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

اگر دوگان سطری را بنویسیم میتوان پاسخ را بدست آورد. اعداد زیر از جدول آخر استخراج شده

است در سطر Z_0 مقادیر S_1, S_2, S_3 :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{8}q_1 = y_1 \times V = \frac{1}{8} \times \frac{12}{5} = \frac{3}{10} \\ y_2 &= \frac{5}{48}q_2 = y_2 \times V = \frac{5}{48} \times \frac{12}{5} = \frac{1}{4} \\ y_3 &= \frac{3}{16}q_3 = y_3 \times V = \frac{3}{16} \times \frac{12}{5} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

نکته) در پاسخ به سوالات سیمپلکس و ترسیمی حتماً به خواسته سوال دقت شود در صورتیکه از طریق سیمپلکس خواسته شده باشد از طریق سیمپلکس و چنانچه از راه ترسیمی خواسته باشد با روش ترسیمی سوال پاسخ داده شود.

تمرین) جدول زیر را در نظر بگیرید:

	B_1	B_2	B_3	B_4	حداقل سطر
A_1	۳۰	۵۰	۲۰	۵۰	۲۰
A_2	۴۰	۱۰	۶۰	۲۰	۱۰
A_3	۲۰	۵۰	۱۰	۷۰	۱۰
حداکثر ستونی	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۴۰ و ۲۰

اولاً نقطه زینی ندارد زیرا حداقل سطرها ۲۰ با حداکثر ستونی ۴۰ برابر نیست.

ثانیاً ستون B_4 با B_2 مقایسه میشود B_2 کمتر از B_4 است لذا B_4 مغلوب میشود.

ثالثاً سطر A_3 با A_1 مقایسه میشود چون سودمندی سطری را نشان میدهد A_3 از A_1 کوچکتر است لذا مغلوب و حذف میشود.

زمانیکه سودمندی سطری را نشان میدهد ستونی که بزرگتر است و سطری که کوچکتر است مغلوب میشود، لذا مقادیر p_3 و q_4 صفر میشود.

$$20 \leq V \leq 40$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Y = y_1 + y_2 + y_3 \\ & 30y_1 + 50y_2 + 20y_3 \leq 1 \\ & 40y_1 + 10y_2 + 20y_3 \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \leq 1 \end{aligned}$$

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	
Y_0	-1	-1	-1	0	0	0
s_1	30	50	20	1	0	1
s_2	40	10	60	0	1	1

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2		نحوه محاسبه
Y_0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	۱ × سطر جدید
s_1	0	$\frac{85}{2}$	-25	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	۳۰ × سطر جدید
y_1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	سطر جدید

$$\text{Min} \left\{ \frac{1}{\frac{4}{85}}, \frac{1}{\frac{40}{4}} \right\} = \text{Max} \left\{ \frac{1}{70}, \frac{1}{10} \right\} = \frac{1}{70}$$

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2		نحوه محاسبه
Y_0	0	0	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{170}$	$\frac{2}{170}$	$\frac{5}{170}$	$\frac{3}{4} \times$ سطر جدید
y_2	0	1	$-\frac{10}{17}$	$\frac{2}{85}$	$-\frac{3}{170}$	$\frac{1}{170}$	سطر جدید
y_1	1	0	$\frac{28}{170}$	$\frac{1}{170}$	$\frac{20}{680}$	$\frac{4}{170}$	$-\frac{1}{4} \times$ سطر جدید

$$\left(-\frac{10}{17} \times \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} = -\frac{15}{34} + \frac{1}{2} = \frac{-15 + 17}{34} = \frac{2}{34} = \frac{1}{17} \text{ جواب } y_0 \text{ و } y_3$$

$$\left(-\frac{3}{170} \times \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{40} = \frac{1}{4} \left(-\frac{9}{170} + \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{8}{170} = \frac{2}{170} \text{ جواب } y_0 \text{ و } s_2$$

حال جواب بهینه شده مقدار q ها را محاسبه می کنیم :

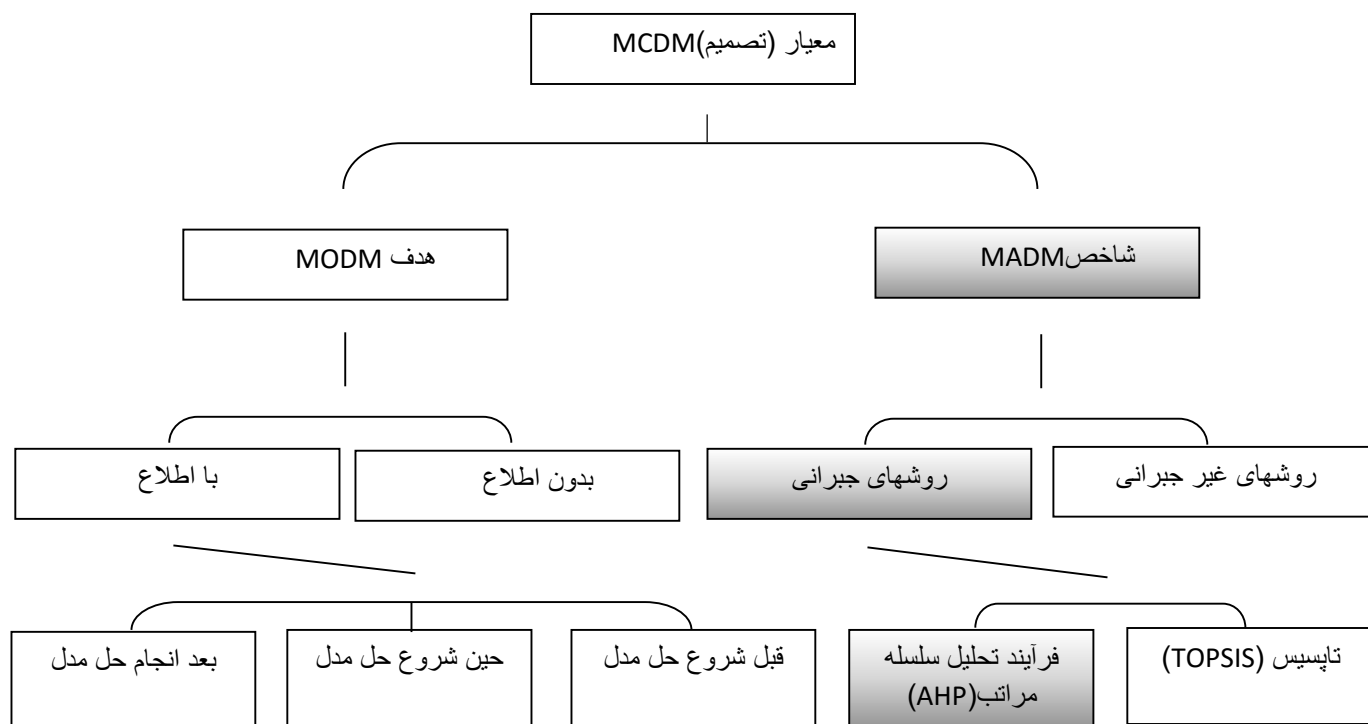
$$V = \frac{1}{Y} = \frac{170}{5}$$

$$q_2 = y_2 \times V = \frac{1}{170} \times \frac{170}{5} = \frac{1}{5}$$

$$q_1 = y_1 \times V = \frac{1}{170} \times \frac{170}{5} = \frac{1}{5}$$

$$q_3 = y_3 \times V = 0 \times \frac{170}{5} = 0$$

فصل دوم: تصمیم گیری با معیارهای چند گانه: (صفحه ۱۶۵ کتاب پژوهش عملیاتی پیشرفته - دکتر محمدرضا مهرگان)

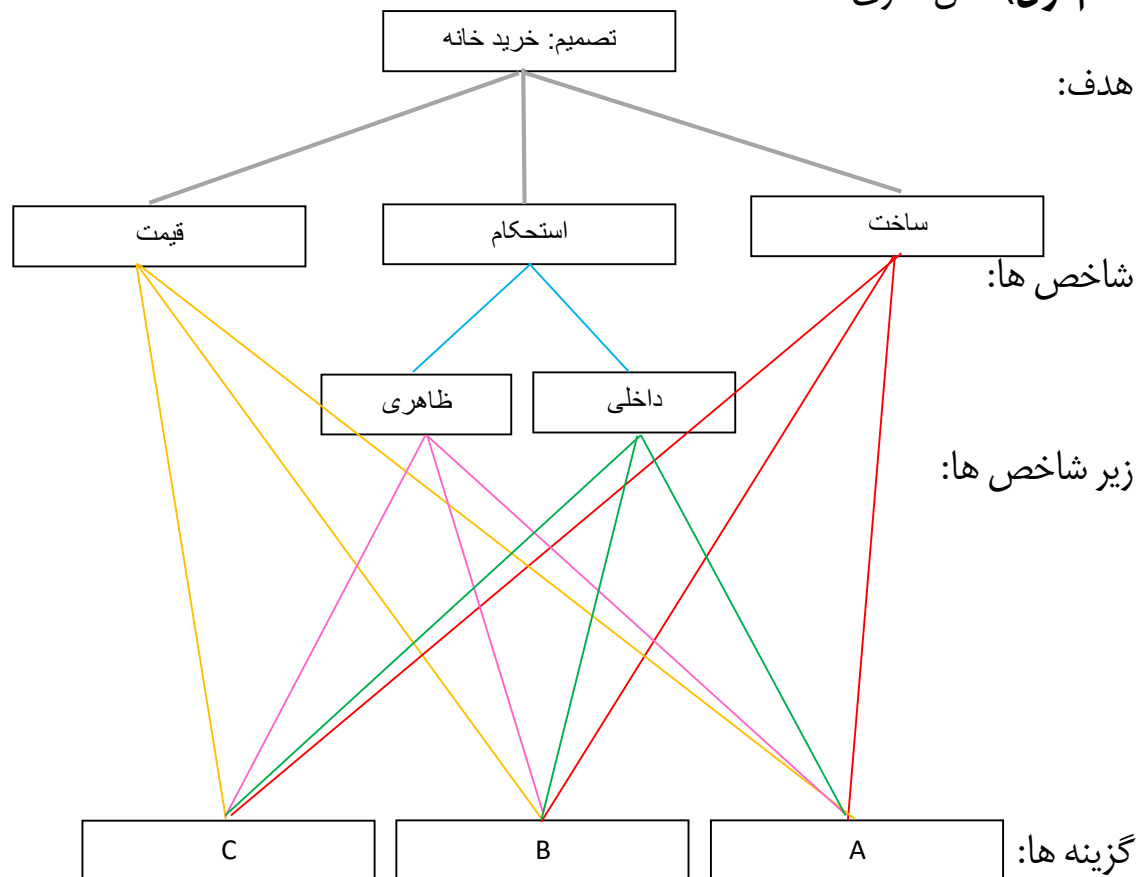


قسمت اول) فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (روش AHP) :

مراحل حل یک مسئله فرآیند تحلیل سلسله مراتبی شامل چهار گام عمده میباشد:

- ۱- مدل سازی
- ۲- جمع آوری و تشکیل ماتریس
- ۳- محاسبه وزن های نسبی
- ۴- محاسبه وزن های نهائی

گام اول) مدل سازی:



گام دوم) جمع آوری و تشکیل ماتریس:

قیمت	A	B	C
A	1	2	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{2}$	1	4
C	2	$\frac{1}{4}$	1

میدانیم که :

$$\frac{A}{C} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{نتیجه} \rightarrow \frac{C}{A} = 2 \rightarrow \frac{A}{B} = 2 \rightarrow \text{نتیجه} \rightarrow \frac{B}{A} = \frac{1}{2} \quad \frac{A}{A} = 1 \rightarrow \frac{B}{B} = 1 \rightarrow \frac{C}{C} = 1$$

گام سوم) محاسبه وزن های نسبی

- محاسبه جمع اعداد ماتریس

قیمت	A	B	C
A	1	2	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{2}$	1	4
C	2	$\frac{1}{4}$	1
جمع	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{11}{2}$

- تقسیم هر ستون بر جمع ستون و تهیه ماتریس مقایسات زوجی نرمال شده:

قیمت	A	B	C
A	$\frac{2}{7}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{1}{11}$
B	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{8}{11}$
C	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{11}$

- تعیین میانگین هر وزن:

قیمت	میانگین سطر
A	$\frac{\frac{2}{7} + \frac{8}{13} + \frac{1}{11}}{3} = 0.3306$
B	$\frac{\frac{1}{7} + \frac{4}{13} + \frac{8}{11}}{3} = 0.3926$
C	$\frac{\frac{4}{7} + \frac{1}{13} + \frac{2}{11}}{3} = 0.2767$

از نظر قیمت کالای B بالاترین میانگین وزنی قیمت را دارد و سپس به ترتیب کالای A و سپس B

گام چهارم) و آخرین گام محاسبه وزن های نهائی سایر شاخص ها مانند استحکام (داخلی و ظاهری یا بیرونی) و ساخت میباشد که مانند شاخص قیمت ابتدا محاسبات لازم را انجام و سپس این شاخص ها ترکیب میشوند، برای روشن شدن به مثال زیر توجه کنید.

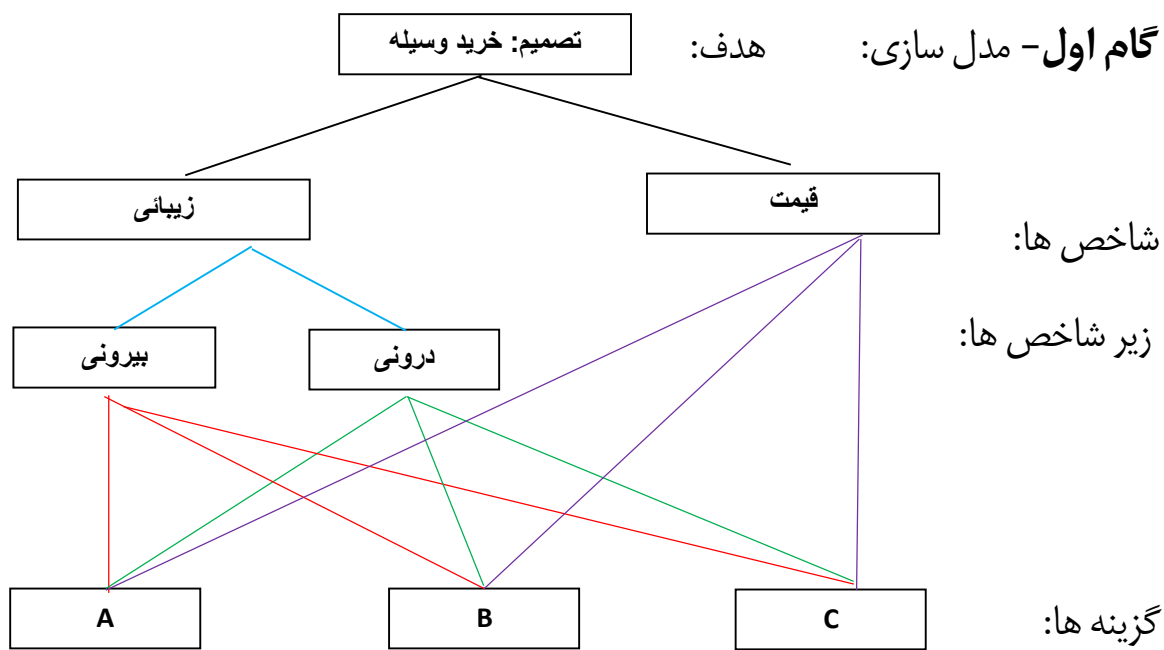
مثال: برای خرید وسیله ای دو شاخص اصلی قیمت و زیبایی را در نظر گرفته ایم، زیبایی به دو شاخص فرعی زیبایی درونی و زیبایی بیرونی تقسیم میشود، ماتریس های مقایسات خروجی به صورت زیر داده شده است.

قیمت	A	B	C
A	1		
B	$\frac{3}{2}$		
C	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

زیبائی بیرونی	A	B	C
A	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
B		1	3
C			1

زیبائی درونی	A	B	C
A			3
B			7
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	1

قیمت دو برابر زیبایی اهمیت دارد و اهمیت نسبی زیبایی درونی $\frac{1}{7}$ و زیبایی بیرونی $\frac{1}{3}$ است با روش AHP گزینه ها را رتبه بندی کنید.



گام دوم - جمع آوری و تشکیل و تکمیل ماتریس:

قیمت	A	B	C
A	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
B	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{4}$
C	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
جمع	$\frac{37}{10}$	$\frac{37}{15}$	$\frac{37}{12}$

زیبائی بیرونی	A	B	C
A	1	۶	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{6}$	1	3
C	2	$\frac{1}{3}$	1
جمع	$\frac{19}{6}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{9}{2}$

زیبائی درونی	A	B	C
A	1	$\frac{3}{7}$	3
B	$\frac{7}{3}$	1	7
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	1
جمع	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{7}$	۱۱

در صورتیکه دو عدد معکوس یک ماتریس را نداشته باشیم میتوانیم از نسبت سایر اعداد ماتریس استفاده

کرده و آنرا بدست آوریم:

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{6}{5} = \frac{37}{10}$$

$$\frac{A}{A} = 1 \rightarrow \frac{B}{B} = 1 \rightarrow \frac{C}{C} = 1 \quad \frac{A}{B} = \frac{A}{C} \times \frac{C}{B} = \frac{3}{1} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{B}{C} \times \frac{C}{A} = 7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{7} \rightarrow \frac{B}{A} = \frac{7}{3}$$

به مثال بالا توجه شود $\frac{A}{B}$ را نداشتیم ولی از نسبت $\frac{A}{C}$ ضرب در $\frac{C}{B}$ استفاده کردیم دقت شود صورت کسر اول که مجهول است به کسر دوم منتقل شد و مخرج کسر مجهول به مخرج کسر سوم، سپس مخرج کسر دوم و صورت کسر سوم را نماد مشترک که C میباشد قرار دادیم، آنگاه آن دو کسر را در یکدیگر ضرب نمودیم، در صورتیکه صورت و مخرج ها جابجا شود طبیعتاً پاسخی معکوس حاصل خواهد شد که ما را به پاسخ صحیح ماتریس نخواهد رسانید.

گام سوم - محاسبه وزن های نسبی (ماتریس نرمال شده): که از تقسیم ستون به جمع ستون بدست می

آید و سپس میانگین سطری آن که از جمع سطر بر تعداد ستون بدست می آید:

$$\frac{A}{A} = \frac{1}{\frac{37}{10}} = \frac{10}{37} \rightarrow \text{میانگین سطر } A \rightarrow \frac{\frac{10}{37} + \frac{10}{37} + \frac{10}{37}}{3} = \frac{10}{37} = 0.2703$$

میانگین سطری	C	B	A	قیمت
A	$\frac{10}{37}$	$\frac{10}{37}$	$\frac{10}{37}$	$\frac{10}{37} = 0.2703$
B	$\frac{15}{37}$	$\frac{15}{37}$	$\frac{15}{37}$	$\frac{15}{37} = 0.4054$
C	$\frac{12}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{12}{37} = 0.3243$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{37}{15}} = \frac{30}{111} = \frac{10}{37}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{74}{24}} = \frac{120}{444} = \frac{10}{37}$$

میانگین سطری	C	B	A	زیبائی بیرونی
A	$\frac{2342}{1881} \div 3 = 0.4150$	$\frac{1}{9}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{6}{19}$
B	$\frac{1073}{1254} \div 3 = 0.2852$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{1}{19}$
C	$\frac{3383}{3762} \div 3 = 0.2998$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{12}{19}$

میانگین سطری	C	B	A	زیبائی درونی
A	$\frac{9}{11} \div 3 = 0.2727$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$
B	$\frac{21}{11} \div 3 = 0.6364$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{11}$
C	$\frac{3}{11} \div 3 = 0.0909$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

برای امتحان درستی جداول نرمال شده جمع میانگین سطری ماتریس برای هر سه گزینه در هر مرحله باید یک شود:

مجموع سه گزینه A و B و C در شاخص قیمت برابر یک شده است.

$$0.2703 + 0.4054 + 0.3243 = 1 \quad \text{جمع میانگین سطری قیمت:}$$

مجموع سه گزینه A و B و C در زیر شاخص زیبایی درونی نیز برابر یک شده است.

$$0.2818 + 0.6576 + 0.0999 = 1 \quad \text{جمع میانگین سطری زیبایی درونی:}$$

مجموع سه گزینه A و B و C برای زیر شاخص زیبایی بیرونی نیز برابر یک شده است.

$$0.4150 + 0.3044 + 0.2998 = 1 \quad \text{جمع میانگین سطری زیبایی بیرونی:}$$

نتیجه اینکه انجام محاسبات تا به اینجا به درستی صورت گرفته است.

گام چهارم - تعیین وزن نهائی و ترکیب زیر شاخص ها:

در مثال فوق، شاخص زیبایی دارای دو زیر شاخص شامل زیبایی درونی و زیبایی بیرونی بود، و طبق صورت

مثال شاخص زیبایی درونی ۰/۷ و شاخص زیبایی بیرونی ۰/۳ دارای اهمیت نسبی بوده اند، لذا بایستی

ابتدا زیر شاخص ها را ترکیب نموده تا شاخص زیبایی حاصل گردد:

ماتریس نهائی زیبایی		اهمیت نسبی زیبایی درونی به بیرونی		زیبایی بیرونی	
زیبایی درونی					
A	0.2727	0.4150	$\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix}$	0.2371	$\begin{bmatrix} 0.2371 \\ 0.3906 \\ 0.2371 \end{bmatrix}$
B	0.6364	0.2852		0.3906	
C	0.0909	0.2998		0.2371	

$$(0.2727 \times 0.3) + (0.4150 \times 0.7) = 0.3723$$

$$(0.6364 \times 0.3) + (0.2852 \times 0.7) = 0.3906$$

$$(0.0909 \times 0.3) + (0.2998 \times 0.7) = 0.2371$$

حال که ماتریس نهایی شاخص زیبایی بدست آمد سایر شاخص ها را نیز ترکیب و با توجه به ماتریس اصلی قیمت و زیبایی که در صورت مثال ذکر شده است که زیبایی دو برابر قیمت اهمیت دارد ماتریس نهایی را بدست می آوریم:

ماتریس نرمال شده

ماتریس اولیه

زیبایی	قیمت	اهمیت
۲	۱	قیمت
۱	$\frac{1}{2}$	زیبایی

زیبایی	قیمت	اهمیت
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	قیمت
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	زیبایی

میانگین

ماتریس نهایی اهمیت:

$$\begin{bmatrix} \text{قیمت} & \frac{2}{3} \\ \text{زیبایی} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6666 \\ 0.3333 \end{bmatrix}$$

$$2 \div 3 = 0.6666$$

$$1 \div 3 = 0.3333$$

ماتریس نهایی خرید

نسبی

اهمیت

زیبایی

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.2703 & 0.3723 \\ 0.4054 & 0.3906 \\ 0.3243 & 0.2371 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6667 \\ 0.3333 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.3383 \\ 0.3955 \\ 0.2662 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ کالای نوع } (0.2703 \times 0.3333) + (0.3723 \times 0.6667) = 0.3383$$

$$B \text{ کالای نوع } (0.4054 \times 0.3333) + (0.3906 \times 0.6667) = 0.3955$$

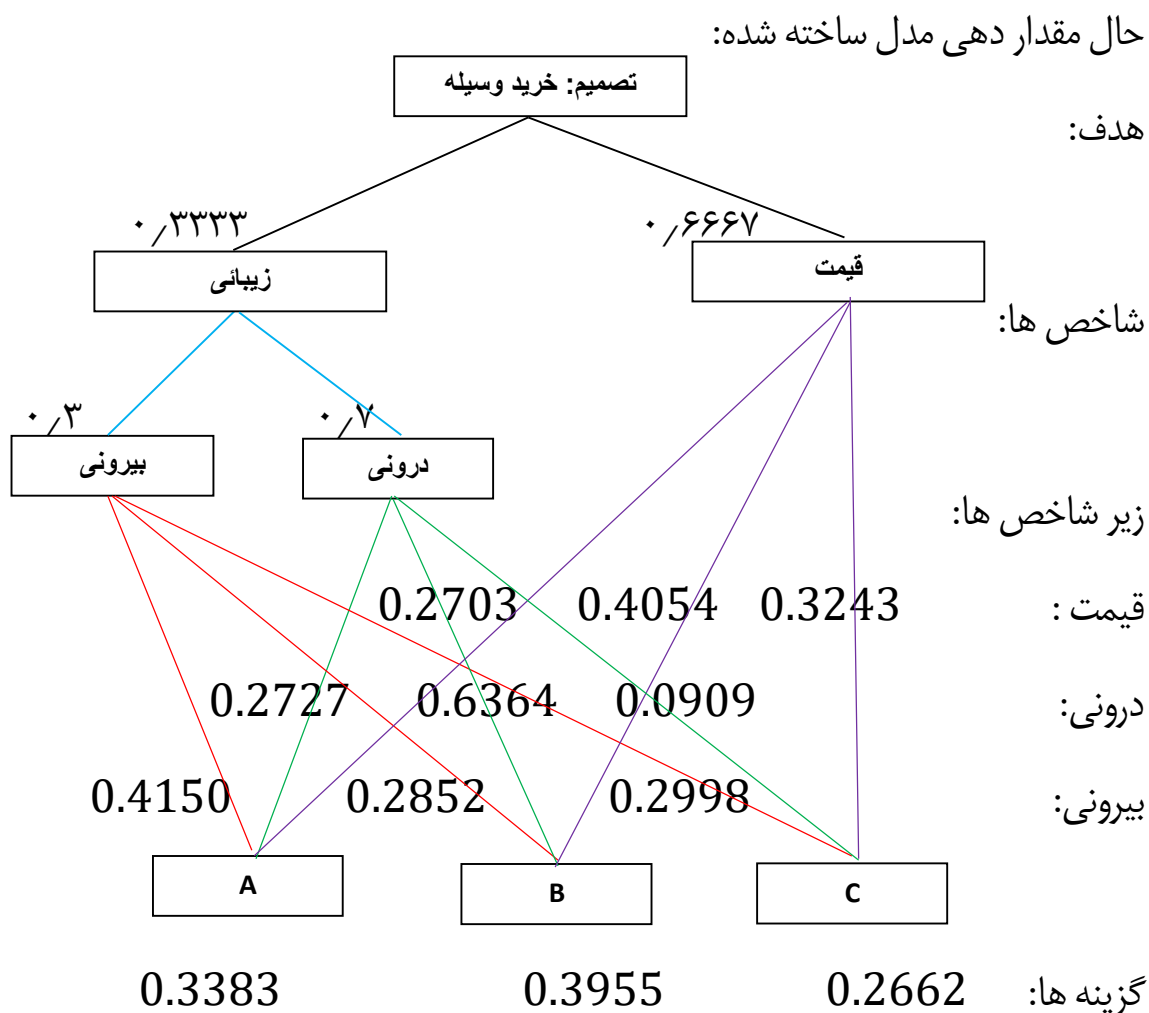
$$C \text{ کالای نوع } (0.3243 \times 0.3333) + (0.2371 \times 0.6667) = 0.2662$$

$$B > A > C$$

کالای نوع B از شاخص بزرگتری برخوردار است.

همچنین برای تشخیص درستی محاسبات مجموع ماتریس نهائی خرید نیز باید برابر یک باشد، یعنی:

$$0.3383 + 0.3955 + 0.2662 = 1$$



ناسازگاری در قضاوت (صفحه ۱۸۷ کتاب پژوهش عملیاتی دکتر مهرگان):

- نرخ ناسازگاری که آن را با CR نشان میدهند سازگاری قضاوت را مشخص میکند.
- اگر نرخ ناسازگاری کمتر از ۰/۱۰ باشد سازگاری مقایسات پذیرفتنی است.
- ادامه مثال قبل را برای ناسازگاری در قضاوت برای قیمت در نظر می گیریم:
- برای محاسبه نرخ ناسازگاری گامهای زیر را بر میداریم:

قیمت	A	B	C
A	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
B	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{4}$
C	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

گام اول. ماتریس مقایسات زوجی را در بردار ستونی وزن های نسبی ضرب کنید، بردار جدیدی که بدست می آید بردار مجموع وزنی (WSV) نامیده میشود (ادامه مثال قبل:)

$$WSV = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{4} \\ \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2703 \\ 0.4054 \\ 0.3243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8108 \\ 1.2162 \\ 0.9730 \end{bmatrix}$$

$$(1 \times 0.2703) + \left(\frac{2}{3} \times 0.4054\right) + \left(\frac{5}{6} \times 0.3243\right) = 0.8108$$

$$\left(\frac{3}{2} \times 0.2703\right) + (1 \times 0.4054) + \left(\frac{5}{4} \times 0.3243\right) = 1.2162$$

$$\left(\frac{6}{5} \times 0.2703\right) + \left(\frac{4}{5} \times 0.4054\right) + (1 \times 0.3243) = 0.9730$$

گام دوم. بردار سازگاری (CV) از تقسیم بردار مجموع وزنی بر بردار اولویت نسبی بدست می آید:

$$CV = \begin{bmatrix} 0.8108 \\ 1.2161 \\ 0.9730 \end{bmatrix} \div \begin{bmatrix} 0.2703 \\ 0.4054 \\ 0.3243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9996 \\ 3.0001 \\ 3.0002 \end{bmatrix}$$

گام سوم. میانگین عناصر بردار سازگاری λ_{Max} (لاندا ماکس) را بدست می آوریم:

$$\lambda_{Max} = \frac{2.9996 + 3.0001 + 3.0002}{3} = \frac{8.9999}{3} = 2.9999$$

گام چهارم. شاخص سازگاری (CI) را محاسبه میکنیم:

$$CI = \frac{\lambda_{Max} - n}{n - 1} \quad CI = \frac{2.9999 - 3}{3 - 1} = 0.00005$$

گام پنجم. نرخ ناسازگاری (CR) از تقسیم شاخص سازگاری (CI) بر شاخص تصادفی (RI) بدست می آید:

شاخص تصادفی (RI) از جدول زیر استخراج میگردد:

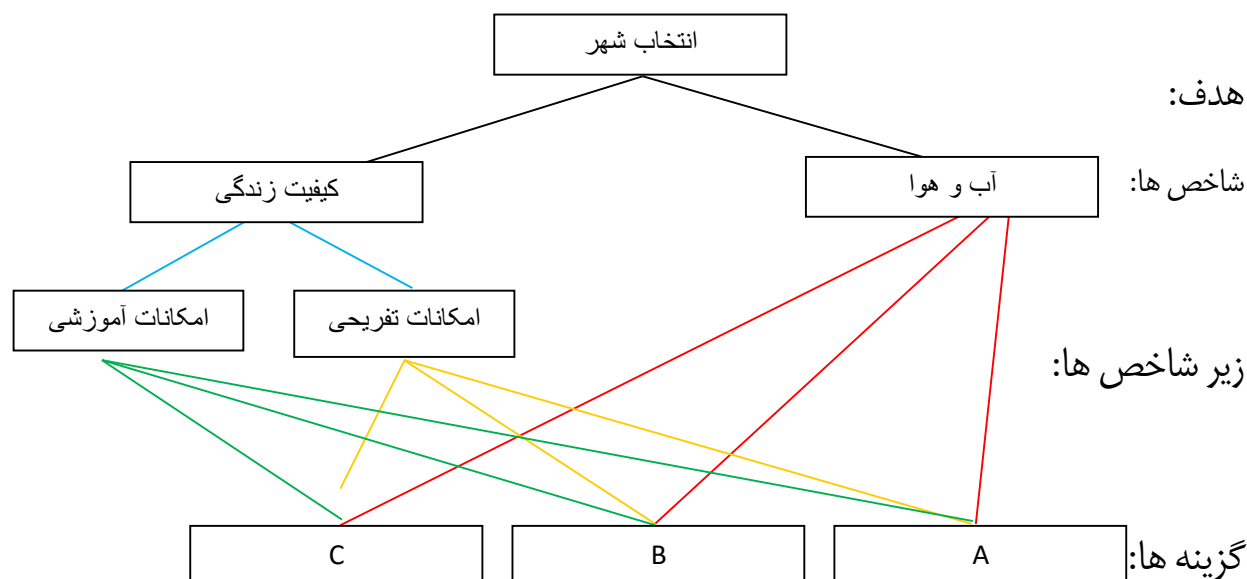
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.51

$$CR \frac{CI}{RI} = \frac{0.00005}{0} = 0$$

نرخ ناسازگاری ۰/۱ یا کمتر از آن سازگاری در مقایسات را بیان میکند، لذا نرخ ناسازگاری فوق بیانگر سازگاری بد در مقایسات است.

نمونه سوال AHP:

با توجه به کیفیت و آب و هوا از بین شهرهای A و B و C شهری را می‌خواهیم انتخاب کنیم، کیفیت خود به دو زیر شاخص امکانات تفریحی و اقدامات آموزشی تقسیم می‌گردد:



اگر وزن کیفیت $0/7$ و آب و هوا $0/3$ باشد، همچنین وزن امکانات آموزشی $0/8$ و تفریحی $0/2$ ، گزینه ها را رتبه بندی کنید.
سازگاری ماتریس آب و هوا را بررسی کنید.

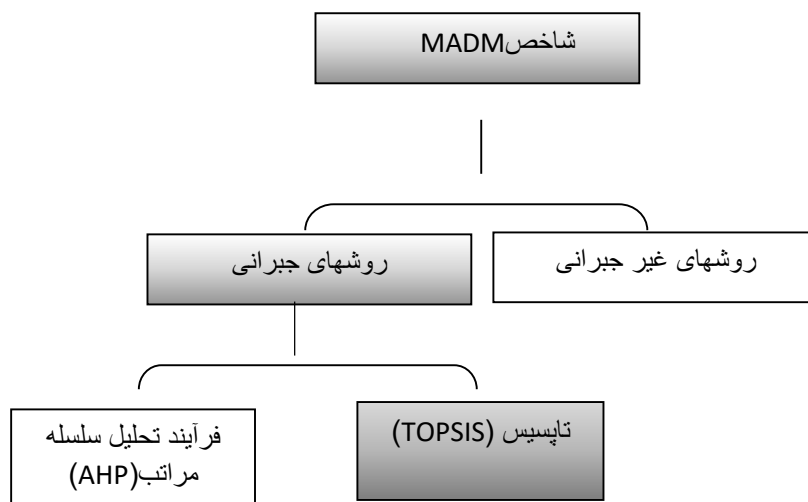
آب و هوا	A	B	C
A	۱	۴	۵
B		۱	۱
C			۱

کیفیت آموزشی	A	B	C
A	۱		
B	۳	۱	
C			۱

کیفیت تفریحی	A	B	C
A	۱		
B	۲	۱	
C			۱

ادامه فصل دوم: قسمت دوم) تاپسیس (TOPSIS):

(صفحه ۱۸۷ کتاب پژوهش عملیاتی پیشرفته - دکتر محمدرضا مهرگان)



تاپسیس همان تکنیک رجحان ترتیبی با تشابه در جواب ایده آل است. که با مفاهیم ماتریس تصمیم، شاخص درآمدی و هزینه ای، شاخص کمی و کیفی و جواب ایده آل مثبت و منفی سروکار دارد.

- ماتریس تصمیم جدولی است که به تعداد گزینه ها «سطر» و به تعداد شاخص ها «ستون» دارد
- مقدار گزینه را با i و مقدار شاخص را با j و در داخل ماتریس آن را با X_{ij} نمایش میدهند.

لذا ماتریس تصمیم را به شکل زیر خواهد بود:

ماتریس تصمیم		شاخص ها			
		x_1	x_1	$\dots$	x_1
گزینه ها	A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}
		$\left(\sum_{i=1}^m a_{i1}^2\right)$	$\left(\sum_{i=1}^m a_{i2}^2\right)$	$\dots$	$\left(\sum_{i=1}^m a_{in}^2\right)$

- شاخص ها یا از نوع کمی و یا از نوع کیفی میباشند، شاخص های کمی را با اعداد نشان میدهند و شاخص های کیفی را با مقیاس های غیر عددی که باید آنها را در ماتریس مقدار عددی داده و تبدیل به شاخص کمی نماییم.
- جنبه دیگر شاخص های از حیث درآمد و هزینه ای است که شاخص های درآمدی افزایش آن موجب رضایت تصمیم گیرنده شده و دارای مطلوبیت بیشتری است، لیکن شاخص های هزینه ای برای تصمیم گیرنده ایجاد مطلوبیت نمیکند، لذا در برخی متون بجای شاخص درآمد شاخص های مثبت و به جای شاخص های هزینه ای از شاخص های منفی استفاده نموده اند.
- جواب ایده آل مثبت گزینه ای است که مقدار برتر تمامی شاخص ها را در خود دارد.
- جواب ایده آل منفی گزینه ای است که بدترین های هر شاخص را در خود دارد.
- گزینه برتر گزینه ای است که دارای کمترین فاصله با ایده آل مثبت و بیشترین فاصله با ایده آل منفی داشته باشد.

- مدل تهیه ماتریس نرمال سازی:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} = \frac{a_n}{\sqrt{\sum a_{11}^2}} & r_{12} \cdots r_{12} \\ r_{21} = \frac{a_n}{\sqrt{\sum a_{21}^2}} & r_{12} \cdots r_{12} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ r_m = \frac{a_n}{\sqrt{\sum a_{n1}^2}} & r_{n2} \cdots r_{12} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} \times w_1 \cdots v_{in} \times w_n \\ v_{21} \times w_1 \cdots v_{zn} \times w_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_{ni} \times w_1 \cdots v_{mn} \times w_n \end{pmatrix}$$

ابتدا اعداد هر ستون را جداگانه به توان ۲ رسانیده و جمع نموده و در آخر جذر می گیریم. حاصل را بر حاصل جمع ستون تقسیم میکنیم و حاصل را در بردار شاخص های درآمدی علامت مثبت و شاخص های منفی را علامت منفی میزنیم.

$J = \{ \text{مجموعه اندیس شاخص های درآمدی} \}$

$J' = \{ \text{مجموعه اندیس شاخص های هزینه ای} \}$

$$A^+ = \{ \underbrace{Max\{v_{ji}\}}_{\text{درآمدی}} \mid j \in J, \underbrace{Min\{v_{ji}\}}_{\text{هزینه ای}} \mid j \in J' \} = v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+$$

$$A^- = \{ \underbrace{Min\{v_{ji}\}}_{\text{درآمدی}} \mid j \in J, \underbrace{Max\{v_{ji}\}}_{\text{هزینه ای}} \mid j \in J' \} = v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-$$

فاصله گزینه i ام از ایده های مثبت و منفی:

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2}$$

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}$$

$$c_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}$$

C_i : فاصله از ایده آل منفی است که هرچه بیشتر باشد بهتر است.

تمرین صفحه ۱۸۹ کتاب پژوهش عملیاتی دکتر مهرگان به دقت مطالعه و حل شود.

گامهای تصمیم گیری با تاپسیس:

گام اول) تهیه و تکمیل ماتریس کمی

گام دوم) نرمال سازی ماتریس تصمیم

گام سوم) موزون سازی ماتریس

گام چهارم) تعیین جواب های ایده آل مثبت و منفی

گام پنجم) تعیین فاصله هر گزینه با جواب های ایده آل مثبت و منفی

گام ششم) مشخص نمودن رتبه گزینه ها و انتخاب گزینه برتر

حاصل جمع برداری در صفحه ۱۹۳ ملاحظه شود برابر یک میباشد وزن شاخص ها و فاصله گزینه ها در

کتاب با s نشان داده شده است.

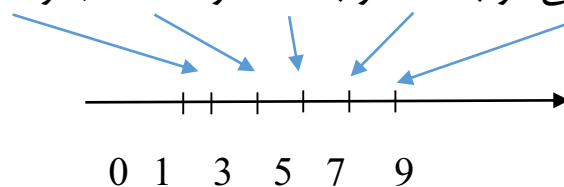
مثال برای تاپسیس (TOPSIS):

فردی میخواهد خانه ای بخرد، برای خرید خانه سه معیار قیمت مساحت و کیفیت ساخت را در نظر گرفته است با توجه به بررسی انجام شده سه خانه A_1 و A_2 و A_3 شرایط اولیه را داشته اند و ماتریس تصمیم زیر بدست آمده است:

ماتریس تصمیم خرید خانه		شاخص ها		
		قیمت	مساحت	کیفیت
گزینه ها	A_1	100	90	خیلی خوب
	A_2	120	80	خوب
	A_3	115	100	متوسط

اگر اهمیت نسبی قیمت مساحت و کیفیت به ترتیب برابر (قیمت) 0.3 ، (مساحت) 0.4 ، (کیفیت) 0.3 باشد، و همچنین اعداد زیر متناظر توصیف های مربوط به کیفیت روی خط محور باشد

(9 = خیلی خوب، 7 = خوب، 5 = متوسط، 3 = بد و 1 = خیلی بد):



با استفاده از روش تاپسیس گزینه ها را رتبه بندی کنید.

حل) با توجه به گامهای تصمیم گیری با تاپسیس:

گام اول) تشکیل ماتریس تصمیم - تبدیل قسمت های کیفی به کمی:

کمی کردن ماتریس تصمیم		شاخص ها		
		قیمت	مساحت	کیفیت
گزینه ها	A_1	100	90	9
	A_2	120	80	7
	A_3	115	100	5
$\sqrt{\sum_{i=1}^m r_{ij}^2}$		$\sqrt{37625}$	$\sqrt{24500}$	$\sqrt{155}$
		193.97	156.52	12.45

$$A_1 = 100^2 + 120^2 + 115^2 = 37625 \rightarrow \sqrt{37625} = \text{قیمت: } 193.97$$

$$A_2 = 90^2 + 80^2 + 100^2 = 24500 \rightarrow \sqrt{24500} = \text{مساحت: } 156.52$$

$$A_3 = 9^2 + 7^2 + 5^2 = 155 \rightarrow \sqrt{155} = 12.45 \text{ کیفیت:}$$

گام دوم) نرمال سازی ماتریس تصمیم

نرمال سازی ماتریس تصمیم		شاخص ها		
		قیمت	مساحت	کیفیت
گزینه ها	A_1	$\frac{100}{193.97} = 0.516$	$\frac{90}{156.52} = 0.5750$	$\frac{9}{12.45} = 0.7229$
	A_2	$\frac{120}{193.97} = 0.6186$	$\frac{80}{156.52} = 0.5111$	$\frac{7}{12.45} = 0.5623$
	A_3	$\frac{115}{193.97} = 0.5959$	$\frac{100}{156.52} = 0.6389$	$\frac{5}{12.45} = 0.4016$

گام سوم) تشکیل ماتریس نرمال شده موزون (اهمیت نسبی قیمت مساحت و کیفیت به ترتیب برابر (قیمت) 0.3 ، (مساحت) 0.4 ، (کیفیت) 0.3 باشد):

ماتریس تصمیم نرمال شده موزون		شاخص ها		
		قیمت	مساحت	کیفیت
گزینه ها	A_1	$0.516 * 0.3$ $= 0.1548$	$0.5750 * 0.4$ $= 0.23$	$0.7229 * 0.3$ $= 0.2169$
	A_2	$0.6186 * 0.3$ $= 0.1856$	$0.5111 * 0.4$ $= 0.2044$	$0.5623 * 0.3$ $= 0.1687$
	A_3	$0.5929 * 0.3$ $= 1778$	$0.6389 * 0.4$ $= 0.2556$	$0.4016 * 0.3$ $= 1205$

گام چهارم) تعیین جواب های ایده آل مثبت و منفی

تعیین جواب ایده آل ماتریس تصمیم		شاخص ها		
		قیمت	مساحت	کیفیت
گزینه ها	A_1	0.1548	0.23	0.2169
	A_2	0.1856	0.2044	0.1687
	A_3	0.1778	0.2556	0.1205
ایده آل مثبت	A^+	هزینه ای (کمترین)	درآمدی (بیشترین)	درآمدی (بیشترین)
		0.1548	0.2556	0.2169
ایده آل منفی	A^-	هزینه ای (بیشترین)	درآمدی (کمترین)	درآمدی (کمترین)
		0.1856	0.2044	0.1205

گام پنجم) تعیین فاصله هر گزینه با جواب های ایده آل مثبت و منفی
فاصله گزینه اول (A_1) تا ایده آل مثبت (A^+):

$$s_1^+ = \sqrt{(0.1548 - 0.1548)^2 + (0.23 - 0.2556)^2 + (0.2169 - 0.2169)^2} = 0.0244$$

فاصله گزینه اول (A_1) تا ایده آل منفی (A^-):

$$s_1^- = \sqrt{(0.1548 - 0.1856)^2 + (0.23 - 0.2044)^2 + (0.2169 - 0.1205)^2} = 0.1034$$

فاصله گزینه دوم (A_2) تا ایده آل مثبت (A^+):

$$s_2^+ = \sqrt{(0.1856 - 0.1548)^2 + (0.2044 - 0.2556)^2 + (0.1687 - 0.2169)^2} = 0.0761$$

فاصله گزینه دوم (A_2) تا ایده آل منفی (A^-):

$$s_2^- = \sqrt{(0.1856 - 0.1856)^2 + (0.2044 - 0.2044)^2 + (0.1687 - 0.1205)^2} = 0.0479$$

فاصله گزینه دوم (A_3) تا ایده آل مثبت (A^+):

$$s_3^+ = \sqrt{(0.1778 - 0.1548)^2 + (0.2556 - 0.2556)^2 + (0.1205 - 0.2169)^2} = 0.0509$$

فاصله گزینه دوم (A_3) تا ایده آل منفی (A^-):

$$s_3^- = \sqrt{(0.1778 - 0.1856)^2 + (0.2556 - 0.2044)^2 + (0.1205 - 0.1205)^2} = 0.0959$$

نکته) برای امتحان فرمول برای همه موارد از فاصله گزینه تا گزینه ایده آل لازم نیست و فقط گزینه اول نوشته شود کافی است، برای بقیه جواب را بنویسید.

گام ششم) رتبه بندی و انتخاب گزینه برتر

اگر از فاصله ایده آل مثبت استفاده کنیم، نهایتاً گزینه ای انتخاب میشود که کمترین فاصله را با ایده آل مثبت دارد:

$$c_1 = \frac{s_1^-}{s_1^- + s_1^+} = 0.8090$$

$$c_2 = \frac{s_2^-}{s_2^- + s_2^+} = 0.3862$$

$$c_3 = \frac{s_3^-}{s_3^- + s_3^+} = 0.3468$$

$$A_1 > A_2 > A_3$$

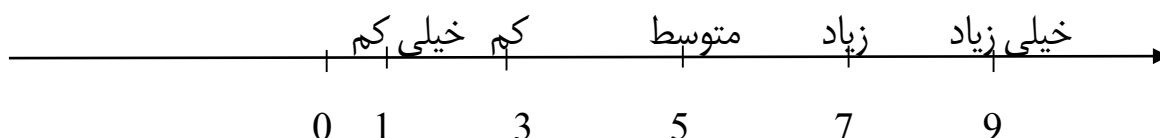
گزینه $A_1 = 0.8090$ بزرگتر از گزینه $A_2 = 0.3862$ و بزرگتر از گزینه $A_3 = 0.3468$ است.

تمرین: فرض کنید شرکتی برای اجرای یک پروژه سد سازی بتواند از پرسنل اجرائی (A_1) و یا پیمانکار داخلی (A_2) و یا پیمانکار خارجی (A_3) استفاده نماید، برای انتخاب بهترین افراد پنج شاخص زیر در نظر گرفته شده است:

۱- هزینه، ۲- استحکام بنا، ۳- وجهه ملی، ۴- ظرفیت، ۵- ثبات کار افراد

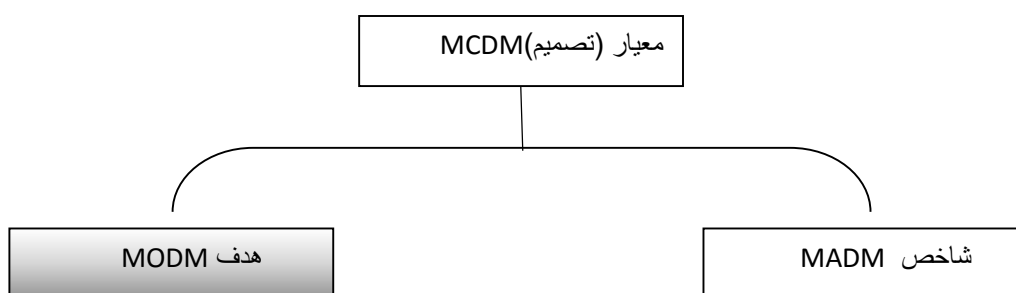
چنانچه بردار w به صورت زیر وزن داده شده به هر معیار را مشخص کند، با استفاده از روش تاپسیس بهترین گزینه را تعیین نمایید.

$$w = [0.179, 0.062, 0.211, 0.017, 0.551]$$



فصل سوم: تصمیم گیری چند هدفه (MODM):

(صفحه ۱۹۳ الی ۱۹۸ کتاب پژوهش عملیاتی پیشرفته - دکتر محمدرضا مهرگان)



در این فصل به مسائلی خواهیم پرداخت که در آن تصمیم گیری بر اساس چندین هدف مختلف صورت خواهد گرفت، به عنوان مثال برای برنامه ریزی خط تولید یک کارخانه اهدافی مثل ماکزیمم کردن سود، مینیمم کردن تعداد ضایعات، ماکزیمم کردن رضایت مشتریان، مینیمم کردن زمان عرضه محصولات به بازار و غیره بایستی در نظر گرفته شود.

در چنین مسائلی که دارای اهداف متضاد هستند یافتن جواب بهینه یعنی جوابی که بتواند همزمان تمامی اهداف را به بهترین مقدارشان برساند امکان پذیر نیست.

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

فرم کلی مسئله K هدفه:

$$\text{Max} \left(\text{یا Min} \right) \quad Z_1 = f_1(x_j)$$

$$\text{Max} \left(\text{یا Min} \right) \quad Z_2 = f_2(x_j)$$

$$\text{Max} \left(\text{یا Min} \right) \quad Z_3 = f_3(x_j)$$

st.

بطوریکه محدودیت های مسئله :

$$g_i(x_j) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

و در حالت خاص یک مسئله سه هدفه به صورت :

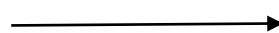
$$\text{Max } Z_1 = x_1 - 3x_2$$

$$\text{Min } Z_2 = 4x_1 - 2x_2$$

$$\text{Max } Z_3 = x_2$$

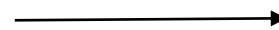
s.t

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \rightarrow x_1 + 2x_2 = 10$$



x_1	x_2
0	5
10	0

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \rightarrow 2x_1 + x_2 = 8$$



x_1	x_2
0	8
4	0

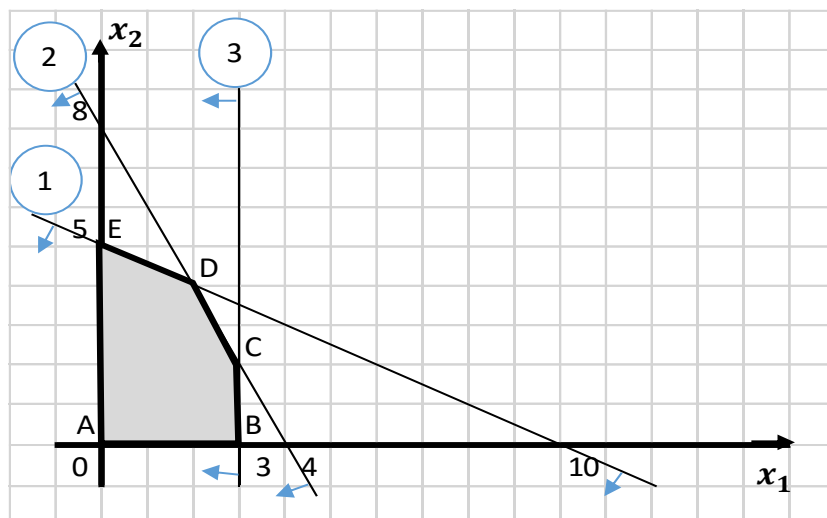
$$x_1 \leq 3 \rightarrow x_1 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

به سمت مبدا +

به سمت مخالف مبدا +

نقطه یابی محدودیت ها روی نمودار:



نقاط گوشه	Max	Min	Max	خط
	$Z_1 = x_1 - 3x_2$	$Z_2 = x_1 - 2x_2$	$Z_3 = x_2$	
A: (0,0)	0	0	0	
B: (3,0)	3	3	0	3
C: (3,2)	-3	-1	2	
D: (2,4)	-10	-5	4	
E: (0,5)	-15	-10	5	2 و 1

مختصات نقاط A و B و E که مشخص می باشد، حال برای بدست آوردن مختصات نقاط C و D تقاطع خطوطی که منجر به نقطه بدست آمده شده دو معادله هر خط را بدست آورده تا مختصات این نقاط مشخص شود.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 3 \\
 2x_1 + x_2 &= 8 \quad \rightarrow \quad 2(3) + x_2 = 8 \quad \rightarrow \quad x_2 = 2 \\
 x_1 + 2x_2 &= 10 \quad \rightarrow \quad -2x_1 - 4x_2 = -20 \\
 2x_1 + x_2 &= 8 \quad \rightarrow \quad -x_2 = -12 \\
 -3x_2 &= -12 \quad \rightarrow \quad x_2 = 4 \\
 2x_1 + 4 &= 2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2
 \end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه میشود نقطه ای که بتواند هر سه تابع هدف را همزمان به بهترین مقدار شان برساند موجود نیست بنابراین این مسئله جواب بهینه یا ایده آل ندارد در چنین مواردی بحث جواب های نا مغلوب پیش می آید.

منظور از جواب نا مغلوب جوابی است که نتوان بدون برتر کردن مقدار تابع هدف های مختلف یکی از مقادیر تابع هدف ها را در آن نقطه بهبود داد. به عبارت دیگر نقطه نا مغلوب نقطه ای است که لااقل به ازای یک تابع هدف از سایر نقاط بهتر باشد.

گامهای حل مسائل تصمیم گیری با اهداف چند گانه:

گام ۱- مشخص نمودن Max و Min های تابع هدف ها

گام ۲- حل معادلات محدودیت های و مشخص نمودن مقدار x_1 و x_2

گام ۳- ترسیم نمودار مخلوط محدودیت و شماره گذاری آنها

گام ۴- جهت یابی خطوط با علائم $\geq$ و $\leq$ سمت راست معادله محدودیت

گام ۵- مشخص نمودن نقاط مشترک بین همه محدودیت ها و علامت گذاری

گام ۶- بدست آوردن نقاط گوشه با توجه به تقاطع خطوط محدودیت و رسم ماتریس مختصات آن

گام ۷- مقدار دهی تابع هدف ها در ماتریس مختصات گوشه

گام ۸- بهینه یابی نقاط Max و Min در ماتریس مختصات گوشه

گام ۹- اعلام وجود یا عدم وجود پاسخ ایده آل بر مبنای بهینه یابی انجام شده.

دنباله فصل سوم: تصمیم گیری چند هدفه (MODM):

مثال کلاس ساعت ۱۰-۸)

مسئله سه هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= [z_1, -z_2, z_3] \\ \text{s.t} \quad \text{تابع هدف ها} &\begin{cases} Z_1 = 400x_1 - 200x_2 \\ Z_2 = -x_1 - 2x_2 \\ Z_3 = x_1 \end{cases} \\ \text{محدودیت ها} &\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

الف) بررسی کنید آیا این مسئله نقطه ایده آل دارد یا خیر؟ نقاط نا مغلوب را نیز مشخص نمایید.

ب) با روش تبدیل تابع هدف به محدودیت و در نظر گرفتن اینکه حداکثر مقدار تابع هدف دوم برابر ۱۰- و حداقل مقدار تابع هدف سوم برابر ۱ باشد جواب را بیابید.

ج) با روش وزن دار کردن توابع هدف طوریکه هدف اول دو برابر هدف سوم و هدف دوم چهار برابر هدف اول اهمیت داشته باشد جواب را ارائه دهید.

د) با روش اولویت مطلق طوریکه اولویت اول با Z_3 و سپس Z_2 و در آخر با Z_1 باشد جواب را تعیین کنید.

ه) با روش معیار جامع مسئله را حل نمایید.

پاسخ قسمت الف) توضیح در پژوهش عملیاتی پیشرفته دکتر مهرگان صفحه ۱۹۳- **تصمیم گیری با اهداف چندگانه** ابتدا باید با توجه به محدودیت ها روی محور مختصات نقطه یابی نماییم، با فرض صفر یکی از متغیر ها عدد متغیر دیگر را مشخص نموده روی نمودار ترسیم میکنیم چون تابع هدف اول و سوم دارای علامت مثبت میباشد از نوع ماکزیمم و تابع هدف دوم چون علامت آن منفی میباشد از نوع مینیمم میباشد:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ماکزیمم} & \text{مینیمم} & \text{ماکزیمم} \\
 \swarrow & \downarrow & \swarrow \\
 \text{Max } Z = [Z_1, -Z_2, Z_3] \\
 -2x_1 + x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 0 \\
 \rightarrow x_1 = -1
 \end{array}$$

x_1	x_2
0	3
-3	0

x_1	x_2
0	2
-1	0

$$\begin{array}{l}
 -x_1 + x_2 \leq 3 \Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 0 \rightarrow \\
 x_1 = -3 \\
 x_1 \leq 3 \Rightarrow x_1 = 3 \rightarrow x_2 = 0
 \end{array}$$

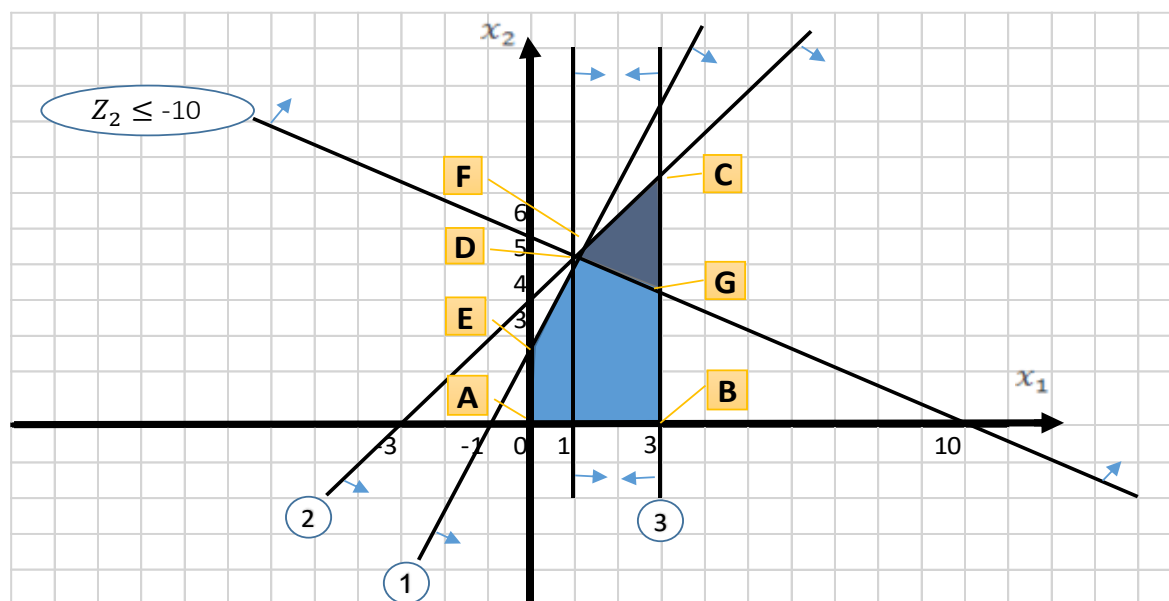
ملاحظه میشود در محدودیت شماره ۱، x_1 برابر ۱- و x_2 برابر ۲ حاصل شد، سپس این دو نقطه را به هم وصل میکنیم تا خط شماره ۱ بدست آید، وقتی سمت راست محدودیت اول علامت کوچکتر مساوی و نا منفی باشد جهت خط به سمت مبدا مختصات علامت گذاری میشود.

همچنین در محدودیت شماره ۲، x_1 برابر ۳- و x_2 برابر ۳ است، سپس دو نقطه را به هم وصل کرده تا خط شماره ۲ حاصل شود، باز هم علامت سمت راست کوچکتر مساوی و نا منفی میباشد لذا جهت خط به سمت مبدا مختصات علامت گذاری میگردد.

در محدودیت شماره ۳، نیاز به نقطه یابی نداریم زیرا x_1 برابر ۳ و x_2 برابر صفر است لذا به صورت یک خط عمود بر محور مختصات و موازی با محور x_2 ترسیم میگردد.

نکته) با توجه به خط انتهای محدودیت ها در صورت مسئله $x_1, x_2 \geq 0$ نقاط مورد نظر میبایستی در ربع اول محور مختصات قرار گیرد، معمولاً در امتحان نیز مسئله ای ذکر خواهد شد که بزرگتر مساوی صفر باشد.

حال قسمت مشترک بین محدودیت ها را مشخص می کنیم، و آن ناحیه ای است که همه محدودیت ها آن ناحیه را پذیرفته اند.



ناحیه پذیرفته شده ناحیه ای است که در ربع اول محور مختصات واقع شده و نقطه های گوشه آن شامل A و B و C و D و E می باشد. سپس مختصات نقاط و مقدار تابع هدف را در جدولی بدست می آوریم:

مختصات نقاط گوشه	ماکزیمم	مینیمم	ماکزیمم
	$Z_1 = 400x_1 - 200x_2$	$Z_2 = -x_1 - 2x_2$	$Z_3 = x_1$
A: (0,0)	$Z_{1A} = 0$	$Z_{2A} = 0$	$Z_{3A} = 0$
B: (3,0)	$Z_{1B} = 1200$	$Z_{2B} = -3$	$Z_{3B} = 3$
C: (3,6)	$Z_{1C} = 0$	$Z_{2C} = -15$	$Z_{3C} = 3$
D: (1,4)	$Z_{1D} = -400$	$Z_{2D} = -9$	$Z_{3D} = 1$
E: (0,2)	$Z_{1E} = -400$	$Z_{2E} = -4$	$Z_{3E} = 0$
جواب بهینه	$Z_{1B} = 1200$	$Z_{2C} = -15$	$Z_{3B} \text{ و } Z_{3C} = 3$

مختصات نقطه A بر روی محور مختصات x_1 برابر صفر و x_2 نیز برابر صفر میباشد، مختصات نقطه B از تقاطع خط ۳ بر محور مختصات بدست آمده که بر روی محور مختصات x_1 برابر ۳ و x_2 برابر صفر میباشد، و اما نقطه C که از تقاطع خط شماره ۲ و ۳ بدست آمده است:

$$\text{خط شماره 3} \Leftrightarrow x_1 \leq 3, \quad \text{خط شماره 2} \Leftrightarrow -x_1 + x_2 \leq 3$$

با توجه به خط شماره ۳ می دانیم x_1 برابر ۳ میباشد، لذا مقدار ۳ را در معادله خط شماره ۲ قرار داده تا x_2 را بدست آوریم:

$$-(3) + x_2 = 3 \rightarrow x_2 = 6$$

برای سایر نقاط گوشه نیز به همین شکل عمل می کنیم، نقطه D دارای مختصات واضح نیست، ولی می دانیم که از تقاطع خط شماره ۱ و ۲ بدست آمده است، پس معادله خطوط مزبور را می نویسیم:

$$\text{خط شماره 2} \Leftrightarrow -x_1 + x_2 \leq 3, \quad \text{خط شماره 1} \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 \leq 2$$

برای حل کردن دو معادله فوق اگر معادله خط شماره ۲ را در ۱- ضرب کنید تا علامت معادله دوم منفی شود با معادله اول که جمع کنیم x_2 از بین می رود:

$$\text{خط شماره 2} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = -3, \quad \text{خط شماره 1} \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 2$$

مقدار x_1 را بدست می آوریم:

$$-2x_1 + x_1 = -3 + 2 \rightarrow -x_1 = -1 \rightarrow x_1 = 1$$

حال در یکی از معادلات مقدار x_1 را وارد می کنیم:

$$-2x_1 + x_2 = 2 \rightarrow -2(1) + x_2 = 2 \rightarrow x_2 = 4$$

پس نقطه D به مختصات ۱ و ۴ میباشد. حال نقطه E را بدست می آوریم، مختصات نقطه E برابر ۲ و صفر میباشد. سپس مختصات نقاط بدست آمده را داخل تابع هدف های بالای جدول می گذاریم تا مقدار هریک از توابع هدف بدست آید. در مختصات نقطه گوشه A همه مقادیر تابع هدف ها برابر صفر میباشد، لیکن در نقطه B با توجه به مقادیر ۳ و صفر تابع هدف Z_1 چنین بدست می آید:

$$Z_1 = 400x_1 - 200x_2 \rightarrow Z_{1B} = 400(3) - 200(0) \rightarrow Z_{1B} = 1200$$

و تابع هدف Z_2 نیز:

$$Z_2 = -x_1 - 2x_2 \rightarrow Z_{2B} = -(3) - 2(0) \rightarrow Z_{2B} = -3$$

و تابع هدف Z_3 :

$$Z_3 = x_1 \rightarrow Z_{3B} = 3$$

سایر نقاط گوشه را نیز بدین ترتیب مقدار دهی می کنیم.

جواب بهینه هر ستون را با توجه به ماکزیمم و مینیمم هر ستون بدست می آوریم در ستون Z_1 چون ماکزیمم بوده است پاسخ بهینه بیشترین مقدار یعنی $Z_{1B} = 1200$ میباشد و در ستون Z_2 چون مینیمم بوده بهترین پاسخ کمترین مقدار جواب بهینه بوده است یعنی $Z_{2C} = -15$ و در ستون آخر Z_3 چون ماکزیمم بوده است بهترین جواب یا جواب بهینه بیشترین مقدار یعنی هم گزینه $Z_{3B} = 3$ و هم گزینه $Z_{3C} = 3$ میباشد.

چون یک نقطه مشترک نقطه بهینه هر سه پاسخ نمیباشد این مسئله نقطه ایده آل ندارد.

حال نقاط مغلوب و نا مغلوب را بررسی می کنیم:

زمانی نقطه ای مغلوب است که در همه تابع هدف ها بهتر از نقطه دیگر باشد، تاکید اینکه بهتر نه بیشتر، زیرا در ماکزیمم بیشترین بهترین است و در مینیمم کمترین بهترین است. لذا نقطه B بر نقطه A غلبه میکند زیرا تمام تابع هدفهای B بهتر از تابع هدفهای A میباشد. نقطه D بر E غلبه میکند و نقطه C بر D غلبه خواهد کرد.

نقاط نا مغلوب شامل C و B میباشد. $\{B, C\}$ = نقاط نامغلوب

زمانیکه مسئله جواب ایده آل ندارد باید از روشهایی استفاده کنیم که جواب برای مسئله ارائه دهیم، مثلاً تصمیم گیرنده در این مسئله بین جواب B و C معلق است و باید یکی را انتخاب کند. بنابراین روشهای مختلفی را دانشمندان ارائه داده اند.

پاسخ قسمت ب) (توضیح در همان منبع صفحه ۱۹۸- تبدیل توابع هدف به محدودیت) تمام این

روشهای مثال پیش رو از نوع روشهای تک هدفه سازی است یعنی میخواهد مسئله ما را به یک مسئله تک هدفه تبدیل کنند بعد مسئله را حل نمایند. با توجه به اطلاعاتی که مسئله در اختیار میگذارد تابع هدف ها به محدودیت هایی تبدیل شده و فقط یک تابع هدف می ماند و آن هم تابع هدفی است که اطلاعاتی راجع به آن نداریم.

در اینجا راجع به تابع هدف دوم و سوم یک سری اطلاعات به ما داده شده است.

در این قسمت تذکر داده شده که حداکثر مقدار تابع هدف دوم برابر ۱۰- و حداقل مقدار تابع هدف سوم برابر یک باشد، لذا آنرا به شکل زیر مینویسیم و دو محدودیت قبلی را به انتهای تابع هدف اضافه کرده و :

$$Z_2 \leq 10$$

$$Z_3 \geq 1$$

$$\begin{array}{l} \text{Max } Z_1 = 400x_1 - 200x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ x_1 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

محدودیت های جدید

معادله Z_2 و Z_3 را داریم: $Z_2 = -x_1 - 2x_2$ و $Z_3 = x_1$ که در صورت مسئله آمده است، حال دو محدودیت جدید را به انتهای محدودیت های قبل اضافه میکنیم. در تابع هدف Z_2 به انتهای تابع هدف $-10 \leq$ را اضافه کرده و از سمت چپ آن $Z_2 =$ را بر می داریم تا به یک محدودیت تبدیل گردد، همچنین در تابع هدف $Z_3 =$ آنرا حذف و به انتهای آن $1 \geq$ را اضافه می نماییم.

به ماکزیمم و مینیمم تابع هدف ها دقت شود اگر در مثال فوق بجای Z_2 و Z_3 تابع هدفهای Z_1 و Z_3 را داده بود و می خواستیم تابع هدف Z_2 را بدست آوریم چون مینیمم میباشد ابتدا تابع هدف $\text{Min } Z_2$ را باید می نوشتیم، لذا باید با توجه به تابع هدف مسئله را حل کنیم.

نکته) نیازی نیست که برای محدودیت های جدید محور مختصات جداگانه ای کشید، روی همان محور مختصات قبلی (قسمت الف) نقاط مختصات جدید را اضافه می کنیم.

حال چون $-x_1 - 2x_2 \leq -10$ سمت راست محدودیت منفی میباشد و محدودیت هایی که سمت راست آنها منفی است به جهت جلوگیری از اشتباه بهتر است آن را از حالت منفی خارج نمود. لذا آنرا در یک عدد منفی ضرب می کنیم. علامت محدودیت نیز برعکس خواهد شد و جهت محدودیت های نیز یکی چون منفی است و دیگری $\geq$ میباشد، خلاف محور مختصات خواهد بود، لذا بدست خواهد آمد:

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

و با توجه به معادله فوق نقطه یابی می کنیم؛ اگر به مقدار x_1 صفر بدهیم مقدار x_2 برابر 5 خواهد بود اگر به x_2 صفر بدهیم مقدار x_1 برابر 10 خواهد بود.

مختصات خط $Z_2 \leq 10$	
x_1	x_2
0	5
10	0

F: خط 2 $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 3 \\ +x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ جمع $\rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{13}{3} \\ \rightarrow -x_1 + \frac{13}{3} = 3 \rightarrow x_1 = \frac{4}{3} \end{cases}$

G: خط 3 جمع $\begin{cases} x_1 = 3 \\ 3 + 2x_2 = 10 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{7}{2} \end{cases}$

مختصات نقاط گوشه جدید	ماکزیمم $Z_1 = 400x_1 - 200x_2$
$C: (3, 6)$	$Z_{1C} = 0$
$F: \left(\frac{4}{3}, \frac{13}{3}\right)$	$Z_{1F} = \frac{-1000}{3}$
$G: \left(3, \frac{7}{2}\right)$	$Z_{1G} = 500$

جواب قسمت ب نقطه G با توجه به ماکزیمم $Z_1 = 500$ میباشد.

چون Z_2 و Z_3 به محدودیت ها اضافه شده است، لذا فقط تابع هدف Z_1 را محاسبه کرده ایم، و هدف محدود کردن تابع هدف ها بود.

در روش تبدیل تابع هدف به محدودیت ابتدا با توجه به اطلاعات صورت سوال برخی تابع هدف ها را به محدودیت تبدیل می کنیم، و در انتهای محدودیت ها را می نویسیم به این ترتیب تنها یک تابع هدف باقی خواهد ماند، پس مسئله به حالت تک هدفه تبدیل میشود و تنها با در نظر گرفتن این هدف در ناحیه موجه جدید بهترین نقطه را انتخاب خواهیم کرد.

گامهای حل مسائل تبدیل توابع هدف به محدودیت:

گام نخست) تابع هدف های مورد نظر را به محدودیت تبدیل نموده، علامت Z را از ابتدای جمله تابع هدف برداشته و به انتهای جمله علامت $\geq$ یا $\leq$ اضافه میکنیم تا به محدودیت تبدیل شود.

گام دوم) ابتدا به Max و Min تابع هدف ها دقت نموده اگر از نوع Min باشد باید از حالت منفی خارج شده سپس نقطه یابی شود.

گام سوم) محدودیت های جدید را نقطه یابی نموده سپس آنها را روی محور مختصات قبلی اضافه می کنیم.

گام چهارم) با توجه به کاهش تعداد تابع هدف ها مختصات نقاط تقاطع را با توجه به هدف باقیمانده در ماتریس جدید درج می نماییم.

گام پنجم) بهترین نقطه تابع هدف را اعلام می کنیم.

پاسخ قسمت ج) (توضیح در همان منبع صفحه ۱۹۹ الی ۲۰۰- روش وزن دادن به اهداف) با

وزن دار کردن هدف ها بطوری که هدف اول دو برابر هدف سوم و هدف دوم چهار برابر هدف اول اهمیت داشته باشد.

گام نخست- ابتدا همه تابع هدف ها را به حالت ماکزیمم در می آوریم:

$$Max z_1 = 400x_1 - 200x_2$$

$$Max z_2 = x_1 + 2x_2$$

$$Max z_3 = x_1$$

گام دوم- آیا همه تابع هدف ها دارای مرتبه یکسان هستند، یا نه؟

برای هر تابع هدف یک عدد ضرب نموده سپس جمع می کنیم لذا سه تابع هدف پیدا کرده و در تابع هدف ضرب می کنیم سپس با هم جمع می شود. با توجه به توضیحات داده شده باید عدد مورد نظر انتخاب شود.

قبل از ضرب کردن باید ضرایب را نرمال نمود، چگونه؟ اعداد ضرایب را با هم جمع کرده و بر هریک تقسیم مینماییم.

$$Max z_1 = 400x_1 - 200x_2$$

$$400 + 200 = 600 \rightarrow Max z_1 = \frac{400}{600}x_1 - \frac{200}{600}x_2 \rightarrow Max z_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2$$

$$Max z_2 = x_1 + 2x_2 \rightarrow Max z_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$$

$$Max z_3 = x_1$$

گام سوم- پیدا کردن اهمیت وزن ها است، سه هدف را کنار هم می نویسیم و هدف اول دو برابر هدف سوم و هدف دوم چهار برابر هدف اول:

z_1	z_2	z_3	جمع
2	8	1	11

یعنی اگر به هدف سوم عدد ۱ را اختصاص دهیم به هدف اول باید دو برابر یعنی ۲ و به هدف دوم چهار برابر هدف اول یعنی ۸ اختصاص یابد.

حال همه اهداف را با هم جمع کرده و اعداد را به شکل تناسب زیر می نویسیم:

$$w_1 = \frac{2}{11}, \quad w_2 = \frac{8}{11}, \quad w_3 = \frac{1}{11}$$

وزن تابع هدف اول را می نویسیم، محدودیت ها تغییر نمی کند و فقط وزن ها را در تابع هدف ضرب می کنیم:

$$Max z = \frac{2}{11}\left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2\right) + \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2\right) + \frac{1}{11}(x_1) \rightarrow = \frac{5}{11}x_1 + \frac{14}{33}x_2$$

s. t

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مختصات نقاط گوشه	ماکزیمم $Z = \frac{5}{11}x_1 + \frac{14}{33}x_2$	جهت مقایسه برخی ردیف ها در عدد ۳ ضرب شد
$A: (0,0)$	$Z_{1A} = 0$	$Z_{1A} = 0$
$B: (3,0)$	$Z_{1B} = \frac{5}{11}$	$Z_{1B} = \frac{15}{33}$
$C: (3,6)$	$Z_{1C} = \frac{43}{11}$	$Z_{1C} = \frac{129}{33}$
$D: (1,4)$	$Z_{1D} = \frac{71}{33}$	$Z_{1D} = \frac{71}{33}$
$E: (0,2)$	$Z_{1D} = \frac{71}{33}$	$Z_{1D} = \frac{71}{33}$

جواب نهائی قسمت ج نقطه $Z_{1C} = \frac{129}{33}$ میباشد زیرا از سایر نقاط بیشتر است.

گام هایی که در حل مسئله وزن دادن به اهداف باید برداشت:

(۱) تبدیل همه تابع هدف ها را به Max

(۲) نرمال سازی ضرایب تابع هدف

(۳) وزن دار نمودن تابع هدف

(۴) ضرایب نرمال هر تابع هدف را در تابع هدف مربوط ضرب نموده مجموع آنها را در قالب یک تابع

هدف می نویسیم.

(۵) ماتریس مختصات گوشه را با توجه به تابع هدف بدست آمده مقدار گذاری می کنیم.

(۶) نقاط بدست آمده را مقایسه نموده پاسخ بهینه را اعلام می کنیم..

پاسخ قسمت د) (توضیح در همان منبع صفحه ۲۰۱- روش اولویت مطلق) با روش اولویت مطلق طوریکه اولویت اول با Z_3 و سپس Z_2 و در آخر با Z_1 باشد جواب را تعیین کنید. در این روش تصمیم گیرنده برای اهداف خود ترتیبی مشخص نموده است، ابتدا تابع هدفی که اولویت بیشتری دارد را در نظر می گیریم، و به سایر تابع هدف ها ترتیب اثر نمی دهیم. لذا فقط Z_3 را در نظر می گیریم و بعد همان محدودیت های قبلی را در ذیل آن درج می کنیم در این روش تابع هدف نسبی نیست و به تابع هدف ها بطور مطلق اهمیت داده و در نظر گرفته میشود، چون دنباله مسئله میباشد پس نقطه یابی مجدد ندارد بلکه همان ناحیه و نقاط میباشد زیرا محدودیت ها عوض نشده اند و بین نقاط مقدار Z_3 را هم داریم و لازم نیست وقت بگذاریم و نقاط را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} \text{Max } z_3 &= x_1 \\ \text{s.t } & \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

گفته شد جواب نقطه یابی ندارد بلکه همان ناحیه جواب قسمت الف میباشد، لذا نقاط B به مختصات $(3,0)$ و نقطه C به مختصات $(3,6)$ جواب های مسئله Z_3 میباشد. و باید این دو نقطه را به عنوان جواب های چند گانه معرفی کنیم:

مختصات نقاط گوشه	ماکزیمم $Z_3 = x_1$
$B: (3,0)$	$Z_{3B} = 3$
$C: (3,6)$	$Z_{3C} = 3$

جواب نقطه یابی ندارد و پاسخ همان ناحیه جواب الف میباشد در ستون Z_3 پاسخ اولویت ها را قبلاً بدست آورده ایم.

$$\begin{array}{l} B: (3,0) \\ C: (3,6) \end{array} \quad \boxed{Z_3^* = 3}$$

مثال برای این قسمت خرید یک خودرو در بازار است اگر تصمیم گیرنده قصد خرید اتومبیل در بازار را داشته باشد و برای او گزینه هایی مهم باشد مانند قیمت مناسب و کیفیت و غیره، فروشنده خودرو با توجه به بضاعت مالی شما میپرسد خودرو با چه قیمتی میخواهید، و با توجه به نرخ قیمت خودرو مثلاً ۴ خودرو به شما معرفی میکند، بعد به اولویت های بعدی توجه می کنید و مثلاً مصرف بنزین، شتاب و سرعت خودرو، بیمه خودرو و ... را در نظر میگیرید یعنی ابتدا قیمت خودرو برای شما مهم است و بعد سایر اولویت ها ولی وقتی استطاعت مالی شما در حدی است که فقط یک خودرو را میتوانید انتخاب کنید، مجبور هستید آن خودرو را بخرید، لذا اولویت های بعدی و مشخصه های دیگر به ذهن شما خطور نمیکند و امکان مقایسه ندارید که چند مورد را با یکدیگر مقایسه کنید. یعنی اگر چند گزینه معرفی شود بین گزینه ها آنها را اولویت بندی نموده و نسبت به اولویت انتخاب میکنید از نظر هدف های بعدی کدام به صرفه تر است. ولی وقتی با توجه به هدف اول که امکانات مالی است یک گزینه بیشتر معرفی نشده است دیگر این یک گزینه مقایسه کردن ندارد و باید همان یک گزینه را انتخاب نمود. بنابراین در این مسئله نیز ابتدا یک گزینه معرفی شده که یک اولویت دارد و بعد باید به هدف دوم مراجعه نمود می بینیم که دو نقطه معرفی شده که باید ببینیم با توجه به گزینه ها کدام یک بهتر است و آن را انتخاب کنیم، ولی اگر به طور مطلق یک هدف برای ما مهم بود باید توقف نمود و پاسخ داد که هدف اول بیش از یک گزینه ندارد، لذا تابع هدف اول Z_3 یک جواب بیشتر ندارد، سپس به تابع هدف دوم که Z_2 است رجوع می کنیم، چون مینیمم میباشد بهترین پاسخ برای این گزینه 15- میباشد، و به همین ترتیب تابع هدف بعدی.

در روش اولویت مطلق ابتدا بین نقاط ناحیه ای را انتخاب می کنیم که بهترین مقدار را به اولین اولویت نسبت دهد، چنانچه جواب چندگانه باشد، بین جواب های چند گانه جوابی را انتخاب خواهیم کرد که اولویت دوم را بهینه نماید، اما اگر جواب چندگانه نباشد توقف کرده اولویت های بعدی را بررسی نخواهیم کرد.

مختصات نقاط گوشه	مینیمم $Z_2 = -x_1 - 2x_2$
$B: (3,0)$	$Z_{2B} = -3$
$C: (3,6)$	$Z_{2C} = -15$

$$\text{Min } Z_2 = -x_1 - 2x_2$$

s. t

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

وقتی در تابع هدف Z_3 محدودیت $X_1 = 3$ میباشد یعنی روی ناحیه موجه جواب قبلی نقاط بهینه قرار دارند نه نقاط دیگر در محور مختصات، لذا چون در این تابع هدف مینیمم اولویت بوده است جواب یکتای مسئله کمترین مقدار یعنی $Z_2 = -15$ است و نیازی نیست به تابع هدفهای بعدی مراجعه نمود. در تابع هدف Z_1 جواب بهینه در نقطه C قرار ندارد. لذا توقف می کنیم. و اعلام می کنیم جواب یکتای مسئله $Z_2 = -15$ میباشد.

توضیح قسمت د) (دنباله حل مسئله در جلسه مورخ ۱۳۹۴/۱۰/۰۴).

توضیح اولویت مطلق: در این روش چون براساس اهمیت، تابع هدف ها اولویت گذاری میشوند، با توجه به این اولویت بندی در مثال گفته شده اولویت اول با تابع هدف Z_3 بعد با Z_2 و در انتها با Z_1 بود، چون اولویت با Z_3 بود پس اول باید به ستون Z_3 نگاه کنیم، در این ستون نقاط B و C پاسخ بهینه میباشد، چون در اینجا یک جواب چند جانبه است ادامه میدهیم، ولی اگر جواب تک نقطه بود اکتفا میکردیم و نیازی به بررسی اولویت های بعدی نبود، ولی چون جواب ما چند گانه است که در دو نقطه اتفاق افتاده، اولویت بعدی را بررسی می کنیم، با توجه به اینکه اولویت بعدی با Z_2 بوده است، به ستون Z_2 نگاه می کنیم، در این ستون نیازی نیست که تمامی نقاط بررسی شوند، بلکه در محدوده جواب اولویت اول یعنی Z_3 که نقاط B و C بود بررسی می کنیم، نقطه C در تابع هدف Z_2 بهتر از نقطه C در تابع هدف Z_3 است، حال با توجه به اینکه تابع هدفی نداریم که همزمان و مشترکاً همه تابع هدف ها را به بهترین مقدار پوشش دهد (چون بررسی تابع هدف دوم محدود به نقاط بهینه در تابع هدف اول است و تابع هدف بعدی باز هم محدود به تابع هدف قبلی است)، نقطه بهینه نقطه C در Z_2 بهتر از Z_3 میباشد، و چون جواب یکتا میباشد همین جا بررسی و محاسبه را متوقف کرده و نقطه C در تابع هدف Z_2 را به عنوان جواب نهائی اولویت مطلق اعلام میکنیم.

گامهای عملی در حل مسئله به روش اولویت مطلق:

- ۱- ابتدا تابع هدفی که اولویت بیشتری دارد را در نظر می گیریم.
- ۲- بهترین مقدار در این روش به اولین اولویت نسبت می گیرد.
- ۳- تابع هدف دارای اولویت و محدودیت های آنرا در ذیل آن می نویسیم.
- ۴- چون تابع هدف قبلاً نقطه یابی شده است لذا نیاز به نقطه یابی مجدد ندارد، زیرا نقاط گوشه بهینه قبلاً اعلام شده فقط باید اعلام کنیم که کدام نقاط به عنوان نقاط چند گانه میباشد.
- ۵- اگر جواب یک نقطه بود توقف می کنیم ولی اگر جواب چند جانبه بود به تابع هدف بعدی رفته و کنترل می کنیم.
- ۶- در انتها جواب یکتای مسئله را به عنوان جواب نهایی اعلام میکنیم.

پاسخ قسمت هـ) (توضیح در همان منبع صفحه ۲۰۲- **روش معیار جامع**) فرق این روش با روش های قبلی این است که در روشهای قبلی یک سری از اطلاعات از تصمیم گیرنده کسب می شد، مثلاً در اولویت مطلق وقتی می گوئیم، اولویت اول ابتدا با تابع هدف سوم بعد دوم میباشد، یعنی از تصمیم گیرنده خواسته ایم که کدام تابع هدف برای او در اولویت و اهمیت قرار دارد؟ بنابر این با تصمیم گیرنده در ارتباط بوده و کسب اطلاع کرده ایم. لیکن در روش معیار جامع بدون اینکه از تصمیم گیرنده اطلاعی را گرفته و کسب کرده باشیم، باید نقطه ای را به عنوان جواب بهینه پیدا نماییم.

در روش معیار جامع نقطه ای به عنوان نقطه جواب انتخاب میشود که مجموع فواصل نقاط نسبی نسبت به سایر نقاط مینی موم (Min) باشد.

یعنی فاصله نسبی تابع هدف ها در آن نقطه از مقدار های بهینه ای که برای هر تابع هدف بدست آورده ایم نسبت به سایر فواصل نقاط نسبی کمترین باشد. پس جمع فاصله تابع هدف ها را بدست می آوریم و فاصله تابع هدف اول و مقدار بهینه تابع هدف اول با فاصله نسبی تابع هدف دوم و فاصله نسبی تابع هدف دوم با سوم و الی آخر جمع می کنیم، تا ببینیم کدام نقطه نسبت به بقیه کمترین مقدار را داشته است. نکته قابل توجه این است که باید تابع هدف ها را از حالت ماکزیموم در آوریم و به مینیمم تبدیل کنیم. برای تبدیل تابع هدف ماکزیموم به مینیمم باید در یک عدد منفی (۱-) ضرب کنیم تا قرینه آن بدست آید. مینی موم Z یعنی قصد داریم کمترین مقدار مجموع فاصله های هر تابع هدف با مقدار بهینه اش را بدست بیاوریم و قدر

مطلق آن به جهت این است که مقدار فاصله ها را بدون توجه به منفی و مثبت بودن آن بدست آوریم. زیرا اگر منفی و مثبت را با هم جمع کنیم یک مقدار از فاصله را در جمع از دست خواهیم داد، پس قدر مطلق فاصله برای ما اهمیت دارد.
حال به حل مثال قبل توجه کنید:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } z & = [z_1, -z_2, z_1] \\ \text{s.t} & \\ \text{تابع هدف ها} & \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = 400x_1 - 200x_2 \\ Z_2 = -x_1 - 2x_2 \\ Z_3 = x_1 \end{array} \right. \\ \text{محدودیت ها} & \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

مختصات نقاط گوشه	ماکزیمم	مینیمم	ماکزیمم
	$Z_1 = 400x_1 - 200x_2$	$Z_2 = -x_1 - 2x_2$	$Z_3 = x_1$
A: (0,0)	$Z_{1A} = 0$	$Z_{2A} = 0$	$Z_{3A} = 0$
B: (3,0)	$Z_{1B} = 1200$	$Z_{2B} = -3$	$Z_{3B} = 3$
C: (3,6)	$Z_{1C} = 0$	$Z_{2C} = -15$	$Z_{3C} = 3$
D: (1,4)	$Z_{1D} = -400$	$Z_{2D} = -9$	$Z_{3D} = 1$
E: (0,2)	$Z_{1E} = -400$	$Z_{2E} = -4$	$Z_{3E} = 0$
جواب بهینه	$Z_{1B} = 1200$	$Z_{2C} = -15$	$Z_{3B}, Z_{3C} = 3$

نکته قابل توجه این است که باید تابع هدف ها را از مینی موم به ماکزیمم تبدیل کنیم، در مورد تابع هدف دوم $Z_2 = -x_1 - 2x_2$ چون مینیم (Min) است به ماکزیمم (Max) تبدیل و تابع هدف به $Z_2 = x_1 + 2x_2$ تبدیل میشود.

مینیمم	→	ماکزیمم
$Z_2 = -x_1 - 2x_2$		$Z_2 = x_1 + 2x_2$
$Z_{2A} = 0$		$Z_{2A} = 0$
$Z_{2B} = -3$		$Z_{2B} = 3$
$Z_{2C} = -15$		$Z_{2C} = 15$
$Z_{2D} = -9$		$Z_{2D} = 9$
$Z_{2E} = -4$		$Z_{2E} = 4$
$Z_{2C} = -15$		$Z_{2C} = 15$

در تابع هدف دوم مینیمم قبلاً $Z_{2C} = -15$ کمترین مقدار جواب بهینه بود اکنون نیز که به ماکزیمم تبدیل شده نقطه $Z_{2C} = 15$

چون دارای بیشترین مقدار میباشد بازهم جواب بهینه است.

در ادامه فاصله نسبی نقاط مختلف را با مقدار بهینه هر تابع هدف حساب می کنیم، و نهایتاً وقتی فاصله ها بدست آمد بین آنها کمترین را به عنوان جواب بهینه انتخاب می کنیم. و اما حل مسئله عملاً تابع هدف این مسئله Min است همیشه :

$$Min Z = \left| \frac{1200 - (400x_1 - 200x_2)}{1200} \right| + \left| \frac{15 - (x_1 + 2x_2)}{15} \right| + \left| \frac{3 - x_1}{3} \right|$$

Diagram illustrating the absolute value terms in the objective function with callouts for their respective target values and optimal values:

- Term 1: $\left| \frac{1200 - (400x_1 - 200x_2)}{1200} \right|$. Callout: "رابطه تابع هدف ۱" (Target 1 relationship). Optimal value: z_1^* .
- Term 2: $\left| \frac{15 - (x_1 + 2x_2)}{15} \right|$. Callout: "رابطه هدف ۲" (Target 2 relationship). Optimal value: z_2^* .
- Term 3: $\left| \frac{3 - x_1}{3} \right|$. Callout: "رابطه هدف ۳" (Target 3 relationship). Optimal value: z_3^* .

Z^* مقدار بهینه هریک از تابع هدف ها میباشد که در تابع هدف اول ۱۲۰۰ و تابع هدف دوم ۱۵ و تابع هدف سوم ۳ است.

حال با توجه به نقاطی که قبلاً بدست آمد، محدودیت های مسئله نیز همان محدودیت های قبلی هستند و تغییری نمیکنند:

$$\text{محدودیت ها} \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

بنابر این اگر بخواهیم ناحیه این نقاط را رسم کنیم همان نقاط قبل خواهد بود. ولی باید صورت مسئله را بنویسید زیرا نوشتن صورت مسئله خود یک قسمت از حل مسئله است.

$$\begin{aligned} A: (0,0) \quad Z_A &= \left| \frac{1200 - (0)}{1200} \right| + \left| \frac{15 - (0)}{15} \right| + \left| \frac{3 - 0}{3} \right| = 1 + 1 + 1 = 3 \\ B: (3,0) \quad Z_B &= \left| \frac{1200 - (1200)}{1200} \right| + \left| \frac{15 - (3)}{15} \right| + \left| \frac{3 - 3}{3} \right| = 0 + \frac{12}{15} + 0 = \frac{4}{5} \\ C: (3,6) \quad Z_C &= \left| \frac{1200 - (0)}{1200} \right| + \left| \frac{15 - (15)}{15} \right| + \left| \frac{3 - 3}{3} \right| = 1 \\ D: (1,4) \quad Z_D &= \left| \frac{1200 - (400)}{1200} \right| + \left| \frac{15 - (9)}{15} \right| + \left| \frac{3 - 1}{3} \right| = \frac{4}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12}{5} \\ E: (3,0) \quad Z_E &= \left| \frac{1200 - (400)}{1200} \right| + \left| \frac{15 - (4)}{15} \right| + \left| \frac{3 - 0}{3} \right| = \frac{4}{3} + \frac{11}{5} + 1 = \frac{46}{15} \end{aligned}$$

جواب بهینه $\frac{4}{5}$ است زیرا کمترین مقدار را ایجاد نموده است، معیار جامع هدف آن این است که مجموع فاصله های نسبی هر تابع هدف تا مقدار بهینه آن را مینی موم میکند یعنی هر تابع هدف که به نقطه مینی موم نزدیک تر است.

در روش معیار جامع نقطه ای به عنوان جواب انتخاب میشود که در آن مجموع فاصله های نسبی هر تابع هدف با مقدار بهینه اش مینی موم شده باشد.

گامهای حل مسئله به روش معیار جامع:

- (۱) ابتدا تابع هدف ها را از Min به Max تبدیل می نماییم.
- (۲) قدر مطلق نقطه بهینه را از تابع هدف های هر Z کسر و بر آن تقسیم نموده سپس با یکدیگر جمع نموده و محدودیت ها را در ذیل آن می نویسیم.
- (۳) قدر مطلق ماتریس مختصات نقاط گوشه را تا فاصله بهینه حساب نموده و بر آن تقسیم می نماییم.
- (۴) کمترین عدد بدست آمده بین نقاط پاسخ، جواب بهینه مورد نظر است.

مثال کلاس ساعت ۱۲-۱۰

مسئله سه هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max } z & = [z_1, z_2, -z_3] \\
 \text{s.t} & \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{تابع هدف ها} \\ Z_1 = 2x_1 - x_2 \\ Z_2 = 2x_2 \\ Z_3 = 100x_1 - 200x_2 \end{array} \right. & \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{محدودیت ها} \\ x_2 \leq 10 \rightarrow x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 \leq 18 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 18 \rightarrow x_1 = 18, x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 \leq 44 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 44 \rightarrow x_1 = 18, x_2 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. &
 \end{array}$$

الف: بررسی کنید آیا مسئله نقطه ایده آل دارد یا خیر؟ و نقاط نا مغلوب را تعیین کنید.

ب: با روش تبدیل تابع هدف به محدودیت و فرض اینکه حداکثر مقدار هدف سوم برابر ۱۰۰۰ و حداقل مقدار هدف دوم برابر ۲ باشد جواب را تعیین کنید.

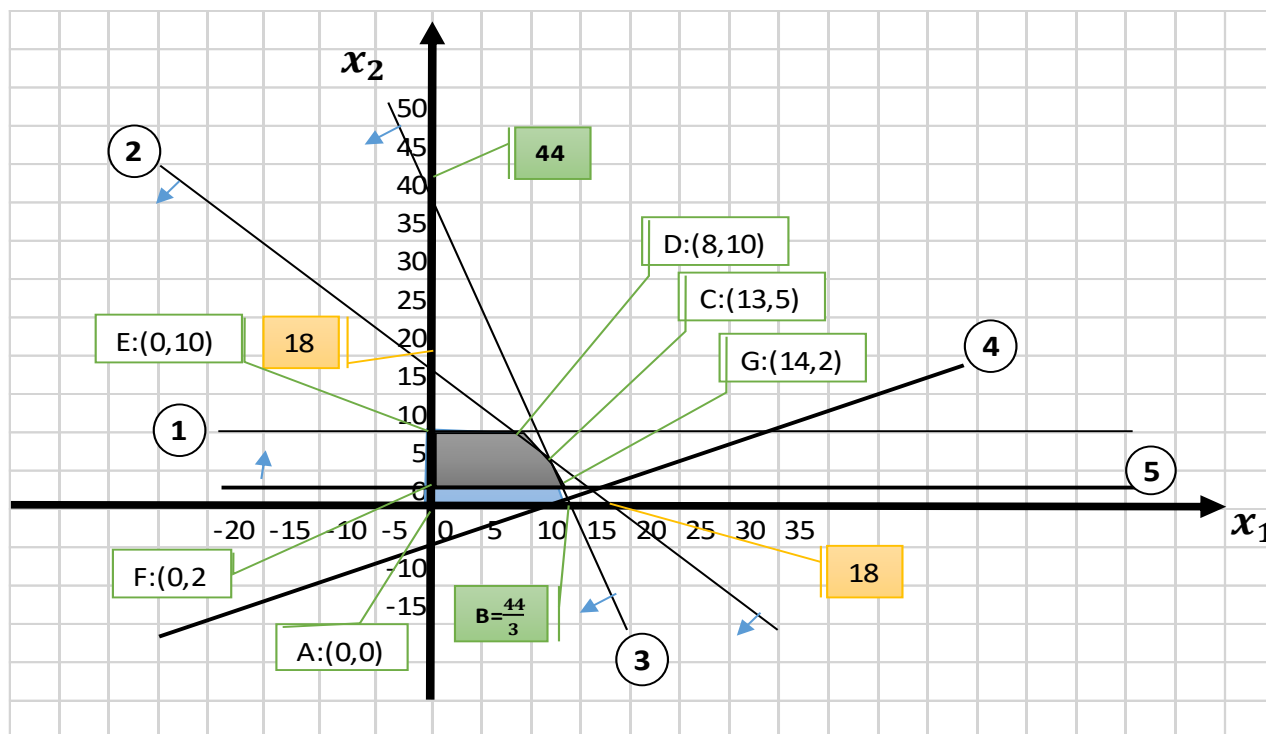
ج: با روش وزن دار کردن توابع هدف، چنانچه هدف اول سه برابر هدف دوم و هدف سوم $\frac{1}{4}$ هدف اول اهمیت داشته باشد جواب را بیابید.

د: با روش اولویت مطلق طوری که اولویت ابتدا با Z_2 و سپس با Z_1 و در آخر با Z_3 باشد جواب را تعیین کنید.

ه: با روش معیار جامع جواب را بدست آورید.

حل قسمت الف) هدف توابع اول و دوم ماکزیموم و هدف تابع سوم به دلیل منفی بودن آن مینی موم است.

ابتدا نقطه یابی نموده و روی محور مختصات ترسیم می نماییم:



$$\text{نقطه C (محل تقاطع خطوط 2 و 3)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18 \\ 3x_1 + x_2 \leq 44 \end{cases}$$

بنابر این : نقطه C : $x_1 = 13$, $x_2 = 5$

$$\text{نقطه D (محل تقاطع خطوط 2 و 4)} \quad \begin{cases} x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$$

: نقطه D : $x_1 = 8$, $x_2 = 10$

مختصات نقاط	تابع ماکزیموم $z_1 = 2x_1 + x_2$	تابع ماکزیموم $z_2 = x_2$	تابع مینی موم $z_3 = 100x_1 - 200x_2$
A: (0,0)	$z_{1A} = 0$	$z_{2A} = 0$	$z_{3A} = 0$
B: (3,0)	$z_{1B} = \frac{88}{3}$	$z_{2B} = 0$	$z_{3B} = \frac{4400}{3}$
C: (3,6)	$z_{1C} = \frac{31 \times 3}{1 \times 3} = \frac{93}{3}$	$z_{2C} = 5$	$z_{3C} = 300$
D: (1,4)	$z_{1D} = 26$	$z_{2D} = 10$	$z_{3D} = -1200$
E: (10,2)	$z_{1E} = 10$	$z_{2E} = 10$	$z_{3E} = -2000$

چون در دو تابع اول و دوم هدف ماکزیموم بوده است عدد بزرگتر در هر ستون به عنوان نقطه بهینه انتخاب میشود ولی در تابع سوم چون هدف مینی موم بوده است کوچکترین عدد در ستون به عنوان نقطه بهینه انتخاب میگردد.

جواب الف: این مساله نقطه ایده آل ندارد چون هیچ یک از نقاط نمیتوانند هم زمان تمامی توابع هدف ها را بهینه کند (در نقاط فوق اگر تابع اول در نقطه $z_{1E} = 10$ نیز نقطه بهینه می بود نقطه E در تمامی تابع هدف ها بهینه میشد و نقطه ایده آل را تشکیل می داد).

و اما نقاط مغلوب و نا مغلوب: نقطه A توسط نقطه E مغلوب می شود، زیرا در تمام تابع هدف ها مقدار نقطه E بهتر از A بوده و نقطه C بر B غلبه می کند

$$\text{نامغلوب} = \{C, D, E\}$$

حل قسمت ب) چون: حداکثر مقدار هدف سوم ۱۰۰۰ است، پس $z_3 \leq 1000$ ←

چون: حداقل مقدار هدف دوم ۲ است، پس $z_2 \geq 2$ ←

بنابر این فقط یک تابع هدف خواهیم داشت (دو تابع هدف دیگر جزو محدودیت ها خواهند بود):

$$Max \ z_1 = 2x_1 + x_2$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 44$$

$$100x_1 + 200x_2 \leq 1000 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -5 \rightarrow x_1$$

$$= 10, \quad x_2 = 0$$

$$x_2 \geq 10$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0$$

در همان شکل قبلی خطوط رسم شده است و فقط دو خط جدید را رسم میکنیم.

ناحیه موجه این مسئله چند ضلعی F, E, D, C, G میباشد.

$$F: (0, 2) \quad Z_{1F} = 2$$

$$F \rightarrow Z_{1D} = 26$$

$$G: (14, 2) \quad Z_{1G} = 30$$

$$G \rightarrow Z_{1D} = 31$$

خط ۴ و ۵ مربوط به ترسیم این قسمت روی محور مختصات میباشد.

اگر با روش تبدیل تابع هدف به محدودیت بخواهیم مسئله ای را حل کنیم ابتدا به کمک توضیحات برای

برخی تابع هدف ها محدودیت های جدیدی می نویسیم و به انتهای مسئله اضافه میکنیم، سپس خط

مربوط به آن محدودیت ها را در ناحیه مذکور رسم می کنیم و ناحیه جدید را به دست می آوریم، حال

بایستی بین نقاط ناحیه جدید نقطه ای را انتخاب کنیم که بهترین مقدار را به تابع هدف باقیمانده یعنی تابع

هدفی که به محدودیت تبدیل شده نسبت دهد، انتخاب می کنیم.

حل قسمت ج) گام اول: ماکزیمم سازی توابع:

$$Max \quad Z_1 = 2x_1 - x_2$$

$$Max \quad Z_2 = 2x_2$$

$$Max \quad Z'_3 = -100x_1 + 200x_2 \quad \leftarrow \text{چون تابع مینی موم است برای ماکزیموم سازی آنرا در 1- ضرب میکنیم}$$

گام دوم: نرمال سازی ضرایب: (یعنی ضرایب تابع هدف را با هم جمع کرده، سپس ضرایب را تک تک بر

این جمع تقسیم میکنیم، بدون در نظر گرفتن علائم، جهت جمع کردن)

$$\text{Max } Z_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2$$

$$\text{Max } Z_2 = x_2$$

$$\text{Max } Z'_3 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$$

گام سوم: تعیین وزن ها:

Z_1	Z_2	Z_3	جمع
3	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{4}$

$$W_1 = \frac{12}{19}$$

$$W_2 = \frac{4}{19}$$

$$W_3 = \frac{3}{19}$$

گام چهارم: تشکیل مسئله:

$$\text{Max } z^* = \frac{12}{19} \left[\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \right] + \frac{4}{19} [2x_2] + \frac{3}{19} \left[-\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \right]$$

$$\text{Max } z^* = \frac{7}{19}x_1 + \frac{10}{19}x_2$$

s.t

$$x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 44$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$A: (0, 0) \quad Z_A = 0$$

$$B: \left(\frac{44}{3}, 0 \right) \quad Z_B = \frac{7}{19} \times \left(\frac{44}{3} \right) = \frac{308}{57}$$

$$C: (13, 5) \quad Z_C = \frac{7}{19} \times (13) + 5 \times \left(\frac{10}{19} \right) = \frac{423}{19}$$

$$D: (8, 10) \quad Z_D = \frac{7}{19} \times (8) + 10 \times \left(\frac{10}{19} \right) = \frac{156}{19} = \frac{498}{57}$$

$$E: (0, 10) \quad Z_E = \frac{10}{19} \times (10) = \frac{100}{19} = \frac{300}{57}$$

برای مقایسه، صورت و مخرج در 3 ضرب میشود

برای مقایسه صورت و مخرج را در 3 ضرب میکنیم

$$Z_D = \frac{498}{57} \text{ جواب نهائی قسمت ج میباشد.}$$

حل قسمت د) زمانیکه میخواهیم با اولویت مطلق مساله ای را حل کنیم، ابتدا از بین نقاط ناحیه نقطه ای را انتخاب می کنیم که هدف اول (هدفی که در اولویت اول قرار دارد را بهینه نماید).

اولویت اول : $Z_2 \rightarrow$ پس در Z_2 دو نقطه $Z_{2D} = 10$ و $Z_{2E} = 10$

پس اگر جواب این مسئله یکتا باشد توقف می کنیم و دیگر ادامه نمی دهیم اما اگر چنانچه جواب چندگانه باشد به اولویت بعدی پرداخته و از بین جواب های چندگانه نقطه ای را انتخاب خواهیم کرد که به اولویت دوم بهترین مقدار را نسبت دهد، چنانچه جواب یکتا باشد توقف کرده در غیر اینصورت به اولویت سوم خواهیم پرداخت (در این حالت در اولویت اول دو جواب داریم نقاط D و E، به اولویت دوم می رویم، نقطه D در اولویت دوم بهتر از نقطه E است پس جواب نقطه D میشود).
این مسئله دارای جواب های چندگانه D و E میباشد.

$$Max \quad Z_2 = x_2$$

s.t

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 44 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

چون جواب چندگانه است ادامه میدهیم:

ناحیه موجه این مسئله پاره خط DE میباشد.

$$Max \quad Z_1 = 2x_1 + x_2$$

s.t

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 44 \\ x_2 = 10 &\rightarrow z_2^* = 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

چون $Z_{1D} = 26$ و $Z_{1E} = 10$ است.

نقطه D جواب نهائی و یکتای مسئله میباشد.

حل قسمت هـ) (دنباله حل تمرین از جلسه مورخ ۱۳۹۴/۱۰/۴) در روش معیار جامع نقطه ای به عنوان نقطه جواب انتخاب میشود که مجموع فواصل نقاط نسبی نسبت به سایر نقاط مینی موم (Min) باشد. لذا ابتدا باید همه توابع را به ماکزیموم تبدیل نمود:

تبدیل تابع به ماکزیموم	تابع مینی موم	تابع ماکزیموم	تابع ماکزیموم	مختصات نقاط
$z_3 = -100x_1 + 200x_2$	$z_3 = 100x_1 - 200x_2$	$z_2 = x_2$	$z_1 = 2x_1 + x_2$	
$z_{3A} = 0$	$z_{3A} = 0$	$z_{2A} = 0$	$z_{1A} = 0$	A: (0,0)
$z_{3B} = -\frac{4400}{3}$	$z_{3B} = \frac{4400}{3}$	$z_{2B} = 0$	$z_{1B} = \frac{88}{3}$	B: (3,0)
$z_{3C} = -300$	$z_{3C} = 300$	$z_{2C} = 5$	$z_{1C} = \frac{31 \times 3}{1 \times 3} = \frac{93}{3} = 31$	C: (3,6)
$z_{3D} = 1200$	$z_{3D} = -1200$	$z_{2D} = 10$	$z_{1D} = 26$	D: (1,4)
$z_{3E} = 2000$	$z_{3E} = -2000$	$z_{2E} = 10$	$z_{1E} = 10$	E: (10,2)

در نقطه $z_{3E} = 2000$ چون دارای بیشترین مقدار پس از ماکزیموم شدن میباشد بازهم به عنوان جواب بهینه انتخاب می شود. فرمول تابع هدف مسئله معیار جامع در حالت Min به شکل زیر است :

$$Min Z = \underbrace{\left| \frac{z_1^* - Z_1}{z_1^*} \right|}_{z_1^*} + \underbrace{\left| \frac{z_2^* - Z_2}{z_2^*} \right|}_{z_2^*} + \underbrace{\left| \frac{z_3^* - Z_3}{z_3^*} \right|}_{z_3^*}$$

Z^* مقدار بهینه هریک از تابع هدف ها میباشد.

همیشه، محدودیت های مسئله همان محدودیت های قبلی هستند و تغییری نمیکنند:

s. t

$$\text{محدودیت ها} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 18 \\ 3x_1 + x_2 \leq 44 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

بنابر این داریم:

$$\begin{aligned} A: (0,0) &\rightarrow Z_A = \left| \frac{31 - (0)}{31} \right| + \left| \frac{10 - (0)}{10} \right| + \left| \frac{2000 - (0)}{2000} \right| = 1 + 1 + 1 = 3 \\ B: \left(\frac{44}{3}, 0 \right) &\rightarrow Z_B = \left| \frac{31 - (\frac{88}{3})}{31} \right| + \left| \frac{10 - (0)}{10} \right| + \left| \frac{2000 - (\frac{4400}{3})}{2000} \right| = \frac{5}{93} + 1 + \frac{10400}{6000} = \frac{15552}{5580} = 2.787 \\ C: (13,5) &\rightarrow Z_C = \left| \frac{31 - (31)}{31} \right| + \left| \frac{10 - (5)}{10} \right| + \left| \frac{2000 - (-300)}{2000} \right| = 0 + \frac{1}{2} + \frac{23}{20} = \frac{33}{20} = 1.65 \\ D: (8,10) &\rightarrow Z_D = \left| \frac{31 - (26)}{31} \right| + \left| \frac{10 - (10)}{10} \right| + \left| \frac{2000 - (1200)}{2000} \right| = \frac{5}{31} + 0 + \frac{2}{5} = \frac{87}{155} = 0.561 \\ E: (0,0) &\rightarrow Z_E = \left| \frac{31 - (10)}{31} \right| + \left| \frac{10 - (10)}{10} \right| + \left| \frac{2000 - (2000)}{2000} \right| = \frac{21}{31} + 0 + 0 = 0.677 \end{aligned}$$

جواب بهینه 0.56 است زیرا کمترین مقدار را بخود اختصاص داده است.

مثال کلاس ساعت ۱۳-۳۰:۱۱)

مسئله سه هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= [-z_1, z_2, z_3] \\ \text{s.t} \quad & \\ \text{تابع هدف ها} \quad & \begin{cases} Z_1 = 200x_1 - 300x_2 \\ Z_2 = 2x_1 - x_2 \\ Z_3 = x_1 \end{cases} \\ \text{محدودیت ها} \quad & \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

محدودیت: معمولاً قید و بندهای موجود در یک شرکت، کارخانه، یا موسسه را نشان میدهد.

تابع هدف: هدف از برنامه ریزی را مشخص میکند.

الف: بررسی کنید آیا مسئله نقطه ایده آل دارد یا خیر؟ و نقاط نامغلوب مسئله را بیابید.

ب: با روش تبدیل تابع هدف به محدودیت چنانچه بدانیم حداکثر مقدار هدف دوم برابر ۲ و حداقل مقدار هدف سوم برابر ۱ میباشد مسئله را حل کنید.

ج: با روش وزن دار کردن توابع هدف، طوریکه هدف اول سه برابر هدف دوم و هدف سوم دو برابر هدف اول اهمیت داشته باشد جواب را بیابید.

د: با روش اولویت مطلق طوری که اولویت ابتدا با Z_3 و سپس با Z_2 و در آخر با Z_1 باشد جواب را تعیین کنید.

ه: با روش معیار جامع جواب را بدست آورید.

جواب قسمت الف)

با توجه به اینکه تابع هدف $-Z_1$ منفی میباشد مشخص میگردد هدف این تابع مینی موم است و هدف سایر توابع (Z_2, Z_1) ماکزیموم میباشد.

ابتدا نقطه یابی نموده، شکل را روی محور مختصات ترسیم می نماییم:

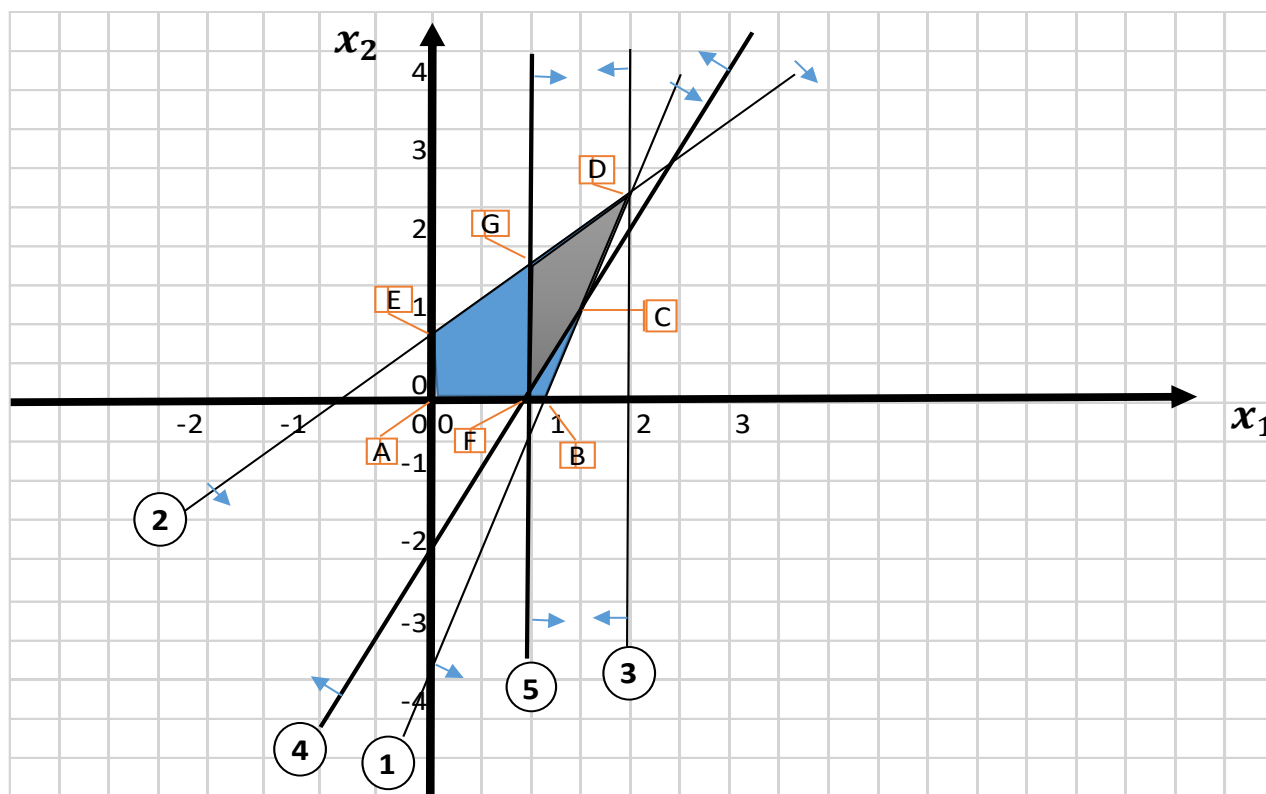
در خط اول محدودیت داریم: $x_1 = 0, x_2 = -4$ و همچنین اگر $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 0$ (خط شماره ۱)

و نیز برای محدودیت دوم داریم: $x_1 = 0, x_2 = 1$ و اگر $x_1 = -1, x_2 = 0$ (خط شماره ۲)

در محدودیت سوم چنین است: $x_1 = 2$ (خط شماره ۳)

سطر چهارم محدودیت ها می گوید x_1 و x_2 بزرگتر از صفر میباشد پس ناحیه بهینه روی محور مختصات در ربع اول قرار دارد.

حال با توجه به نقاط بدست آمده فوق خطوط را روی محور مختصات ترسیم می کنیم:



مختصات نقاط	تابع مینی موم $z_1 = 200x_1 - 300x_2$	تابع ماکزیموم $z_2 = 2x_1 - x_2$	تابع ماکزیموم $z_3 = x_1$
A: (0,0)	$z_{1A} = 0$	$z_{2A} = 0$	$z_{3A} = 0$
B: (3,0)	$z_{1B} = \frac{800}{3}$	$z_{2B} = \frac{8}{3}$	$z_{3B} = \frac{4}{3}$
C: (3,6)	$z_{1C} = -200$	$z_{2C} = 2$	$z_{3C} = 2$
D: (1,4)	$z_{1D} = -500$	$z_{2D} = 1$	$z_{3D} = 2$
E: (10,2)	$z_{1E} = -300$	$z_{2E} = 1$	$z_{3E} = 0$

این مسئله نقطه ایده آل ندارد زیرا نقطه ای نیست که همزمان تمام توابع هدف را بتواند بهینه نماید. نقاط مغلوب و نا مغلوب: نقطه A توسط نقطه C مغلوب می شود، زیرا C در تمام تابع هدف ها مقدار بهتری نسبت به A بوده دارد.

نکته: در توابع هدف ماکزیموم بیشتر بودن و در مینی موم کمتر بهتر است. نقطه E توسط نقطه D مغلوب میگردد.

نقطه D با C و نقطه B با C یا B مقایسه میشود و نتیجه:

$$\text{نقاط نامغلوب} = \{B, C, D\}$$

حل قسمت ب) روش تبدیل تابع هدف به محدودیت حداکثر مقدار تابع هدف دوم برابر ۲ و حداقل مقدار تابع هدف سوم برابر یک باشد:

$$z_2 \leq 2$$

$$z_3 \geq 1$$

$$2X_1 - X_2 \leq 2 \quad X_1 \geq 1$$

$$\text{Min } z_1 = 200x_1 - 300x_2$$

s.t

$$3x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

خط شماره ۴

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0$$

$$x_1 \geq 1$$

خط شماره 5

$$x_1, x_2 \geq 0$$

در همان شکل قبلی خطوط رسم شده ، فقط دو خط جدید را اضافه میکنیم.

ناحیه موجه این مسئله چند ضلعی F, G, D, C میباشد.

$$F: (1,0) \quad Z_{1F} = 200$$

$$F \rightarrow Z_{1F} = 200$$

$$G: (1,2) \quad Z_{1G} = -400$$

$$G \rightarrow Z_{1G} = -400$$

$$D: (2,3) \quad Z_{1D} = -500$$

$$D \rightarrow Z_{1D} = -500$$

$$C: (2,2) \quad Z_{1C} = -200$$

$$C \rightarrow Z_{1C} = -200$$

تابع هدف Z_1 مینی موم است پس جواب نهائی قسمت ب میباشد

حل قسمت ج) هدف اول سه برابر هدف دوم و هدف سوم دو برابر هدف اول باشد، استفاده از روش وزن دار کردن تابع هدف ها:

گام اول: ماکزیمم سازی توابع:

$$\text{Max} \quad Z'_1 = 200x_1 + 300x_2$$

$$\text{Max} \quad Z_2 = 2x_1 - x_2$$

$$\text{Max} \quad Z_3 = x_1$$

گام دوم: نرمال سازی ضرایب: بدون در نظر گرفتن علائم اعداد ضرایب تابع هدف را جمع می کنیم.

$$\text{Max} \quad Z'_1 = 200 + 300 = 500 \rightarrow \frac{200}{500} = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Max} \quad Z_2 = 2 + 1 = 3 \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\text{Max} \quad Z_3 = x_1$$

گام سوم: تعیین وزن ها:

Z_1	Z_2	Z_3	جمع
3	1	6	10

$$W_1 = \frac{3}{10}$$

$$W_2 = \frac{1}{10}$$

$$W_3 = \frac{6}{10}$$

گام چهارم: تشکیل مسئله:

$$\text{Max } z^* = \frac{3}{10} \left[-\frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \right] + \frac{1}{10} \left[\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \right] + \frac{6}{10}x_1$$

$$\text{Max } z^* = \frac{7}{19}x_1 + \frac{10}{19}x_2$$

s.t

$$3x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = \frac{82}{150}x_1 + \frac{11}{75}x_2$$

$$z = \frac{41}{75}x_1 + \frac{11}{75}x_2$$

$$A: (0, 0) \quad Z_A = 0$$

$$B: \left(\frac{4}{3}, 0\right) \quad Z_B = \frac{164}{225}$$

$$C: (2, 2) \quad Z_C = \frac{104 \times 3}{15 \times 3} = \frac{312}{255}$$

$$D: (2, 3) \quad Z_D = \frac{114 \times 3}{75 \times 3} = \frac{342}{19} = \frac{498}{57}$$

$$E: (0, 1) \quad Z_E = \frac{11 \times 3}{75 \times 3} = \frac{33}{225}$$

حل قسمت د) در روش اولویت مطلق ابتدا در ناحیه موجه نقطه ای را انتخاب میکنیم که بتواند اولویت اول را بهینه نماید، سپس اگر جواب بدست آمده یکتا باشد، توقف می کنیم، و دیگر حل را ادامه نمی دهیم اما چنانچه جواب ایجاد شده چندگانه باشد از میان آن جواب ها جوابی را انتخاب می کنیم که اولویت دوم را بهینه کند، و به همین ترتیب ادامه میدهیم، تا به اولویت آخر برسیم یا اینکه جواب بدست آمده باشد. اولویت اول با Z_3 سپس Z_2 و در آخر با Z_1 :

$$\text{Max } z_3 = x_1$$

s.t

$$3x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ناحیه موجه همان ناحیه قسمت الف میباشد، پس برای مسئله فوق نقاط B و D با مقدار:

$$z_3 = 2 \quad D: (2,3) \quad \text{و} \quad C: (2,2)$$

جواب های چند گانه هستند.

$$C: (2,2)$$

$$D: (2,3)$$

$$Z_{3=2}$$

سپس چون جواب چند گانه است ادامه داده اولویت بعدی را کنترل می کنیم:

$$\text{Max} \quad Z_2 = 2x_1 - x_2$$

s.t

$$3x_1 - x_2 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نقاط موجه این مسئله پاره خط CD میباشد:

$$Z_{2C} = 2$$

$$Z_{2D} = 1$$

لذا نقطه C جواب بهینه یکتای این مسئله میباشد.

حل قسمت هـ) (دنباله حل تمرین از جلسه مورخ ۱۳۹۴/۱۰/۴) در روش معیار جامع گام نخست

تبدیل تابع هدف مینی موم به ماکزیمم میباشد:

مختصات نقاط	تابع مینی موم	تابع مینی موم تبدیل به ماکزیموم شده است	تابع ماکزیموم	تابع ماکزیموم
	z_1 $= 200x_1$ $- 300x_2$	z_1 $= -200x_1$ $+ 300x_2$	z_2 $= 2x_1$ $- x_2$	z_3 $= x_1$
$A: (0,0)$	$z_{1A} = 0$	$z_{1A} = 0$	$z_{2A} = 0$	$z_{3A} = 0$
$B: (3,0)$	$z_{1B} = \frac{800}{3}$	$z_{1B} = -\frac{800}{3}$	$z_{2B} = \frac{8}{3}$	$z_{3B} = \frac{4}{3}$
$C: (3,6)$	$z_{1C} = -200$	$z_{1C} = 200$	$z_{2C} = 2$	$z_{3C} = 2$
$D: (1,4)$	$z_{1D} = -500$	$z_{1D} = 500$	$z_{2D} = 1$	$z_{3D} = 2$
$E: (10,2)$	$z_{1E} = -300$	$z_{1E} = 300$	$z_{2E} = 1$	$z_{3E} = 0$

در نقطه $z_{1D} = 500$ چون دارای بیشترین مقدار پس از ماکزیموم شدن میباشد بازهم به عنوان جواب بهینه انتخاب می شود.

فرمول تابع هدف مسئله معیار جامع در حالت Min به شکل زیر است :

$$Min Z = \underbrace{\left| \frac{500 - (200x_1 + 300x_2)}{500} \right|}_{z_1^*} + \underbrace{\left| \frac{\frac{8}{3} - (2x_1 - x_2)}{\frac{8}{3}} \right|}_{z_2^*} + \underbrace{\left| \frac{2 - (x_1)}{2} \right|}_{z_3^*}$$

Z^* مقدار بهینه هریک از تابع هدف ها میباشد، و محدودیت های مسئله همان محدودیت های قبلی هستند و تغییری نمیکنند:

$$s. t \quad \begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ \text{محدودیت ها} \quad x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

بنابر این:

$$A: (0,0) \rightarrow Z_A = \left| \frac{500-(0)}{500} \right| + \left| \frac{\frac{8}{3}-(0)}{\frac{8}{3}} \right| + \left| \frac{2-(0)}{2} \right| = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$B: \left(\frac{4}{3}, 0\right) \rightarrow Z_B = \left| \frac{500 - (-\frac{800}{3})}{500} \right| + \left| \frac{\frac{8}{3} - (\frac{8}{3})}{\frac{8}{3}} \right| + \left| \frac{2 - (\frac{4}{3})}{2} \right| = \frac{11}{5} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{38}{15} = 2.533$$

$$C: (2,2) \rightarrow Z_C = \left| \frac{500 - (200)}{500} \right| + \left| \frac{\frac{8}{3} - (2)}{\frac{8}{3}} \right| + \left| \frac{2 - (2)}{2} \right| = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{17}{20} = 0.85$$

$$D: (2,3) \rightarrow Z_D = \left| \frac{500 - (500)}{500} \right| + \left| \frac{\frac{8}{3} - (1)}{\frac{8}{3}} \right| + \left| \frac{2 - (2)}{2} \right| = 0 + \frac{5}{8} + 0 = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$E: (0,1) \rightarrow Z_E = \left| \frac{500 - (300)}{500} \right| + \left| \frac{\frac{8}{3} - (-1)}{\frac{8}{3}} \right| + \left| \frac{2 - (0)}{2} \right| = \frac{2}{5} + \frac{11}{8} + 1 = \frac{111}{40} = 2.785$$

جواب بهینه 0.625 است زیرا کمترین مقدار را بخود اختصاص داده است.

دنباله فصل سوم: تصمیم گیری چند هدفه (MODM):

کلاس ساعت ۱۰-۸ (توضیح در همان منبع صفحه ۲۰۵- برنامه ریزی آرمانی)

حل مسائل چند هدفه به کمک برنامه ریزی آرمانی، در برنامه ریزی آرمانی بر خلاف روشهای قبل یک مسئله چند هدفه را بدون تبدیل به مسئله تک هدفه و با همان اهداف مختلف حل خواهیم کرد، در این گونه مسائل ابتدا برای هریک از تابع هدف ها سطح تمایلی را که از طرف تصمیم گیرنده تعیین میشود در نظر می گیریم به این ترتیب آن هدف به آرمان تبدیل می شود و سپس آرمانهای مختلف را با در نظر گرفتن متغیرهای انحراف از آرمان به حالت مساوی در آورده و آنها را به صورت محدودیت های آرمانی در قسمت محدودیت های مدل استفاده می کنیم، به عنوان مثال فرض کنید در مثال قبل تابع هدف اول نشان دهنده سود، تابع هدف دوم نشان دهنده میزان ضایعات و تابع هدف سوم نشان دهنده تعداد محصولات تولید شده نوع اول میباشد. صورت مسئله به شکل زیر بود:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } z & = [z_1, -z_2, z_3] \\ \text{s.t} & \end{array}$$

$$\text{تابع هدف ها} \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = 400x_1 - 200x_2 \\ Z_2 = -x_1 - 2x_2 \\ Z_3 = x_1 \end{array} \right.$$

$$\text{محدودیت ها} \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

همچنین فرض کنید سطح تمایل تعیین شده برای هدف اول حداقل ۸۰۰ دلار و برای هدف دوم حداکثر ۶ واحد و برای هدف سوم حداقل دو واحد باشد، محدودیت های آرمانی برای این مسئله به صورت زیر ساخته میشود.

$$\begin{array}{c} \text{سطح تمایل} \qquad \qquad \qquad Z_1 \\ \underbrace{\hspace{10em}} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}} \\ Z_1 \text{ محدودیت آرمانی} : 400x_1 - 200x_2 - d_1^+ - d_1^- = 800 \end{array}$$

متغیرهای انحراف از معیار

d^+ نشان دهنده مقداری است که از سطح تمایلی که قبلاً مشخص شده پیشی گرفته ایم.

d^- نشان دهنده مقداری است که از سطح تمایلی که قبلاً مشخص شده بازمانده ایم.

مثلاً $d_1^+ = 200$ یعنی ۲۰۰ واحد بیشتر از سطح تمایل قبلی سود بدست آورده ایم.

سود $800+200=1000$

و مثلاً $d_1^- = 200$ یعنی ۲۰۰ واحد کمتر از سطح تمایل قبلی سود بدست آورده ایم.

سود $800-200=600$

$$Z_2 \text{ محدودیت آرمانی} : -x_1 - 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = 6$$

$d_2^+ = 2$ یعنی ۲ واحد بیشتر از ۶ واحد ضایعات داریم. و $d_2^- = 2$ یعنی ۲ واحد کمتر از ۶ واحد ضایعات داریم.

$$Z_3 \text{ محدودیت آرمانی} : -x_1 - d_3^+ + d_3^- = 2$$

$d_3^+ = 1$ یعنی ۱ واحد بیشتر از ۲ واحد ضایعات داریم. و $d_3^- = 1$ یعنی ۱ واحد کمتر از ۲ واحد ضایعات داریم.

توضیح: هر یک از محدودیت های آرمانی دارای یک متغیر انحراف از آرمان نامطلوب است، مدل آرمانی به گونه ای نوشته میشود که متغیرهای انحراف از آرمان نامطلوب را مینی موم نماید. مثال:

برای محدودیت Z_1 چون هدف تابع ماکزیموم سازی سود است d_1^- نامطلوب است.

و برای محدودیت Z_2 چون هدف تابع ماکزیموم سازی سود است d_2^+ نامطلوب است.

و نیز برای محدودیت Z_3 چون هدف تابع ماکزیموم سازی محصول اول تولید شده است d_3^- نامطلوب است.

مسئله آرمانی همیشه از نوع مینی موم است یعنی:

$$\text{Min } d_1^-, d_2^+, d_3^-$$

s. t

$$\text{محدودیت های آرمانی} \left\{ \begin{array}{l} 400x_1 - 200x_2 - d_1^+ + d_1^- = 800 \\ -x_1 - 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = 6 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 8 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{محدودیت های} \\ \text{غیر آرمانی} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

در تابع هدف های (Max) ماکزیموم d^- نامطلوب است و در تابع هدف های (Min) مینی موم d^+ نامطلوب است.

حل ترسیمی مسائل آرمانی:

برای حل این مسائل ابتدا محدودیت های غیر آرمانی را رسم می کنیم و به کمک آنها ناحیه موجه مسئله را می یابیم سپس محدودیت های آرمانی را بدون در نظر گرفتن متغیرهای انحراف از آرمان رسم خواهیم کرد، و روی این محدودیت ها متغیرهای انحراف از آرمان شان را صفر در نظر می گیریم، سپس بایستی جهت افزایش d^+ و d^- را اطراف آن محدودیت تعیین کنیم.

برای این منظور کافی است عدد سمت راست محدودیت را افزایش دهیم و جهت حرکت خط را بررسی کنیم، آن جهت نشان دهنده جهت افزایش d^+ میباشد. بر خلاف آن جهت d^- اضافه خواهد شد، حال بین نقاط ناحیه موجه نقطه ای را انتخاب می کنیم که بتواند متغیرهای انحراف از آرمان نامطلوب را مینیمم (Min) نماید.

(الف) مثال حل مسائل ترسیمی آرمانی (تمرینات دست نوشته استاد):

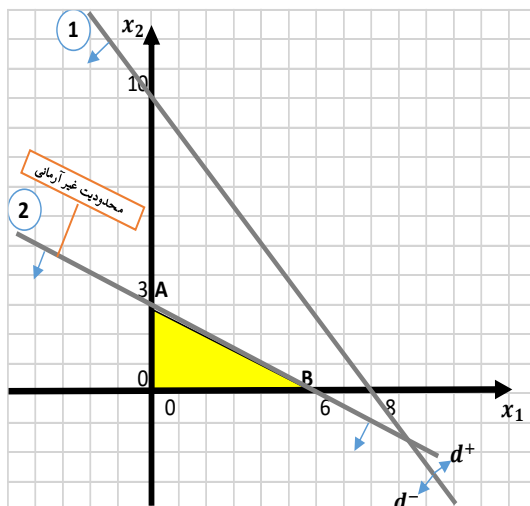
$$\text{Min } Z = d^-$$

$$12.5x_1 + 10x_2 + d^- - d^+ = 100$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2, d^-, d^+ \geq 0$$

x_1	x_2
0	10
8	0



x_1	x_2
0	3
6	0

نقطه B به خط ۱ نزدیک تر است پس d^- کوچکتری دارد، لذا نقطه جواب است.

$$B: (6,0) \quad d^+ = 0$$

$$\text{قید اول} \rightarrow (12.5 \times 6) + (10 \times 0) + d - 0 = 100$$

$$d^- = 100 - 75 = 25$$

$$z_1 = 100 - 25 = 75$$

ب) حل مسئله ترسیمی آرمانی (دست نوشته های استاد):

$$\text{ب) } \min Z = d_1^-, d_3^-, d_2^-$$

$$3x_1 + 14x_2 + d^2 - d_1^+ = 42$$

$$10x_1 + 5x_2 + d^2 - d_2^+ \leq 60$$

$$5x_1 + 7x_2 + d^2 - d_3^+ \leq 35$$

$$100x_1 + 40x_2 \leq 100$$

همه متغیرها نا منفی ترسیم:

خط ۲

x_1	x_2
0	12
6	0

خط ۱

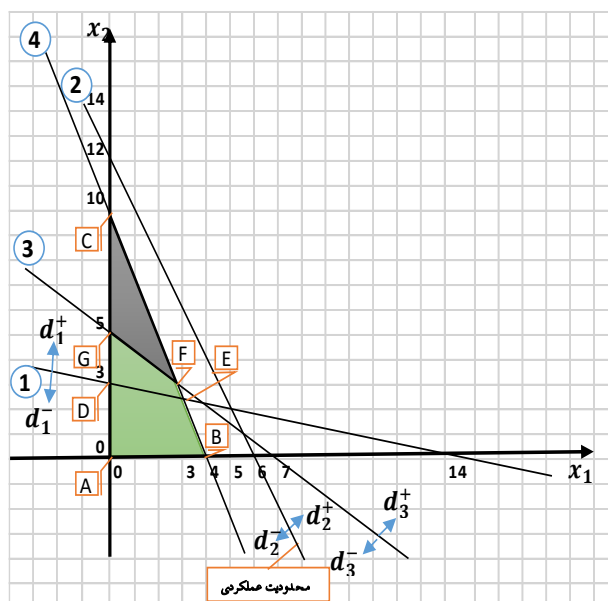
x_1	x_2
0	3
14	0

خط ۳

x_1	x_2
0	5
7	0

خط ۴

x_1	x_2
0	10
4	0



ناحیه موجه مساله مثلث ABC است.

با توجه به هدف اول که d_1^- است ناحیه مثلث DFG کاهش می یابد.

با توجه هدف دوم که مینی موم d_3^- است ناحیه GFC کاهش می یابد.

با توجه به هدف سوم که مینی موم d_2^- است باید نزدیکترین نقطه به اولویت آرمانی دوم در مثلث GFC را انتخاب کنیم.

چون تمام ناحیه پائین خط آرمان ۲ و در جهتی که d_2^- افزایش می یابد قرار دارد نزدیکترین نقطه به این خط را به عنوان جواب انتخاب میکنیم.

$$F: \rightarrow 100x_1 + 40x_2 = 400 \quad \text{محدودیت عملکردی}$$

$$\begin{aligned} \text{محدودیت سوم آرمانی} \rightarrow 5x_1 + 7x_2 = 38 & \rightarrow \times -20 & -100x_1 - 140x_2 = \\ -700 & \rightarrow -100x_2 = -300 \end{aligned}$$

$$x_2 = 3$$

$\rightarrow$

$$x_1 = \frac{14}{5}$$

$$C: (0,10) \rightarrow d_2^+ = 0 \rightarrow 10(0) + 5(10) + d_2^- = 60 \rightarrow d_2^- = 10 \rightarrow \text{نقطه } C \text{ جواب است}$$

$$F: \left(\frac{14}{5}, 3\right) \rightarrow d_2^+ = 0 \rightarrow 10\left(\frac{14}{5}\right) + 5(3) + d_2^- = 60 \rightarrow d_2^- = 17$$

$$C: (0,10) \rightarrow d_1^- = 0, d_3^- = 0, d_2^- = 10$$

$$\text{قید اول} \rightarrow 3(0) + 14(10) + 0 - d_1^+ = 42 \rightarrow d_1^- = -140 + 42 = -98 \rightarrow d_1^+ = 98$$

$$\text{قید سوم} \rightarrow 5(0) + 7(10) + 0 - d_3^+ = 35 \rightarrow d_3^+ = -70 + 35 = -35 \rightarrow d_3^+ = 35$$

$$z_1 = 42 + 98 = 140$$

$$z_2 = 60 - 10 = 50$$

$$z_3 = 35 + 35 = 70$$

کلاس ساعت ۱۲-۱۰ (حل مسائل چند هدفه به کمک برنامه ریزی آرمانی)

برنامه ریزی آرمانی برخلاف روشهای قبل یک مسئله چند هدفه بدون تبدیل به تک هدفه را حل میکند، در این روش ابتدا برای هر یک از هدفهای مسئله سطح تمایلی مشخص میشود، به این ترتیب هدف ها به آرمان تبدیل میشوند. فرض کنید در مثال قبل تابع هدف اول نشان دهنده سود، تابع هدف دوم نشان دهنده تعداد محصولات تولید شده از نوع دوم و تابع هدف سوم نشان دهنده میزان ضایعات باشد، در مثال جلسه قبل تابع هدف ها و محدودیت ها به شکل زیر بود:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } z & = [z_1, z_2, -z_3] \\ \text{s. t} & \\ \text{تابع هدف ها} & \left\{ \begin{array}{l} z_1 = 2x_1 + x_2 \\ z_2 = 2x_2 \\ z_3 = 100x_1 - 200x_2 \\ x_2 \leq 10 \end{array} \right. \\ \text{محدودیت ها} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 18 \\ 3x_1 + x_2 \leq 44 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

سطح تمایلات تعیین شده نیز برای هدف اول حداقل ۱۰ دلار، برای هدف دوم حداقل ۵ واحد و برای هدف سوم حداکثر ۳۰۰ عدد تعیین شود. در این صورت میتوان برای هر یک از تابع هدف ها یک محدودیت آرمانی نوشت.

$$\text{Max } Z = [z_1, z_2, -z_3]$$

s. t

$$z_1 = 2x_1 + x_2$$

سطح تمایل حداقل ۱۰ دلار (سود)

$$z_2 = x_2$$

حداقل ۵ واحد (تعداد محصولات تولید شده از نوع دوم)

$$z_3 = 100x_1 + 200x_2$$

حداکثر ۳۰۰ عدد (میزان ضایعات)

$$x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + x_2 \leq 44$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

به صورت زیر محدودیت آرمانی ۱:

$$2x_1 + x_2 - d_1^+ + d_1^- = 10$$

اگر d_1^+ برابر ۴ باشد $\leftarrow$ سود $10 + 4 = 14$

اگر d_1^- برابر ۴ باشد $\leftarrow$ سود $10 - 4 = 6$

محدودیت آرمانی ۲:

$$x_2 - d_2^+ + d_2^- = 5$$

محدودیت آرمانی ۳:

$$100x_2 + 200x_3 - d_3^+ + d_3^- = 300$$

در هریک از محدودیت ها d^+ و d^- متغیرهای انحراف از آرمان میباشند، d^+ نشان دهنده میزان پیشی گرفتن از سطح تمایل تعیین شده است و d^- نشان دهنده میزان عقب ماندن از سطح تمایل است.

در آخر بایستی مدل آرمانی زیر را تشکیل داده و حل کنیم در این مدل تابع هدف مینی موم (Min) متغیرهای انحراف از آرمان نامطلوب میباشد.

به عنوان مثال در محدودیت اول d_1^- نامطلوب است زیرا نشان دهنده میزان سودی است که کمتر از ۱۰ واحد بدست آورده ایم.

در محدودیت دوم d_2^- نامطلوب میباشد زیرا تعداد محصولات که کمتر از ۵ عدد تولید کرده ایم را نشان میدهد.

و در محدودیت سوم d_3^+ نامطلوب خواهد بود زیرا میزان ضایعات بیشتر از ۳۰۰ واحد را نشان میدهد.

$$\text{Min } z = d_1^-, d_2^-, d_3^+$$

s. t

$$\text{محدودیت های آرمانی} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - d_1^+ + d_1^- = 10 \\ x_2 - d_2^+ + d_2^- = 5 \\ 100x_1 - 200x_2 - d_3^+ + d_3^- = 300 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \text{محدودیت های} \\ \text{غیر آرمانی (عملکردی)} \end{matrix} \quad \begin{cases} x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 44 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

برای حل مسئله آرمانی به روش ترسیمی ابتدا بدون توجه به محدودیت های آرمانی و تنها به کمک محدودیت های اصلی مسئله (غیر آرمانی یا عملکردی) ناحیه موجه را می یابیم سپس محدودیت های آرمانی را بدون توجه به متغیرهای انحراف از آرمان اطراف هر محدودیت آرمانی را تعیین میکنیم برای این منظور کافی است عدد سمت راست آن محدودیت را افزایش دهیم جهتی که با افزایش عدد خط به آن سمت منتقل میشود جهت افزایش d^+ آن خط میباشد، در جهت تعیین شده d^- صفر خواهد بود، و در جهت عکس حرکت خط d^- در حال افزایش است و d^+ صفر خواهد بود. بر روی هر خط متغیر d^+ و d^- هر دو صفر میباشد.

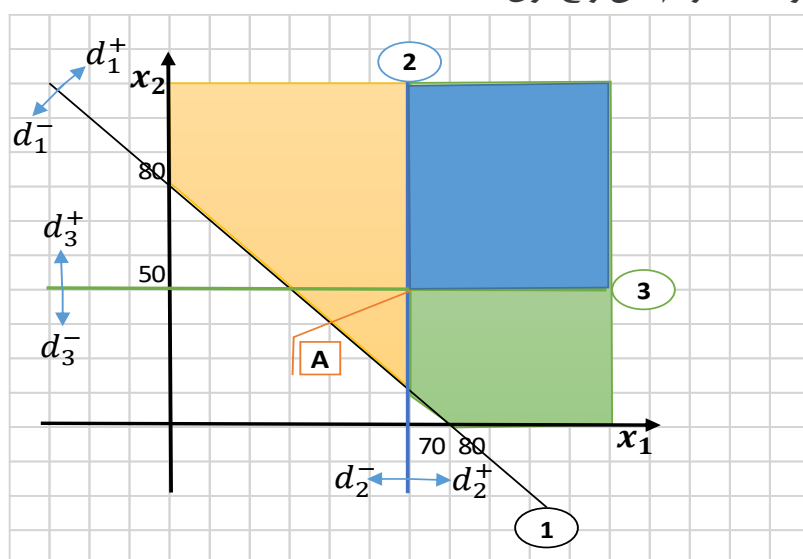
حال با توجه به افزایش d ها نقطه ای را به عنوان جواب انتخاب می کنیم که در آن مقدار متغیرهای انحراف از آرمان نامطلوب مینی موم (Min) شده باشد.

ج) حل مسئله ترسیمی آرمانی (دست نوشته های استاد):

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= p_1 d_1^-, p_2 d_2^-, p_3 d_3^- \\ \text{s.t } &\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 70 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 50 \end{cases} \end{aligned}$$

همه متغیرها نامنفی

چون محدودیت عملکردی نداریم کل ربع اول ناحیه مسئله است.



با اولویت اول $p_1 d_1^-$ بالای خط شماره ۱ ناحیه جواب خواهد شد.

با اولویت دوم $p_2 d_2^-$ سمت راست خط شماره ۲ ناحیه جواب میشود.

با اولویت سوم $p_3 d_3^-$ سمت بالای خط شماره ۳ ناحیه جواب خواهد شد.

در تمام نقاط واقع در مربع بیکران مشخص شده بالای ناحیه $d_1^- = 0$, $d_2^- = 0$, $d_3^- = 0$ و کل این ناحیه جواب است.

مشخص کردن یک نقطه از جواب ها $A: (x_1, x_2)$

$$A: (70, 50) \quad d_1^- = 0 \quad \text{قید اول} \rightarrow 70 + 50 + 0 - d_1^+ = 80 \rightarrow d_1^+ = 40$$

$$Z_1 = 80 + 40 = 120 \quad d_2^- = 0 \quad \text{قید دوم} \rightarrow 70 + 0 - d_2^+ = 70 \rightarrow d_2^+ = 0$$

$$Z_2 = 70 \quad Z_3 = 50 \quad d_3^- = 0 \quad \text{قید سوم} \rightarrow 50 + 0 - d_3^+ = 50 \rightarrow d_3^+ = 0$$

کلاس ساعت ۱۳-۱۱:۳۰ (حل مسائل چند هدفه به کمک برنامه ریزی آرمانی)

در این روش برای حل مسائل از تک هدفه سازی استفاده نخواهد شد، در روش های قبلی تابع هدف ها را به یک هدف تبدیل می نمودیم و بعد مسئله را حل می کردیم، ولی در این روش بدون تک هدفه سازی مسئله حل میگردد،

به این ترتیب که ابتدا برای هر هدف یک سطح تمایل مشخص میگردد، به عنوان مثال برای مسئله قبل که به صورت زیر بود:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max } z & = [-z_1, z_2, z_3] \\
 \text{s.t} & \\
 \text{تابع هدف ها} & \left\{ \begin{array}{ll} Z_1 = 200x_1 - 300x_2 & \leftarrow \text{تابع هدف اول (ضایعات)} \\ Z_2 = 2x_1 - x_2 & \leftarrow \text{تابع هدف دوم (سود)} \\ Z_3 = x_1 & \leftarrow \text{تابع هدف سوم (تعداد محصولات تولید شده اول)} \end{array} \right. \\
 \text{محدودیت ها} & \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

با فرض اینکه تابع هدف اول نشان دهنده میزان ضایعات کارخانه باشد و تابع هدف دوم نشان دهنده سود و تابع هدف سوم میزان تولیدات محصول اول، چنانچه سطح تمایلات به صورت زیر داده شود، بطوریکه حداکثر مقدار هدف اول ۶۰۰ واحد، حداقل مقدار هدف دوم ۸ دلار و حداقل مقدار هدف سوم $\frac{3}{2}$ واحد باشد، آنگاه این هدف ها تبدیل به آرمان میشوند و میتوان محدودیت های آرمانی زیر را برای آنها نوشت:

هدف اول نشان دهنده ضایعات حداکثر ۶۰۰ واحد

هدف دوم نشان دهنده سود حداقل ۸ دلار

هدف سوم نشان دهنده مقدار تولیدات اول $\frac{3}{2}$ واحد

پس سطح تمایل توسط صورت مسئله بیان خواهد شد، و بر اساس این سطح تمایل باید محدودیت های آرمانی را نوشت، حال باید مدل آرمانی مسئله را تشکیل دهیم این مدل همواره از مدل مینی موم سازی پیروی میکند و متغیرهای انحراف از آرمان نامطلوب را مینی موم خواهد کرد،

در هریک از محدودیت ها متغیرهای d^+ و d^- اصطلاحاً متغیرهای انحراف از آرمان نامیده میشوند. d^+ نشان دهنده میزان پیشی گرفتن از سطح قابل تعیین شده است، و d^- نشان دهنده میزان بازماندن از سطح تمایل تعیین شده است.

مثال اگر سطح تمایل ۶۰۰ تعیین شود، $d_1^+ = 100$ یعنی ۱۰۰ واحد بیشتر از ۶۰۰ واحد ضایعات داشته ایم:

$$600 + 100 = 700$$

و اگر $d_1^- = 50$ یعنی ۵۰ واحد کمتر از ۶۰۰ واحد ضایعات داشته ایم:

$$600 - 50 = 550$$

مقدار d^+ و d^- همیشه نا منفی میباشد و نمیتوانند مقدار منفی بگیرند.

حالت های ممکن برای d^+ و d^- :

d^+	d^-	حالت های ممکن
0	0	زمانی که دقیقاً سطح تمایل برآورده شود
+	0	زمانی که بیشتر از سطح تمایل بدست آورده شود
0	+	زمانی که کمتر از سطح تمایل بدست آورده شود
+	+	حالت غیر ممکن زمانی است که چنین اتفاقی رخ نمیدهد

مدل آرمانی مسئله همیشه از مدل مینی موم سازی است و متغیرهای انحراف از آرمان نامطلوب را مینی موم خواهد کرد.

حال باید مدل آرمانی مسئله را تشکیل دهیم این مدل همواره از مدل مینی موم سازی است و متغیرهای انحراف از آرمان نامطلوب را مینی موم خواهد کرد.

مدل آرمانی:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= d_1^+ - d_2^- + d_3^- \\ \text{s.t. } & \begin{cases} 200x_1 - 300x_2 - d_1^+ + d_1^- = 600 \\ 2x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- = 8 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

محدودیت های آرمانی

دقت شود در محدودیت های آرمانی پشت d^+ علامت منفی و پشت d^- علامت مثبت قرار دارد.

$$\begin{aligned} \text{محدودیت های عملکردی} & \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

در مدل آرمانی مسئله همیشه ما دو متغیر داریم یکی از آنها مطلوب و دیگری نامطلوب است، حال d^+ بهتر است یا d^- ، حال هرچه ضایعات بیشتر بدست بیاوریم بهتر است یا هرچه کمتر؟ بدیهی است که هرچه ضایعات کمتر باشد بهتر است، لذا نامطلوب برای ضایعات d^+ است، زیرا هرچه ضایعات بیشتر بدست آید نامطلوب است، پس در محدودیت آرمانی اول چون از نوع مینی موم است هرچه d^- بیشتر شود مطلوب تر است و در محدودیت آرمانی دوم چون هدف سود بوده است هرچه کمتر بدست آوریم نامطلوب و هرچه بیشتر بدست آوریم مطلوب تر است. یعنی چون هدف ماکزیموم سازی است d^+ مطلوب و مقبول است و در محدودیت آرمانی آخر یا سوم چون هدف ماکزیموم سازی بوده مقدار تولید محصول اول هرچه d^+ بیشتر شود مطلوب و افزایش d^- نامطلوب است. در مدل آرمانی ابتدا محدودیت های آرمانی را می نویسیم سپس محدودیت های عملکردی، برای حل مسائل آرمانی دو روش پیشنهاد شده یکی مدل ترسیمی و دیگری سیمپلکس، که به دلیل محدودیت زمانی به روش ترسیمی مدل آرمانی بسنده خواهیم کرد.

توضیح حل مسائل آرمانی به روش ترسیمی:

ابتدا محدودیت های غیر آرمانی (عملکردی) مسئله را در نظر گرفته ناحیه موجه مسئله را به کمک آنها می یابیم:

در محدودیت اول اگر x_1 را صفر بدهیم $x_2 = -4$ و اگر x_2 را صفر بدهیم $x_1 = \frac{4}{3}$ خواهد بود.

در محدودیت دوم اگر x_1 را صفر بدهیم $x_2 = 1$ و اگر x_2 را صفر بدهیم $x_1 = -1$ خواهد بود.

در محدودیت سوم $x_1 = 2$ می باشد.

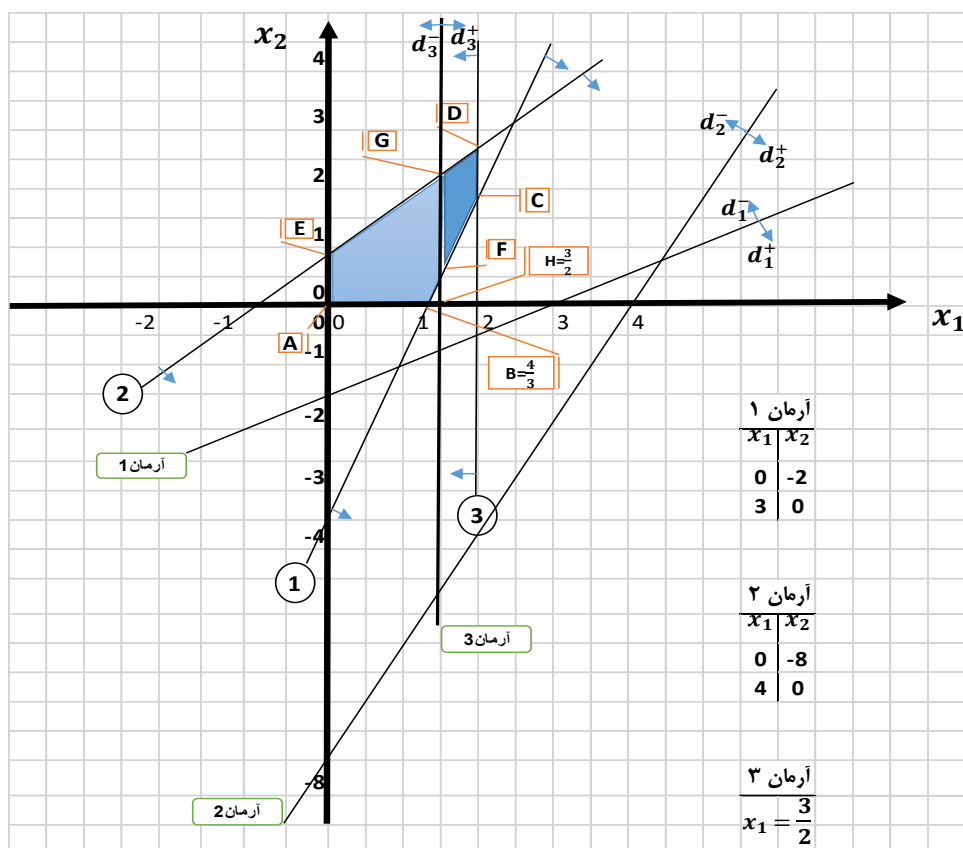
سپس هر یک از محدودیت های آرمانی را بدون در نظر گرفتن d^+ و d^- آنها رسم میکنیم.

ترسیم: ناحیه این مسئله را قبلاً رسم کرده ایم، این مسئله محدودیت های غیر آرمانی نیز دارد لذا ابتدا محدودیت های غیر آرمانی (عملکردی) آن را رسم کرده، سپس محدودیت های آرمانی را رسم می کنیم، از همان نمودار رسم شده قبلی در این قسمت نیز استفاده می کنیم.

نقطه یابی خط آرمان ۱: $x_1 = 3, x_2 = -2$

نقطه یابی خط آرمان ۲: $x_1 = 4, x_2 = -8$

نقطه یابی خط آرمان ۳: $x_1 = \frac{3}{2}$



پس از رسم خطوط آرمان، باید جهت آن را مشخص نمود، یعنی بایستی جهت افزایش d^+ و d^- را در اطراف محدودیت آرمانی پیدا کنیم، برای این منظور کافی است عدد سمت راست محدودیت را اضافه نماییم و جهت حرکت خط را بررسی کنیم سمتی که جهت حرکت خط را نشان میدهد جهت افزایش d^+ آن خط است در این سمت d^- برابر صفر خواهد بود و در سمت مقابل این جهت d^- افزایش خواهد یافت و d^+ صفر خواهد بود.

روی خط هر دو d^+ و d^- صفر خواهند بود، در انتها با توجه به جهت های تعیین شده نقطه ای را پیدا می کنیم که متغیرهای انحراف از آرمان نامطلوب را مینی موم نماید. این طور نیست که بالای خط d^+ باشد و پائین خط d^- ، اگر عدد سمت راست محدودیت آرمانی اول زیاد شود، یعنی ۶۰۰ به ۹۰۰ تبدیل شود چه اتفاقی خواهد افتاد؟

$$200x_1 - 300x_2 - d_1^+ + d_1^- = 600$$

در حالتی که سمت راست عدد ۶۰۰ باشد اگر x_1 را صفر بدهیم x_2 برابر ۲- خواهد شد، اما اگر عدد سمت راست را افزایش دهیم یعنی ۶۰۰ تبدیل به ۹۰۰ شود اگر x_1 را صفر بدهیم x_2 برابر ۳- خواهد شد،

یعنی روی محور x_2 خط آرمان پائین خواهد یافت و کاهش خواهیم داشت، حال اگر در حالتی که سمت راست عدد ۶۰۰ باشد x_2 را صفر بدهیم x_1 برابر ۳ خواهد شد، اما اگر عدد سمت راست تبدیل به ۹۰۰ شود و x_2 را صفر بدهیم x_1 برابر ۴/۵ خواهد شد، یعنی افزایش خواهد یافت، پس سمتی که x_1 افزایش می یابد یعنی سمت راست خط محل قرار گرفتن d^+ و سمتی که x_2 کاهش می یابد، یعنی سمت چپ خط محل قرار گرفتن علامت d^- خواهد بود.

دقت شود که نیازی به رسم خط در موقعیت جدید افزایشی ۶۰۰ به ۹۰۰ نیست و اگر فقط جهت d^+ و d^- را به درستی تعیین نمودید یعنی مفهوم آن را فهمیدید کافی است. در سایر محدودیت های آرمانی نیز به همین شکل باید جهت d^+ و d^- را مشخص نمود.

حال با توجه به اولویت ها و مقادیری که داریم بهترین نقطه را پیدا می کنیم، در حال حاضر اولویت بندی این نیست که ابتدا d_1^+ را پیدا کنیم بعد d_2^+ ، می توان از سایر خط آرمان ها شروع کرد، مثلاً بجای آنکه برویم سراغ d_1^+ می رویم سراغ اینکه آیا میتوان d_1^- را کمینه کرد، d_1^+ به سمت راست زیاد می شود می خواهیم کمینه کنیم سمت مقابل را انتخاب می کنیم، پس بالای خط صفر است و ناحیه موجه مسئله با مینی موم d_1^+ تغییری نمی کند.

ناحیه موجه اولیه مسئله ABCDE با مینی موم d_1^+ باز هم همان ABCDE خواهد بود. مینی موم d_2^- نقطه ای که کمترین فاصله را دارد نقطه بهینه خواهد بود، نزدیک ترین نقطه به خط آرمان ۲ نقطه B میباشد.

اولویت سوم d_3^- است چون d_3^- در نقطه B مقدار دارد و مقدار آن نیز مثبت است دنبال d_2^- می رویم، d_3^- در یک طرف در حال افزایش و در طرف دیگر در حال کاهش است در بین نقاط بطور یقین دو تابع هدف برآورده می شود، یعنی هم d_1^+ و هم d_3^- صفر است. می ماند d_2^+ ، پس ابتدا به دنبال تابع هدف هایی که بتوان آن را صفر کرد، بعد دنبال سایر تابع هدف ها می رویم.

ناحیه موجه اولیه: $\leftarrow \text{Min } d_1^+ \text{ ABCDE}$

ناحیه موجه دوم: $\leftarrow \text{Min } d_3^- \text{ ABCDE}$

ناحیه موجه سوم: $\leftarrow \text{Min } d_2^+ \text{ FGCD}$

در توضیح ناحیه چهار ضلعی FGCD، چون اولویت برای تابع هدف ها نداریم سعی می کنیم طوری عمل کنیم که تعداد تابع هدف های بیشتری به مینی موم مقدار شان یعنی صفر برسند. یعنی ناحیه ای را انتخاب کرده ایم که :

$$(d_3^- = 0, d_1^+ = 0)$$

بعد به دنبال نقطه ای می رویم که d_2^- برابر کمترین مقدار شود، ممکن است شک کنیم که نقطه C بهتر است یا نقطه F در این موارد مختصات آن نقاط را بدست می آوریم، مختصات نقطه C روی خط آرمان ۲ چنین است:

$$\begin{aligned} C: (2,2) \rightarrow 2 \text{ خط آرمان } &\rightarrow 2x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- = 8 \\ &\rightarrow 2(2) - (2) - 0 + d_2^- = 8 \rightarrow d_2^- = 6 \end{aligned}$$

و مختصات نقطه F روی خط آرمان 2 برابر است با :

$$\begin{aligned} F: \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow 2 \text{ خط آرمان } &\rightarrow 2x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- = 8 \\ &\rightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - 0 + d_2^- = 8 \rightarrow d_2^- = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

چون نقطه $F=5.5$ پس نقطه F از نقطه C کمتر است و به عنوان جواب نهائی مسئله شناخته میشود، در نقطه F بعضی d ها صفر هستند نقاط صفر عبارتند از: d_1^+ و d_2^+ و d_3^- پس باید نقاط d_1^- که مقدار دارد را پیدا کنیم و d_2^- که پیدا شد و $\frac{11}{2}$ بود و d_3^+ را نیز باید پیدا کنیم یعنی ابتدا از معادلات آرمانی ۱ و ۳ استفاده می کنیم d_3^+ و d_1^- را پیدا می کنیم بعد به تابع هدف ها اضافه یا کم میشود:

$$\begin{aligned} F: \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow 1 \text{ خط آرمان } &\rightarrow 200x_1 - 300x_2 - d_1^+ + d_1^- = 600 \\ &\rightarrow 200\left(\frac{3}{2}\right) - 300\left(\frac{1}{2}\right) - 0 + d_1^- = 600 \rightarrow d_1^- = 450 \end{aligned}$$

$$F: \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow 3 \text{ خط آرمان } \rightarrow x_1 - d_3^+ + d_3^- = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2} - d_3^+ + 0 = \frac{3}{2} \rightarrow d_3^+ = 0$$

البته نیازی به محاسبه نقطه d_3^+ نیز نبود زیرا نقطه F روی محدودیت آرمانی سوم است پس d_3^+ و d_3^- هر دو صفر هستند، چون روی محدودیت آرمانی است صفر است، لذا مسائل را هر چه ساده تر حل نماییم بهتر است. بنابر این پاسخ هایی را که بدست آورده ایم داخل تابع هدف ها میگذاریم:

$$Z_1 = 600 - 450 = 150$$

$$Z_2 = 8 - \frac{11}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$Z_3 = x_1 \rightarrow \frac{3}{2} = 1.5$$

گامهای حل مسائل آرمانی به روش ترسیمی:

- ۱- تعیین و رسم ناحیه موجه غیر آرمانی (عملکردی)
- ۲- تعیین و رسم محدودیت های آرمانی
- ۳- نمایش جهت افزایش و کاهش متغیر های d (ها) خطوط آرمانی
- ۴- مشخص نمودن ناحیه موجه
- ۵- مشخص نمودن مختصات نقاط در ناحیه موجه
- ۶- جای گذاری پاسخ های بدست آمده در تابع هدف ها

نکته: معمولاً برای امتحان مسائلی داده خواهد شد که اولویت ندارد این مسائل را از هر قسمتی میتوان شروع به حل نمود، ولی باید از نقطه ای شروع به حل کنیم که تعداد d های بیشتری به صفر برسد، یعنی یک d خواهد بود که مقدار صفر ندارد و گر نه اکثر d ها صفر خواهد شد.

• حل نمونه مسئله ترسیمی آرمانی (دست نوشته های استاد - ص ۳-ه):

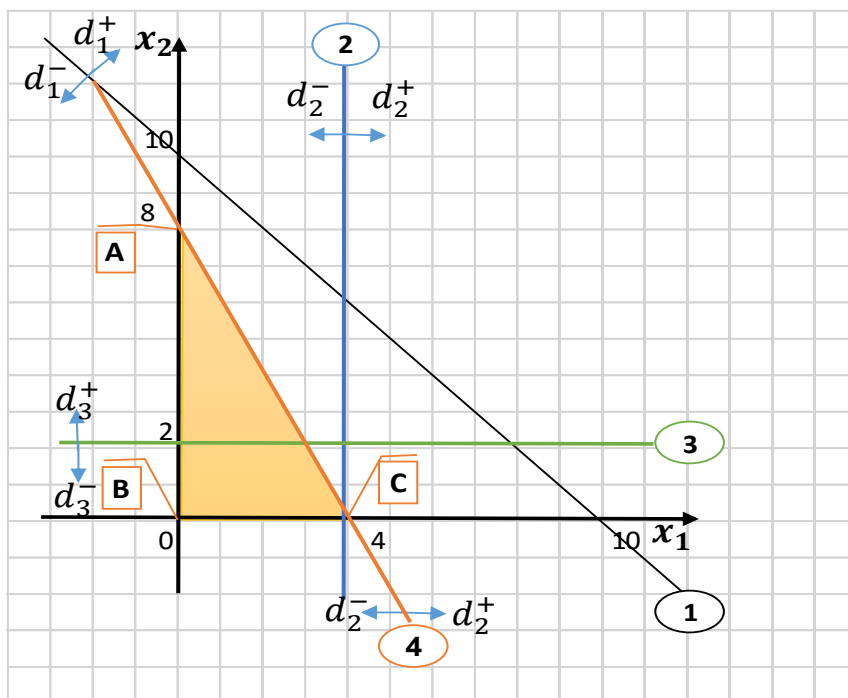
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = p_1 d_4^+, 6p_2 d_3^-, 7.5p_2 d_2^-, p_3 d_1^- \\ \text{s.t} & \end{array}$$

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10$$

$$\begin{aligned}x_1 + d_2^- - d_2^+ &= 4 \\x_2 + d_3^- - d_3^+ &= 2 \\2x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ &= 8\end{aligned}$$

همه متغیرها نامنفی

چون محدودیت عملکردی نداریم پس کل ربع اول جواب است.



با توجه به اولویت اول که مینی موم d_4^+ است مثلث ABC ناحیه جواب خواهد شد.

با توجه به اولویت دوم چون ضریب d_2^- (۷/۵) است و بزرگتر از ضریب d_3^- (۶) میباشد پس ابتدا d_2^- مینی موم می شود در ناحیه ABC تنها نقطه ای که کمترین مقدار d_2^- را دارد نقطه C است.

چون یک نقطه باقی مانده دیگر اولویت های عیدی بررسی نخواهند شد، همین نقطه جواب است.

C: (x_1, x_2)

C: (4,0)

$$d_1^+ = 0 \rightarrow \text{قید اول} \rightarrow 4 + 0 + d_1^- - 0 = 10 \rightarrow d_1^- = 6$$

$$d_2^- = 0 \rightarrow d_2^+ = 0 \rightarrow d_4^- = 0 \rightarrow -d_4^+ = 0$$

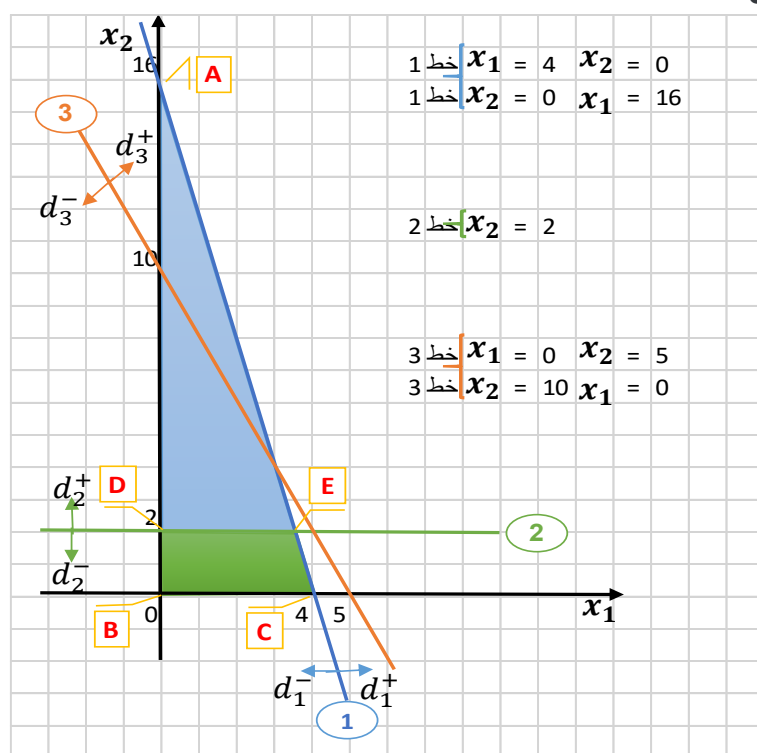
$$d_3^+ = 0 \rightarrow 0 + d_3^- - 0 = 2 \rightarrow d_3^- = 0$$

$$Z_1 = 10 - 6 = 4 \rightarrow Z_2 = 4 \rightarrow Z_3 = 2 - 2 = 0 \rightarrow Z_4 = 8$$

• حل نمونه مسئله ترسیمی آرمانی (دست نوشته های استاد - ص ۳-د):

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= p_1 d_1^+, p_2 d_2^+, p_3 d_3^- \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - d_1^+ + d_1^- &= 8 \\ 2x_2 - d_2^+ + d_2^- &= 4 \\ 8x_1 + 4x_2 - d_3^+ + d_3^- &= 40 \end{aligned}$$

همه متغیرها نامنفی



در مجموع ربع اول داریم: اولویت با d_1^+ است پس مثلث ABC جواب است.

اولویت دوم با d_2^+ است لذا دوزنقه BDEC ناحیه جواب خواهد شد.

اولویت سوم با d_3^- است پس نزدیکترین نقطه از دوزنقه BDEC به خط سوم نقطه E میباشد.

محل تلاقی خط ۱ و ۳

$$E: (x_1, x_2)$$

$$E: \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

$$d_1^- = 0 \rightarrow d_1^+ = 0 \rightarrow d_2^- = 0 \rightarrow d_2^+ = 0$$

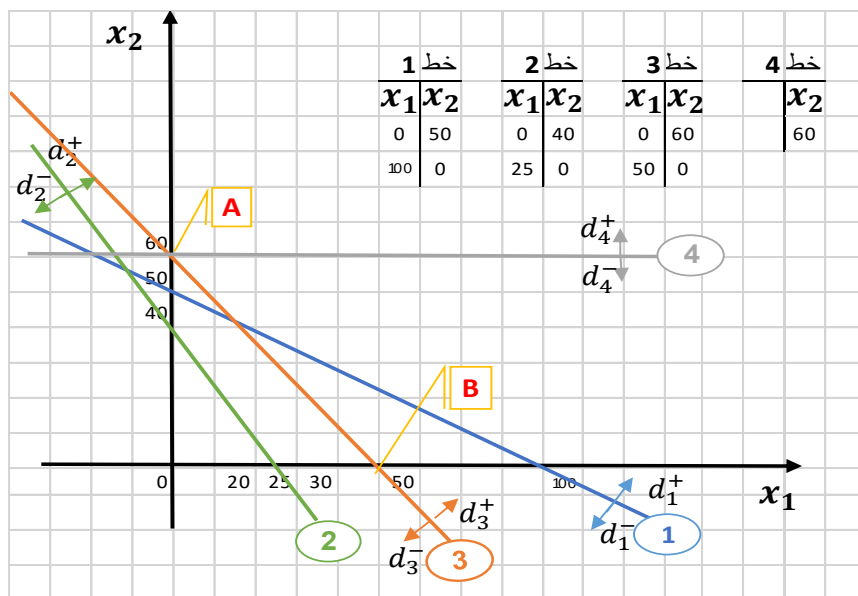
$$d_3^+ = 0 \rightarrow d_3^- = ? \rightarrow \text{قید سوم} \rightarrow 8\left(\frac{7}{2}\right) + 4(2) - 0 + d_3^- = 40 \rightarrow d_3^- = 40$$

$$Z_1 = 8 \rightarrow Z_2 = 4 \rightarrow Z_3 = 40 - 4 = 36$$

• حل نمونه مسئله ترسیمی آرمانی (دست نوشته های استاد - ص ۴):

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= p_1 d_3^+, p_1 d_3^-, p_2 d_4^+, p_2 d_4^- \\ 20x_1 + 40x_2 + d_1^- - d_1^+ &= 2000 \\ 32x_1 + 20x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 800 \\ 24x_1 + 20x_2 + d_3^- + d_3^+ &= 1200 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- &= 60 \end{aligned}$$

همه متغیرها نامنفی



کل ربع اول ناحیه جواب است.

اولویت اول با d_3^+ و d_3^- است پس تمام نقاط روی خط سوم در ربع اول جواب است یعنی پاره خط AB و چون اولویت دوم با d_4^+ و d_4^- است پس تمام نقاط روی خط چهارم که البته روی پاره خط AB باشند جواب هستند پس تک نقطه A جواب است. (محل تلاقی خط ۳ و ۴)

$$A: (x_1, x_2)$$

$$A: (0, 60) \quad d_3^- = d_3^+ = d_4^- = d_4^+ = 0$$

$$d_1^- = 0 \rightarrow d_1^+ = ? \rightarrow 20(0) + 40(60) - d_1^+ = 2000 \rightarrow d_1^+ = 400$$

$$d_2^- = 0 \rightarrow d_2^+ = ? \rightarrow 32(0) + 20(60) - d_2^+ = 800 \rightarrow d_2^+ = 400$$

$$Z_1 = 2000 + 400 = 2400$$

$$Z_2 = 800 + 400 = 1200$$

$$Z_3 = 1200$$

$$Z_4 = 60$$

• حل مسائل اولویت مطلق و معیار جامع (دست نوشته های استاد - ص ۵):

- مسائل زیر را در نظر بگیرید و با استفاده از روش اولویت مطلق و با اولویت Z_2 و معیار جامع این دو مسائل را حل کنید:

الف) مسئله زیر را حل کنید:

$$\text{Max } Z = [Z_1, Z_2]$$

s. t

$$Z_1 = 4x_1 + 2x_2$$

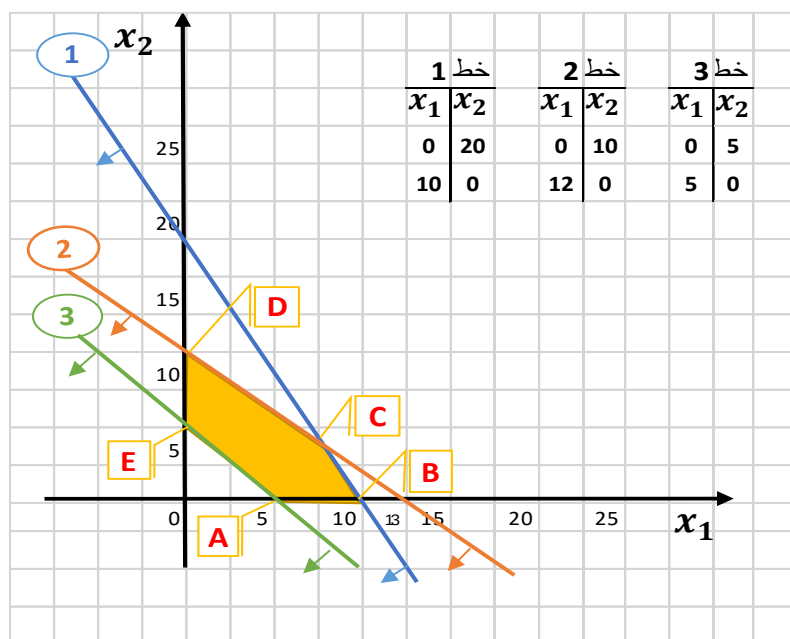
$$Z_2 = x_2$$

$$20x_1 + 10x_2 \leq 200$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 60$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



مختصات گوشه:

$$A: \begin{bmatrix} x_1=5 \\ x_2=0 \end{bmatrix} \quad B: \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C: \begin{matrix} \text{خط 1} \rightarrow \\ \text{خط 2} \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 20x_1 + 10x_2 = 200 \\ 5x_1 + 6x_2 = 60 \end{cases} \times -4 \begin{cases} 20x_1 + 10x_2 = 200 \\ -20x_1 - 24x_2 = -240 \end{cases} \rightarrow \text{جمع} \rightarrow -14x_2 = 40 \rightarrow x_2 = \frac{40}{-14} = -\frac{20}{7}$$

$$\rightarrow 20x_1 + 10\left(-\frac{20}{7}\right) = 200 \rightarrow 20x_1 = 200 - \frac{400}{7} = \frac{2800 - 400}{7} = \frac{2400}{7} \rightarrow x_1 = \frac{120}{7}$$

$$C: \begin{bmatrix} \frac{60}{7} \\ \frac{20}{7} \end{bmatrix} \quad D: \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad E: \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

حل به روش اولویت مطلق با اولویت Z_2 :

$$Z_2 = x_2 \quad Z_2^A = 0 \quad Z_2^B = 0 \quad Z_2^C = \frac{20}{7} \quad Z_2^D = 10 \quad Z_2^E = 5$$

نقطه D جواب بهینه مسئله ای است که تنها Z_2 هدف آن است، چون جواب چندگانه نیست نیازی به بررسی Z_1 نمی باشد جواب نهایی همین نقطه D است.

$$D: (0,10) \quad Z_1^D = 20 \quad Z_2^D = 10$$

حل به روش معیار جامع:

از قسمت قبل نقطه بهینه Z_2 تعیین شد، ابتدا لازم است Z_1 را بهینه نماییم.

$$Z_1^A = 20 \quad Z_1^B = 40 \quad Z_1^C = \frac{280}{7} = 40 \quad Z_1^D = 20 \quad Z_1^E = 10$$

نقاط B و C هر دو در تابع هدف اول بهینه اند، جدول زیر را در نظر می گیریم:

نقطه	Z_1	Z_2
A:(5,0)	20	0
B:(10,0)	40	0
C:($\frac{60}{7}, \frac{20}{7}$)	40	$\frac{20}{7}$
D:(0,10)	20	10
E:(0,5)	10	5

حال باید مسئله زیر حل شود:

$$\text{Min } Z = \frac{40 - (4x_1 + 2x_2)}{40} + \frac{10 - x_2}{10}$$

s.t

$$20x_1 + 10x_2 \leq 200$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 60$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z_A = \frac{40 - 20}{40} + \frac{10 - 0}{10} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$Z_B = \frac{40 - 40}{40} + \frac{10 - 0}{10} = 0 + 1 = 1$$

$$Z_C = \frac{40 - 20}{40} + \frac{10 - 0}{10} = \frac{1}{2}$$

$$Z_E = \frac{40 - 10}{40} + \frac{10 - 5}{10} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

ب) مسئله زیر را حل کنید:

$$\text{Max } Z = [Z_1, Z_2]$$

s. t

$$Z_1 = x_1$$

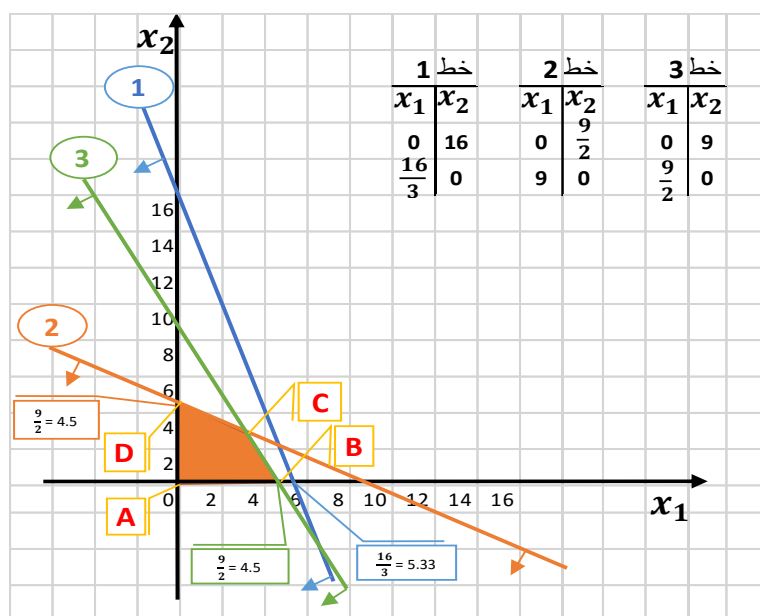
$$Z_2 = x_1 + 2x_2$$

$$3x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



مختصات گوشه:

$$A: \begin{bmatrix} x_1=0 \\ x_2=0 \end{bmatrix} \quad B: \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C: \begin{cases} \xrightarrow{2} x_1 + 2x_2 = 9 \\ \xrightarrow{3} 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases} \quad \times -2 \quad \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 - 4x_2 = -18 \\ 2x_1 - 2x_2 = 9 \end{array} \right\} \rightarrow \text{جمع} \rightarrow -3x_2 = -18 \rightarrow x_2 = 3$$

$$\rightarrow x_1 + 2(3) = 9 \rightarrow x_1 = 3$$

$$C: \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad D: \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

حل به روش اولویت مطلق با اولویت Z_2 :

$$Z_2^A = 0 \quad Z_2^B = \frac{9}{2} \quad Z_2^C = 9 \quad Z_2^D = 9$$

چون اولویت با Z_2 است و C و D هر دو جواب بهینه Z_2 خواهند بود، چون جواب چندگانه است باید Z_1 یعنی اولویت بعدی نیز ارزیابی گردد، در واقع داریم:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z_2 &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad &3x_1 + x_2 \leq 16 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ &2x_1 + x_2 \leq 9 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جواب های بهینه:

$$C: (3,3) \quad Z_2^C = 9 \quad D: \left(0, \frac{9}{2}\right) \quad Z_2^D = 9$$

مسئله ای که هم اکنون می بایست حل شود:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z_1 &= x_1 \\ \text{s.t.} \quad &3x_1 + x_2 \leq 16 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ &2x_1 + x_2 \leq 9 \\ &x_1 + 2x_2 = 9 \quad \leftarrow \text{محدودیت جدید} \quad Z_1 = Z_1^* \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ناحیه شدنی این مسئله تنها پاره خط CD میباشد، مقدار دو سر بازه یعنی C و D را در Z_1 می یابیم.

$$Z_1^C = 3 \quad Z_1^D = 0$$

لذا نقطه بهینه نهایی C میباشد:

$$C: (3,3) \quad Z_1^C = 3, \quad Z_2^C = 9$$

حل به روش معیار جامع:

نقطه	$Z_1 = x_1$	$Z_2 = x_1 + 2x_2$
A: (5,0)	0	0
B: $(\frac{9}{2}, 0)$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$
C: (3,3)	3	9
D: $(0, \frac{9}{2})$	0	9

$$\text{Min } Z = \frac{\frac{9}{2} - x_2}{\frac{9}{2}} + \frac{9 - (x_1 + 2x_2)}{9}$$

s. t

$$3x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z_A = \frac{\frac{9}{2} - 0}{\frac{9}{2}} + \frac{9 - 0}{9} = 2$$

$$Z_B = \frac{\frac{9}{2} - \frac{9}{2}}{\frac{9}{2}} + \frac{9 - \frac{9}{2}}{9} = \frac{1}{2}$$

$$Z_C = \frac{\frac{9}{2} - 3}{\frac{9}{2}} + \frac{9 - 9}{9} = \frac{1}{3}$$

$$Z_D = \frac{\frac{9}{2} - 0}{\frac{9}{2}} + \frac{9 - 9}{9} = 1$$

حل مسئله به روش تبدیل تابع هدف به محدودیت:

اگر در مسئله قبل حداقل مقدار x_1 برابر ۲ باشد مسئله را به روش تبدیل تابع هدف به محدودیت حل نمایید:

چون $Z_1 = x_1$ پس میتوان تابع هدف اول را به محدودیت تبدیل نمود، لذا داریم:

$$\text{Max } Z_2 = x_1 + 2x_2$$

s. t

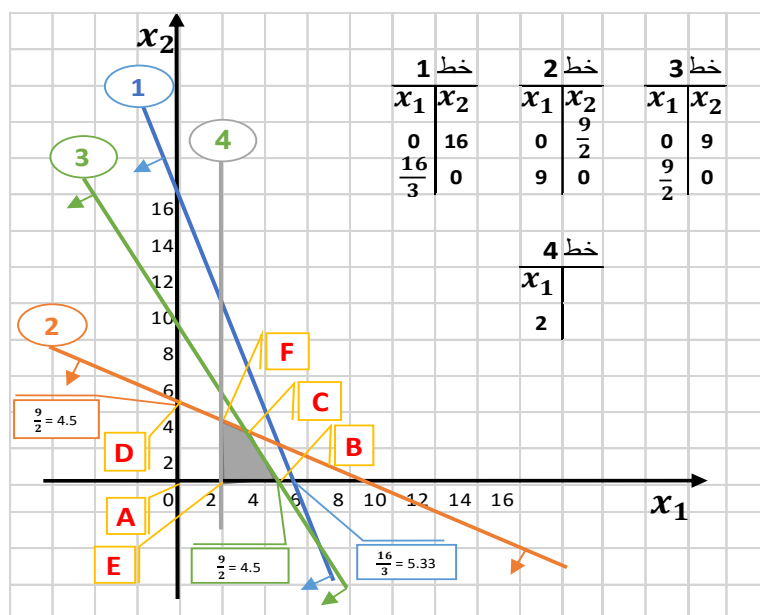
$$3x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 2 \quad \leftarrow \text{محدودیت جدید}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



در این حالت ناحیه به چهار ضلعی EFBC تغییر می یابد چون قبلاً C نقطه بهینه Z_2 بوده و در این جا نیز C هنوز در ناحیه جدید واقع میشود، لذا همان نقطه C جواب بهینه است.

حل مسئله به روش وزن دهی توابع هدف:

اگر در مسئله قبل هدف دوم $\frac{9}{4}$ هدف اول اهمیت داشته باشد با روش وزن دهی به توابع مسئله را حل کنید.

$$\frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

هدف دوم = ۱

$$\frac{9}{4} = \text{هدف اول}$$

$$W_1 = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{13}{4}} = \frac{9}{13}$$

$$W_2 = \frac{1}{\frac{13}{4}} = \frac{4}{13}$$

$$\text{Max } Z = \frac{9}{13}x_1 + \frac{4}{13}(x_1 + 2x_2) = x_1 + \frac{8}{13}x_2$$

s. t

$$3x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$A: (0,0) \quad Z_A = 0$$

$$B: \left(\frac{9}{2}, 0\right) \quad Z_B = \frac{9}{2}$$

$$C: (3,3) \quad Z_C = \frac{63}{13}$$

$$D: \left(0, \frac{9}{2}\right) \quad Z_D = \frac{36}{13}$$

نقطه C بهینه خواهد بود $(Z_C = \frac{63}{13})$.

پایان