بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

از سری جزوات آموزشی:

ساختمانهای

گسسته

تالیف : دکتر بهروز قلی زاده

ناشر : انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

گردآوری : واحد آموزشی انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

تایپ : واحد فناوری انجمن فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور قم

فصل اول : حساب گزاره ها

تعریف : در یک استدلال هر یک از عبارات استفاده شده برای رسیدن به نتیجه را فرض یا مقدم و عبارت آخر را نتیجه یا تالی مینامیم.

- یک استدلال زمانی معتبر است که اگر فرضهای آن درست باشد نتیجه نیز درست است.

- جملات یا راست هستند یا دروغ ولی هرگز نمیتوانند هم راست باشند هم دروغ. چنین جملاتی را گزاره می نامیم.

قاعده ی طرد شق ثالث: گزاره ای که دروغ نیست پس راست است و بر عکس.

گزاره : یک جمله ی خبری است که یا راست است یا دروغ ولی نه هردو.

قضیه : گزاره ای که راست بودن آن را در یک سیستم ریاضی بتوان ثابت کرد.

تشکیل گزاره های جدید از روی گزاره های قبلی (حروف پیوندی مبنا) :

- حرف پیوندی ((و))،((عطف))،(($\wedge$)) : زمانی راست است که هر دو راست باشد.
- حرف پیوندی ((یا))،((فصل))،(($\vee$)) : زمانی راست است که یکی از گزاره ها راست باشد.
- نقیض ((~)) یا نفی یک گزاره ها : ارزش گزاره ی اول را نفی میکند.
- جدول درستی : روشی برای تجزیه و تحلیل ارزشهای گزاره ها

نکته : در نوشتن جدول درستی اگر **n** گزاره ی مبنا داشته باشیم 2^{n} ترکیب داریم.

مراحل ارزیابی جدول:

1. داخلی ترین پرانتز
2. عمل ~
3. عمل $\wedge$ و $\vee$

گزاره ی راستگو : ارزش درستی گزاره های مبنای تشکیل دهنده آن همواره راست باشد.

نکته: دو گزاره را به طور منطقی هم ارز گوییم اگر به ازای هر ترکیب همسان از ارزش گزاره های مبنای تشکیل دهنده آنها مقادیر درستی یکسانی داشته باشند. (با گزاره های هم ارز میتوان گزاره های پیچیده را با گزاره های ساده جایگزین کرد)

$p \equiv q$

گزاره ی شرطی (**p à q**) :گزاره p را مقدم و q را تالی مینامیم و این گزاره زمانی نادرست است که مقدم درست ولی تالی نادرست باشد.

قضیه : $p \text{ à } q \equiv \sim q \vee q \equiv \sim q \text{ à } \sim p \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

تعاریف شرطی :

- اگر p آنگاه q
- q اگر p
- p تنها اگر q
- P شرط کافی برای q است
- q شرط لازم برای p است

تعریف : اگر p à q گزاره ی شرطی باشد ، گزاره ی ~q à ~p را عکس نقیض، q à p را عکس و ~p à ~q را وارون آن گزاره میگوییم.

خواص گزاره ها :

جابجایی : $q \vee p \equiv p \vee q \quad , \quad q \wedge p \equiv p \wedge q$

شرکت پذیری : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad , \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

قانون دمورگان : $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q) \quad , \quad \sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$

خود توانی : $p \equiv p \vee p \quad , \quad p \equiv p \wedge p$

پخش پذیری :
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r) \quad , \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$

همانی : $T \equiv p \vee T \quad , \quad p \equiv p \vee F \quad , \quad p \equiv p \wedge T \quad , \quad F \equiv p \wedge F$

متمم : $T \equiv p \vee \sim p \quad , \quad F \equiv p \wedge \sim p$

نقیض دوگانه : $\sim\sim p \equiv p$

جزبی : $p \equiv p \vee (p \wedge q) \quad , \quad p \equiv p \wedge (p \vee q)$

گزاره ی دوشرطی ($p \leftrightarrow q$) : اگر ارزش دو گزاره ی تشکیل دهنده ی آن یکسان باشند آنگاه ارزش آن راست است و به این صورت بیان میشود : p اگر و تنها اگر q

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q)$$

روشهای اثبات :

از q ، $p_1 , p_2 , \dots , p_n$ نتیجه میشود $\rightarrow$ یک راستگو باشد $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$

نماد $\vdash$ (بنابراین) :

$$\mathbf{p_1 , p_2 , p_3 , \dots , p_n \vdash q}$$

- در گزاره ی فوق p_i مقدم ها و مفروضات گزاره و q نتیجه می باشد.
- مجموعه ی فوق در کل یک **استنتاج** می باشد.

چند قاعده ی مهم استنتاج :

قیاس فصلی $\quad p \vdash p \vee q$

قیاس تخصیصی $\quad p \wedge q \vdash p$

قیاس عطفی $\quad p , q \vdash p \wedge q$

قیاس استنتاجی $\quad p , p \rightarrow q \vdash q$

قیاس تعدی $\quad p \rightarrow q , q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

قیاس عکس $\quad p \rightarrow q , \sim q \vdash \sim p$

استدلال غلط : استدلالی است که برای بعضی حالات مقدم های آن راست ولی تالی دروغ باشد

اثبات غیر مستقیم :

یک استلزام منطقی با عکس نقیض آن هم ارز است : p à q ≡ ~q à ~p

زیرا که گزاره ی روبرو یک راستگو است (p à q) ß à (~q à ~p)

در این اثبات به جای آن که ثابت کنیم به طور مستقیم p à q درست است، فرض می کنیم که q دروغ است و نشان می دهیم که در صورت اخیر p نیز دروغ است.

اثبات به وسیله ی برهان خلف :

این روش بر پایه ی راستگوی [(p à q) $\wedge$ ~q] à ~p

و یا قیاس p à q , ~q $\vdash$ ~p

بنا شده است.

بدین معنی که اگر گزاره ی p به گزاره ی دروغ q منجر شود آنگاه خود p باید دروغ باشد.

تناقض : گزاره ای که ارزش آن صرف نظر از مقادیر متغیرهای ظاهر شده در آن **همواره دروغ** است.

نکته : هر گزاره ای که به یک تناقض منجر شود باید دروغ باشد.

نکته : اگر همه ی p_i ها راست و ~q دروغ باشد در نتیجه q راست است. (**برهان خلف**)

گزاره نما : عبارتی است که اگر مقادیر متغیرهای به کار رفته درآن مشخص شود به گزاره تبدیل شود.

- گزاره نمایی که تنها شامل یک متغیر باشد **1-مکانی**، شامل دو متغیر باشد **2-مکانی** و اگر شامل n متغیر باشد **n-مکانی** نامیده میشود .
- مجموعه مقادیری که میتواند جایگزین یک متغیر موجود در گزاره نما شود **جهان** نامیده می شود.
- یک گزاره نمای n-مکانی را **ارضا شدنی** می گوییم هرگاه یک n تایی موجود باشد که آن را ارضا کند
- اگر تمامی n تایی ها موجب ارضای آن شوند گزاره نمای مزبور را **معتبر** خواهیم گفت.
- دو گزاره نما را **هم ارز** می گوییم هر گاه به ازای کلیه ی مقادیر ممکن از متغیرهایشان ارزش درستی یکسان داشته باشند. $X_{(x)}$ ß à $Y_{(x)}$ هم ارز معتبر است

سورها

سور جهانی (عمومی) : به مقادیر ویژه ای از a و b بستگی ندارد، بلکه وابسته به این است که عبارت مزبور به ازای همه ی مقادیر a و b راست است.

گزاره نما به ازای هر مقداری که به متغیر a منسوب شود راست است : $\forall a \ R_{(a)}$

سور وجودی : متغیری در یک گزاره نما که می توان با انتقاب مقدار مناسبی برای متغیر یار شده به یک گزاره ی راست تبدیل کرد. $\exists a \ R_{(a)}$

$\forall x \ P(x)$ تمامی مقادیر از جهان متغیر x گزاره نمای p را ارضا می کند. (جهانی)

$\exists x \ P(x)$ دست کم یک مقدار از جهان متغیر x وجود دارد که p را ارضا کند. (وجودی)

نقیض گزاره های سوردار :

- سورهای وجودی ⟵ ترکیب فصلی $\exists x \sim p(x) \equiv \sim[\ \forall x \ P(x)\ ]$
- سورهای عمومی ⟵ ترکیب عطفی $\forall x \sim p(x) \equiv \sim[\exists \ x \ P(x)\ ]$

منطق گزاره ای : حالت خاصی از منطق گزاره نماهاست که در آن هیچ کدام از گزاره ها شامل سور و متغیر نیست.

چهار قاعده ی مهم استنتاج :

تعمیم وجودی

$$P(a) \ \vdash \exists X \ P(x)$$

تعمیم جهانی

$$P(a) \ \vdash \forall X \ P(x)$$

- a یک عضو دلخواه از جهان مورد بحث است.

وجود لحظه ای

$$\exists X \ P(x) \ \vdash \ P(a)$$

- a عضو ویژه از یک جهان متغیر x به گونه ای که P را ارضا کند

$\forall$ X P(x) $\vdash$ P(a)

جهان لحظه ای

- a هر عضوی از جهان متغیر X می تواند باشد.

اعمال سورها بر روی ترکیب های عطفی و فصلی در گزاره نماها

$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \equiv \forall x\, [P(x) \wedge Q(x)]$

$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \equiv \exists x\, [P(x) \wedge Q(x)]$

$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \vdash \forall x\, [P(x) \vee Q(x)]$ هم ارز نیستند

$\exists x\, [P(x) \wedge Q(x)] \vdash \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ هم ارز نیستند

$\forall x\, [P(x) \vee Q] \equiv \forall x\, [P(x) \wedge Q]$ Qگزاره ای است که شامل متغیر X نیست

استقرای ریاضی

اصل استقرای ریاضی قاعده ی استنتاجی را در اختیار ما قرار می دهد

$P(1)\,,\ \forall x\, [P(k) \rightarrow P(k+1)] \vdash \forall n\, P(n)$

1. **P(1)** راست است
2. $\forall k \geq 1$, P(k) و P(k+1) را نتیجه می دهد
3. P(n) راست و $\forall k \geq n$ و P(k) نتیجه می دهد P(k+1) را .

- **مبنای استقرا** : نشان می دهیم $P(n)$ راست است
- **فرض استقرا** : فرض کنیم برای هر $k \ge n$ ، $P(k)$ راست است
- **مرحله استقرا** : با استفاده از فرض نشان دهیم $P(k+1)$ راست است

بازگشت : روش تعیین یک تابع می باشد ، یک مجموعه و یا یک الگوریتم را که تابعی از خودش باشد بازگشت گوییم.

تابع بازگشتی فاکتوریل : $f(0) = 1 \;,\; \forall n \ge 0 \;,\; f(n+1) = (n+1)\, f(n) \;,\; f(n)=n!$

تابع تصاعد حسابی : $A(0) = a \;,\; \forall n \ge 0 \;,\; A(n+1) = A(n) + d \;,\; A(n)= a + nd$

فیبوناچی : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \;,\; \forall n \ge 1 \;,\; F_1 = 1 \;,\; F_0 = 0$

استقرای ریاضی قوی : فرض کنید $P(n)$ عبارتی باشد که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n مقدار آن یا راست و یا دروغ باشد به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، $P(n)$ راست است. هرگاه عدد صحیح مثل $q \ge 1$ موجود باشد به گونه ای که : $P(1)$ و $P(2)$ و … و $P(q)$ همه راست باشند ، برای هر $k \ge q$ با فرض راست بودن $P(i)$ و $k \ge i \ge 1$ بتوان راست بودن $p(k+1)$ را نتیجه گرفت.

روش اثبات:

1. **مبنای استقرا** : $p(1)$ و $P(2)$ و … و $P(q)$ همه راست باشند.
2. **فرض استقرا** : فرض اینکه $P(i)$ و $k \ge i \ge 1$ راست هستند که در آن $k \ge q$
3. **مرحله استقرا** : نشان دارن اینکه $P(k+1)$ راست است.

پایان فصل اول

فصل دوم : روابط

فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی باشند. یک رابطه دودویی R از A به B زیر مجموعه ای از $A\times B$ است.

$$R\subseteq A\times B \quad , \quad (a,b)\in R \Rightarrow aRb$$

اگر $A=B\Rightarrow R$ یک رابطه از A به B است $R \Rightarrow$ یک رابطه در A است.

ماتریس و روابط

اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه میتوان ماتریسی $n\times m$ مثل $M_R=[M_{ij}]$ را نمایش داد :

$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ و $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$

$$M_{ij}=\begin{cases}1 & (a_i,b_j)\in R\\ 0 & (a_i,b_j)\notin R\end{cases}$$

نکته : ماتریسی که فقط دارای مؤلفه های صفر و یک باشد ماتریس بولی نامیده می شود.

نکته : اگر R یک رابطه از A به B باشد آنگاه مجموعه نسبی x نسبت به R وجود دارد که با $R(x)$ نمایش داده می شود.

$$R_{(x)}=\{y\mid y\in B, xRy\}$$

قضیه : اگر R یک رابطه از A به B و A_1 و A_2 دو زیر مجموعه از A باشد آنگاه داریم:

$$A_1\subseteq A_2\Rightarrow R(A_1)\subseteq R(A_2)$$
$$R(A_1\cup A_2)=R(A_1)\cup R(A_2)$$
$$R(A_1\cap A_2)\subseteq R(A_1)\cap R(A_2)$$

قضیه : اگر R و S دو رابطه از A به B باشند، اگر به ازای هر $a\in A$ ، $R(a)=S(a)$ باشد آنگاه $S=R$ است.

تعریف : اگر $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ در ماتریس بولی $n\times m$ باشد آنگاه $A\vee B$ و $A\wedge B$ به صورت زیر است :

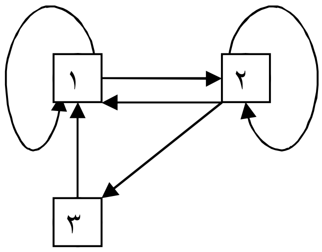
$$A\vee B=\begin{cases}1 & if\,(a_{ij}=1\ \ or\ \ b_{ij}=1)\\ 0 & if\,.not\end{cases} \qquad A\wedge B=\begin{cases}1 & if\,(a_{ij}=1\ \ and\ \ b_{ij}=1)\\ 0 & if\,.not\end{cases}$$

تعریف : حاصلضرب بولی $A\odot B$ برای دو ماتریس A و B به اندازه $n\times p$ و $m\times p$ به صورت زیر است :

$$C_{ij}=\begin{cases}1 & if\,(a_{ik}=1\ ,\ b_{kj}=1\ ,\ \exists k\ ,\ 1\le k\le p)\\ 0 & if\,.not\end{cases}$$

گراف های سوردار : اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه در A باشد رابطه R را به صورت نموداری نمایش داد. یک دایره کوچک برای هر کدام از عناصر رسم کرده و این دایره ها را به عنوان رئوس یاد خواهیم کرد و خطوط سورداری به نام یال که از راس a_i به راس a_j رسم می کنیم $\Leftrightarrow\ a_iRa_j$

مثال:



نکته : مسیری که از راسی شروع شده و به خودش خاتمه پیدا کند مدار نامیده می شود.

مدار به طول یک را حلقه می نامیم.

هر یال در گراف سوردار یک مسیر به طول یک تلقی می شود.

تعریف : $xR^{\infty}y$، هرگاه مسیری از x به y در A موجود باشد . در بعضی اوقات R^{∞} را رابطه (مسیر) ارتباطی برای A می گویند.

نکته : یک مسیر به طول n باید دارای $n+1$ عنصر از A باشد.(عناصر الزاما متمایز نیستند)

قضیه : اگر R یک رابطه در $A=\{a_1,a_2,...a_n\}$ باشد آنگاه $M_{R^2}=M_R\odot M_R$

نکته : مکان $a(i,j)$ ام از ماتریس $M_R\odot M_R$ دارای مقدار 1 است اگر و تنها اگر $n_{ij}=1$ باشد.

قضیه : فرض کنید $A=\{a_1,a_2,...a_n\}$ و R یک رابطه در A باشد آنگاه :

$$M_{R^n}=M_R\odot M_R\odot...\odot M_R \qquad (\text{n بار})$$

رابطه ی دسترسی :اگر A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه در A باشد R^* یک رابطه ی دسترس پذیر است.
(I_n ماتریس واحد $n \times n$ است و n تعداد عناصر مجموعه A است)

$xR^* y \Leftrightarrow xR^\infty y$ یا $x = y$

$M_{R^*} = M_{R^\infty} \vee I_n$

خواص روابط

روابط بازتابی : رابطه ای در مجموعه A که هرگاه $a \in A$ باشد آنگاه aRa .

$\forall a \in A \Rightarrow a \in R(a)$

- در ماتریس یک رابطه بازتابی همه عناصر آن قطر اصلی ماتریس می باشند.
- گراف سوردار یک رابطه بازتابی دارای حلقه برای تک تک رئوس است.

روابط ضد بازتابی : رابطه ای در مجموعه A که هرگاه $a \in A$ آنگاه $a \not R a$.

- در ماتریس یک رابطه ضد بازتابی قطر اصلی آن همگی صفر می باشند.
- گراف سوردار یک رابطه ضد بازتابی فاقد حلقه می باشد.

روابط متقارن و ضد متقارن : رابطه R در مجموعه A متقارن است اگر دو عنصر متمایز a و b موجود باشد بطوریکه aRb و bRa و $a \neq b$. در غیر این صورت نا متقارن است : $a \in R(b) \Leftrightarrow b \in R(a)$

نکته : نتیجه می گیریم که زمانی که رابطه نا متقارن است و اگر aRb و bRa آنگاه $a = b$.

- یک ماتریس زمانی متقارن است که $M_R = M_R^T$.(یعنی ماتریس با ترانهاده ی خود برابر باشد)
- یک ماتریس زمانی ضد متقارن است که اگر $i \neq j$ بود یکی از عناصر M_{ij} یا M_{ji} باید مساوی صفر باشد.
- یک ماتریس می تواند نه متقارن باشد نه ضد متقارن.
- در گرافهای سور دار یک رابطه متقارن اگر یالی از راس i به j موجود باشد آنگاه یالی نیز از j به i موجود می باشد و هیچ شرطی برای $i = j$ وجود ندارد.
- اگر شرط فوق در گراف وجود نداشت آن گراف مربوط به یک رابطه ی ضد متقارن است.

روابط متعدی : رابطه R در A متعدی است هرگاه برای $a,b,c \in A$ آنگاه :

$aRb, bRc \Rightarrow aRc$ متعدی

$aRb, bRc \Rightarrow a \not R c$ نامتعدی

نکته : یک رابطه متعدی را می توان از روی ماتریس رابطه ی آن $M_R = [m_{ij}]$ تشخیص داد اگر

$m_{ik} = 1, m_{kj} = 1 \Rightarrow m_{ij} = 1$

همچنین با توجه به گراف سوردار داریم که اگر از a به c مسیری به طول 2 در R داشته باشیم آنگاه یک یال نیز از a به c داریم. به عبارتی : $aRb, bRc \equiv aR^2 c$

$\rightarrow aR^2 c \Rightarrow aRc \Rightarrow R^2 \subseteq R$

قضیه : مفهوم هندسی متعدی بودن رابطه R در مجموعه A چنین است که اگر مسیری به طول بیشتر از یک از راس a به راس b موجود باشد آنگاه یالی از a به b موجود باشد.

$\forall n \geq 1, R^n \subseteq R \Leftrightarrow$ متعدی بودن

نکته : در ضمن متعدی بودن رابطه ی R را می توان به این صورت توضیح داد :

$b \in R(a), c \in R(b) \Rightarrow c \in R(a)$

روابط هم ارزی : رابطه ی R در A را هم ارز گوییم هرگاه بازتابی، متقارن و متعدی باشد.

- اگر P یک افراز از مجموعه A باشد بنابر این P را میتوان برای تشکیل یک رابطه ی هم ارزی در A به کار برد.
- مجموعه های موجود در افراز P را بلوک های P گویند.
- اگر c,b,a در بلوک P از مجموعه A باشند و سه خاصیت بازتابی و تقارن و تعری را دارا باشند آنگاه R یک رابطه ی هم ارزی تعیین شده توسط افراز P می باشد.
- هر عضو از یک بلوک فقط و فقط با اعضای همان بلوک در رابطه است.

قضیه : فرض کنید R یک رابطه هم ارزی در A و $b \in A, a \in A$ باشد در این صورت aRb اگر و تنها اگر $R(a) = R(b)$ باشد.

قضیه : اگر R یک رابطه هم ارزی در A و P مجموعه ی همه ی مجموعه های نسبی و مجزای $R(a)$ برای $a \in A$ باشد در این صورت P یک افراز برای A و R یک رابطه هم ارزی تعیین شده توسط P است.

تعریف : اگر R یک رابطه هم ارزی در A باشد آنگاه $R(a)$ ها را کلاسهای هم ارزی R می گوییم.

(شامل همه کلاسهای هم ارز: A/R) $\qquad R(a) = [a]$

عملیات بر روابط

اگر S و R دو رابطه از A به B باشد این روابط مجموعه ای از زوجهای مرتب هستند که تمامی اعمال مانند اجتماع و اشتراک و تفاضل و ...اعمال کرد

متمم $\qquad \overline{R} : a\overline{R}b \Leftrightarrow a\not{R}b$

اجتماع $\qquad a(R \cup S)b \Leftrightarrow aRb$ یا aSb

اشتراک $\qquad a(R \cap S)b \Leftrightarrow aRb$ و aSb

معکوس $\qquad R^{-1} : aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a \qquad \begin{cases} Dom(R^{-1}) = Ran(R) \\ Dom(R) = Ran(R^{-1}) \end{cases}$

نکته : R^{-1} شامل همه زوجهای مرتب R است که به صورت معکوس نوشته شده اند. $(R^{-1})^{-1}=R$

نکته: در ماتریس معکوس جای سطر و ستون عوض می شود $(M_R)^{-1}=(M_R)^T$

تعریف : برای ماتریس بولی $M=[m_{ij}]$، متمم آن یعنی $\overline{M}=[\overline{m}_{ij}]$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\overline{m}_{ij}=\begin{cases}0 & m_{ij}=1\\1 & m_{ij}=0\end{cases}$$

قضیه : فرض کنید که R و S دو رابطه از A به B باشد.

1) $R\subseteq S \Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$

2) $R\subseteq S \Rightarrow \overline{S}\subseteq \overline{R}$

3) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

4) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

5) $(\overline{R\cup S})=\overline{R}\cap\overline{S}$

6) $(\overline{R\cap S})=\overline{R}\cup\overline{S}$

7) اگر R بازتابی باشد آنگاه R^{-1} نیز بازتابی است.

8) اگر R بازتابی باشد آنگاه $\overline{R}$ ضد بازتابی است.

9) اگر R و S بازتابی باشند آنگاه $R\cup S$ و $R\cap S$ نیز بازتابی هستند.

نکته : رابطه R در A متقارن است $\Leftrightarrow R=R^{-1} \Leftrightarrow M_R=(M_R)^T=(M_R)^{-1}=M_R$

قضیه : اگر R متقارن باشد آنگاه $\overline{R}, R^{-1}$ نیز متقارن هستند.

همچنین اگر R,S متقارن باشند $R\cup S, R\cap S$ نیز متقارن هستند.

1) $(R\cap S)^2\subseteq R^2\cap S^2$

2) اگر R و S متعدی باشند آنگاه $R\cap S$ متعدی است.

3) اگر R و S رابطه هم ارزی باشند آنگاه $R\cap S$ نیز رابطه هم ارزی است.

بستارها

اگر R یک رابطه در A باشد ممکن است بعضی از خصوصیات هم ارزی را نداشته باشد. می خواهیم با افزودن زوجهایی به آن رابطه ای بدست آوریم که ویژگی های مورد نظر را داشته باشد .

بستار بازتابی : اگر R یک رابطه در A باشد که بازتابی نباشد بعضی از زوجهای رابطه Δ را به R اضافه می کنیم تا کوچکترین رابطه بازتابی شامل R تشکیل شود.

$$R_1 = R \cup \Delta$$

بستار متقارن :به طور فرض داریم رابطه R رابطه ای در A باشد که متقارن نباشد. اگر زوجی مثل $(x,y) \in R$ باشد ولی $(y,x) \notin R$ باشد، بدیهی است $(y,x) \in R^{-1}$. بنابراین برای تبدیل به رابطه متقارن باید زوجهای رابطه R^{-1} را به آن اضافه کنیم.

$R \cup R^{-1}$ کوچکترین رابطه ی متقارن است. $\qquad R \cup R^{-1} = (R \cup R^{-1})^{-1}$

نکته : بستار متقارن R را می توان به روش هندسی رسم کرد.به این صورت که همه یالها در گراف سوردار R به یالهای دو طرفه در $R \cup R^{-1}$ تبدیل شود.

بستار متعدی و الگوریتم وارشال

قضیه : اگر R یک رابطه در A باشد آنگاه بستار متعدی R رابطه R^{∞} است.

قضیه : اگر $|A| = n$ (تعداد اعضا) و R یک رابطه در A باشد $\quad R^{\infty} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$

الگوریتم وارشال : فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و R یک رابطه در A باشد. اگر $x_1, x_2, \ldots, x_m$ مسیری در R باشد . هر راس غیر از x_1, x_m را راس داخلی مسیر خواهیم گفت.الگوریتم وارشال در دو مرحله خلاصه می شود:

1) ابتدا همه مقادیر W_{k-1} را به W_k منتقل می کنیم
2) فرض کنید که در مکانهای $p_1, p_2, \ldots$ در ستون kام ماتریس W_{k-1} و هم چنین در مکانهای $q_1, q_2, \ldots$ در سطر kام همان ماتریس مقدار $\underline{1}$ داشته باشیم ، در این صورت در مکانهای (p_i, q_j) در ماتریس W_k مقدار $\underline{1}$ قرار دهیم، این الگوریتم را با $W_0 = M_R$ آغاز کرد و W_k های بعدی را تا رسیدن به $W_n = M_R, (n = |A|)$ ادامه می دهیم.

کاربرد جالب بستار متعدی در روابط هم ارزی است. اگر S, R دو رابطه هم ارزی باشند در این صورت $R \cap S$ نیز یک رابطه هم ارزی است. $R \cap S$ بزرگترین زیر مجموعه مشمول در S, R است.

قضیه : اگر S, R دو رابطه هم ارزی در مجموعه A باشند در نتیجه کوچکترین رابطه هم ارزی شامل S, R ، رابطه $(R \cup S)^{\infty}$ است.

ترکیب روابط : اگر C, B, A سه مجموعه و R رابطه ای از A به B و S رابطه ای از B به C باشد رابطه جدید از A به C را ترکیب S, R می نامیم و به SoR می خوانیم.

$$\left.\begin{array}{l} a\in A \\ c\in C \end{array}\right\} a(SoR)c \Leftrightarrow b\in B, \begin{cases} aRb \\ bSc \end{cases} \Rightarrow a(SoR)c$$

$$a \xrightarrow[R]{} b \xrightarrow[S]{} c \Rightarrow SoR(A_1) = S(R(A_1)), A_1 \subseteq A$$

قضیه : اگر D, C, B, A چهار مجموعه و R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C و T یک را بطه از C به D باشد داریم :

$$\begin{cases} aRb \\ bSc \\ cTd \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} To(SoR) = (ToS)oR \\ (SoR)^{-1} = R^{-1}oS^{-1} \end{array}$$

پایان فصل دوم

فصل سوم : توابع

تعریف: اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، تابع f از A به B به صورت $f:A\to B$ نمایش داده می شود.

اگر $a\in Dom(f)$ باشد $f(a)$ فقط شامل یک عضو از B است و اگر $a\notin Dom(f)$ باشد $f(a)=f$ می باشد.

نکته: رابطه f به صورت زوجهای مرتب تعریف می شود: $f(a)=b$ $\{(a,f(a))\,|\,a\in Dom(f)\}$ شکل

تابع نگاشت یا تبدیل: a برابر است با آرگومان تابع f و $b=f(a)$ برابر است با مقدار تابع برای آرگومان.

نکته: $f(a)$ را تصویر a تحت تبدیل f می گویند.

ترکیب توابع: اگر f و g دو تابع باشند به صورت $\begin{cases} f:A\to B \\ g:B\to C \end{cases}$ و چون f و g دو رابطه هستند پس ترکیب آنها (gof) نیز یک رابطه است.

$$gof(a)=g(f(a))=g(b)$$

$$a\in Dom(gof)$$

$gof(a)=c$ جواب منحصر به فرد

توابع ویژه (پوشا و یک به یک): اگر f تابعی از A به B باشد گوییم f همه جا تعریف شده است اگر $Dom(f)=A$ و f پوشاست اگر $Ran(f)=B$

و f یک به یک است هرگاه: $\begin{cases} f(a)=f(b)\Rightarrow a=b \\ or \\ f(a)\neq f(b)\Rightarrow a\neq b \end{cases}$

همچنین $f:A\to B$ را **وارون پذیر** گویند هرگاه رابطه f^{-1} نیز یک تابع باشد.

نکته: یک تابع الزاما وارون پذیر نیست.

چند قضیه : هرگاه $f:A\to B$ آنگاه

1) f^{-1} یک تابع از B به A است $\Leftrightarrow$ f یک به یک است.

2) اگر f^{-1} یک تابع باشد $\Leftarrow$ f^{-1} یک به یک است.

3) f^{-1} همه جا تعریف شده باشد $\Leftrightarrow$ f پوشا باشد.

4) f^{-1} پوشاست – همه جا تعریف شده باشد.

5) $I_B of = f$

6) $foI_A = f$

7) $f^{-1}of = I_A$ اگر f تناظر یک به یک باشد

8) $fof^{-1} = I_B$ اگر f تناظر یک به یک باشد

9) اگر $f:A\to B$ و $g:B\to A$ توابعی باشند به گونه ای که $gof = I_A$ و $fog = I_B$ ، در این صورت f یک تناظر یک به یک بین A و B و g یک تناظر یک به یک بین B و A بوده و هردو وارون همدیگر می باشند.

$$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$$

10) اگر A و B دو مجموعه متناهی با تعداد عناصر یکسان و $f:A\to B$ یک تابع همه جا تعریف شده باشد آنگاه :

الف) اگر f پوشا باشد $\leftarrow$ f یک به یک است

ب) اگر f یک به یک باشد $\leftarrow$ f پوشاست

اصل لانه کبوتر

$f:A\to B$ تابعی با دامنه و برد متناهی می باشد

f یک به یک باشد آنگاه $m=n$ تعداد عناصر (کبوتران) $|Dom(f)| = n$

f یک به یک نباشد آنگاه $m<n$ تعداد عناصر (لانه ها) $|Ran(f)| = m$

تعریف : اگر n کبوتر به m لانه منسوب شود و $m<n$ ، آنگاه دست کم یک لانه شامل دو کبوتر یا بیشتر است.

تعمیم اصل لانه کبوتر : اگر m لانه وجود داشته باشد ولی تعداد کبوترها بیشتر از $n=2m$ باشد، بدیهی است که سه کبوتر و یا بیشتر باید به یکی از لانه ها منسوب شوند.

نکته : به عبارتی اگر n کبوتر به m لانه منسوب شود یکی از لانه ها دست کم $\left[\frac{n}{m}\right]$ (کران بالای تقسیم) و یا $\left[\frac{n-1}{m}\right]+1$ کبوتر باشد.

پایان فصل سوم

فصل چهار : مجموعه های مرتب

1. رابطه R در A را ترتیب جزیی گوییم هر گاه بازتابی ضد متقارن و متعدی باشد مجموعه A را همراه ترتیب جزیی R مجموعه با **ترتیب جزیی** نامیده و ان را با (A,R) نمایش خواهیم داد.
2. اگر $(A,\le)$ و $(B,\le)$ دو مجموعه با ترتیب جزیی باشند در این صورت $(A\times B,\le)$ نیز یک مجموعه با ترتیب جزیی است که در ان ترتیب جزیی به صورت زیر تعریف شده است:

$(a.b)\le(a',b')$ اگر $a\le a'$ در A و $b\le b'$ در B باشد

ترتیب جزیی $\le$ تعریف شده برای حاصل ضرب دکارتی $A\times B$ را ترتیب جزیی حاصل ضرب میگویند.

اگر $(A.\le)$ یک مجموعه با ترتیب جزیی باشد گوییم که $a<b$ هر گاه $a\le b$ ولی $a\ne b$ باشد. فرض کنید که $(A,\le)$ و $(B,\le)$ دو مجموعه با ترتیب جزیی باشد .یک ترکیب دیگر در $A\times B$ که با 〈 نمایش داده میشود به وسیله زیر تعریف میشود:

$(a.b)\langle(a',b')$ اگر $a<a'$ یا $(b\le b',a=a')$

این ترتیب را ترتیب **قاموسی** میگوییم . وقتی که A و B مجموعه های کاملا مرتب باشند در این صورت ترتیب قاموسی 〈 در $A\times B$ نیز یک ترتیب کامل است.

فرض کنید که Σ یک مجموعه متناهی از علائم باشد در این صورت یک رشته متناهی(شامل صفر عنصر) انتخاب شده از Σ را بدون نوشتن ویرگول بین عناصر نمایش داده و انرا یک کلمه روی Σ خواهیم گفت.Σ را الفبا مینامیم.

طول کلمه w را با $|w|$ نمایش خواهیم داد.کلمه به طول صفر را با Λ نمایش داده و از ان به نام کلمه تهی یاد خواهیم کرد.مجموعه تمام کلمات به طول k به صورت Σ^k نمایش داده میشود این برین معناست که:

$$\Sigma^0=\{\Lambda\}$$
$$\Sigma^{k+1}=\{wa\mid w\in\Sigma\}k\ge 0$$

مجموعه کلمات با هر طولی روی Σ مجموعه $\Sigma^*=\bigcup_{k\ge0}\Sigma^k$ خواهد بود.

همچنین مجموعه تمامی کلمات غیر تهی روی Σ مجموعه $\Sigma^+=\bigcup_{k\ge o}\Sigma^k$ است. بنابراین برای هر $w\in\Sigma^k$ داریم $|w|=k$. اگر $w,y\in\Sigma^*$ به طوری که $|w|=n$ و $|y|=m$، به عبارت دیگر $w=w_1w_2...w_n$ و $y=y_1y_2...y_m$ در این صورت الحاق دو کلمه را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$wy=w_1w_2...w_ny_1y_2...y_m$$

که کلمه ای به طول n+m :

$$|wy|=n+m$$

گراف سو دار یک ترتیب جزیی دارای هیچ دوری به طول بزرگتر از یک نیست.

نمودار هاس:

فرض کنید A یک مجموعه متناهی باشد میدانیم که گراف سو دار یک ترتیب جزیی در A دارای هیچ دوری به طول بیشتر از یک نیست . از طرف دیگر چون یک ترتیب جزیی یک رابطه بازتابی است هر راسی در گراف سو دار یک ترتیب جزیی شامل حلقه است برای سادگی کار همه حلقه ها را از گراف سو دار حذف میکنیم و همه یالهایی را که به وسیله یک رابطه متعدی به وجود امده اند نیز حذف میکنیمو قرارداد میکنیم که جهت یالهای گراف سو دار یک ترتیب جزیی را به طرف بالا رسم میکنیم لذه میتوانیم جهت این یالها را حذف کنیم.بالاخره دوایر نمایش دهنده رئوس را نیز توسط نقاط نمایش خواهیم داد.

اگر $(A,\le)$ یک مجموعه جزیی و $(A,\ge)$ دوگان ان باشد در این صورت نمودار هاس $(A,\ge)$ وارون هاس $(A,\le)$ خواهد بود.

اگر $a\le b$ انگاه $a\langle_T B$.فرایند تشکیل یک ترتیب کامل مثل $\langle_T$ را ترتیب توپولوژیکی میگویند.(اگر $a\le b$ انگاه a باید قبل از b وارد شود.

فرض کنید که $(A,\le)$ و $(A',\le')$ دو مجموعه با ترتیب جزیی و $f:A\to A'$ یک تناظر یک به یک بین A,A' باشد.تابع f را یک تابع یکریختی از $(A,\le)$ به $(A',\le')$ خواهیم گفت هر گاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم:

$a\le b$ اگر و تنها اگر $f(a)\le' f(b)$

اگر یک تابع یک ریختی میان دو مجموعه با ترتیب جزئی $(A,\le)$ و $(A',\le')$ وجود داشته باشد در این صورت خواهیم گفت که $(A,\le)$ و $(A',\le')$ یکریخت هستند.

(اصل تناظر) اگر عناصر B نسبت به یکدیگر و یا نسبت به دیگر عناصر A دارای خاصیتی باشند و اگر این خاصیت را بتوان به طور کامل به وسیله $\le$ تعریف کرد در این صورت عناصر B' نیز باید دارای همان خاصیت تعریف شده به وسیله $\le'$ باشند.

- اگر f یک تابع یک ریختی باشد و هر بر چسب a در H را به $f(b)$ تبدیل کنیم H به نمودار هاس $(A',\le')$ تبدیل میشود و بر عکس:
- هر گاه با جایگذاری هر بر چسب به وسیله $f(a)$, H به نمودار هاس $(A',\le')$ تبدیل شود f یک تابع یکریختی خواهد بود.

عنصر $a\in A$ را یک عنصر ماکزیمال A خواهیم گفت اگر برای هیچ عضو $c\in A$ رابطه $a<c$ برقرار نباشد.

عضو $a\in A$ را یک عضو مینیمال A خواهیم خواند اگر برای هیچ عضو $a\in A$ رابطه $c<b$ برقرار نباشد.

مجموعه Z با ترتیب جزئی و متعارف $\le$ نه دارای عضو ماکزیمال است و نه عضو مینیمال.

فرض کنید که $(A,\le)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی متناهی باشد در این صورت A دست کم دارای $(A,\le)$ و $(A',\le')$ و یک عضو مینیمال است.

عنصر $a\in A$ بزرگترین عضو A خوانده میشود هر گاه برای هر $x\in A$ داشته باشیم : $x\le a$. به همین ترتیب عضو $a\in A$ کوچکترین عضو A خوانده میشود هر گاه رابطه $a\le x$ به ازای هر $x\in A$ برقرار باشد.

یک مجموعه با ترتیب جزئی حداکثر دارای یک بزرگترین عضو و یک کوچکترین عضو است.

بزرگترین عضو یک مجموعه با ترتیب جزئی را در صورت وجود با I نمایش میدهیم و اغلب انرا عضو واحد مینامیم. به طریق مشابه کوچکترین عضو یک مجموعه با ترتبب جزئی را در صورت وجود با O نمایش داده و انرا عضو صفر مینامیم.

مجموعه با ترتیب جزئی A و زیر مجموعه B از ان را در نظر بگیرید یک عضو$a\in A$ کرانه بالائی Bخوانده میشود هر گاه به ازای همه $b\in B$ داشته باشیم $b\le a$. به همین ترتیب عضو $a\in A$ کرانه پائینی B خوانده میشود هر گاه به ازای تمامی $b\in B$ داشته باشیم $a\le b$.

فرض کنید A یک مجموعه با ترتیب جزئی و B زیر مجموعه ای از ان باشد عضو$a\in A$ را کوچکترین کرانه بالائی (LUB) برای B خواهیم گفت هر گاه اولا a یک کرانه بالائی برای B بوده و ثانیا اگر a' نیز یک کرانه بالائی برای B باشد انگاه $a\le a'$ بنابراین $a=LUB(B)$ اگر با ازای هر $b\in B$, $b\le a$ و اگر $a'\in A$ نیز یک کرانه بالائی برای B باشد($b\le a'$ به ازای همه $b\in B$) انگاه $a\le a'$.

به طریق مشابه یک عضو $a\in A$ را بزرگترین کرانه پائینی (GLB) برای B خواهیم گفت اگر a یک کرانه پایینی برای B باشد و اگر a' نیز یک کرانه پایینی برای B باشد انگاه $a'\le a$. بنابراین $a=GLB(B)$ اگر به ازای هر $b\in B$, $a\le b$. و اگر $a'\in A$ نیز یک کرانه پائینی برای B باشد (به ازای هر $b\in B$ و $a'\le b$) انگاه $a'\le a$.

طبق معمول کرانه های بالائی در $(A,\le)$ متناظر با کرانه های پائینی در $(A,\ge)$(برای هر مجموعه همسان از عناصر)و کرانه های پائینی در$(A,\le)$ متناظر با کرانه های بالائی در $(A,\ge)$هستند.

فرض کنید که $(A,\le)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد . در این صورت یک زیر مجموعه B از A حد اکثر دارای یک LUB و یک GUB است.

فرض کنید که $(A,\le)$ و $(A',\le')$ مجموعه های با ترتیب جزئی یکریخت تحت تابع یکریختی $f: A \to A'$ باشند .

(الف) اگر a یک عنصر ماگزیمال(مینیمال) $(A,\le)$ باشد در این صورت $f(a)$ یک عنصر ماگزیمال(مینیمال) $(A',\le')$ است.

(ب) اگر a بزرگترین(کوچکترین) عضو $(A,\le)$ باشد در این صورت $f(a)$ بزرگترین(کوچکترین) عضو $(A',\le')$ است.

(ج) اگر a یک کرانه بالائی برای (کرانه پائینی و LUB, GLB) برای زیر مجموعه B از A باشد در این صورت $f(a)$ نیز یک کرانه بالائی برای (کرانه پائینی و LUB, GLB) برای زیر مجموعه $f(B)$ از A' است.

(د) اگر هر زیر مجموعه از $(A,\le)$ دارای یک $LUB(GLB)$ باشد در این صورت هر زیر مجموعه از $(A',\le')$ نیز دارای یک $LUB(GLB)$ است.

یک **مشبکه** مجموعه ای با ترتیب جزیی مثل $(L,\le)$ است که در ان هر زیر مجموعه شامل دو عنصر مثل $\{a,b\}$ دارای یک LUB و یک GUB باشد در این صورت $LUB(\{a,b\})$ را با $a \vee b$ نمایش داده و انرا وست b و a خواهیم گفت به طریق مشابه $GLB(\{a,b\})$ را با $a \wedge b$ نمایش داده و انرا رسد b وa مینامیم.

اگر $(L_1,\le)$ و $(L_2,\le)$ دو مشبکه باشند در این صورت $(L,\le)$ نیز یک مشبکه است که در ان $L = L_1 \times L_2$ و ترتیب جزئی $\le$ در L همان ترتیب جزئی حاصلضرب است.

فرض کنید که $(L,\le)$ یک مشبکه باشد زیر مجموعه نا تهی S از L را زیر مشبکه برای L میگوئیم هرگاه به ازای هر $a,b \in S$ عناصر $a \vee b$ و $a \wedge b$ (که در L تعئین میشوند) در مجموعه S نیز قرار داشته باشند.

مشبکه های یکریخت : فرض کنید $f: L_1 \to L_2$ یک تابع یکریختی از $(L_1,\le_1)$ به $(L_2,\le_2)$ باشد در این صورت L_1 اگر و تنها اگر L_2 یک مشبکه باشد. در حقیقت اگر a و b عناصر L_1 باشند انگاه $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ و $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. اگر دو مشبکه یکریخت باشند انها را مشبکه های یکریخت مینامیم.

خواص مشبکه ها :

1. $a \le a \vee b$ و $b \le a \vee b$ ($a \vee b$ یک کرانه بالائی برای a و b است)
2. اگر $a \le c$ و $b \le c$ انگاه $a \vee b \le c$ ($a \vee b$ کوچکترین کرانه بالائی برای a و b است).
3. $a \wedge b \le a$ و $a \wedge b \le b$ ($a \wedge b$ یک کرانه پائینی برای a و b است).
4. اگر $c \le a$ و $c \le b$ انگاه $c \le a \wedge b$ ($a \wedge b$ بزرگترین کرانه پائینی برای a و b است).

اگر L یک مشبکه باشد انگاه به ازای هر a و b از L داریم:

الف) $a \vee b = b$ اگر و تنها اگر $a \le b$

ب) $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \le b$

ج) $a \wedge b = a$ اگر و تنها اگر $a \vee b = b$

فرض کنید L یک مشبکه باشد انگاه داریم:

1. خاصیت خود توانی

الف) $a \vee a = a$ ب) $a \wedge a = a$

2. خاصیت جابجائی

الف) $b \vee a = a \vee b$ ب) $b \wedge a = a \wedge b$

3. خاصیت شرکت پذیری

الف) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ب) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

4. خاصیت جذبی

الف) $a \vee (a \wedge b) = a$ ب) $a \wedge (a \vee b) = a$

فرض کنید که L یک مشبکه باشد انگاه برای هر a,b,c از L چنین داریم:

1. اگر $a \le b$ انگاه

الف) $a \vee b \le b \vee c$

ب) $a \wedge b \le b \wedge c$

2. $a \le c$ و $b \le c$ اگر و تنها اگر $a \vee b \le c$

3. $c \le a$ و $c \le b$ اگر و تنها اگر $c \le a \wedge b$

4. اگر $a \le b$ و $c \le d$ انگاه

الف) $a \vee c \le b \vee d$

ب) $a \wedge c \le b \wedge d$

مشبکه های ویژه :

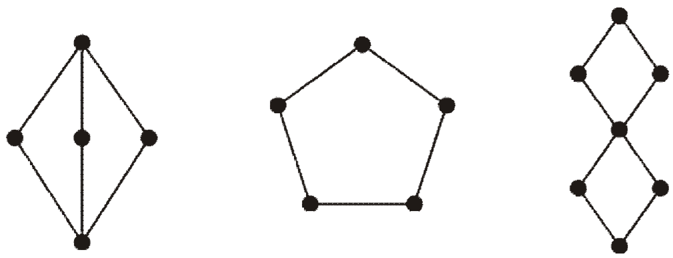
- مشبکه L را محدود گوئیم هر گاه دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد
- فرض کنید که $L=\{a_1,a_2,...a_n\}$ یک مشبکه متناهی باشد در این صورت L محدود است
- مشبکه L را پخشپذیر گوئیم هر گاه به ازای هر a,b,c از L روابط زیر بر قرار باشد:

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\ \text{(الف)}$$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)\ \text{(ب)}$$

اگر L پخش پذیر نباشد ان را **پخش ناپزیر** مینامیم.

مشبکه L پخش ناپزیر است اگر و تنها اگر شامل زیر مشبکهای یکریخت با یکی از مشبکه های اشکال زیر باشد.



ب

الف

فرض کنید که L یک مشبکه محدود دارای بزرگترین عضو I و کوچکترین عضو O باشد.همچنین فرض کنید که $a\in L$. عنصر $a'\in L$ را متمم a گوئیم هر گاه $a\wedge a'=O$ و $a\vee a'=I$. از این تعریف مشاهده میشود که $I'=O$ و $O'=I$.

فرض کنید که L یک مشبکه محدود و پخش پذیر باشد اگر یک متمم برای عضوی وجود داشته باشد در این صورت این متمم منحصر به فرد است.

مشبکه $(L,\leq)$ را متمم دار گوئیم هر گاه محدود بوده و هر عضو ان متمم داشته باشد.

جبر بول :

قبلا دیریم که اگر S یک مجموعه دلخواه و $L=P(S)$ باشد انگاه $(L,\subseteq)$ یک مشبکه است این مشبکه دارای ویژگی های متنوعی است که یک مشبکه در حالت عمومی فاقد انهاست.به همین دلیل این نوع مشبکه ها برای کارکردن بسیار ساده بوده و نقش مهمی را در کاربردهای مختلف ایفا میکنند.

اگر $S_1=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ و $S_2=\{y_1,y_2...,y_n\}$ دو مجموعه دلخواه و متناهی با n عنصر باشند در این صورت مشبکه های $(P(S_1),\subseteq)$ و $(P(S_2),\subseteq)$ یکریفت هستند.

نکته : برای هر n=0,1,2,... فقط یک نوع مشبکه به صورت $(P(S),\subseteq)$ وجود دارد این مشبکه مستقل از عناصر S بوده و فقط به مقدار n بستگی دارد، تعداد عناصر این مشبکه برابر 2^n است.

یک مشبکه متناهی را جبر بول گوئیم هرگاه به ازای یک عدد صحیح و مثبت n یکریفت با B_n باشد.

قاعده جایگزینی برای جبر بول

فرض کنید که $(L,\le)$ یک جبر بول z,y,x سه عضو دلخواه از ان و I و O نیز به ترتیب بزرگترین و کوچکترین عضو ان باشد. نیز فرض کنید A , B, C سه زیر مجموعه دلخواه از مجموعه S و به عبارتی دیگر سه عضو از $(P(S),\subseteq)$ باشند در این صورت هر ویژگی برای عناصر دلخواه از $(P(S),\subseteq)$ را میتوان با جایگزین کردن $\vee$ به جای $\cup$ و $\wedge$ به جای $\cap$ و $\le$ به جای $\subseteq$ عینا به همان ویژگی برای عناصر دلخواه از $(L,\le)$ منتقل کرد.

جدول صفحه ی 158 کتاب درسی مطالعه شود

برای هر عدد صحیح $n\ge 1$, B_n مساوی با n بار حاصل ضرب B در خودش است که در ان ترتیب جزئی در $B\times B\times...\times B$ (n بار) همان ترتیب جزئی حاصلضرب است.

توابع و چند جمله ای های بولی:

(تابع بولی) تابع $f:B_n\to B$ را که دامنه ان B_n و برد ان مجموعه $B=\{0,1\}$ است تابع بولی مینامیم.

(چند جمله ای های (عبارات) بولی)فرض کنید که $\{x_1x_2,...,x_n\}$ مجموعه ای از n متغیر بولی باشد یک چند جمله ای بولی $P(x_1,x_2,...,x_n)$ روی متغیر n بولی $x_1,x_2,...,x_n$ به صورت بازگشتی زیر تعریف میشود :

1. $x_1,x_2,...,x_n$ چند جمله ای های بولی هستند.
2. نمادهای 0 و 1 چند جمله ای های بولی هستند.
3. اگر $P(x_1,x_2,...,x_n)$ و $Q(x_1,x_2,...,x_n)$ دو چند جمله ای بولی باشند در این صورت عبارات $(P(x_1,x_2,...,x_n)\vee Q(x_1,x_2,...,x_n))$ و $(P(x_1,x_2,...,x_n)\wedge Q(x_1,x_2,...,x_n))$ نیز چند جمله ای های بولی هستند.

4.اگر $P(x_1,x_2,...,x_n)$ یک چند جمله ای بولی است انگاه $(P(x_1,x_2,...,x_n))'$ نیز یک چند جمله ای بولی است.

5.هیچ چند جمله ای بولی دیگری روی متغیرهای بولی $x_1,x_2,...,x_n$ غیر از چند جمله ای های حاصل از اعمال چهارگانه فوق وجود ندارد.

اگر $f:B_n \to B$ انگاه $S(f)$ را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$S(f)=\{b\in B_n \mid f(b)=1\}$$

از قضیه بالا نتیجه زیر را میگیریم:

فرض کنید که f, f_1, f_2 سه تابع بولی از B_n به B باشند در این صورت

الف) اگر $S(f)=S(f_1)\cup S(f_2)$ انگاه به ازای همه $b\in B_n$, $f(b)=f_1(b)\vee f_2(b)$.

ب) اگر $S(f)=S(f_1)\cap S(f_2)$ انگاه به ازای همه $b\in B_n$, $f(b)=f_1(b)\wedge f_2(b)$

نکته : هر تابع $f:B_n \to B$ را میتوان به وسیله یک عبارت بولی تولید کرد.

تعاریف:

لیترال : یک لیترال یک متغیر بولی و یا متمم ان است.

کمینه : یک جمله کمینه روی n متغیر بولی $x_1,x_2,...,x_n$ عبارت بولی $\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge...\wedge\bar{x}_n$ است که در ان هر لیترال $\bar{x}_i$, $1\le i\le n$ یا برابر متغیر بولی x_i و یا برابر متمم ان یعنی x_i' است.

یک عبارت بولی روی n متغیر بولی $x_1,x_2,...,x_n$ را یک شکل نرمال فصلی یا به طور اختصار dnf گوئیم هرگاه به صورت وست هائی از جملات کمینه روی n متغیر بولی مزبور بیان شده باشد.

بیان یک عبارت بولی به صورت یک dnf با استفاده از خواص جبر بول :

در فرایند ساده کردن مدارها قوانین دمورگان و بخشپزیری بسیار مفید هستند

مثال:عبارت بولی $x \wedge (y \vee z')$ را به صورت یک dnf بیان کنید.

با استفاده از قانون پخشپزیری نتیجه میشود $(x \wedge y \vee (x \wedge z'))$

با توجه به اینکه $w \wedge I = w$ و $w \vee w' = I$ لذا

$$[(x \wedge y) \wedge (z \vee z')] \vee [(x \wedge z') \wedge (y \vee y')] =$$
$$[(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z')] \vee [(x \wedge z' \wedge y) \vee (x \wedge z' \wedge y')] =$$
$$(x \wedge y \wedge) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge z' \wedge y) \vee (x \wedge y' \wedge z')$$

و با توجه به قانون خود توانی داریم $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z')$

دو عبارت بولی را هم ارز میگوئیم اگر هر دو نمایش دهنده تابع بولی یکسان باشند بنابراین دو عبارت بولی هم ارز هستند اگر و تنها اگر دارای یک dnf باشند.

نقشه کارنو

الف) بررسی حالت $n = 2$

دراین حالت، f یک تابع بولی از دو متغیر ، مثل x و y است. شکل زیر ماتریس 2×2 را نشان می دهد که هرکدام از خانه های آن حاوی یک عنصر b از B_2 است. در شکل، هرکدام از این b ها را با جمله ی کمینه متناظر جایگزین کرده ایم. برچسب خانه ها در این شکل صرفا به خاطر ارجاع بوده و از این به بعد از نوشتن آنها خودداری می کنیم.اما فرض بر این است که خواننده بتواند جای آنها را به خاطر بسپارد. در شکل مشاهده می شود که متغیر x' در هر دو خانه ی سطر اول ظاهر شده است. به طریق مشابه متغیر x در خانه های سطر دوم ظاهر شده است. با توجه به این مطالب این دو سطر را به ترتیب با x' و x برچسب زده ایم. همین طور برای دو ستون بر حسب y .

	y'	y
x'	x'∧y'	x'∧ y
x	x ∧y'	x ∧ y

ب

00	01
10	11

الف

نکته : وقتی مقادیر تابع بولی $f : B_2 \to B$ دقیقا یک سطر و یا یک ستون را پر کرده باشند، در این صورت برچسب آن سطر و یا ستون هم ارز با تابع بولی f خواهد بود.البته اگر مقدار یک تابع f فقط یک خانه از ماتریس را پر کند، در این صورت f به وسیله ی جمله ی کمینه ی متناظر تولید می شود.
می توان نشان داد که هر چه نواحی شامل مقدار یک برای تابع f بزرگتر باشد ، به همان اندازه عبارت بولی متناظر با f کوچکتر خواهد بود.

ب) حالت $n = 3$

در این حالت تابع بولی f از B_3 به B تعریف شده است. بنابر این فرض کنید که f تابعی از متغیرهای بولی x ، y ، z است. نقشه کارنو در این حالت به وسیله ی یک ماتریس 2×4 نمایش داده می شود. جدولهای زیر به ترتیب الف و ب عنصر B_3 و جملات کمینه متناظر با آنها را در داخل خانه های ماتریس نشان می دهند.

	00	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

الف

	y'	y'	y	y
x'	x'∧y'∧z'	x'∧y'∧z	x'∧y∧z	x'∧y∧z'
x	x∧y'∧z'	x∧y'∧z	x∧y∧z	x∧y∧z'
	z'	z	z	z'

ب

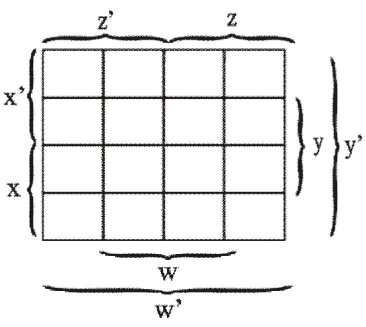
نکته : مقادیر یک تابع بولی $f : B_3 \to B$ را می توانیم به صورت اجتماعی از نواحی مستطیل شکل بنویسیم.

ج) حالت $n = 4$

در اینجا ،توابع بولی از B_4 به B تعریف شده اند که شامل 4 متغیر مثل x، y ، z و w هستند.
در جدول زیر توزیع ورودی ها و برچسب مستطیل های متناظر، برای چنین توابعی نشان داده شده است.
در این حالت فرض بر این است که ستون اول و آخر و هم چنین سطر اول و آخر مجاور هم هستند. در این حالت نیز به جستجوی مستطیلهایی به ابعاد توانی از دو خواهیم بود(1،2،4).

	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

الف



ب

فصل پنجم :روابط بازگشتی

یک دنباله را به روش های متنوع می توان تعریف کرد:

1- نوشتن چندین جمله اول به امید رسیدن به یک الگو یا فرمول عمومی (ابهام انگیز است).

2- ارائه یک فرمول صریح برای جمله nام.

3- استفاده از مفاهیم بازگشتی.

- روش سوم اولا به یک معادله به نام رابطه‌ی بازگشتی نیاز دارد که جمله nام را به چند جمله قبلی مرتبط می‌کند. و ثانیا مقادیر چند جمله‌ی اول را می‌خواهد که به آنها شرایط مرزی می‌گوییم.(دنباله فیبوناتچی)

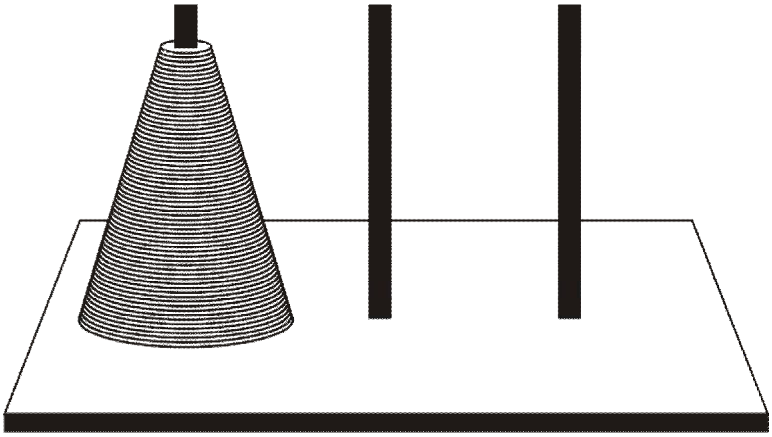
- تعریف دنباله به صورت بازگشتی معادل به کار بردن استقرای ریاضی است. شرایط مرزی مثابه پایه استقرا و رابطه بازگشتی مثابه مرحله استقراست.

تعریف: یک رابطه بازگشتی فرمولی است که جمله nام را به k جمله پیشین مرتبط می‌سازد که $k \geq 1$ و $n \geq k$. شرایط مرزی ارائه مقادیر برای $a_{k-1},\dots,a_1,a_0$ است. k مرتبه‌ی رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد.

- یک رابطه بازگشتی با شرایط مرزی متفاوت دنباله های متعدد تولید می‌کند.

* حل یک مسئله بصورت بازگشتی به معنای پیدا کردن راهی برای شکستن مسئله مزبور به زیر مسائلی است که صورت ظاهری آن ها مشابه به مسئله اولیه است. این روند تکرار می شود تا آخرین زیر مسئله به سادگی حل شود. گام بعدی تلفیق و ترکیب جواب های حاصل و به دست آوردن جواب کلی است. این فرض که زیر مسائل کوچکتر قبلا حل شده اند به تفکر بازگشتی معروف است. این سنت مشابه فرض استقرا در اثبات قضایاست.

مثال: برج هانوی ⟵ بنابه افسانه ها یک معبد هندی دارای سه ستون الماس است که خداوند 64 حلقه طلا به ترتیب نزولی قطرشان از پایین به بالا روی آنها قرار داده. راهبه ها باید این حلقه ها را به ستون آخر منتقل کنند و هرگز نباید یک حلقه بزرگتر روی کوچکتر قرار گیرد. اگر با اتمام کار، عمر جهان پایان یابد عمر جهان چقدر است؟



راه حل بازگشتی اینچنین است که فرض می کنیم راهی برای انتقال $n-1$ حلقه به ستون دوم پیدا کرده‌ایم، حال باید حلقه‌ی آخر را به ستون سوم اضافه کرد و سپس $1-n$ حلقه را به ستون سوم رساند. حال اگر a_n، $n \geq 1$ حداقل انتقال‌های لازم برای جابجایی n حلقه از یک ستون به ستون دیگر باشد می‌بینیم برای انتقال $n-1$ حلقه از A به B، a_{n-1} انتقال و برای انتقال حلقه nام به C به یک انتقال و برای انتقال $n-1$ حلقه از B به C، a_{n-1} انتقال نیاز است پس $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$ و شرط مرزی $a_1 = 1$ است، پس رابطه بازگشتی $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ است

مثال: دنباله فیبوناتچی $\longleftarrow$ این رابطه منصوب به لئوناردو پیزا ریاضیدان قرون وسطایی است و بر این اساس است که: در ابتدای سال یک جفت خرگوش داریم. هر جفت خرگوش در ماه اول تولد صاحب بچه نمی‌شوند ولی در ماه های دیگر یک جفت خرگوش به دنیا می‌آورند و هیچ خرگوشی از بین نمی‌رود. تعداد خرگوش‌ها در انتهای سال؟

تعداد خرگوش‌های متولد شده ماه nام برابر تعداد خرگوش‌های ماه $n-2$ است زیرا خرگوش‌های ماه $n-1$ هنوز تولید مثل نکرده اند پس اگر F_0 تعداد خرگوش‌های ماه nام باشد، $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ و $F_0 = 1$ و $F_1 = 1$ است.

مثال: مجموعه اعداد دودویی n رقمی فاقد الگوی 11 چند عضو دارد؟

می دانیم $S_0=0$ و $S_1=2$ و می دانیم که برای ساختن اعداد n رقمی باید به اعداد $n-1$ رقمی 0 یا 1 اضافه کنیم. اضافه کردن 0 مشکلی ایجاد نمی کند، پس به همان تعداد $n-1$ رقمی عدد داریم ولی در اضافه کردن 1 باید مواظب باشیم الگوی 11 ایجاد نشود، بنابراین داریم $S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$ و $n\geq 2$.

مثال: تعداد افرازهای ممکن یک مجموعه n عضوی به r زیرمجموعه‌ی غیر تهی که با $S_{n,r}$ نشان می‌دهیم را حساب کنید. اعداد $S_{n,r}$ به اعداد استرلینگ نوع دوم معروف هستند.

این مجموعه را می توان به دو گروه شامل $\{x_n\}$ و فاقد $\{x_n\}$ تقسیم کرد. تعداد افرازهای $S_{n,r}$ که شامل $\{x_n\}$ باشند که با تعداد $S_{n-1,r-1}$ برابر است اما تعداد گروه دوم برابر $rS_{n-1,r}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} S_{n,r}=S_{n-1,r-1}+rS_{n-1,r} & 1\leq r\leq n \\ S_{n,1}=1, S_{n,n}=1 & n\geq 1 \end{cases}$$

گاهی از اوقات، بویژه وقتی به جملات با اندیس بزرگتر نیاز داریم یا خواص عمومی دنباله را می‌خواهیم به فرمول صریح نیاز داریم که آن را جواب رابطه بازگشتی گوییم.

حل روابط بازگشتی با استفاده از جایگزاری با تکرار:

این روش برای حل روابط بازگشتی مرتبه اول بسیار مناسب است.

مثال:

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+f(n) & n\geq 1 \\ a_0=1 \end{cases} \longrightarrow a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$a_1=a_0+f(1),\ a_2=a_0+f(1)+f(2)\ldots$$

$$\begin{cases} a_n=ca_{n-1}+f(n) & n\geq 1 \\ a_0 \quad \text{const} \end{cases} \longrightarrow a_n=c^n a_0+\sum_{k=1}^{n} c^{n-k} f(k)$$

$$a_1=ca_0+f(1),\ a_2=c2a_0+cf(1)+f(2)\ldots$$

مثال:

$$\begin{cases} a_n=2a_{n-1}+1 & n\geq 1 \\ a_0=0 \end{cases} \longrightarrow c=2,\ f(n)=1$$

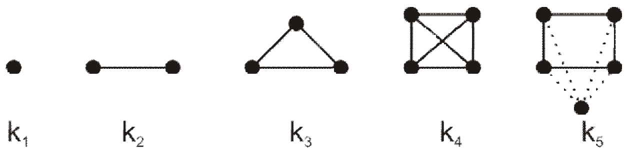
$$\longrightarrow a_n=\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}=2^{n-1}+\ldots+2^0=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

مثال:مرتب سازی حبابی را در نظر بگیرید. تعداد مقایسه‌های لازم را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) & n \ge 1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow c = 0\,,\ f(n) = n-1$$

$$\longrightarrow a_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

k_n شکلی است که از ترسیم یک n ضلعی با تمام اقطارش حاصل شده(گراف کامل) تعداد یالهای آن از رابطه‌ی $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) & n \ge 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$ بدست می آید.



تعداد مقایسه‌های لازم برای مرتب سازی ادغامی: در این روش ابتدا آرایه را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را با تقسیم‌های متوالی به قسمت‌های دیگر تقسیم می‌کنیم، سپس مرتب سازی در راه بازگشت صورت می‌پذیرد و با هم ادغام می‌شوند.

$$\begin{cases} a_n = 2a_{\frac{n}{2}} + n - 1 & n \ge 2\,,\ n = 2^m \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$2a_{\frac{n}{2}} = 2\left[2a_{\frac{n}{4}} + \frac{n}{2} - 1\right] = 2^2 a_{\frac{n}{4}} + n - 2$$

$$2^2 a_{\frac{n}{4}} = 2^2\left[2a_{\frac{n}{8}} + \frac{n}{4} - 1\right] = 2^3 a_{\frac{n}{8}} + n - 2^2$$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} a_n - 2a_{\frac{n}{2}} &= n - 2^0 \\ 2a_{\frac{n}{2}} - 2^2 a_{\frac{n}{4}} &= n - 2^1 \\ 2^{m-1} a_{\frac{n}{2^{m-1}}} - 2^m a_{\frac{n}{2^m}} &= n - 2^{m-1} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} a_n = (n-2^0) + (n-2^1) + \ldots + (n-2^{m-1})$$

$$= mn - (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{m-1}) = mn - (2^m - 1)$$

$$= mn - n + 1 \xrightarrow{m = \log_2^n} a_n = n\log_2^n - n + 1$$

- رابطه بازگشتی حالت خاصی از روابط تقسیم و حل است. این روابط برای تجزیه و تحلیل الگوریتم‌های بازگشتی به کار می‌روند. فرمول عمومی یک رابطه‌ی تقسیم و حل به صورت $a_n = ca_{n/d} + f(n)$ است که c و d ثابت و $f(n)$ تابعی از n است.

حل روابط بازگشتی با استفاده ازمعادله مشخصه:

تعریف: اگر $k \in z^+$ و $c_{n-k}(\neq 0),\ldots,c_{n-1}(\neq 0),c_n(\neq 0)$ اعداد حقیقی و a_n یک دنباله باشد آنگاه $c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \ldots + c_{n-k}a_{n-k} = f(n), \quad n \geq k$ یک رابطه بازگشتی از مرتبه‌ی kاست. اگر $\forall n \geq 0$ ، $f(n)=0$ رابطه بازگشتی را همگن(متجانس) و در غیر این صورت ناهمگن گوییم.

روابط بازگشتی همگن مرتبه دو: $c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2$

$c_n = cr^n$در نظر گرفته می‌شود پس داریم $c_n r^2 + c_{n-1}r + c_{n-2} = 0$ و $r,c \neq 0$. به این معادله، معادله مشخصه می‌گوییم. که اگر r_1, r_2 ریشه‌های آن باشند سه حالت داریم:

1) $r_1 \neq r_2 \in R$

2) $r_1 = r_2 = r$

3) $r_1 \neq r_2$ و هردو مختلط هستند.

1) در حالت اول جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواهی هستند که با دانستن شرایط مرزی مشخص می‌شوند.

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} - 6\,a_{n-2} = 0 & n \geq 2 \\ a_0 = 1\,,\ a_1 = 2 \end{cases}$$

معادله مشخصه: $r^2 + r - 6 = 0 \longrightarrow (r+3)(r-2) = 0 \longrightarrow r_1 = 2\,,\ r_2 = -3$

$$\longrightarrow a_n = c_1\,(2)^n + c_2\,(-3)^n \longrightarrow \begin{cases} a_0 = c_1\,2^0 + c_2\,(-3)^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = c_1\,2^1 + c_2\,(-3)^1 = 2\,c_1 - 3\,c_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \longrightarrow a_n = 2^n$$

مثال: عبارت محاسباتی مجاز بدون پرانتز شامل 0 تا 9 و +،* و / را در نظر می‌گیریم. اگر a_n تعداد این محاسبات مجاز باشد بدیهی است $a_1 = 10$ و $a_2 = 100$ و $a_n = 10a_{n-1} + 29a_{n-2}, \quad n \geq 3$ چرا که در عبارات $n-1$ علامتی فقط یک عدد می‌توان اضافه کرد اما به $n-2$ علامتی‌ها می‌توان یکی از 29 علامت $0+,\ldots,9+,0*,\ldots,9*,1/,\ldots,9/$ را اضافه کرد.

$$\begin{cases} a_n = 10\,a_{n-1} + 29\,a_{n-2} & n \geq 3 \\ a_1 = 10\,,\ a_2 = 100 \end{cases}$$

$$\longrightarrow r^2 - 10\,r - 29 = 0 \longrightarrow r_1, r_2 = 5 \pm 3\sqrt{6}$$

$$\longrightarrow a_n = \frac{5}{3\sqrt{6}}\left[\left(5+3\sqrt{6}\right)^n - \left(5-3\sqrt{6}\right)^n\right]$$

2) در حالتی که ریشه ها موهومی‌اند باز جواب عمومی به صورت $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ است که c_1 و c_2 موهومی‌اند. در عین حال وقتی ضرایب رابطه بازگشتی حقیقی است، جواب عمومی حاصل نیز حقیقی است.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad n \ge 0$$

$$z = x + iy \longrightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\longrightarrow z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad n \ge 0$$

3) در حالتی که معادله‌ی مشخصه دارای ریشه مضاعف $r = r_1 = r_2$ است، جواب عمومی به صورت $a_n = (c_1 + nc_2)r^n$.

در حالت عمومی، اگر $c_n a_n + \dots + c_{n-k} a_{k-1} = 0$ و $c_n \neq 0$ ، $c_{n-k}, \dots, c_{n-1}$ اعداد حقیقی و r یک ریشه تکراری با مرتبه m، $z \le m \le k$ باشد. آن قسمت از جواب عمومی که مربوط به ریشه‌ی r است عبارت است از $(A_0 + A_1 n + \dots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$ که $A_{m-1}, \dots, A_1, A_0$ ثابت‌های دلخواهی هستند.

مثال:

$$\begin{cases} a_{n+3} = 3a_{n+2} - 4a_n \ , \ n \ge 0 \\ a_0 = 3\ ,\ a_1 = 4\ ,\ a_2 = 22 \end{cases} \longrightarrow r^3 - 3r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r_1 = r_2 = 2\ ,\ r_3 = -1$$
$$\longrightarrow a_n = (A_0 + A_1 n)2^n + c(-1)^n$$

از جایگذاری شرایط مرزی داریم:

$$A_0 = 1\ ,\ A_1 = 2\ ,\ c = 2 \longrightarrow a_n = (1 + 2n)2^n + 2(-1)^n$$

روابط بازگشتی ناهمگن خطی با ضرایب ثابت:

رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه k و با ضرایب ثابت $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n)\ ,\ n \ge k$ که $c_{n-k} \neq 0, \dots, c_{n-1}, c_n \neq 0$ اعداد ثابت حقیقی و $f(n)$ یک تابع غیر صفر است.

- رابطه بازگشتی ناهمگن از مرتبه 2 $\longleftarrow n \ge 2$ ، $a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = f(n)$ ، $c \neq 0$ و $f(n)$ تابع غیر صفر.

جواب عمومی این رابطه به صورت $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ که $a_n^{(h)}$ جواب عمومی رابطه‌ی بازگشتی همگن $a_n + ca_{n-1} + ba_{n-2} = 0$ است و $a_n^{(p)}$ یک جواب ویژه که بسته به $f(n)$ از راه‌های زیر بدست می آید.

1) $f(n)$ بصورت یکی از حالت‌های جدول باشد و جوابی برای رابطه بازگشتی همگن نباشد $a_n^{(p)}$ هم مثل ستون دوم است.

2) $f(n)$ حاصل جمعی از توابع ستون اول باشد $a_n^{(p)}$ هم حاصل جمع جملات متناظر در ستون دوم خواهد بود.

3) وقتی یکی از جمعوندهای تابع $f(n)$ مثل $f_1(n)$ جوابی برای رابطه‌ی بازگشتی همگن باشد یعنی $f_1(n)=cr^n$ یا $f_1(n)=(c_1+c_2n)r^n$ که در آن r ریشه معادله مشخصه است، در چنین حالتی جواب ویژه‌ی منسوب به $f_1(n)$ را به کوچکترین توانی از n مثل n^s که در آن هیچ جمعوندی از $n^s f_1(n)$ نباشد ضرب می‌کنیم. در این حالت $n^s f_1(n)$ قسمت متناظر از $a_n^{(p)}$ است.

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
c ثابت	A ثابت
n	$A_0 + A_1 n$
n^2	$A_0 + A_1 n + A_2 n^2$
$n^t \quad t \in Z^+$	$A_0 + A_1 n + \ldots + A_{t-1} n^{t-1} + A_t n^t$
$r^n \quad r \in R$	Ar^n
$\sin a\, n$	$A \sin a\, n + B \cos a\, n$
$\cos a\, n$	$A \sin a\, n + B \cos a\, n$
$n^t r^n$	$r^n (A_0 + A_1 n + \ldots + A_{t-1} n^{t-1} + A_t n^t)$
$r^n \sin a\, n$	$Ar^n \sin a\, n + Br^n \cos a\, n$
$r^n \cos a\, n$	$Ar^n \sin a\, n + Br^n \cos a\, n$

توابع مولد:

مثال: اگر بخواهیم 12 پرتقال را بین بین 3 نفر به ترتیبی که اولی حداقل 4 تا، دومی حداقل 2 تا و سومی حداقل 2 تا و حداکثر 5 تا داشته باشند تقسیم کنیم چند حالت داریم؟

ضریب x^{12} برابر تعداد حالات است.

$$f(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \longleftarrow \text{تابع مولد}$$

مثال: 24 توپ را از بین تعداد نامحدود توپ‌هایی با رنگ‌های قرمز ، سبز ، سفید و سیاه به گونه‌ای انتخاب کنیم که حداقل 6 توپ سیاه و به تعداد زوج توپ سفید داشته باشیم.

ضریب x^{24} جواب مساله است.

$$f(x) = (x^0 + x^1 + \ldots + x^{18})(x^0 + x^1 + \ldots + x^{24})(x^0 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{18})$$

تعریف: فرض کنید که $a_0 \ldots, a_6, \ldots$ رشته‌ای از اعداد حقیقی باشد تابع $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را تابع مولد رشته‌ی مزبور گوییم.

مثال: $(1+x)^n$ تابع مولد برای رشته‌ی $c_n^0, c_n^1, c_n^2, ..., c_n^n, 0, 0, 0, ...$ است.

- برای هر $n \in Z^+$ قضیه دو جمله‌ای نیوتون به صورت زیر است.

$$\forall n \in Z^+ \Longrightarrow (1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + ... + c_n^n x^n$$

این فرمول را برای nهای منفی و حقیقی می‌توان تعمیم داد:

$$\forall n, r \in Z^+,\ n \ge r \ge 0 \Longrightarrow c_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

$$n \in Z^+ \Longrightarrow c_{-n}^r = \frac{(-1)^r\ n(n+1)(n+2)...(n+r-1)}{r!} = \frac{(-1)^r\ (n+r-1)!}{r!\,(n-r)!} = (-1)^r\ c_{n+r-1}^r$$

اگر $\Longrightarrow$

$$\forall n \Longrightarrow c_n^0 = 1$$

مثال: برای $n \in Z^+$ بسط سری مک‌لورن برای $(1+x)^{-n}$ به صورت زیر است.

$$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + (-n)(-n-1)\frac{x^2}{2!} + ... + ...$$

$$= 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)...(-n-r+1)}{r!} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r c_{n+r-1}^r x^r$$

لذا $(1+x)^{-n}$ تابع مولد رشته‌ی $c_{-n}^0, c_{-n}^1, c_{-n}^2, ...$ است.

نکات مهم:

$$1-\ (1+x)^n = c_n^0 + c_n^1 x + c_n^2 x^2 + ... + c_n^n x^n$$

$$2-\ (1+ax)^n = c_n^0 + c_n^1 ax + c_n^2 a^2 x^2 + ... + c_n^n a^n x^n$$

$$3-\ (1+x^m)^n = c_n^0 + c_n^1 x^m + c_n^2 x^{2m} + ... + c_n^n x^{nm}$$

$$4-\ (1+x^{n+1})/(1-x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$$

$$5-1/(1-x) = 1 + x + x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$6-\ \frac{1}{(1+x)^n} = c_{-n}^0 + c_{-n}^1 x + c_{-n}^2 x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-n}^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 + (-1)^k c_{k+n-1}^k x^k$$

$$7-\ \frac{1}{(1-x)^n} = c_{-n}^0 + c_{-n}^1 (-x) + c_{-n}^2 (-x)^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-n}^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k-1}^k x^k$$

اگر $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ و $h(x) = f(x)g(x)$ ، آنگاه $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ که در آن $c_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{k-i}$ و $k \ge 0$.

مثال: ضریب x^{15} را در $f(x)=(x^2+x^3+\dots)^4$ بدست آورید.

$$f(x)=(x^2(1+x+\dots))^4=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^4=\frac{x^8}{(1-x)^4}$$

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{r=0}^{\infty} c_{n+r-1}^{r}\, x^r \Longrightarrow c_{11}^{7}=120$$

ضریب x^{15} در $f(x)$ مثل ضریب x^7 در $\frac{1}{(1-x)^4}$ می‌باشد.

مثال: نشان دهید برای هر $n\in Z^+$، $c_{2n}^{n}=\sum_{i=0}^{n}(c_n^i)^2$

می‌دانیم $(1+x)^{2n}=[(1+x)^n]^2$ ، c_{2n}^{n} ضریب x^n در $(1+x)^{2n}$ است.

$$\longrightarrow [c_n^0+c_n^1\,x+c_n^2\,x^2+\dots+c_n^n\,x^n]^2 \longrightarrow c_n^0\,c_n^n+c_n^1\,c_n^{n-1}+\dots+c_n^n\,c_n^0$$

$$c_n^r=c_n^{n-r} \Longrightarrow c_{2n}^{r}=\sum_{i=0}^{n}(c_n^i)^2 \quad \text{می‌دانیم}$$

حل روابط بازگشتی با استفاده از توابع مولد:

مثال: تعداد جابجایی‌های حلقه‌ها در برج هانوی:

$$\begin{cases} a_n=2\,a_{n-1}+1 \quad , \; n\ge 1 \\ a_0=0 \end{cases}$$

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

$$\longrightarrow A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2\,a_{n-1}+1)\,x^n=2\,x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\,x^{n-1}+x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$$

$$\longrightarrow A(x)=2\,x A(x)+\frac{x}{1-x} \longrightarrow (1-2\,x)(a(x))=\frac{x}{1-x}$$

$$\longrightarrow A(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2\,x)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1-2\,x}=\frac{a(i-2\,x)+b(1-x)}{(1-x)(1-2\,x)}$$

$$\longrightarrow x=a(1-2\,x)+b(1-x) \longrightarrow a=-1 \;\; \& \;\; b=1$$

$$\longrightarrow A(x)=\frac{1}{1-2\,x}-\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n\,x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)\,x^n$$

$$\longrightarrow a_n=2^n-1$$

پایان فصل پنجم

فصل ششم : مروری بر نظریه ی گرافها

بسیاری از مسائل روزمره ی زندگی را می توان به صورت انتزاعی توسط مجموعه ای گسسته از اشیا و روابط دودویی تعریف شده بر آن بیان کرد. در این گونه مسائل نمایش گرافیکی مناسب ترین روش نمایش است. این امر به مطالعه ی **نظریه ی گرافها** منجر می شود.

تعاریف :

- گراف سودار به صورت زوج مرتب (V,E) است، که در آن V مجموعه ای از متناهی از رئوس و E رابطه ای دودویی در V می باشد.
- عناصر V را رئوس و زوج مرتب های E را یال های گراف **سودار** می نامیم.
- یک یال حادث با رئوسی است که به وسیله ی آن به هم وصل می شوند. یال (a,b) حادث از a و حادث به b است. a راس ابتدایی و b راس انتهایی است.
- دو راس **مجاور** خوانده می شوند که به وسیله ی یالی به هم وصل می شوند.
- یک راس **منفرد** است هرگاه هیچ یالی با آن حادث نباشد واگر یالی حادث به همان راس باشد **حلقه** نامیده می شود.
- گراف بی سوی G به صورت زوج مرتب (V,E) است که V مجموعه ای متناهی و E مجموعه ای از مجموعک های دو عنصری از V است.
- دو گراف را **یکریخت** می گییم هر گاه یک تناظر یک به یک بین رئوس و یک تناظر یک به یک بین یال های آن موجود باشد و مفهوم حادث بودن محفوظ بماند.
- اگر $G(V,E)$ باشد $G'(V',E')$ را زیر گراف G گوییم هرگاه $E' \subseteq E$ و $V' \subseteq V$ به طوری که یال های E' تنها با رئوس V' حادث باشند.
- اگر یک زیر گراف از G شامل تمامی رئوس V باشد آن را زیر گراف **پوشا** می خوانیم.
- مکمل زیر گراف G' نسبت به G زیر گرافی چون $G''(V'',E'')$ است که $E'' = E - E'$ و V'' رئوسی را شامل می شود که یال های E'' با آنها حادثند.
- فرض کنید $f \neq U \subseteq V$ زیر گراف $G_1(U,E_1)$ را زیر گراف **القا** گوییم هرگاه E_1 شامل تمام یال هایی باشد که رئوس انتهایی آنها در U وجود دارد.
- گراف **کامل** بی سوی n راسی را با k_n نشان می دهیم که بین هر دو راس متمایز آن یالی است. همچنین است گراف سودار n راسی.

- مکمل گراف G با n راس مکمل آن نسبت به k_n است و با $\overline{G}$ نمایش داده می شود.
- اگر برای گراف $G(V,E)$ ، E یک مجموعه ی چندگانه از زوج های مرتب از $V \times V$ باشد آنگاه Gرا یک گراف **چندگانه ی سودار** گوییم.
- در گراف های سودار و بی سوی چندگانه هیچ محدودیتی برای تعداد پیکانها از یک نقطه به نقطه ی دیگر وجود ندارد.
- گراف معمولی یا چندگانه را با نام گراف نام می بریم. اگر بخواهیم تاکید کنیم گراف غیر چندگانه را گراف **خطی** می نامیم.
- یک گراف **وزن دار** را به صورت چهارتایی (V,E,f,g) یا سه تایی (V,E,g) تعریف می کنیم که در آن ها V رئوس E یال ها و f تابعی با دامنه ی V و g تابعی با دامنه ی E هستند. g, f بیانگر انتساب وزن ها به رئوس و یالها هستند.
- در یک گراف سودار **مسیر** رشته ای از یالها مثل $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}$ به گونه ای است که راس انتهایی e_{ij} منطبق بر راس ابتدایی e_{ij+1} است. مسیر را رشته ای از رئوس نیز می توان نمایش داد.
- مسیر را **ساده** می گوییم اگر هیچ یالی در آن تکرار نشود و **ابتدایی** گوییم هر گاه هیچ راسی در آن دو بار ملاقات نشود.
- **مدار** مسیری مثل $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}$ است که در آن راس انتهایی یال e_{ik} بر راس ابتدایی e_{i1} منطبق باشد.
- مدار **ساده** است هرگاه شامل یال تکراری نباشد و **ابتدایی** است هرگاه هیچ راسی در آن دو بار ملاقات نشود.
- گراف بی سو را **همبند** می نامیم هرگاه بین هر دو راس دلخواه مسیری موجود باشد.در غیر این صورت **ناهمبند** است.
- گراف سودار همبند است هرگاه گراف بی سوی حاصل از آن همبند باشد.
- هر گراف نا همبند شامل چندین زیر گراف همبند است که هر کدام را یک **مؤلفه** برای گراف می نامیم.
- یک گراف سودار **همبند قوی** است هرگاه به ازای هر دو راس a و b هم مسیری از a به b و هم مسیری از b به a موجود باشد.

مثال : در بازی حماقت لحظه ای 4 مکعب با وجه هایی به رنگ های متفاوت (در کل 4 رنگ متفاوت) داریم. می خواهیم آنها را روی هم بچینیم به طوری که در هر ستون 4 رنگ متفاوت دیده شود. برای این کار در حالت عمومی برای 4 مکعب یک گراف چندگانه ی وزن دار تشکیل داده و سعی خواهیم کرد دو زیرگراف با ویژگی های زیر در آن پیدا کنیم.

1) هر زیرگراف باید شامل 4 راس و 4 یال با برچسب های مختلف باشد.
2) در هر زیرگراف درجه ی هر راس باید دقیقا برابر 2 باشد.
3) دو زیرگراف نباید یال مشترک داشته باشند.

- مسیر و مدار اولری به مسیر و مداری گفته می شود که از هر کدام از یال های گراف تنها و تنها یک بار عبور کند.
- درجه ی هر راس تعداد یال های حادث با آن تعریف می شود. درجه ی هر راس V را با $\deg(V)$ نمایش می دهند.

لم 1 : در یک گراف بی سو $G(V,E)$ رابطه ی زیر را داریم.

$\sum_{v\in V} V_v \deg(v) = 2|E(G)|$ که $|E(G)|$ تعداد یالها می باشد.

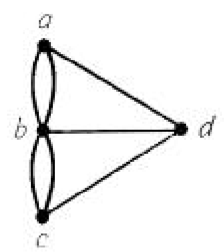
لم 2 : در یک گراف بی سو تعداد رئوس از درجه فرد همیشه زوج است.

$\sum_{v\in V} \deg(v)=\sum_{fard} \deg(v)=\sum_{zoj} \deg(v)=2|E(G)|$ زوج است

قضیه : گراف بی سوی $G(V,E)$ دارای مدار اولری است اگر و تنها اگر راسی از درجه فرد نداشته باشد.

لم 3 : گراف بی سوی G دارای مسیر اولری است اگر و تنها اگر همبند بوده و حداکثر دو راس از درجه فرد داشته باشد.

مثال : یکی از سرگرمی های مردم کانیگزبرگ این بود که با شروع از یک نقطه از هفت پل واقع بر رودخانه ی پرگل تنها و تنها یک بار عبور کرده به نقطه ی عزیمت خود برگردند. نقشه را می توان به صورت گرافی که یالهای آن پل ها و رئوس آن جزیره ها و دو طرف رودخانه هستند نشان داد.



اولر که پدر نظریه ی گرافها لقب گرفته نشان داد حل مساله در گرو پیدا کردن یک مدار اولری در این گراف است که با توجه به 4 راس درجه ی فرد آن نه مسیر و نه مدار اولری در این گراف موجود نمی باشد.

- برای گراف سودار $G(V,E)$ **درجه ی ورودی** یک راس مثل v برابر تعداد یال های حادث به آن و **درجه ی خروجی** یک راس برابر تعداد یال های حادث از آن تعریف می شود. درجه ی ورودی را با $\deg^{-}(v)$ و درجه ی خروجی را با $\deg^{+}(v)$ نمایش می دهیم.
- هر حلقه در گراف سودار موجب افزایش یک واحد به $\deg^{-}(v)$ و یک واحد به $\deg^{+}(v)$ می شود.

قضیه: گراف سودار $G(V,E)$ دارای **مدار اولری** است اگر و تنها اگر همبند بوده و برای هر $v \in V$ داشته باشیم $\deg^{+}(v) = \deg^{-}(v)$.

و دارای **مسیر اولری** است اگر و تنها اگر همبند بوده و به استثنای دو راس مثل a و b برای هر راس $\deg^{+}(v) = \deg^{-}(v)$ برقرار باشدو برای رئوس a و b نیز داشته باشیم :

$$\deg^{+}(b)=\deg^{-}(b)+1 \quad , \quad \deg^{-}(a)=\deg^{+}(a)+1$$

مسیر و دور هامیلتونی : مسیر (دور) هامیلتونی به مسیری (دوری) گفته می شود که از هر راس گراف فقط و فقط یک بار عبور کند.

- تنها راه حل برای نشان دادن اینکه گرافی دارای مسیر هامیلتونی است تشکیل صریح آن است.
- اگر گرافی دارای دور هامیلتونی باشد همبند است.

چند نکته مفید برای بدست آوردن یک دور هامیلتونی در گراف $G(V,E)$.

1) اگر G دور هامیلتونی دارد برای هر راس $v \in V$, $\deg(v) \geq 2$.
2) اگر برای $a \in V$, $\deg(a) > 2$، در زمان تشکیل دور هامیلتونی به محض عبور از راس a می توان همه ی یال های حادث با آن را حذف کرد.
3) اگر برای $a \in V$, $\deg(a) > 2$ دو یال حادث با راس a باید در دور هامیلتونی قرار بگیرند.
4) در زمان تشکیل دور هامیلتونی برای G نمی توانیم دوری برای یک زیرگراف از G تشکیل دهیم مگر اینکه همه ی رئوس را شامل شوند.

راهی برای نشان دادن اینکه بعضی گراف ها مسیر هامیلتونی ندارند :

رئوس را با x و y طوری برچسب می زنیم که راس x حادث با y و راس y حادث با x باشد. دور هامیلتونی شامل $|V|$ راس است که از x و y های متوالی ظاهر شده سپس تعداد x و y باید به اندازه $\frac{|V|}{2}$ موجود باشد.

دور هامیلتونی در یک گراف کامل :

مثال : هفده نفر می خواهند در یک میزگرد به شیوه هایی بنشینند که هر بار دو طرف یک شخص افراد متفاوتی نشسته باشد.

در گراف کامل K_n ، $n \geq 3$، nراس و $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ یال موجود است. و حداکثر $\frac{n-1}{2}$ دور هامیلتونی با یال های متفاوت موجود است. بنابراین به $\frac{16-1}{2} = 8$ روش ممکن می توانند بنشینند.

تعریف :یک گراف کامل سودار با n راس که با K_n^* نمایش داده می شود گرافی است سودار و با n راس به طوری که برای هر دو راس x و y ، (x,y) یا (y,x) موجود باشد. K_n^* را چرخه می گوییم.

قضیه : K_n^* دارای یک مسیر (سودار) هامیلتونی است.

اثبات به شیوه ی استقرا :

1) $n=2$ درست است.

2) K_n^* دارای مسیر هامیلتونی است. (فرض)

3) اگر از K_{n+1}^* راس v_{n+1} را حذف کنیم، گراف K_n^* بدست می آید که مسیر هامیلتونی نام دارد، دو امکان وجود خواهد داشت
الف) برای $1 \leq k \leq n$ یال های (v_k, v_{n+1}) , (v_{n+1}, v_{k+1}) در گراف هستندکه در این صورت آنها را با یال (v_k, v_{k+1}) جایگزین می کنیم.
ب) (v_n, v_{n+1}) در K_{n+1}^* است که در این صورت این یال به مسیر اولیه در فرض مسئله اضافه می شود.

قضیه : اگر $G(V,E)$ یک گراف بی سوی بدون حلقه با nراس باشد، اگر برای هر $x,y \in V$ رابطه ی $\deg(x)+\deg(y) \geq n-1$ برقرار باشد G دارای مسیر هامیلتونی است.

اثبات : G همبند است چون در غیر این صورت C_1, C_2 دو مؤلفه ی گراف با n_1, n_2 راس بوده و داریم :

$$\begin{cases} y \in C_2 \to \deg(y) \le n_2 - 1 \\ x \in C_1 \to \deg(x) \le n_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \deg(x) + \deg(y) \le n - 2$$ که با فرض تناقض دارد

لـم: اگـر $G(V,E)$ یـک گـراف بـی سـوی بـدون حلقـه بـا n راس باشـد، اگـر بـرای هـر $v \in V$, $\deg(v) \ge \frac{n-1}{2}$ آنگاه G مسیر هامیلتونی دارد.

قضیه: اگر $G(V,E)$ یک گراف بی سوی بدون حلقه با $|V| = n \ge 3$ راس باشد و برای هر دو راس دلخواه و غیر مجاور x و y رابطه ی $\deg(x) + \deg(y) \ge n$ برقرار باشد آنگاه G یک دور هامیلتونی دارد.

کوتاه ترین مسیر ها در گراف های وزن دار (الگوریتم دیکسترا) :

فرض کنید $G(V,E,W)$ یک گراف وزن دار است.وزن یالی مثل (i,j) با $w(i,j)$ نشان داده شده و آن را طول آن یال می نامیم. طول یک مسیر در G مجموع طول یال های تشکیل دهنده ی آن است.

نکته: مسئله مهم تعیین کوتاه ترین مسیر از یک راس به راس دیگر مثل a تا z است.برای این کار از **الگوریتم دیکسترا** استفاده می کنیم.

الگوریتم دیکسترا :

1) در ابتدا $T = V - \{a\}$ و برای هر $t \in T$, $l(t) = w(a,t)$ و $p = \{a\}$. $l(t)$ را کوتاه ترین مسیر از a به t می نامیم به طوری که شامل هیچ راس دیگری از T نباشد. $l(t)$ را اندیس t نسبت به p می گوییم و اگر مسیری وجود نداشت برابر ∞ قرار می دهیم.
2) فرض می کنیم $x \in T$ راسی است که کوچکترین اندیس نسبت به p را دارد.
3) اگر x راسی باشد که می خواهیم از a به آن برسیم در این صورت الگوریتم خاتمه می یابد. در غیر این صورت $P' = PU\{x\}$ و $T' = T - \{x\}$ و برای هر $t \in T'$ اندیس آن را با استفاده از رابطه $l'(t) = \min\{l(t), l(x) + w(x,t)\}$ حساب می کنیم.
4) مراحل 2 و 3 را با p' به جای P و T' به جای T تکرار می کنیم.

اگر در مرحله دوم این الگوریتم رئوسی را ذخیره کنیم که منجر به کوتاه ترین مسیر از a به x می شوند نه تنها کوتاه ترین مسیر از a به x بلکه خود این مسیر را نیز به دست خواهیم آورد.

نکته: پیدا کردن دور هامیلتونی دارای کمترین وزن به ویژه برای n های بزرگ عملا امکان پذیر نیست.

قاعده ی نزدیک ترین همسایه :

فرض می کنیم $G(V,E,W)$ گراف وزن دار بی سو با n راس است. قاعده ی نزدیکترین همسایه برای بدست آوردن دور هامیلتونی نیمه بهینه H به صورت زیر است.

1) فرض می کنیم $x \in V$ یک راس دلخواه از V است $a \leftarrow x$, $H \leftarrow f$, $P \leftarrow \{x\}$ (اولین راس H)

2) برای $i=1$ تا $i=n-1$:

فرض $y \in V$, $y \notin P$ راسی که $w(x,y)$ آن کمترین مقدار است.

$x \leftarrow y, P \leftarrow P \cup \{y\}, H \leftarrow H \cup \{x,y\}$

3) $H \leftarrow H \cup \{x,a\}$ (یال ایجاد شده با اولین و آخرین راس را اضافه می کنیم)

تعریف: گراف $G(V,E)$ را **هامنی** گویند هرگاه G را بتوان در صفحه به گونه ای رسم کرد که یال های آن تنها در رئوس G متقاطع باشند.

تعریف: گراف G را **دو بخشی** گوییم هرگاه $V=V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = f$ و برای هر یال یک راس متعلق به V_1 و دیگری متعلق به V_2 باشد، اگر هر راس از V_1 به تمام رئوس V_2 وصل باشد گراف را **دوبخشی کامل** می گوییم. در حالت اخیر که $|V_1| = m$, $|V_2| = n$، G را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم.

تعریف: فرض کنید G یک گراف بی سو و بی حلقه است که درآن $E \neq f$ اگر یال $e=\{v,w\}$ را حذف و $\{u,v\}$, $\{w,v\}$ را اضافه کنیم که $v \in G$ در این صورت یک **زیر بخش مقدماتی** از G حاصل خواهد شد.

تعریف: گراف های بی سو و بی حلقه G_1, G_2 را **همریخت** گوییم هرگاه یکریخت باشند یا از یک گراف بی سو و بی حلقه ی H به وسیله یک رشته از زیربخش ها بدست آیند.

تعریف: یک **ناحیه** از گراف هامنی ناحیه ای از صفحه است که به یال های گراف محدود بوده و دیگر قابل تقسیم به زیرنواحی نیست. اگر گراف را در امتداد یال ها ببریم ناحیه ها جدا می شوند.

نکته: یک ناحیه **متناهی** است هرگاه مساحت آن متناهی باشد در غیر این صورت **نامتناهی** است.

قضیه: فرض کنید G یک گراف همبند و هامنی با $|E|=e, |V|=v$ است. اگر r تعداد نواحی تعریف شده به وسیله ی G باشد آنگاه داریم $v-e+r=2$

اثبات با استقرا :

$$1)\ \ e=1\begin{cases} v=1\to r=2 \\ v=2\to r=1 \end{cases}$$

2) $e=k \qquad v-k+r=2$ فرض

3) $e=k+1\Rightarrow$

A) با حذف a داریم $\to G$راسی از درجه 1 دارد

$$(v-1)+r-k=2\to[(v-1)+1]-(k+1)+r=v-e+r=2$$

B) با حذف a داریم $\to G$راسی از درجه 1 ندارد

$$(v-1)-k+(r-1)=2\to[(v-1)+1]-(k+1)+[(r-1)+1]=2$$

لم : فرض کنید که G یک گراف بی سوی همبند، هامنی و بدون حلقه با $|V|=v$, $|E|=e>2$ است،
در این صورت : $e\le 3v-6$

اثبات : اگر b تعداد همه ی یال های مرزی برای نواحی باشد

$$\frac{2e}{3}\ge r \quad \text{یا} \quad 2e\ge 3r \quad \Leftarrow b\le 2e\ ,\ b\ge 3r$$

$$2=v-e+r\le\frac{2e}{3}+v-e=r-\frac{e}{3}\to e\le 3v-6$$

در نتیجه اگر G گرافی خطی همبند و بدون حلقه با $|E|>2$ یال باشد و $e>3v-6$ آنگاه G هامنی نیست.

قضیه (کوراتاوسکی) :گراف G هامنی است اگر و تنها اگر دارای زیرگرافی همریفت با k_5 یا $k_{3,3}$ نباشد.

پایان فصل ششم

فصل هفتم : درخت ها

درخت ها حالت خاصی از گراف ها هستند. اگر $G(V,E)$ گرافی بی سو و بی حلقه باشد، G را درخت گوییم اگر همبند بوده و دارای هیچ دوری نباشد. اگر G_i همبند نباشد اما هر کدام از مؤلفه های آن یک درخت باشد آن را جنگل می گوییم. اگر G یک درخت باشد با T نمایش داده می شود.

قضیه : اگر a و b دو راس از یک درخت با $|V|>1$ باشد آنگاه حداقل یک راس در V وجود دارد که درجه ی آن مساوی یک است.

قضیه : اگر $T(V,E)$ یک درخت باشد در این صورت داریم $|E|=|V|-1$

لم : اگر $T(V,E)$ یک درخت با $|V|>2$ باشد آنگاه دست کم دو راس از درجه یک دارد.

اثبات :

فرض $\quad |V|=n \rightarrow \sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2|E|=2(n-1)=2n-2$

تنها یک راس از درجه 1 داریم $\rightarrow \deg(v_i)\geq 2 \ , \ i=2,...,n$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=1+\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)\geq 1+2n-2=2n-1 \rightarrow -2\geq -1$ تناقض

قضیه : اگر دو راس غیر مجاور درخت T را با هم جمع کنیم در گراف حاصل یک دور ایجاد می شود.

قضیه : گراف $G(V,E)$ یک رخت است اگر و تنها اگر دارای دوری نباشد و $|E|=|V|-1$

اثبات : نیمی از قضیه که توسط استقرا ثابت می شود. حال می خواهیم نشان دهیم اگر گراف G دارای دور نبوده و $|E|=|V|-1$ آنگاه G همبند است.

اگر $G_1,...,G_k$ مولفه های همبند باشند و $G_i(V_i,E_i)$ هرکدام از مولفه ها یک درخت است زیرا همبند است و دور ندارد و از آنجا که $k=1$ است پس فقط یک مولفه ی همبند داریم.

$$|E_i|=|V_i|-1 \, , \, |E|=\sum_{i=1}^{k}|E_i|=|V|-k$$

قضیه : عبارات زیر در مورد گراف بی سو و بی حلقه ی $G(V,E)$ هم ارزند :

الف) G یک درخت است.

ب) G همبند است و $|E|=|V|-1$.

ج) G شامل هیچ دوری نیست و $|E|=|V|-1$.

د) G همبند است ولی حذف هر یال آن را به دو درخت تقسیم می کند.

ه) G شامل هیچ دوری نیست ولی اگر دو راس غیر مجاور آن را به هم وصل کنیم دقیقا یک دور خواهد داشت.

درخت ریشه دار :

- گراف سودار $G(V,E)$ یک درخت سودار است هرگاه بدون در نظر گرفتن جهت یال ها درخت باشد.
- درخت سودار $T(V,E)$ را ریشه دار گوییم هرگاه راس منحصر به فرد r موجود باشد به طوری که $\deg^{-}(v)=0$ و برای هر راس $\deg^{-}(v)=1$.
- در یک درخت ریشه دار راسی مانند v که $\deg^{+}(v)=0$ است برگ یا راس خارجی (گره خارجی) نامیده می شود و باقی رئوس راس داخلی (گره داخلی) یا شاخه نامیده می شوند.
- اگر طول مسیر از ریشه به راسی x باشد می گوییم آن راس در تراز x واقع شده است.
- برای یال (n,s) که جهت از n به s است n پدر و s فرزند نامیده می شوند.
- هرگاه از a به b مسیری موجود باشد a را نیای b گوییم و b را نواده ی a.
- رئوسی که پدر مشترک داشته باشند برادر یا خواهر نامیده می شوند.
- اگر راس v_1 یک راس از درخت باشد آنگاه زیر درخت به ریشه ی v_1 مساوی زیرگراف القا شده به وسیله ی v_1 و همه ی نواده های آن در صورت وجود است.
- درخت ریشه دار مرتب شده :

1) ریشه را با صفر برچسب می زنیم.
2) رئوس تراز یک را از چپ به راست با 1 و 2 و 3 و ... برچسب می زنیم.
3) اگر v راس داخلی با تراز بزرگتر مساوی یک باشد و با a برچسب بخورد به فرزندانش برچسب $a.1, a.2, \ldots$ زده می شود.

- این روش به سیستم نشانی عمومی معروف است و هر راس که به صورت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ برچسب خورده باشد در تراز n است.
- اگر u و v دو راس با نشانی $b=a_1,\ldots,a_m$ و $c=a_1,\ldots,a_n$ باشد گوییم $b<c$ اگر
الف) $m<n$ ب) $a_m<a_n$
- یک درخت ریشه دار را یک درخت ریشه دار دودویی گوییم هرگاه به ازای هر راس v درجه ی خروجی آن صفر، یک، یا دو باشد.
- در کامپیوتر درخت های دودویی که به ازای هر r, $\deg^{+}(v)=0$ یا $\deg^{+}(v)=2$ است برای نمایش عملیات دودویی استفاده می شوند.
- نماد (prefin) پیشوندی به افتخار ابداع کننده ی آن نماد لهستانی گفته می شود و مزیت آن این است که علارغم به کار نرفتن پرانتز هیچگونه ابهامی ندارد. اگر درخت را از بالا به پایین و از

چپ به راست بخوانیم این نماد به دست می آید و نماد میانوند (infin) $a\,\mathbf{o}\,b$ به صورت $\mathbf{o}\,ab$ خواهد بود.

- ترتیب در درخت ها اهمیت زیادی دارد. چند روش سیستماتیک برای مرتب سازی درخت داریم از جمله : مرتب سازی پیش ترتیب (preorder) و مرتب سازی پس ترتیب (postorder) که به صورت بازگشتی زیر تعریف می شوند :

اگر T درختی با ریشه ی r باشد و فقط همین ریشه را داشته باشد خود ریشه پیمایش پیش ترتیب و پس ترتیب را تشکیل می دهد و اگر $|V|>1$ با فرض $T_k,...,T_1$ زیر درخت های T از چپ به راست داریم :

الف) پیمایش پیش ترتیب، نخست ریشه r سپس رئوس T_1 را به صورت پیش ترتیب آنگاه T_2 الی T_k را به همین ترتیب ملاقات می کند.

ب) پیمایش پس ترتیب، نخست رئوس $T_k,...,T_1$ را به ترتیب به صورت پس ترتیب و سپس ریشه را ملاقات می کند.

اگر درخت ریشه دار دودویی باشد پیمایش میان ترتیب هم به صورت بازگشتی تعریف می شود :

اگر $|V|=1$ ریشه به تنهایی یک پیمایش میان ترتیب خواهد بود و اگر $|V|>1$ و T_R,T_L زیردرخت های چپ و راست باشند، نخست T_L به صورت میان ترتیب سپس ریشه و سپس T_R به صورت میان ترتیب پیمایش می شود.

نکته : 1) زیر درخت چپ یا راست می تواند تهی باشد

2) اگر $\deg^+(v)=1$ و w فرزند باشد باید بین فرزند چپ و راست تمایز قائل شد.

درخت های پوشا :

زیرگراف H از گراف $G(V,E)$ را یک درخت پوشا برای G میگوییم هرگاه

الف) H یک درخت باشد.

ب) همه ی رئوس V را شامل شود.

نکته : درخت پوشایی که سودار باشد درخت پوشای سودار نامیده می شود.

* اگر گراف G همبند باشد تعداد یال هایی که باید برای بدست آوردن درخت پوشا از G حذف کرد برابر $|E|-|V|+1$ است. این عدد را رتبه ی مداری G می گوییم. (یال هایی که حذف می شوند از هر دور گراف انتقاب می شوند)

قضیه :گراف بی سوی $G(V,E)$ همبند است اگر و تنها اگر شامل درخت پوشا باشد. (این الگوریتم کارا نیست چون زمان پیدا کردن دورها بسیار زیاد است)

دو الگوریتم کارا برای پیدا کردن یک درخت پوشا برای یک گراف همبند الگوریتم های جستجو نخست در سطح (BFS) و جستجو نخست در عمق (DFS) می باشند.
در BFS رئوس واقع در یک تراز پیش از رفتن به تراز بعدی ملاقات می شوند و در DFS ابتدا رئوس با ترازهای بیشتر پردازش می شوند.

الگوریتم DFS :

ورودی :گراف بی سو و همبند $G(V,E)$ که رئوس آن به ترتیب $v_n,...,v_2,v_1$ اولویت بندی شده اند.

خروجی : درخت پوشای ریشه دار و سودار $T=(V1,E1)$.

1) $V1 \leftarrow \{v_1\}, v \leftarrow v_1$. v_1 ریشه ی درخت T خواهد بود. v_1 ملاقات شد. $E1=f$

2) $2 \le I \le n$ کوچکترین اندیس است که $\{v,v_i\} \in E$ و راس v_i قبلا ملاقات نشده است. اگر این اندیس وجود نداشت به مرحله ی 3 برو. در غیر این صورت :

الف) $E1=E1 \cup \{v,v_i\}$, $V1=V1 \cup v_i$, v_i ملاقات شد.

ب) $v \leftarrow v_i$

ج) برو به مرحله ی 2.

3) اگر $V=V1$ درخت پوشای ریشه دار و سودار برای G است و الگوریتم خاتمه می یابد.

4) اگر $\bar{V} \neq V1$ ، اگر u پدر v در درخت V باشد $v \leftarrow u$ و برو به مرحله 2.

الگوریتم BFS :

ورودی: گراف بی سوی همبند $G(V,E)$ که رئوس آن به ترتیب $v_n,...,v_1$ اولویت بندی شده اند.

خروجی: درخت پوشای ریشه دار و سودار $T=(V1,E1)$.

1) v را درج . $V1=v_1$, $E1=f$, v_1 ملاقات شد.

2) اگر صف خالی است T درخت پوشای ریشه دار و سودار برای G است و الگوریتم خاتمه می یابد، در غیر این صورت راس v را از سر صف بردار، برای راس v راس $v_i, 2 \le i \le n$ را بررسی کن. اگر v_i ملاقات نشده است و $\{v,v_i\} \in E$ در این صورت:

الف) $V1=V1 \cup \{v_i\}$, $E1=E1 \cup \{v,v_i\}$

ب) راس v_i ملاقات شده و در آخر صف Q درج می شود.

ج) برو به مرحله 2.

درخت های پوشای مینیمم :

در گراف های وزن دار درخت پوشای مینیمم درخت پوشایی است که $\sum_{i=1}^{m} C_i$ در آن مینیمم است.

برای یافتن این درخت ها دو الگوریتم کراسکال و پریم موجود است.

الگوریتم کراسکال :

ورودی : گراف همبند بی سو و وزن دار $G(V,E)$ که در آن برای هر $C \in E$ یک عدد حقیقی $C(e) > 0$ منسوب شده است.

خروجی : درخت پوشای T با هزینه ی مینیمم.

1) $i = 1$ فرض $C_i \in E$ یالی (غیر از حلقه) از G با $C(e)$ مینیمم.

2) برای $1 \le i \le n-2$ اگر یال های $e_1,...,e_i$ قبلا انتخاب شده اند از میان بقیه یال ها e_{i+1} را به گونه ای انتخاب می کنیم که :

الف) $C_{(i+1)}$ مینیمم باشد

ب) زیرگراف تشکیل شده هیچ دوری ندهد.

3) $i \leftarrow i+1$ ، اگر $i = n-1$ زیرگراف حاصل همبند ، دارای n راس و $n-1$ یال بوده و درخت پوشای مینیمم است پس الگوریتم خاتمه می یابد.

اگر $i < n-1$ برو به 2.

قضیه : فرض کنید $G(V,E,C)$ یک گراف همبند بی سو است اگر T درخت تولید شده با الگوریتم کراسکال باشد T یک درخت پوشای مینیمم است.

الگوریتم پریم :

ورودی : گراف همبند بی سو و وزن دار $G(V,E)$ که در آن برای هر $e \in E$ یک عدد حقیقی $C_{(e)} > 0$ منسوب شده است.

خروجی : درخت پوشای T با هزینه مینیمم.

1) $P \leftarrow \{v_i\}, i \leftarrow 1$ که $w \leftarrow V - \{v_1\}, v_1 \in V$ ، $T = f$.

2) برای $1 \le i \le n-1$ ، فرض $P = \{v_1,...,v_i\}$ ، $T = \{e_1,...,e_{i-1}\}$ ، $N = V - P$ ، به T یال دارای کمترین هزینه را که راسی مثل $x \in P$ را به راسی مثلا $y = (v_{i-1})$ ، از N وصل می کند ، اضافه می کنیم، $N \leftarrow N - \{y\}, P \leftarrow P \cup \{y\}$

3) $i \leftarrow i+1$ ، اگر $i = n$ زیرگراف تعریف شده به وسیله ی یال ها $e_1,...,e_{n-1}$ همبند دارای n راس و $n-1$ یال است و درخت پوشای مینیمم برای G است. اگر $i < n$ الگوریتم از مرحله 2 تکرار می شود.

پایان فصل هفتم