۱۱۱- اگر $\sqrt[5]{a} > \sqrt{b}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟ $(a,b \neq 0)$

۱) $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^5}$ ۲) $a^5 > a^3 b^5$ ۳) $a^2 > b^5$ ۴) $a^3 > b^2$

۱۱۲- مجموعه‌ی $A = \{7k+14 : k \in Z\}$ کدام خاصیت زیر را ندارد؟

۱) نسبت به عمل جمع بسته است. ۲) عضو همانی در عمل جمع دارد.

۳) نسبت به عمل تفریق بسته است. ۴) عضو وارون برای هر عضو غیرصفر دارد.

۱۱۳- چند بسط اعشاری متناوب به‌صورت $0/a\overline{b}$ با شرط $1 \leq b \leq 8$ و $0/a\overline{b} = \frac{2a}{15}$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۴- اگر $(3,9) \cap (-1,7)$ یک همسایگی متقارن به مرکز α و مجموعه‌ی $\{x : x^2 + 5x - 6 < 0\}$ همسایگی متقارن به شعاع β باشد، $\alpha^2 + \beta^2 + 5$ همواره کدام است؟

۱) $\frac{171}{2}$ ۲) $\frac{169}{2}$ ۳) $\frac{171}{4}$ ۴) $\frac{169}{4}$

۱۱۵- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (x عددی حقیقی است.)

۱) $|2x-1| - |x+3| \leq |3x+2|$ ۲) $|2x-1| - |x+3| \leq |x-4|$

۳) $|2x-1| + |x+3| \geq |x-4|$ ۴) $|2x-1| + |x+3| \leq |3x+2|$

۱۱۶- اگر $(a > 1)$، $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ باشد، حاصل $a + \frac{1}{a}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۷- دو دنباله‌ی $a_n = \frac{15n+1}{3n+9}$ و $b_n = \frac{5n+k}{n+3}$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار k، این دو دنباله با هم برابرند؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۹

۱۱۸- چه تعداد از دنباله‌های زیر ثابت‌اند؟

الف) $\{a_n\} = \{(-1)^n (\sin(n\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(n\pi + \frac{\pi}{4}))\}$

ب) $\{b_n\} = \{(-1)^n . \cos(5n\pi)\}$

پ) $\{c_n\} = \{\sin(n\pi + \frac{\pi}{4}) . \cos(n\pi + \frac{\pi}{4})\}$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۱۹- کدام دنباله صعودی است؟

۱) $a_n = \frac{n-۵}{۳n-۶}$

۲) $b_n = \cos\frac{n\pi}{۲}$

۳) $c_n = \frac{۱}{n}$

۴) $d_n = \frac{n+۲}{۳n+۸}$

۱۲۰- کدام دنباله غیریکنوا و کران‌دار است؟

۱) $\{\sqrt[n]{۳}\}$

۲) $\{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}\}$

۳) $\{(\frac{n+۳}{n+۵})(\frac{۱-(-۱)^n}{۲})\}$

۴) $\{n\cos n\pi\}$

پاسخ:

۱۱۱- گزینه‌ی «۴»

(حبیب شفیعی)

چون $\sqrt{b} > 0$ بنابراین $\sqrt[5]{a} > 0$ و در نتیجه $a > 0$ است پس می‌توانیم دو سمت نامساوی را به توان ۱۰ برسانیم:

گزینه‌ی «۳» $\sqrt[5]{a} > \sqrt{b} > 0 \Rightarrow a^2 > b^5 > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^5} & \text{گزینه‌ی «۲»} \\ (\times a^3)\ a^5 > a^3 b^5 & \text{گزینه‌ی «۱»} \end{cases}$$

اما گزینه‌ی «۴» نادرست است. (مثال نقض: $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$)

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱ تا ۸)

۱۱۲- گزینه‌ی «۴»

(کورش شاه‌منصوریان)

فرض کنیم که عضوی مانند a وجود دارد به طوری که:

$$(7k+14) \times a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{7k+14} \notin A$$

توجه: همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی A مضرب ۷ هستند.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۳ تا ۸)

۱۱۳- گزینه‌ی «۲»

(محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$0/a\overline{b} = \frac{2a}{15} \xrightarrow{\times 10} a/\overline{b} = \frac{4a}{3} \Rightarrow a + \frac{b}{9} = \frac{4a}{3} \xrightarrow{\times 9} 9a + b = 12a$$

$$\Rightarrow b = 3a \xrightarrow{1 \le b \le 8} \begin{cases} b = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 0/a\overline{b} = 0/1\overline{3} \\ b = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 0/a\overline{b} = 0/2\overline{6} \end{cases}$$

پس دو بسط اعشاری متناوب وجود دارد.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۷ و ۸)

۱۱۴- گزینه‌ی «۴» (غلامرضا حلّی)

$$(-۱,۷)\cap(۳,۹)=(۳,۷)\Rightarrow \alpha=\frac{۳+۷}{۲}=۵$$

$$\{x: x^۲+۵x-۶<۰\}\Rightarrow (x+۶)(x-۱)<۰\Rightarrow -۶<x<۱\Rightarrow \beta=\frac{۱-(-۶)}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

$$\alpha^۲+\beta^۲+۵=۲۵+\frac{۴۹}{۴}+۵=\frac{۱۶۹}{۴}$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴)

۱۱۵- گزینه‌ی «۴» (فرهاد وفایی)

اگر $a,b\in R$ باشند، با توجه به اصل نامساوی مثلثی و نتایج آن داریم:

$$|a|-|b|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$$

گزینه‌ی (۱): $|a|-|b|\leq|a+b|\ ,\ a=۲x-۱\ ,\ b=x+۳$

گزینه‌ی (۲): $|a|-|b|\leq|a-b|\ ,\ a=۲x-۱\ ,\ b=x+۳$

گزینه‌ی (۳): $|a-b|\leq|a|+|b|\ ,\ a=۲x-۱\ ,\ b=x+۳$

اما گزینه‌ی ۴ به ازای تمامی اعداد حقیقی برقرار نیست.

(دیفرانسیل- صفحه‌های۱۵ و ۱۶)

۱۱۶- گزینه‌ی «۴» (محمد نجفی)

$$(a-\frac{۱}{a})=\sqrt{a}+\frac{۱}{\sqrt{a}}\Rightarrow(\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}})(\sqrt{a}+\frac{۱}{\sqrt{a}})=\sqrt{a}+\frac{۱}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}}=۱\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}a+\frac{۱}{a}-۲=۱\Rightarrow a+\frac{۱}{a}=۳$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸، ۱۶ و ۱۷)

۱۱۷- گزینه‌ی «۱» (محمدطاهر شعاعی)

$$a_n=\frac{۱۵n+۱}{۳n+۹}=\frac{۵n+\frac{۱}{۳}}{n+۳}\ \text{و}\ b_n=\frac{۵n+k}{n+۳}$$

دو دنباله‌ی فوق وقتی برابرند که مقدار k برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۱۱۸- گزینه‌ی «۱»

(محمدمهدی وزیری)

الف) $a_n = (-1)^n \times \sqrt{2}\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n \sqrt{2}\cos n\pi$

$= (-1)^{2n}\sqrt{2} = \sqrt{2}$ دنباله‌ی ثابت:

ب) $\cos(5n\pi) = (-1)^n \Rightarrow b_n = (-1)^n \times (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$ دنباله‌ی ثابت:

پ) $c_n = \frac{1}{2}\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\cos 2n\pi = \frac{1}{2}$ دنباله‌ی ثابت:

(دیفرانسیل- صفحه‌ی ۲۳)

۱۱۹- گزینه‌ی «۴»

(احسان نوری)

نکته: در بررسی یکنوایی دنباله $a_n = \frac{an+b}{cn+d}$ داریم:

الف) اگر ریشه‌ی مخرج کوچک‌تر از ۱ باشد:

۱) اگر $ad - bc > 0$ باشد، دنباله صعودی اکید است.

۲) اگر $ad - bc < 0$ باشد، دنباله نزولی اکید است.

ب) اگر ریشه‌ی مخرج بزرگ‌تر از ۱ باشد، دنباله غیریکنواست.

گزینه‌ی «۱»: ریشه‌ی مخرج بزرگ‌تر از ۱ است بنابراین دنباله غیریکنواست.

گزینه‌ی «۲»: دنباله نوسانی است و غیریکنوا.

$b_n = \cos\frac{n\pi}{2} \Rightarrow a_n : 0, -1, 0, 1, 0, -1, \cdots$

گزینه‌ی «۳»: دنباله نزولی است.

$c_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \downarrow$

گزینه‌ی «۴»: ریشه‌ی مخرج کوچک‌تر از ۱ است بنابراین صعودی است.

$d_n = \frac{n+2}{3n+8} \Rightarrow ad - bc = 8 - 6 = 2 > 0$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱۲۰- گزینه‌ی «۳»

(علی اصغر تنها)

گزینه‌ی «۱»: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{۳^{\frac{۱}{n+۱}}}{۳^{\frac{۱}{n}}}=۳^{\frac{۱}{n+۱}-\frac{۱}{n}}=۳^{\frac{-۱}{n(n+۱)}}=\frac{۱}{۳^{\frac{۱}{n(n+۱)}}}<۱$ $\quad \sqrt[n]{۳}=۳^{\frac{۱}{n}}$

چون جملات دنباله همگی مثبت‌اند، لذا دنباله نزولی و یکنوا است: $\Rightarrow a_{n+۱}<a_n$

گزینه‌ی «۲»: $a_{n+۱}-a_n=۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}+\frac{۱}{۲^{n+۱}}-۱-\frac{۱}{۲}-\cdots-\frac{۱}{۲^n}$

$=\frac{۱}{۲^{n+۱}}>۰\Rightarrow a_{n+۱}>a_n$: صعودی و یکنوا

گزینه‌ی «۴»: $\cos n\pi=(-۱)^n$

$a_n=n(-۱)^n\Rightarrow a_n;-۱,۲,-۳,۴,\cdots$ نوسانی و غیریکنوا

$|a_n|=n$

با توجه به این که هیچ عددی مانند M نمی‌توان یافت که قدرمطلق تمام جملات این دنباله از آن کوچک‌تر باشد، پس دنباله‌ی $a_n=n(-۱)^n$ کران‌دار نیست.

گزینه‌ی «۳»: با توجه به جملات دنباله $\frac{۲}{۳},۰,\frac{۳}{۴},۰,\frac{۴}{۵},۰,\cdots$ دنباله غیریکنواست.

دنباله کران‌دار: $\left.\begin{array}{l}a_n=(\frac{n+۳}{n+۵})(\frac{۱-(-۱)^n}{۲})\le\frac{n+۳}{n+۵}\times۱<۱\\ a_n\ge۰\end{array}\right\}\Rightarrow ۰\le a_n<۱$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)