

« بنام او »

تحقیق در عملیات را
فصل اول - تعریف تحقیق در عملیات (ویرایش دوم)

- تحقیق در عملیات Operation Research :
یک رویکرد علمی جهت حل مسائل مدیریتی - هدف یافتن بهترین تصمیم در بین تصمیمات موجود

- عناصر اصلی OR : علم مدیریت - روش و فنون - تکنیک و فنون - علم تصمیم گیری

- کاربرد OR : ساخت و تولید - حمل و نقل - خدماتی - بازرگانی - صنعتی - آموزشی و بهداشتی

- توسعه و گسترش OR : در طول قرن بیستم و نیمه دوم قرن بیستم دانشمندانی

ویرایش دوم OR

- ۱ - تمرکز اصلی را دید OR بر تصمیم گیری مدیران است
- ۲ - رویکرد OR یک رویکرد علمی است
- ۳ - در OR مسائل و تصمیمات با نطق سیستمی بررسی می شوند
- ۴ - OR یک دانش بین رشته ای است
- ۵ - از مدل ریاضی استفاده می شود
- ۶ - از رایانه به وفور استفاده می گردد

مراسم فراوانی

- ۱ - تعریف مساله
- ۲ - شناخت راه حل و مدل
- ۳ - ارزیابی راه حل و مدل
- ۴ - انتخاب یک راه حل

تصمیم گیری در OR

- روش در علم (روش علمی) : نوعی قدرت فزاینده در قرن ۲۱ تعریف شده است هر چه زیر است

- ۱- تعریف مالم
- ۲- مشاهده
- ۳- فرضیه
- ۴- آزمون
- ۵- احراز آزمون
- ۶- تأیید یا رد فرضیه

- اسس علم OR استفاده از مدل که خصوصاً مدل که ریاضی است .
- مدل معمولاً ساده شده واقعیت است .

- اغلب واقعیت مالم از پیچیدگی زیاد برخوردار است به انعکاس کاملاً صحیح مالم مشکل ریاضی است
- خواص ساده سازی و انتزاع بودن مدل OR نیل به هدف واقعی را با مشکل مواجه می کند .

۱- مدل شمایی : جانشین فیزیکی از سیستم است که معمولاً در اندازه کمی متفاوت از اصل سیستم تشخیص داده می شود (این دسته با تمرین انتزاع از واقعیت همراه اند) .
مانند ماکت در هواپیما ، مانع یا شمایل سربوط به خط تولید یا پل و ...

۲- مدل قیاسی : عیناً مشابه سیستم واقعی است اما رفتار آن شبیه رفتار سیستم است
مانند نمودار سازه ای

- دسته بندی مدل ها بر مبنای
- درجه انتزاع بودن

۳- مدل کم ریاضی : پیچیدگی در درجه دربرگیرنده سیستم که مانع از آن می شود که بتوان مشکل مشکل سیستم و یا رفتار آن را با استفاده از ۲ مدل قبلی نشان داد .
لذا ساده سازی و واقعیت و انتزاع آن باید کمتر باشد . از آنجا که در مدل کم ریاضی بیان انتزاع رفتار سیستم استفاده می شود .

- طبقه بندی مدل‌های ریاضی در OR :

- ۱- قطع
- ۲- آمالی
- ۳- ترکیبی

- ۱- قطعی : در شرایط اصلین که هر سطحی می‌شوند (یا در اکثر قطعی‌ها) (اند).
- ۲- آمالی : در شرایط نامعین و تصادفی رخ می‌یافتند (یا در اکثر آمالی‌ها) (اند و آمال از -
تبدیل به آمال تبعیت می‌کند).
- ۳- ترکیبی : ترکیبی از مدل‌های قطع و آمالی

- نمونه‌های از انواع مدل‌های ریاضی :

- ۱- قطعی : بگانه‌های خطی - غیر خطی - برنامه‌ریزی خطی - غیر خطی - حمل و نقل - تخصیص
برنامه‌ریزی آرمانی - برنامه‌ریزی عدد صحیح - مدل‌های شبکه - مدل‌های همبسته
- ۲- آمالی : تئوری صف - تحلیل سیستم - فرایند مارکوف
- ۳- ترکیبی : PERT - GPM - برنامه‌ریزی پویا - شبیه‌سازی - کنترل موجود

- بررسی ماهیت تابع هدف و محدودیت
 مدل بگانه‌های خطی
 مدل بگانه‌های غیر خطی

- تختن مدل : مدل‌های حل‌شده از یک مسئله در دنیا واقعی و سازگار اغلب است -
 محمدعباس از روابط ریاضیات

- مثال : فرض کنید هزینه تولید هر واحد کالا ۵ ریال و قیمت فروش هر واحد ۲۰ ریال باشد، مدل سود
 بصورت زیر است :

$$Z = 20x - 5x \quad \text{معاذله (ارتباط) سود} \quad (x : \text{تعداد تولید کالا})$$

یا در اکثر (معاذله ثابت) : ۲۰ و ۵ / تغییر یافته : Z / تغییر مستقل : x

فصل دوم - برنامه ریزی خطی - مدل ساز

- برنامه ریزی خطی Linear Programming :
شکل مدلی است که دارای یک تابع هدف و تعداد محدودیت می باشد که روابط خطی بین متغیرهای آن در تابع هدف و محدودیت موجود دارد.

- اجزاء یک مسئله LP :

۱- متغیر تصمیم ۲- تابع هدف ۳- محدودیت

- مثال دلی از مدل ساز و مدل ساز LP :

مثال ۱) فرض کنید x_A و x_B به ترتیب تعداد تولید محصولات A و B باشد هزینه ز عبایات زیر را بصورت مدل بنویسید :

الف) مجموع تولیدات دو محصول از پیش تعیین شده شود.

$$x_A + x_B \leq 40 \quad \text{جواب :}$$

(البته شده $x_A, x_B \geq 0$ در مثال برقرار است چون تعداد تولید منفی نمی تواند باشد.)

ب) حداکثر اختلاف تعداد تولید دو محصول ۵ باشد.

$$|x_A - x_B| \leq 5 \quad \text{جواب :}$$

$$-5 \leq x_A - x_B \leq 5 \quad \text{یا} \quad x_B - 5 \leq x_A \leq x_B + 5$$

$$\text{یا} \quad x_A - 5 \leq x_B \leq x_A + 5$$

ج) محصول A حداقل به تعداد نصف محصول B تولید شود.

$$x_A \geq \frac{1}{2} x_B \quad \text{یا} \quad 2x_A \geq x_B \quad \text{جواب :}$$

$$\text{یا} \quad 2x_A - x_B \geq 0$$

مدل سازی

مثال (۲) فرض کنید x_A و x_B ترتیب تعداد تولیدات کھول A و B باشند و داشته باشیم:

$$2x_A + 3x_B = 24$$

آنی که بخواهیم فقط یک نوع کھول تولید شود، اثرات زیر تولید چگونه است؟

جواب:

(۱) اگر فقط A تولید شود: $x_A = 12 \rightarrow 2x_A = 24$

(۲) اگر فقط B تولید شود: $x_B = 8 \rightarrow 3x_B = 24$

مثال (۳) فرض کنید که خط تولید انواع کھول تولید می کند (A و B). اگر تمام وقت صرف تولید A شود، حداکثر ۴۰ تا و اگر تمام وقت صرف تولید B شود، حداکثر ۳۰ تا می توان تولید کرد. رابطه بین تعداد تولید کھول A و B چگونه است؟

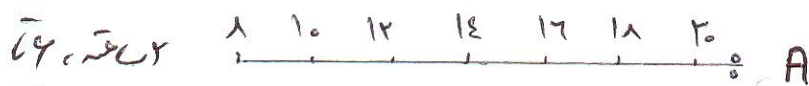
جواب:

$$0x_A + 0x_B \leq \square$$

همه ضرایب باید اعداد مناسبی باشند که به عدد سوال برگردد:

$$3x_A + 4x_B \leq 120$$

مثال (۴) مدت زمان لازم برای تولید کھول B، دو برابر مدت زمان تولید کھول A است. اگر تمام وقت صرف تولید A شود، ۴۰ تا می توان تولید کرد. محدودیت مربوط چیست؟



خط A: $x_A = 40$ و خط B: $x_B = 20$

$$\Rightarrow x_A + 2x_B \leq 40 \quad \vee \quad \frac{1}{2}x_A + x_B \leq 20$$

- مشکل در مدل سازی برنامه ریزی خطی :

شکل (۱) مسئله تولید

کارخانه ۳ نوع کپسول تولید می کند. برای تولید هر واحد از هر کپسول نیاز به ماده اولیه، زمان و ماشین آلات می باشد. جدول زیر میزان استفاده هر یک از محصولات و همچنین میزان منابع موجود و سود فروش هر واحد از هر کپسول را داده است. مسئله را با قالب یک برنامه LP فرموله کنید.

موجود	کپسول C	کپسول B	کپسول A	
۲۴۰۰	۶	۵	۷	ماده اولیه (کیلوگرم)
۳۲۰۰	۳	۶	۴	زمان (ساعت)
۳۹۰۰	۶	۵	۹	ماشین آلات (ساعت)
	۱۴	۱۸	۱۵	سود هر واحد (هزار ریال)

- جواب :
متغیر تصمیم : $x_i =$ تعداد تولید کپسول i ($i = A, B, C$)

$$\Rightarrow \text{Max } Z = 15x_A + 18x_B + 14x_C$$

$$\text{s.t.} : \begin{cases} 7x_A + 5x_B + 6x_C \leq 2400 \\ 4x_A + 6x_B + 3x_C \leq 3200 \\ 9x_A + 5x_B + 6x_C \leq 3900 \\ x_A, x_B, x_C \geq 0 \end{cases}$$

شخصی ۱۰ میلیون تومان سرمایه دارد که می‌خواهد در آن را در بخش‌های مختلف سرمایه‌گذاری کند. زمینه سرمایه‌گذار عبارت است از:

- ۸٪ اوراق قرضه با بهره سالانه
- ۷٪ سپرده بانکی با بهره سالانه
- ۹٪ اسناد خزانه با بهره سالانه
- ۱۲٪ خرید سهام با بهره سالانه

این سرمایه‌گذار بهشت کاهش ریسک، استراتژی زیر را برای سرمایه‌گذاری اتخاذ نموده است:

- الف) مجموع سرمایه‌گذاری در خرید سهام از ۳۰ درصد کل سرمایه کمتر شود.
 - ب) مبلغ سرمایه‌گذاری در سپرده بانکی و اوراق قرضه مجموعاً حداقل ۵۰٪ کل سرمایه باشد.
 - ج) نسبت مجموع سرمایه‌گذاری در اسناد خزانه و خرید سهام به مجموع زمینه‌های ۳-۲ باشد.
- ساله را در قالب یک سال ۱۶ فرموله کنید.

- جواب:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{تعداد سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه} \\ x_2 &= \text{سپرده بانکی} \\ x_3 &= \text{اسناد خزانه} \\ x_4 &= \text{خرید سهام} \end{aligned} \quad \text{معرفی متغیر تصمیمی:}$$

$$\Rightarrow \max Z = 0.08x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.12x_4$$

$$\text{s.t. : } \begin{cases} x_4 \leq 21,000,000 \\ x_1 + x_2 \geq 28,000,000 \\ \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70,000,000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

مسئله حل زنجار

یک شرکت حمل و نقل که خواسته تعداد کالا از مبدا کارخانه به چند شهر حمل کند. هزینه حمل و در هر شهر از هر مبدا به هر مقصد و همچنین هزینه رانندگی و تقاضای مبدا و مقصد در جدول زیر آمده است، ما می‌خواهیم قالب یک مدل LP فرموله کنیم.

مقصد \ مبدا	۱	۲	۳	
۱	۷	۹	۶	(۲۵۰)
۲	۸	۱۰	۱۴	(۱۵۰)
۳	۱۱	۱۰	۹	(۲۰۰)
	(۱۰۰)	(۲۰۰)	(۳۰۰)	

هزینه در هر درگاه

	مبدا ۱	مبدا ۲	مبدا ۳
عوضه	۲۵۰	۱۵۰	۲۰۰
	مقصد ۱	مقصد ۲	مقصد ۳
تقاضا	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰

جواب:

معنی متغیر تصمیم: تعداد کالای حمل شده از مبدا ۱ به مقصد ۱ x_{11}

$$\Rightarrow \min Z = 7x_{11} + 9x_{12} + 6x_{13} + 8x_{21} + 10x_{22} + 14x_{23} + 11x_{31} + 10x_{32} + 9x_{33}$$

$$s.t. : \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 250 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

- بعد از مدل سازی نوبت حل مدل است
روش حل مدل LP: روش گری (رهنمایی) روش همپتون

فصل سوم - برنامه ریزی خطی - روش ترسیمی (هندسی)

- شروع برنامه ریزی خطی در سال ۱۹۴۱ با تحقیقات اقتصاددانان معروف لهستانی و فنلاندی بود.
- همزمان همکار مدل عمل و نقل را به طریق LP تفسیر کرد (بعداً توسط کوپمنز نیز ایجاز شد).
- پیشرفت LP در حل آن مدلی که راهبردهای معروف، دانتزیگ (۱۹۴۷) بوده است.

- مفروضات LP :

- ۱- فرض تناسب : هر فعالیت به تنهایی، مستقل از سایر فعالیت‌ها عمل می‌کند. (آهن یک شمشیر - رابطه تابعی ثابت است.)

مثال : فرض $Z = 2x$	
$x = 3 \rightarrow Z = 6$	
$x = 3, 1 \rightarrow Z = 6, 2$	x : ا.ه. اضافه $\leftarrow Z = 2, 0$ اضافه
$x = 3, 2 \rightarrow Z = 6, 4$	x : ۲, ۰ اضافه $\leftarrow Z = 4, 0$ اضافه

- ۲- فرض جمع پذیری : روابط ریاضی بین متغیر در هدف و محدودیت‌ها به صورت جمع می‌باشد.
(حاصل ضرب، تفریق و ... دیده نمی‌شود و فقط مضرب عدد از هر متغیر می‌باشد.)
غیر خطی $2x_1 + x_1 x_2 \leq 5$ / خطی $2x_1 + x_2 \leq 5 \rightarrow$

غیر خطی $\frac{x_1 + x_2}{x_1} \leq x_3$ / خطی $\frac{x_1 + x_2}{3} \leq x_3 \rightarrow$

- ۳- فرض بخش پذیری : متغیرهای تصمیم می‌توانند عدد در گزاشی بپذیرند.
تذکره: اگر از روش متغیری فقط مقادیر صحیح را می‌تواند اختیار کند، برنامه ریزی عدد صحیح است.

- ۴- فرض معین بودن (قطعی بودن) : ضرایب یا راسته مدل LP اعداد ثابت و مشخص اند.

روش ترسیمی برای حل مسائل P.M (باجداس ۲ متغیر)

- تمام نکات ترسیمی برای حالت ۲ بعدی ذکر می شود.

- یادآوری از خط و دایره که این

۱- معادله خط بصورت $ax + by = c$ است (a, b نمی توانستند صفر باشند).

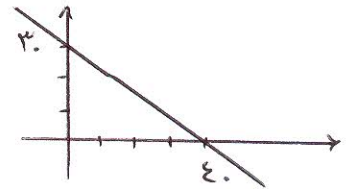
$$2x + 3y = 6, \quad x = 2y - 5, \quad x = 3, \quad y = 4$$

۲- برای رسم یک خط، داشتن ۲ نقطه کافی است (تقریبی نقاط معمولاً در کل برخورد با محور است).

مثال: خطوط زیر را رسم کنید:

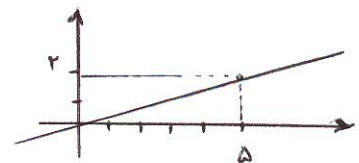
الف) $3x + 4y = 12$

x	0	4
y	3	0



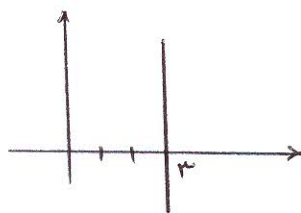
ب) $2x - 5y = 0$

x	0	5
y	0	2

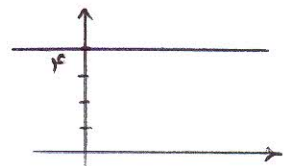


نکته:
 مثبت بودن شیب یعنی با افزایش x y افزایش
 منفی بودن شیب یعنی با افزایش x y کاهش
 $C = 0$ $\rightarrow$ یعنی خط از مبدأ می گذرد.

ج) $x = 3$

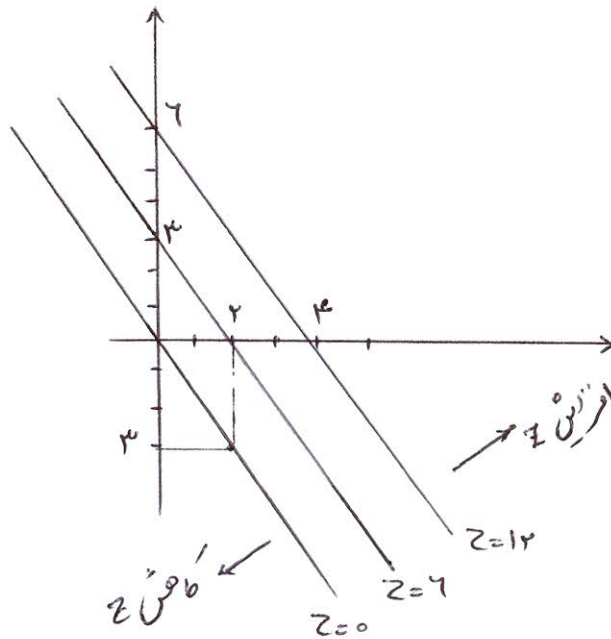


د) $y = 4$



مثال ۱۰:

سه خط $3x + 2y = 0$ ، $3x + 2y = 6$ ، $3x + 2y = 12$ را رسم کنید. نتیجه گرافیکی چیست؟

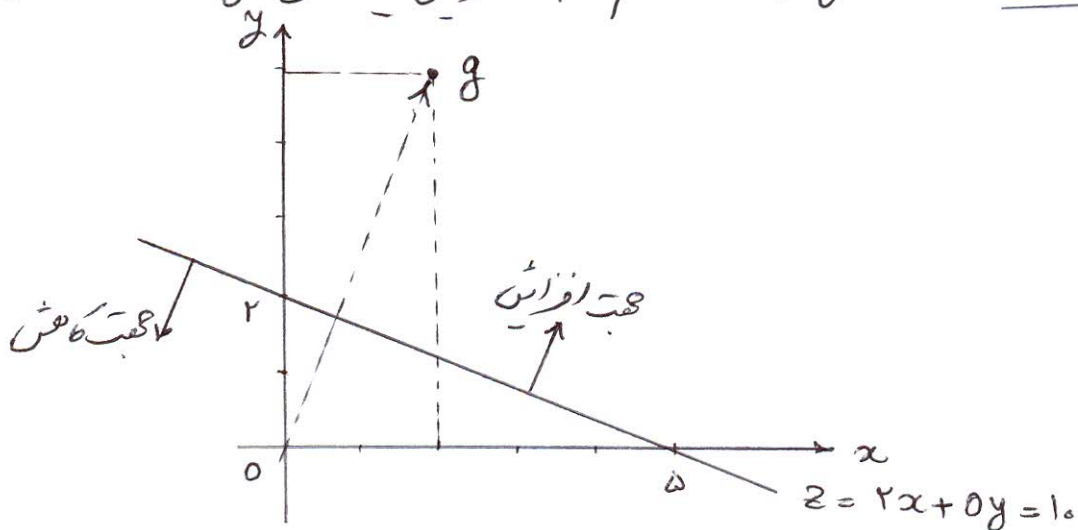


نتیجه:

چون ضرایب x و y عوض نشده، پس خطوط موازی اند، اما اگر فرض کنیم $z = 3x + 2y$ صدق به ازای مقدار $z=0$ ، $z=6$ ، $z=12$ می توانیم بگوییم که جهت افزایش و کاهش z چگونه است.

می خواهیم بدانیم به کمک یک خط چگونه می توان جهت افزایش یا کاهش z را معلوم کرد؟ به مثال زیر بعد از پاسخ به سوال فوق توجه نمایید.

مثال ۱۱: نمودار $2x + 5y = 10$ را رسم و جهت افزایش یا کاهش $z = 2x + 5y$ را معلوم کنید.



- بهینه‌ترین روش می‌تواند جهت افزایش یا کاهش z را معلوم کرد:

(۱) z را به ازای عدد دیگری (غیر از ۲) رسم کنید. مثلاً $z=20$ ، هر طرف که قرار گرفت،

جهت کاهش یا افزایش معلوم می‌گردد (معمولاً وقت گیر).

(۲) یک نقطه دگروه انتخاب کنید. مثلاً $(0, 0)$ ، با قرار دادن $z=0$ می‌شود. یعنی به سمت مبدأ

z حرکت کند. (شاید سخت)

(۳) ضرایب x و y هر دو مثبت اند. در این مثال، x و y زیاد شوند z زیاد

(۴) مهم‌ترین روش استفاده از بردار گرادیان. ضرایب x و y ، $g(2, 5)$ ؛

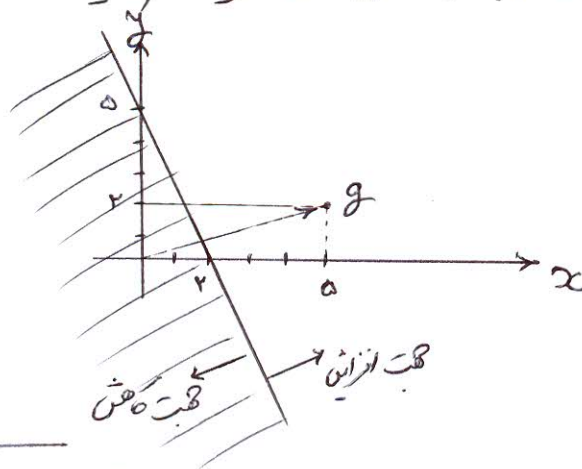
هر جا نقطه g مثبت آمده، از مبدأ به سمت g داده‌اند. همیشه جهت افزایش است.

- فایده روش (۴) از آن جایی که محدودیت در مساحت $(=)$ نیست و $\leq$ یا $\geq$ هم داریم

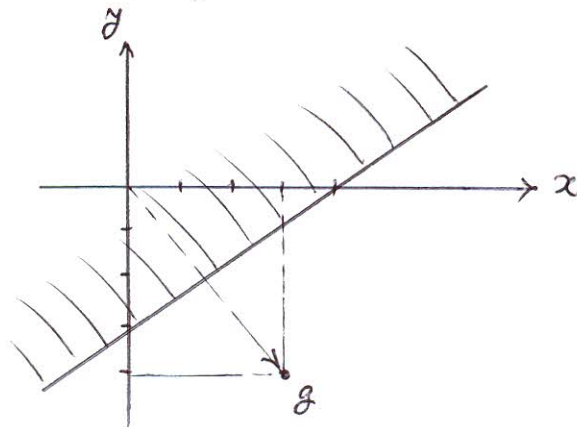
از این مطلب در روش می‌توان برای رسم این نوع نواحی استفاده کرد.

مثال: نواحی مربوط به محدودیت‌های زیر را رسم کنید: (هانشه: جواب)

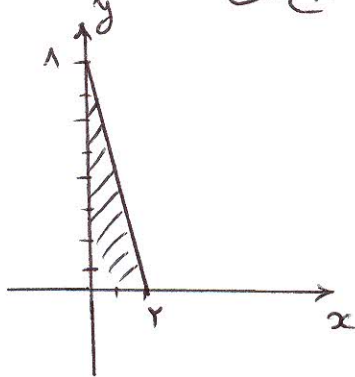
۱) $5x + 2y \leq 10$



۲) $3x - 4y \leq 12$



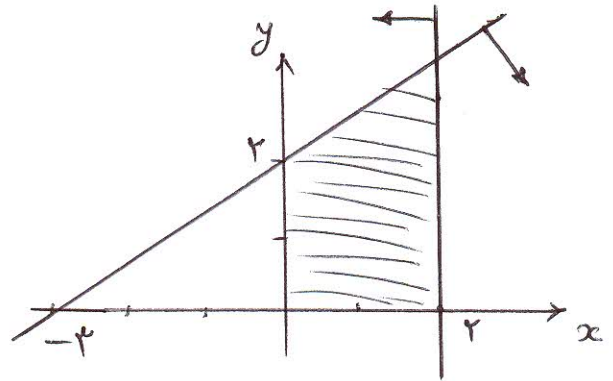
$$۳) \begin{cases} ۴x + y \leq ۸ \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



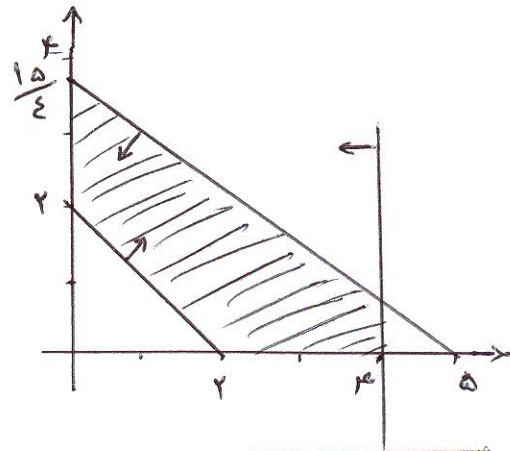
نکته ۱: وقتی چند محدودیت داریم، یعنی اشتراک بیش از یک
نکته ۲: $x, y \geq 0$ یعنی x و y نامنفی اند یعنی متناهی اول

(هاتر = جواب)

$$۴) \begin{cases} -۲x + ۳y \leq ۶ \\ x \leq ۲ \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$۵) \begin{cases} x + y \geq ۲ \\ ۳x + ۴y \leq ۱۵ \\ x \leq ۴ \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

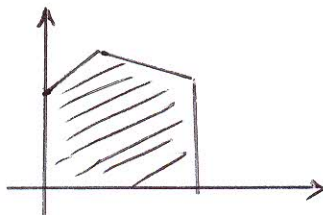
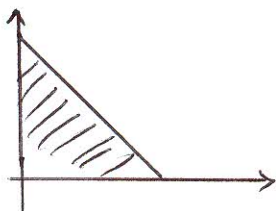


- ناحیه شدنی:

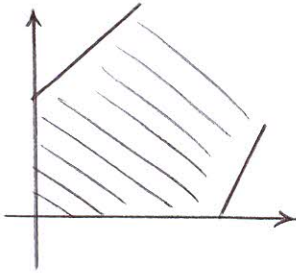
اشتراک تمام محدودیت‌های یک مسأله LP ناحیه شدنی (ناحیه مجرب، منطقه جواب) نام دارد.

- سؤال: ناحیه شدنی یک مسأله LP چه شکل می‌تواند باشد؟

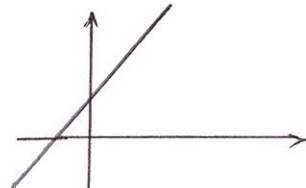
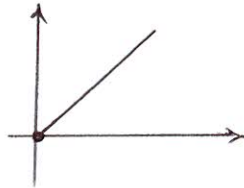
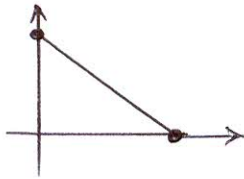
(۱) ناحیه شدنی می‌تواند یک چندضلعی باشد (همه روی آن زخم (افز)



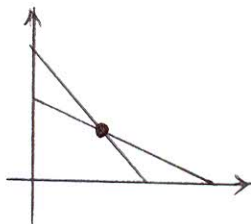
۲) ناحیه شدنی می تواند یک منطقه نامحدود (بی کران) باشد.



۳) ناحیه شدنی می تواند خط، نیم خط و پاره خط باشد.

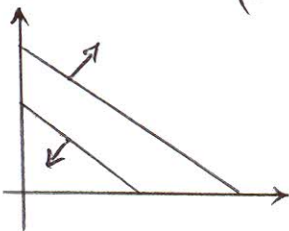


- تذکر: در مسائل برنامه ریزی ممکن است شرط نامفنی بودن متغیر رخ ندهد همچنین می تواند ممکن است بصورت $(=)$ باشند.



۴) ناحیه شدنی می تواند یک نقطه باشد.

۵) ناحیه شدنی ممکن است تهی باشد (هیچ اشتراکی هم ندارد) (نباشد).



- روش حل مسائل ۴ از طریق رسمی (هندسی)

گام اول: محدودیت که را رسم در اشتراک تمامی آنها را بیابید. (ناحیه شدنی)

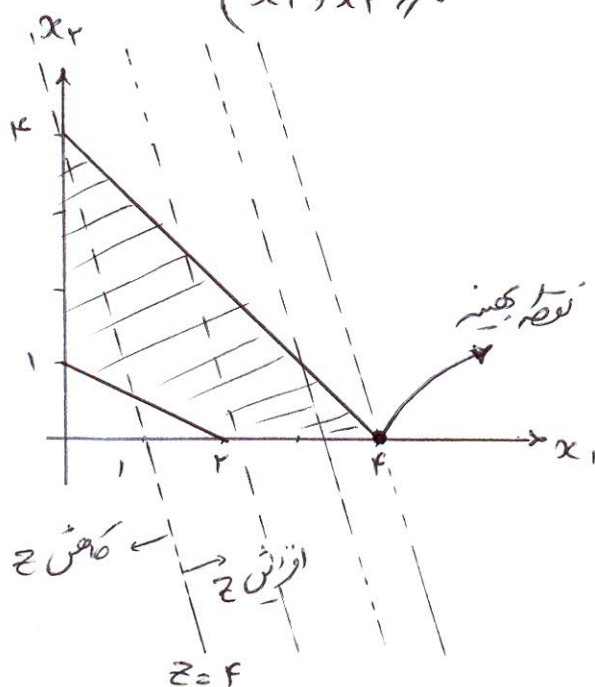
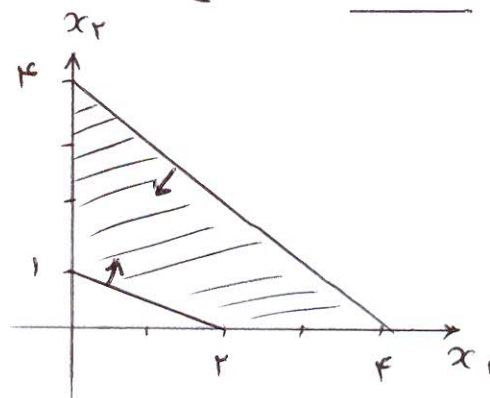
گام دوم: تابع هدف را بر از z در کواضی رسم کنید و به سمت جهت افزایش z در جهت مطلوب (برای max افزایش و برای min کاهش) حرکت کنید تا بهترین نقطه را بیابید.

- نکته: نقطه در حالتی که ناحیه بومی (شدنی) تهی است، جواب بهینه نداریم.

مثال: جواب بهینه مسائل P را زیر بار روش گرسبی بدست آورید:

$$1) \max Z = 4x_1 + x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



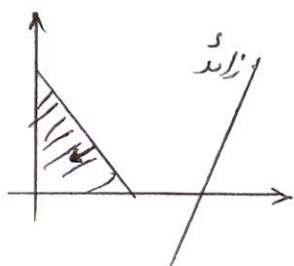
$$Z = 4x_1 + x_2 = 4$$

x_1	0	1
x_2	4	0

نقطه	$x_1^* = 4$
بینه	$x_2^* = 0$
	$Z^* = 4(4) + 0 = 16$

تعریف چند اصطلاح:

- ۱- ناحیه شدنی (مهم): اشتراک همه محدودیت‌ها که به
- ۲- محدودیت مؤثر: محدودیتی که در تشکیل ناحیه موثره تأثیر دارد (در جواب هدف آن ناحیه موثره را تغییر می‌دهد).
- ۳- محدودیت زائد: محدودیتی که در تشکیل ناحیه موثره تأثیر ندارد.
- ۴- محدودیت فعال (الزام آرد): محدودیتی که نقطه بهینه روی آن واقع است.
- ۵- نوشته: نقطه برخورد حداقل ۲ محدودیت (در ۲ بعدی) خطی (مربوط)

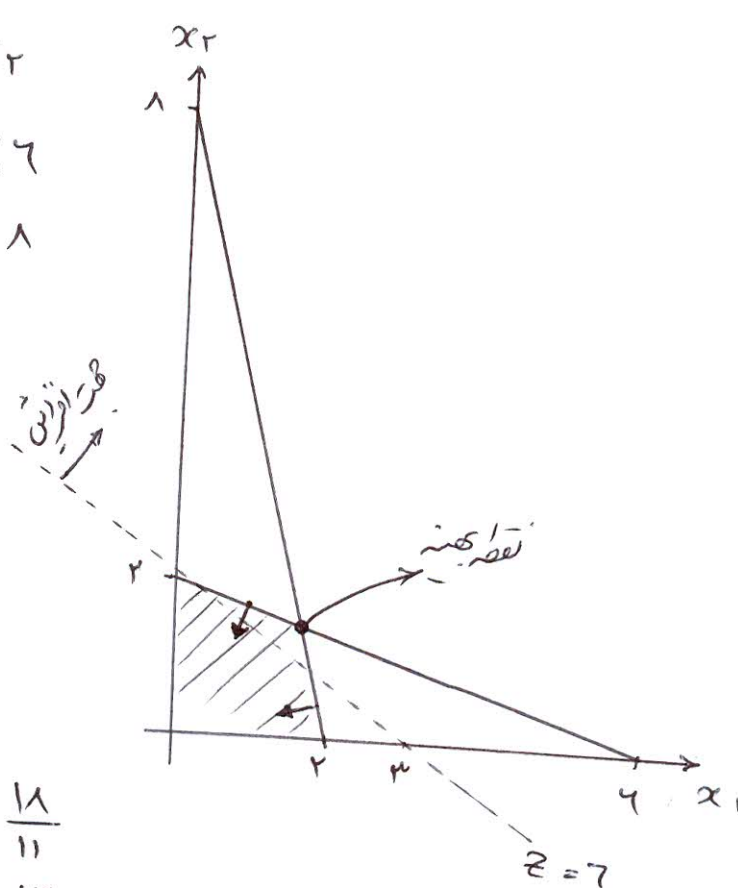


$$2) \text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 = 7$$

x_1	0	3
x_2	2	0



$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{11}{11} \\ x_2^* = \frac{17}{11} \\ Z^* = 2\left(\frac{11}{11}\right) + 3\left(\frac{17}{11}\right) = \frac{18}{11} \end{cases}$$

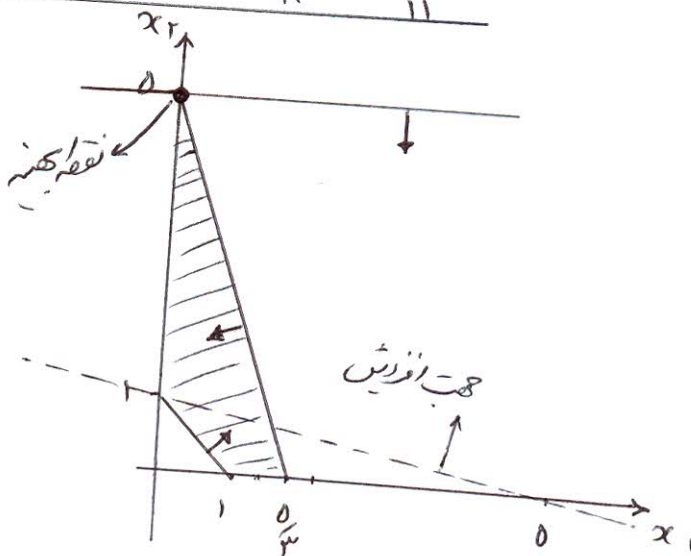
$$3) \text{Max } Z = x_1 + 0x_2$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = x_1 + 0x_2 = 0$$

x_1	0	0
x_2	1	0

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 0 \\ Z^* = 0 + 0(0) = 0 \end{cases}$$

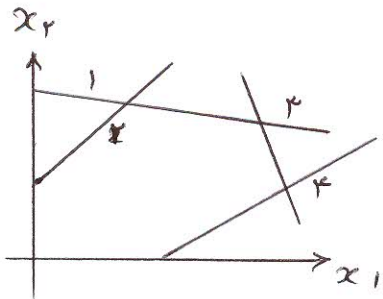


نکته: نقطه ۵ اگر بهینه هم شد نوشته ای است که از کل نتایج بیش از ۲ محدودیت موجود است و در این نوشته دقت کنید در واقع نتایج بهینه است یا نتایج دائمی.

روش ترسیمی

- نکته: اگر m تعداد محدودیت‌ها و n تعداد متغیرها داریم، باید عددی تعداد نقاط -
گونه عبارت است از:

$$\frac{(m+n)!}{m! n!}$$

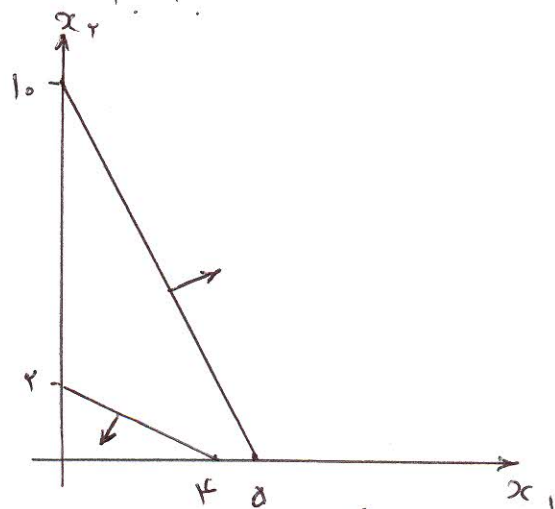


مثال: چند نوع درخت زیر درخت دارد؟
درخت‌ها $m=4$ و $n=2$ لذا

$$\text{تعداد نقاط} = \frac{(4+2)!}{4! 2!} = 15$$

$$4) \text{Max } Z = x_1 + 3x_2$$

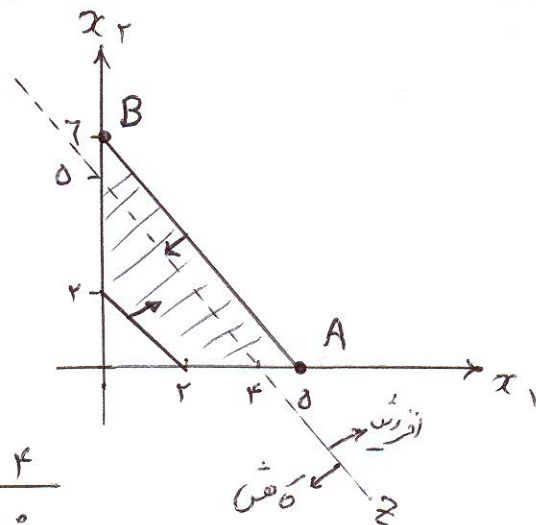
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



- نتیجه: ناحیه اشکوک داریم. یعنی فضای ممکن ندارد! فضا جواب بهینه است.
- نکته: وقتی که ناحیه ممکن باشد، تابع هدف هیچ تغییری ندارد!

$$5) \text{Max } Z = 5x_1 + 8x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$5x_1 + 8x_2 = 20 \quad \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 4 \\ \hline x_2 & 2.5 & 0 \end{array}$$

- آخرین برخورد؟ چگونه می‌بینیم؟

- (۱) مختصات نقطه آنگاه دارد z قرار می دهیم هر کدام کمتر شد.
- (۲) از شیب کجای z شیب هدف: $z = 1 - \frac{0}{4} = \frac{0}{4}$
- شیب محدوده AB : $\frac{7}{0}$

نتیجه: شیب هدف بیشتر به هدف عددی تر به افزایش بر مقدار نقطه A و عددی تر به

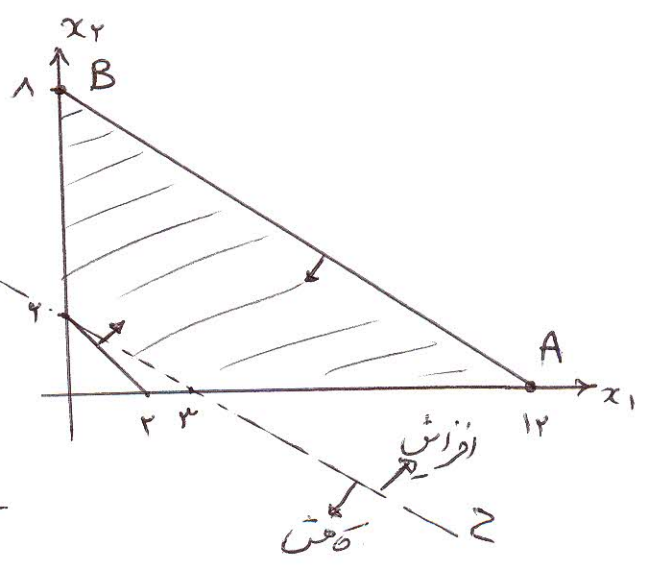
نقطه کینه $\left| \begin{array}{l} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 0 \end{array} \right. \rightarrow z^* = 0(0) + 7(0) = 0$

۱) $\max z = 4x_1 + 7x_2$

s.t. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

$z = 4x_1 + 7x_2 = 12$

x_1	0	3
x_2	2	0



$\left| \text{شیب هدف} \right| = \frac{2}{3} \quad \left| \text{شیب محدوده } AB \right| = \frac{2}{3}$

نتیجه: شیب برابر به A و B هر دو نقطه کجای z شیب هم A کینه است به B و کجای z شیب AB

$A \left| \begin{array}{l} 12 \\ 0 \end{array} \right. \rightarrow z = 4(12) + 7(0) = 48$

$B \left| \begin{array}{l} 0 \\ 8 \end{array} \right. \rightarrow z = 4(0) + 7(8) = 56$

✓ کینه جواب کینه داریم به جواب کینه چند تا (از بین) معروف است.

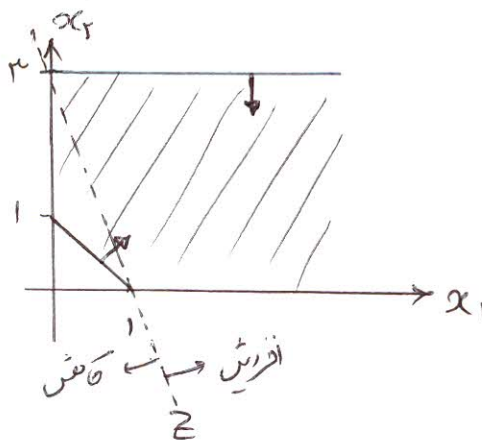
$AB \left| \begin{array}{l} ? \\ ? \end{array} \right. \quad AB \text{ کجای} = \lambda A + (1 - \lambda) B \quad \lambda \in [0, 1]$

مثلاً $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} 12 \\ 0 \end{array} \right. + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 8 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 6 \\ 4 \end{array} \right. \rightarrow z = 48 \\ \frac{1}{4} \left| \begin{array}{l} 12 \\ 0 \end{array} \right. + \frac{3}{4} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 8 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 3 \\ 6 \end{array} \right. \rightarrow z = 48 \end{array}$

روش ترسیمی

۷) $\max Z = 3x_1 + x_2$

s.t. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$



$Z = 3x_1 + x_2 = 3$

x_1	0	1
x_2	3	0

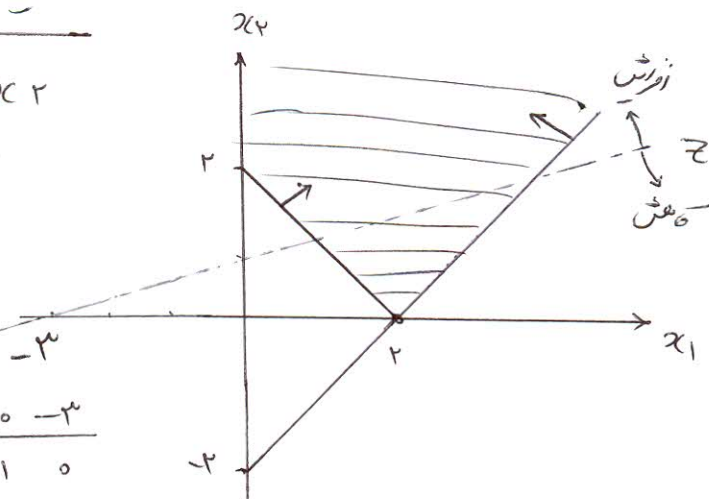
نتیجه: نامیه جواب بی کران (دارای منطقه بی نهایت) است. با حرکت Z به عبارات خود جهت افزایش هیچ‌گاه به آخرین نقطه از نامیه شدن نمی‌رسیم. لذا می‌نویسیم: $Z = +\infty$
(نوعه شود در حالت $\min$ اگر بیش از $-\infty$ Z بود)

نتیجه: نامیه همه بی کران جواب بگفته ∞

جواب بگفته محدود (منفی به منطقه می‌رسیم)

۸) $\min Z = -x_1 + 3x_2$

s.t. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$



$Z = -x_1 + 3x_2 = 3$

x_1	0	-3
x_2	1	0

نتیجه: نامیه همه بی کران است. $\begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 0 \end{cases} \rightarrow Z^* = -2 + 3(0) = -2$

نقطه بهینه

تجزیه

بگفته منطقه

نامیه جواب بی کران

نتیجه: حالات خاص در ترسیمی استغیره

فصل چهارم - برنامه ریزی خطی - روش سیمپلکس

- روش هندسی (تقریبی) قادر بر حل مسائل ۲ متغیره است برای ۳ متغیره روش اردیش از آن غیر ممکن است.
- روش سیمپلکس، روشی است بر حل مسائل برنامه ریزی خطی با هر تعداد متغیر.

- فرایند روش سیمپلکس: شروع از یک نوشته محتمل حرکت به نوشته مجاور (در صورت امکان) به منظور بهتر کردن Z تا رسیدن به جواب بهینه (در صورت وجود).

- فرم استاندارد مسائل LP در روش سیمپلکس:

نوع تابع هدف Max (اگر min در منفی ضرب) $\text{Min } Z = -\text{Max}(-Z)$

نوع محدودیت: $\begin{cases} \text{اگر } \leq \text{ بود } +S \\ \text{اگر } > \text{ بود } -S \end{cases}$

مثال: LP زیر را استاندارد کنید:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t } \begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 7 \\ 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

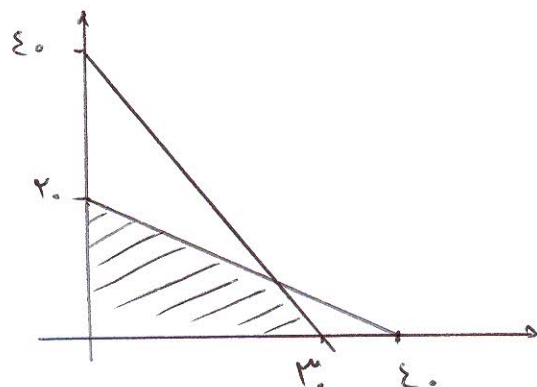
$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + S_1 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 8 \end{cases}$$

- برای تفسیر بهتر این موضوع مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

$$\text{s.t } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + S_1 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120 \end{array}$$

استاندارد محدودیت:

این دستگاه بی‌نهایت جواب دارد (هم‌جهت هم‌جهتی قابل بررسی است).

$$\begin{array}{l} \text{مقیاس از} \\ \text{جواب} \\ \text{①} \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1 = 40 \\ x_2 = 0 \\ S_1 = 40 \\ S_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{جواب بعد} \\ \text{②} \end{array} \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 60 \end{array} \right.$$

بافرض: محدودیت اول: نیروی انسانی (اعت)
 محدودیت دوم: ماده اولیه (کستوریم)

جواب ①: محصول اول ۴۰ تا تولید، محصول دوم بدون تولید / نیروی انسانی ۴۰ ساعت ماده و تمام ماده اولیه استفاده شده

S: ماده مابقی (تبدیل به قابل تولید است)

جواب ②: محصول دوم ۲۰ تا تولید، محصول اول بدون تولید / تمام منبع اول استفاده شده و ۶۰ کستوریم ماده اولیه ماده

- کارهای روش سیمپلکس (معمولی)

هدف Max

قید ≤

متغیر نامشقی

- ① ابتدا تمام مقیود به صورت (=) درآیند. (استاندارد)
- ② ضرایب تابع هدف و محدودیت کم دارد یک جدول شوند.
- ③ متغیر ورودی (ستون لوله، کدک) را که عبارت است از منفی ترین ضریب در خوا هدف پیدا کن.
- ④ متغیر خروجی را که کمترین عدد در هتیم اعداد سمت راست بر اعداد مثبت ستون لوله پیدا کن.
- ⑤ با این قواعد سطرهای بعدی جدول جدید را برین تا به حالت بهینه برسید.

- معیار توقف: جدول بکینه باشد یا عنصر خروجی نتوانیم پیدا کنیم. (مطرحه بدون عدد منفی)

- برای تصویر مناسب، مطلب با یک مثال بصورت کامل شرح می گردد:

مثال: مثال LP زیر را به روش سیمپلکس معمولی حل کنید.

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 2x_2$$

$$\text{Max } Z - 7x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\text{s.t } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

 $\Rightarrow$

$$\text{s.t } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + S_2 = 6 \end{cases}$$

	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	-7	-2	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	5
S_2	0	3	2	0	1	6
Z	1	0	a	0	b	c
S_1	0	0	d	1	e	f
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2

- خواص جدول:

۱- فایده بودن اعداد سمت راست (RHS)

۲- نکته بودن متغیرهای پایه

- پر کردن جدول:

الف) سطوح پایه: سطوح قبلی (خروجی) را بر عدد لولایه تقسیم کنید.

ب) از شرط نکته بودن استفاده کنید.

ج) بقیه از دستورات زیر را به کار ببرید:

$$(\text{عنصر هم متونش در سطوح پایه}) \times (\text{عنصر هم متونش در ستون لولایه}) - (\text{عنصر در جدول قبلی}) = \text{عنصر در جدول جدید}$$

$$(\text{سطوح جدید لولایه}) - (\text{سطوح قبلی در ستون لولایه}) - (\text{سطوح قبلی}) = \text{سطوح جدید}$$

$$a = (-2) - (-7)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$c = 0 - (-7)(2) = 14$$

$$e = 0 - (1)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$b = 0 - (-7)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

$$d = 2 - (1)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$f = 5 - (1)(2) = 3$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	14
s_1	0	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	3
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2

$$s_1^* = 3$$

$$x_1^* = 2$$

$$s_2^* = 0, x_2^* = 0, z^* = 14$$

✓ جدول بهینه شد لذا :

- درستی روش سیمپلکس :

۱- هر جدول به یک روش (شروع بدیهات)

رقم از یک جدول به جدول دیگر به رقم از یک روش به روش دیگر (البته با درج کردن)

۲- مقدار تابع هدف هر جدول نسبت به بزرگتر شدنش بزرگتر می شود (یا بدتر تغییر می کند).

$$\text{Max} \Rightarrow z: 0, 10, 50, 90, 100 \checkmark$$

$$z: 0, 40, 40, 90, 100 \checkmark$$

$$z: 0, 40, 80, 70, 90, 100 \times$$

$$z: 0, 40, 80, 100, 100 \checkmark$$

سوال: مقدار z چه قدر تغییر می شود؟

$$z_{\text{new}} = z_{\text{old}} - (z_j - c_j)(\theta)$$

min نسبت (معیار خروج) ← عدد طرح هدف (معیار ورود)

۳- در هر بار از روش سیمپلکس عدد سمت راست محدودیت که منفی نمی شود، اثر در ضرایب آن هدف این مطلب رخ دارد، ناشی از انتخاب در انتخاب متغیر خروجی تکرار گذشته بوده است.

۴- اثر سمت راست محدودیتی در تکرار که صفر باشد حالت تکلیف رخ داده است.

	RHS
z	۱۲۰
s_1	۵
x_2	۵

۵- اثر ضرایب معیار انتخاب متغیر خروجی، بیش از یک انتخاب داشته باشیم، یکی را به عنوان انتخاب می کنیم، اما حتما در تکرار بعدی به حالت تکلیف خواهیم رسید.

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-۴	۵	۵	۱	۲۰
s_1	۲	۵	۱	۲	۶
x_2	۱	۱	۵	۳	۳
z	۵	۵	۲	-۳	۳۲
x_1 جدید	۱	۵	$\frac{1}{2}$	۱	۳
x_2	۵	۱	$-\frac{1}{2}$	۲	۵

به عنوان $\frac{2}{2} = 3$
 $\frac{3}{1} = 3$

تکلیف $\rightarrow$

۶- در هر هدف هر جدول، حداقل به تعداد متغیر پایه (محدودیت) صفر داریم. (بدلیل کم بودن) اما ضایحه تعداد صفر در هر هدف جدول بهینه از تعداد متغیر پایه کمتر بود، حالت بهینه پیدا نمی شود.

برای یافتن جواب بهتر (در صورت وجود) متغیری که صفر در هر هدف دارد را به عنوان متغیر ورودی انتخاب می کنیم. (نکته جواب: در صورتی که در هر هدف (و جدول کاملش هم هسته)

	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	5	1	0	100
x_1	1	2	1	0	4
S_2	0	1	2	1	1
Z	0	0	1	0	100
x_1	1	0	-3	-2	2
x_2	0	1	2	1	1

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{1}{1} = 1$$

همانطور که می بینید هر دو جدول بهینه و مقدار تابع هدف یکسان (مقدار هدف یکسان) دارند.

۷- چنانچه یک ستون از محدودیت نامرئی یکبار هیچ عدد مثبت نداشته باشد، نامرئی جزئی از جواب است.

چنانچه همین ستون، لوای باشد رتبه نامرئی از تمام متغیر خود میسر است، اما در می هم و Z^* برابر با نهایت خواهد بود. (یعنی این صورت حل را نمی توان به دست آورد.) (در صورت وجود همین جدولی)

	x_1	x_2	*	*	RHS
Z	*	-4	*	*	*
*		-2			
*		0			

$$Z^* = +\infty$$

	x_1	x_2	RHS
	-4	1	
	2	-2	
	1	0	

نامرئی جزئی از جواب است
لاستون لوای

این جدول را می توان ادامه داد. این نامرئی نامرئی است ∞ ، با ادامه در جدول هر چه باید به نتیجه برسیم.

- اگر تغییری از مسائل به صورت $\geq$ یا $=$ داشته باشیم، شاید تغییری که نخواهد نفس -
تغییر پایه (اصول که بودن) را بازی کند، وجود داشته باشد.

$$x_1 + 3x_2 \leq 6 \rightarrow x_1 + 3x_2 + S_1 = 6$$

پایه هست

$$x_1 + x_2 \geq 2 \rightarrow x_1 + x_2 - S_2 = 2$$

پایه نیست

برای رفع مشکل فرق، یک تغییر مصنوعی به این توانستیم که اضافه می شود که بتواند نفس پایه را داشته باشد. اما به دلیل آنکه یک اصل را هم ترند، مقدار حتما باید منفی شود.
(در اینجا) برای شروع مسئله به این سمت برای تغییر مصنوعی در سوا هدف حریف می کنیم.
این روش معروف است به روش M-بزرگ.

معمولی $\rightarrow$ هم می شودM-بزرگ بود $\rightarrow$ یا $\geq$ بعضی می شود

- تمام کار روش M-بزرگ :

- 1- تغییر را به صورت استاندارد (=) در آورید.
- 2- به می شود فاقد پایه، تغییر مصنوعی اضافه کنید و برای هر کدام در تمام هدف حریف می کنیم.
- 3- به پایان رده 2 و وارد فرایند اعداد در جدول، جدول را از یک بودن خارج می شود پس از یک ساید اول را به رده (ها) تبدیل.

مثال: مسئله زیر را از روش M-بزرگ حل کنید.

$$\max Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - S_1 = 4 * \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 6 \end{cases}$$

$$\max Z = 5x_1 + 2x_2 - MR,$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - S_1 + R_1 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 6 \end{cases} *$$

	x_1	x_2	S_1	R_1	S_2	RHS
$+ \rightarrow Z$	-5	-2	0	M	0	0
$-M(R_1)$	1	2	-1	1	0	4
S_2	3	1	0	0	1	6
Z	$-M-5$	$-2M-2$	M	0	0	$-4M$
R_1	1	2	-1	1	0	4
S_2	3	1	0	0	1	6
Z	-4	0	-1	$M+1$	0	4
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
S_2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	4
Z	0	0	1	$M-1$	4	20
x_2	0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5}$$

$$\begin{cases} Z^* = 20 \\ x_2^* = \frac{7}{5} \\ x_1^* = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} S_1^* = 0 \\ S_2^* = 0 \\ R = 0 \end{cases}$$

- نکته بسیار مهم: اگر در جدول نهایی هنوز R در بهای حضور داشته باشد و مقدارش هم غیر صفر باشد، مسأله جواب ندارد. (نامشخص بودن است)

	*	*	*	*
Z	شرط استیج دارد			
x_1				
(R)				

مثال: مسائل البرمجة الخطية - M - نهج حل بسيط

$$\min Z = 7x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t } \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \geq 17 \\ 8x_1 + 3x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\min Z = 7x_1 + 3x_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\text{s.t } \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - S_1 + R_1 = 17 \\ 8x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 24 \end{cases}$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS
$+Z$	-7	-3	0	0	-M	-M	0
$M(R_1)$	2	8	-1	0	1	0	17
$M(R_2)$	8	3	0	-1	0	1	24
Z	$7M-7$	$3M-3$	-M	-M	0	0	$-8-M$
R_1	2	8	-1	0	1	0	17
R_2	8	3	0	-1	0	1	24
Z	$\frac{0}{2}M - \frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{2}M - \frac{3}{2}$	-M	$-\frac{1}{2}M + \frac{7}{2}$	0	$12M + 12$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	8
R_2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{8}$	-1	$-\frac{3}{8}$	1	12
Z	0	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{9}{5}$	$-M - \frac{3}{5}$	$-M + \frac{9}{5}$	$\frac{141}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_1	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{24}{5}$
Z	-2	0	0	-1	-M	$-M+1$	24
x_2	$\frac{K}{K}$	1	0	$-\frac{1}{K}$	0	$\frac{1}{K}$	1
S_1	$\frac{10}{K}$	0	1	$-\frac{K}{K}$	-1	$\frac{K}{K}$	14

كيفية

$$\frac{17}{8} = 8$$

$$\frac{24}{3} = 8$$

$$\frac{K}{\frac{1}{K}} = 1$$

$$\frac{12 + \frac{24}{5}}{\frac{0}{2}} = \frac{24}{5}$$

ملاحظة
 $R=0$

$Z^* = 24$	$S_1^* = 17$
$x_1^* = 0$	$S_2^* = 0$
$x_2^* = 1$	$R_1^* = 0$
	$R_2^* = 0$

مرحله اول : تابع هدف سوال حذف به جایش $\min R_0 = \sum R_i$
 بعد از یک دورن تا بهینه پیش می‌رویم. اگر در جدول بهینه مقدار R^* برابر صفر شد
 به مرحله ۲ می‌رویم وگرنه تا آنجا جواب ندارد.

مرحله دوم : در جدول بهینه بدست آمده، ستونهای مصنوعی حذف به جایش هر هدف
 بدست آمده، هدف سوال را جایگزین می‌کنیم. بعد از یک دورن تا بهینه پیش می‌رویم.

مثال : مثال ۱۲ را از روش دو مرحله‌ای حل کنید.

$$1) \max Z = 5x_1 + 2x_2 \quad +R_1$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - S_1 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + S_2 = 12 \end{cases}$$

R نیازی نیست

مرحله اول $\min R_0 = R_1$

$$s.t \begin{cases} x_1 + 2x_2 - S_1 + R_1 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + S_2 = 12 \end{cases}$$

	x_1	x_2	S_1	R_1	S_2	RHS	
$+R_0$	0	0	0	(-1)	0	0	} کپی
R_1	1	2	-1	1	0	2	
S_2	4	3	0	0	1	12	
$\min R_0$	1	2	-1	0	0	2	
R_1	1	2	-1	1	0	2	$\frac{2}{2} = 1$
S_2	4	3	0	0	1	12	$\frac{12}{3} = 4$

(ادامه جدول مصنوعی)

	x_1	x_2	S_1	R_1	S_2	RHS
R_0	0	0	0	-1	0	0
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
S_2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	9

باینر عدد اول (بجانبه $R_0^* = 0$) حل به دست آوریم:

عدد دوم

	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
$+Z$	-4	-2	0	0	0
$2x(x_2)$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1
S_2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	9
Z	-3	0	-1	0	2
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1
S_2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	9
Z	0	6	-4	0	1
x_1	1	2	-1	0	2
S_2	0	-5	4	1	4
Z	0	1	0	1	12
x_1	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
S_1	0	$-\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1

باینر عدد اول (بجانبه $R_0^* = 0$) حل به دست آوریم:

$Z^* = 12$ $x_1^* = 3$ $x_2^* = 0$

$S_1^* = 1$ $S_2^* = 0$

$$2) \min Z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 7 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min R_0 = R_1 + R_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - S_1 + R_2 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + S_2 = 4 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول

	x_1	x_2	S_1	R_1	R_2	S_2	RHS
R_0	0	0	0	(-1)	(-1)	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	7
S_1	1	2	0	0	0	1	4
R_0	7	5	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	7
S_1	1	2	0	0	0	1	4
R_0	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	0	2
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	1	0	2
S_1	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	2
R_0	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{7}{5}$
S_2	0	0	1	1	-1	1	0

$$R_0^* = 0 \text{ این بهترین شد، به صورت ۲ می رسم.}$$

موضوع دوم

	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	(-4)	(-1)	0	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
S_1	0	0	1	1	0
z	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
S_2	0	0	1	1	0
z	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{18}{5}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$
S_1	0	0	1	1	0

حاصل نهایی

$$\begin{cases} z^* = \frac{18}{5} \\ x_1^* = \frac{4}{5} \\ x_2^* = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1^* = 0 \\ S_2^* = 0 \end{cases}$$

فصل پنجم - برنامه‌ریزی خطی - تکنیک عناصر تابلوی میخی و مسائل ثانویه

- مسائل ثانویه، دو آل، دو خان، مضاعف
- برای هر مسئله LP، مسئله LP دگرگونی دارد به نام مسئله که بر اساس قواعد شخصی نوشته می‌شود که ذیلاً خواهد آمد. قبل از آن لازم به ذکر است که جهت نوشتن مسئله ثانویه اگر اولیه Max بود قید $\geq$ نداشته باشیم و اگر Min بود قید $\leq$ نداشته باشیم و در صورت وجود درستی ضرب شود تا جهت برقرار شود.

- (۱) تعداد متغیر مسئله ثانویه = تعداد محدودیت مسئله اولیه
- (۲) تعداد محدودیت مسئله ثانویه = تعداد متغیر مسئله اولیه
- (۳) ضرایب تابع هدف مسئله ثانویه = اعداد سمت راست مسئله اولیه
- (۴) اعداد سمت راست مسئله ثانویه = ضرایب تابع هدف مسئله اولیه
- (۵) ضرایب محدودیت مسئله ثانویه (سطح) = ضرایب محدودیت مسئله اولیه (ستونی)
- (۶) اگر قیدی در اولیه به صورت (=) بود، تغییر تفسیرش در ثانویه آزاد در علویت است.
- (۷) اگر تغییر در اولیه آزاد در علویت بود، قید (محدودیت) تفسیرش در ثانویه به صورت (=) است.
- (۸) نوع تابع هدف عوض می‌شود. ($Min \leq Max$)

مثال: ثانویه مسائل زیر را بنویسید:

$$1) \quad \text{Max } Z = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3$$

اولیه:

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12 \rightarrow y_1 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 9 \rightarrow y_2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

۳ متغیر و ۲ محدودیت

$$\text{Min } y_0 = 12y_1 + 9y_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 3y_1 + 5y_2 \geq 7 \\ 2y_1 + y_2 \geq 9 \\ 5y_1 + 4y_2 \geq 8 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

ثانویه:

مسأله ثانویه

۲) $\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2$

اولیه:

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -7 \rightarrow Y_1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \rightarrow Y_2 \end{cases}$$

$\text{Min } Y_0 = -7Y_1 + 20Y_2$

ثانویه:

$$\text{s.t. } \begin{cases} -Y_1 + 2Y_2 \geq 3 \\ -Y_1 + Y_2 \geq 9 \\ Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

۳) $\text{Max } Z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$

اولیه:

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \rightarrow Y_1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12 \rightarrow Y_2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\text{Min } Y_0 = 7Y_1 + 12Y_2$

ثانویه:

$$\text{s.t. } \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 \geq 5 \\ Y_1 - Y_2 \geq 3 \\ Y_1 + Y_2 \geq 2 \\ Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

۴) $\text{Min } Z = 3x_1 + 8x_2$

اولیه:

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \rightarrow Y_1 \\ x_1 + 5x_2 \geq 20 \rightarrow Y_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ آزاد} \end{cases}$$

مسئله ثانویه

$$\max X_0 = 6X_1 + 20X_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1 + 5X_2 = 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \text{ آزاد در عددی} \end{cases}$$

ثانویه :

- رابطه بین جواب در مسئله اولیه و ثانویه :

۱) اگر هر دو مسئله (اولیه و ثانویه) شدنی باشند، صدق شرط تعداد در دو مسئله است :

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} \quad (\text{جواب } m, n \text{ عوض شده})$$

۱۲) اگر هر دو مسئله شدنی باشند، در این صورت $X_0^* = Z^*$ (حتماً در این حالت جواب بهینه کم‌تر خواهد بود)

در سایر موارد (غیر بهینه) اگر
 اولیه $\rightarrow \max Z$
 ثانویه $\rightarrow \min Y_0$

$$Z \leq Y_0 \quad \text{در این صورت}$$

۳) اگر مسئله اولیه جواب بهینه ∞ داشته باشد یعنی $+\infty = Z^*$ در این صورت مسئله ثانویه فاقد جواب است (فاصله صفری ϕ و جواب بهینه موجود نیست).

۴) اگر مسئله اولیه فاقد جواب باشد ثانویه یا جواب ندارد یا دارای جواب بهینه بی‌نهایت است
 $X_0^* = -\infty$

۵) روابط دuality محسوس (ممکن باشد)

	متغیر تصمیم	متغیر محسوس	
اولیه	x	s	$\begin{cases} x \cdot t = 0 \\ y \cdot s = 0 \end{cases}$
ثانویه	y	t	

فایده: برای یافتن جواب ثانویه با داشتن جواب اولیه

$$\max Z = 8x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 5x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min Y_0 = 10Y_1 + 15Y_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} Y_1 + 5Y_2 \geq 8 \\ Y_1 + Y_2 \geq 5 \\ Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 = 10 \\ 5x_1 + x_2 + S_2 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 + 5Y_2 - t_1 = 8 \\ Y_1 + Y_2 - t_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 t_1 = 0 \\ x_2 t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 S_1 = 0 \\ Y_2 S_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & \text{سطر} & Y_1 & Y_2 & t_1 & t_2 \\ \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 0, 0 \right) & \xrightarrow{\text{نرمه}} & (3, 1, 0, 0) & \text{نرمه} \end{matrix}$$

← بهترین جواب

یافتن جواب ثانویه با داشتن جواب اولیه (روش همبستگی):

$$\max Z = 8x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 5x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 = 10 \\ 5x_1 + x_2 + S_2 = 15 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	-8	-2	0	0	0
s_1	1	1	1	0	10
s_2	5	1	0	1	15
Z	0	$-\frac{12}{\Delta}$	0	$\frac{\Delta}{\Delta}$	2Δ
s_1	0	$\frac{4}{\Delta}$	1	$-\frac{1}{\Delta}$	7
x_1	1	$\frac{1}{\Delta}$	0	$\frac{1}{\Delta}$	3
Z	0	0	3	1	3Δ
x_2	0	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{35}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\Delta}{2}$

$$\frac{10}{1} = 10$$

$$\frac{15}{5} = 3$$

$$\frac{7}{\frac{4}{\Delta}} = \frac{3\Delta}{4}$$

$$\frac{3}{\frac{1}{\Delta}} = 1\Delta$$

جواب بهینه سال اول	$Z^* = 3\Delta$	$x_1 = 3$
	$x_1^* = \frac{\Delta}{2}$	$x_2 = 1$
	$x_2^* = \frac{3\Delta}{2}$	$t_1 = 0$
	$s_1^* = 0, s_2^* = 0$	$t_2 = 0$

نقشه: اگر از M مرشد، حذف M ، عدد مایه منته (Max) (در حالت Min) قرینه

- پیدا کردن جواب ثانویه با روش جواب اولیه به روش صیقل (بدون جدول):

$$\text{Max } Z = 5x_1 + x_2$$

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + s_2 = 7 \end{cases}$$

(حل در صفحه بعد)

مسئله ثانویه

$$\text{Min } Y_0 = 4Y_1 + 6Y_2$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} Y_1 + 3Y_2 \geq 5 \\ 2Y_1 + Y_2 \geq 1 \\ Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_1 + 3Y_2 - t_1 = 5 \\ 2Y_1 + Y_2 - t_2 = 1 \end{cases}$$

✓ در اینجا داریم: $\alpha_1 t_1 = 0, \alpha_2 t_2 = 0, Y_1 S_1 = 0, Y_2 S_2 = 0$

$$\alpha_1 = 2 \Rightarrow t_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \Rightarrow t_2 = ? \quad \begin{cases} 2 + 0 + S_1 = 4 \rightarrow S_1 = 2 \\ 6 + 0 + S_2 = 6 \rightarrow S_2 = 0 \end{cases}$$

$$S_1 = 2 \Rightarrow Y_1 = 0 \quad \begin{cases} 0 + 3Y_2 - 0 = 5 \rightarrow Y_2 = \frac{5}{3} \\ 0 + Y_2 - t_2 = 1 \rightarrow t_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1^* = 0 \\ Y_2^* = \frac{5}{3} \end{cases}$$

چگونه بفهمیم:

(۱) اگر دو مسئله اولیه و ثانویه غیر تهی باشند (ناقص بودن ϕ نباشد) یکی از این دو دارای پاسخ جواب بهی است.

(۲) اگر دو مسئله اولیه جواب بهی نداشته باشند، قطعاً ثانویه پاسخ بهی است.
(عکس این مطلب همیشه درست نیست!)

(۳) اگر مسئله معکوس $\leq$ مقدار b

$$M \text{ (میزبان یا محدود کننده)} = b \geq \text{مقدار } E$$

اصلت (ب) چنانچه سطوح شرایط بهینه داشته باشد (در Max منفی نداشته باشیم و در Min مثبت نداشته باشیم) در سطوح بهینه تمایز (می توان از روش همبستگی ثانویه استفاده کرد).

- (۱) نام متغیر در سوال به صورت x تبدیل و با استفاده از تغییر متغیر $x =$ تبدیل شوند.
- (۲) ضرایب کمبود که در تابع هدف را دارد در جدول کمیند.
- (۳) متغیر خروجی : متغیر متغیر در سمت راست بین کمبود x (مطلوبه)

متغیر ورودی : تقسیم اعداد سطوح (غیر نام x) بر اعداد منفی سطوح، هر کدام قدر مطلق کمتر شد، بود است.

نقشه : هر کس در جدول هاست سیمپلکس بعدی است. در سیمپلکس ثانویه بر جدول بعدی،
M-نقشه یا دو جدول که عدد اول مثبت بود، اینجا عدد اول همدار منفی است.

مثال : جواب بکنید و به زیر را به روش سیمپلکس ثانویه بدست آورید :

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3 \\ 4x_1 + 2x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -3 \\ -4x_1 - 2x_3 \leq -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + S_1 = -3 \\ -4x_1 - 2x_3 + S_2 = -10 \end{cases}$$

(جدول صفح بعدی)

مسألة ١٠

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	-10	-2	-8	0	0	0
s_1	-3	-2	3	1	0	-3
s_2	-8	0	-2	0	1	-10
Z	-2	-2	0	0	-2	20
s_1	-9	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	-18
x_3	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	2
Z	0	$-\frac{21}{9}$	0	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{3}{9}$	28
x_1	1	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	2
x_3	0	$-\frac{2}{9}$	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	1

∴ $Z^* = 28$, $x_1^* = 2$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 1$, $s_1^* = 0$, $s_2^* = 0$