

به نام خالق ستارگان



12th IOAA team

I.R. IRAN

پاسخ نامه اولین آزمون شبیه از مرحله اول

المپیاد نجوم و اختر فیزیک

دوازدهمین تیم ملی المپیاد نجوم و اختر فیزیک

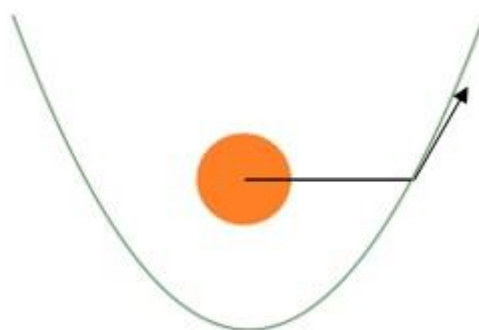
سوال 1: گزینه الف

با استفاده از مدول فاصله داریم:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow d = 1.1 \text{ kpc}$$

سوال 2: گزینه ج

برای به دست آوردن آهنگ تغییرات ارتفاع باید سرعت ماهواره و سرعت زمین را در امتداد سرسوی ناظر حساب کنیم. با توجه به اعداد سوال آنومالی حقیقی ماهواره هنگام مشاهده 90 درجه است و دقیقا در راستای سرسوی ناظر قرار دارد. پس سرعت مماسی ماهواره را با سرعت چرخش زمین به دور خود جمع می کنیم و و بر فاصله ناظر تا ماهواره تقسیم می کنیم تا سرعت زاویه ای ماهواره به دست آید. سرعت به دست آمده تغییرات زاویه زاویه سمت الراسی را نشان می دهد پس تغییرات ارتفاع منفی آن است.



$$v_{\theta} = \frac{\mu(1 + \cos \theta)}{h} \rightarrow r(\theta) = \frac{2p}{1 + \cos \theta} \rightarrow 8R_e = \frac{8R_e}{1 + \cos \theta} \rightarrow \theta = 90 \rightarrow$$

$$v_{\theta} = \frac{\mu}{h} = \sqrt{\frac{GM_e}{2p}} = \sqrt{\frac{GM_e}{8R_e}} \rightarrow v_t = R_e \omega_e + \sqrt{\frac{GM_e}{8R_e}} \rightarrow v_t = 3260 \frac{m}{s} \rightarrow$$

$$\omega_t = \frac{v_t}{7R_e} = 0.25 \left(\frac{\text{deg}}{\text{min}} \right)$$

سوال 3: گزینه الف

با استفاده از رابطه دمای زمینه کیهان بر حسب ضریب مقیاس داریم:

$$a_1 T_1 = a_2 T_2$$

از آنجا که ضریب مقیاس در زمان حال برابر 1 است رابطه به صورت زیر خواهد شد:

$$aT = T_0 = 2.735 \text{ K}$$

و میدانیم حجم با توان سوم ضریب مقیاس در تناسب است بنابر این هنگامی که حجم کیهان یک هشتم باشد ، ضریب مقیاس نصف مقدار کنونی ($a=0.5$) خواهد بود بنابر این دمای تابش زمینه در آن لحظه برابر $T=5.47$ کلوین خواهد شد. و از رابطه فشار تابشی داریم:

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a_{\text{(ثابت تابشی)}} T^4 = 2.25 \times 10^{-4} \text{ nPa}$$

سوال 4 : گزینه ب

با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

$$F = [kg \ m \ s^{-2}] \quad m = [kg] \quad A = [m^2] \quad v = [m \ s^{-1}]$$

و با توجه به متن سوال داریم:

$$F \sim m^\alpha A^\beta v^\gamma \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -0.5 \\ \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow F = k \frac{mv^2}{\sqrt{A}}$$

که با جایگذاری اطلاعات داده شده در رابطه بالا ، ضریب k محاسبه میشود. $K=8 \times 10^{-14}$

سوال 5 : گزینه د

با استفاده از یک خط کش میتوان حساب کرد.

سوال 6 : گزینه ج

اگر فاصله محل نیرو تا لولا را x بنامیم آنگاه داریم:

$$\tau = \frac{dL}{dt} = x \cdot f \quad x = v \cdot t \Rightarrow dL = v f t \, dt$$

$$L = \int_0^{t=\frac{l}{v}} v f t \, dt = \frac{f l^2}{2v} = I \omega = \frac{1}{3} m l^2 \times \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3}{2} \frac{f}{m v}$$

سوال 7 : گزینه ب

قطر دهانه یک شهاب سنگ معمولی را 150 متر تخمین میزنیم.

$$E = E_0 \left(\frac{D}{D_0} \right)^{\frac{1}{0.294}} = 10^{13} J$$

سوال 8 : گزینه ب

از رابطه جرم درخشندگی داریم:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\alpha}$$

که مقدار آلفا بین 3 تا 3.5 است. بنابر این داریم:

$$L \approx 35L_{\odot}$$

و از رابطه قدر مطلق و درخشندگی داریم:

$$M - M_{\odot} = -2.5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) \Rightarrow M = 0.86 mag$$

از مدول فاصله داریم:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow d \approx 2.5 kpc$$

سوال 9 : گزینه د

از رابطه تعادل هیدرواستاتیک داریم:

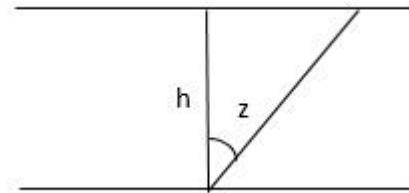
$$\frac{dP}{dr} = \frac{-GM(r)\rho(r)}{r^2} \Rightarrow P_c \sim \frac{GM^2}{R^4}$$

از بسط نیوتون داریم:

$$P'_c \sim \frac{GM^2}{(R + \Delta R)^4} \sim \frac{GM^2}{R^4 \left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^4} = P_c \left(1 - \frac{4\Delta R}{R}\right)$$

سوال 10 : گزینه ج

ابتدا با توجه به فرمول کدري اختلاف قدر درون و بیرون جو شهاب سنگ را به دست می آوریم . سپس با توجه به فرمول شار می توان فاصله شهاب سنگ از ما را تعیین نمود .



$$\frac{I}{I_0} = e^{-\frac{kh}{\cos z}} \rightarrow \Delta m = 2.5 \frac{kh}{\cos z} \log e = 0.106 \rightarrow m_0 = 1.095 \rightarrow$$

$$m_0 = m_{\odot} - 2.5 \log \frac{f_0}{f_{\odot}} \rightarrow$$

$$f_0 = 1.04 \times 10^{-8} \rightarrow f_0 = \frac{L}{4\pi d^2} \rightarrow$$

$$d = \frac{h}{\cos z} = \frac{100}{\cos z} \rightarrow$$

$$L = 1961 \approx 2000(W)$$

سوال 11 : گزینه الف

طول موج در طنابی که دو سر آن بسته است متناسب با عکس طول طناب است . با توجه به اینکه چگالی در طول طناب ثابت است ، سرعت موج نیز در کل طناب ثابت است در نتیجه داریم :

$$f = \frac{v}{\lambda} \rightarrow f = \frac{nv}{d} \rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{d_2}{d_1} = 5 \rightarrow$$

$$d_2 + d_1 = 90 \rightarrow d_1 = 15 \rightarrow$$

$$D = 45 - 15 = 30(cm)$$

سوال 12 : گزینه د

با توجه به رابطه های داده شده در سوال داریم:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \Rightarrow \tau = -pE \sin \theta$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta, \quad \tau = I\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow I\ddot{\theta} = -pE\theta = -2qdE \theta \Rightarrow \left\{ \ddot{\theta} = \frac{-2qdE}{I} \theta \right\}$$

که معادله یک نوسانگر هماهنگ ساده است. و از تعریف داریم:

$$\ddot{A} = -\omega^2 A \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2qdE}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi^2 I}{qdE}}$$

سوال 13 : گزینه ب

$$FOV = 2 \times 0.37^\circ = 0.74^\circ$$

$$FOV' = 65^\circ \Rightarrow m = \frac{FOV'}{FOV} = 87.84$$

$$5.5 = \frac{f_o}{D} \Rightarrow f_o = 1117.6 \text{ mm} \quad m = 87.84 = \frac{f_o}{f_e} \Rightarrow f_e = 12.7 \text{ mm}$$

سوال 14 : گزینه الف

در برخورد کشسان هیچ اتلاف انرژی نداریم و انرژی جنبشی قبل و بعد از برخورد با هم برابر هستند. بنابراین سرعت نسبی قبل و بعد از برخورد باهم برابر خواهند بود.

سوال 15 : گزینه ج

برای حل این سوال فرض میکنیم مریخ در یک مدار بیضی شکل خیلی کشیده ($e \approx 1$) به سمت خورشید حرکت میکند و در لحظه اول در اوج این مدار بیضی شکل است:

$$r_m = a(1 + e) \approx 2a = 1.52 \text{ Au} \Rightarrow a = 0.76 \text{ Au}$$

بنابر این دوره تناوب این مدار برابر است با:

$$T_{(yr)}^2 = a_{(Au)}^3 \Rightarrow T = 0.663 \text{ yr} = 242 \text{ day}$$

این مقداری است که طول میکشد مریخ یک دور کامل بزند و به جای اولیه خود بازگردد درحالی که خواسته سوال مدت زمان سقوط که همان مدت زمان رسیدن به حضیض از اوج است را خواسته که نصف دوره تناوب است:

$$t = \frac{T}{2} = 122 \text{ day}$$

سوال 16 : گزینه ج

تابع کار در واقع همان انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از هسته می باشد و برای آنکه انرژی جنبشی نهایی الکترون کمترین مقدار باشد ، انرژی فوتون تابش شده باید با تابع کار آن برابر باشد :

$$5.3 \text{ eV} = E_{\text{photon}} = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 234 \text{ nm}$$

سوال 17 : گزینه ب

ابتدا با استفاده از قانون هابل فاصله کهکشان را محاسبه و سپس با استفاده از مدول فاصله درخشندگی کل کهکشان را به دست می آوریم. سپس آنرا به درخشندگی هر تک ستاره که از رابطه جرم-درخشندگی محاسبه شده است تقسیم میکنیم تا تعداد ستاره ها به دست آید:

$$v_r = zc = Hd \Rightarrow d = 4.35 \text{ Mpc}$$

$$m_g - M_g = 5 \log d - 5 \Rightarrow M_g = -21.2 \text{ mag}$$

$$M_g - M_{\odot} = -2.5 \log \left(\frac{L_g}{L_{\odot}} \right) \Rightarrow L_g = 2.3 \times 10^{10} L_{\odot}$$

$$\frac{L_s}{L_{\odot}} = \left(\frac{m_s}{m_{\odot}} \right)^3 \Rightarrow L_s = 3.4 L_{\odot}$$

$$N = \frac{L_g}{L_s} = 7 \times 10^9 \text{ star}$$

سوال 18 : گزینه الف

برای حل این دو سوال میتوان از دو روش استفاده نمود:

اول: استدلال منطقی

عالم همسانگرد است به این معنا که هیچ جهت یا مکان خاصی در آن وجود ندارد پس اگر از دید ما همه چیز به صورت شعاعی در حال دور شدن است ، برای هر ناظر دیگری در عالم همین شرایط موجود است و همه چیز به صورت شعاعی از او دور میشود (گزینه الف)

دوم : نوشتن بردار سرعت نسبی در دستگاه ناظر و استفاده از قانون هابل

که این کار به ما نشان میدهد سرعت همواره در جهت خط واصل است. که اثبات آن به عهده خودتان!

سوال 19 : گزینه الف

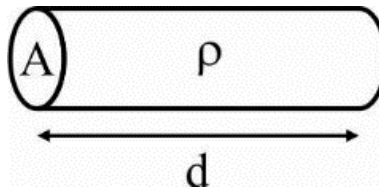
مدت زمان بالا بودن یک ستاره ربطی به بعد آن ندارد و عملاً 2 برابر زاویه ساعتی هنگام طلوع یا غروب است.

$$\cos H_{\text{غروب}} = -\tan \delta \tan \varphi \Rightarrow H_{\text{غروب}} = 7^{\text{h}} 3^{\text{min}}$$

$$t = 2H_{\text{غروب}} = 14^{\text{h}} 6^{\text{min}}$$

سوال 20 : گزینه د

باید محاسبه کنیم چه تعداد ذره در مسیر حرکت ماهواره وجود دارد. برای اینکار حجمی که ماهواره پوشش میدهد را محاسبه میکنیم:



$$V = A \cdot d, \begin{cases} d = 2\pi r = 134000 \text{ km} \\ A = \pi(0.1)^2 = 0.0314 \text{ km}^2 \end{cases} \Rightarrow V = 4210 \text{ km}^3$$

$$N = nV = 4200$$

سوال 21 : گزینه ج

صرفا لازم است میانگین بگیریم!!!

سوال 22 : گزینه د

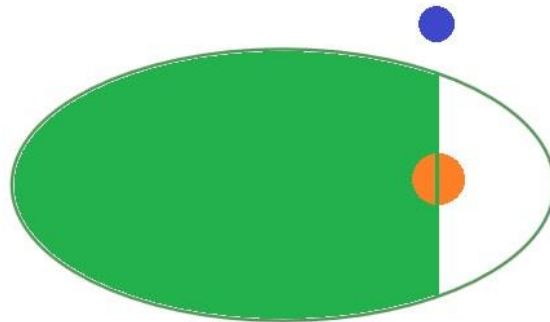
از آنجا که دو خوشه کاملا شبیه یکدیگرند و رنگ ستاره ها به فاصله ربطی ندارد ، در محور افقی نقطه ای انتخاب میکنیم و قدر ظاهری را در دو خوشه اندازه میگیریم:

$$m_B - m_A = -2.5 \log \left(\frac{\frac{L}{4\pi d_B^2}}{\frac{L}{4\pi d_A^2}} \right) = -5 \log \left(\frac{d_A}{d_B} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d_A}{d_B} = 10$$

سوال 23 : گزینه ب

در این سوال مقارنه و مقابله نسبت به خورشید در نظر گرفته می شود. با توجه به مدار سیاره ، مدت زمانی را که طول می کشد تا سیاره از سمت مثبت محور γ به سمت منفی محور γ برود را حساب می کنیم . مدت زمان فوق اختلاف بین زمان مقابله و مقارنه است .



$$\frac{(x + \sqrt{3})^2}{4} + y^2 = 1 \rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 90 \rightarrow \tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \rightarrow E = 30$$

$$\rightarrow M = E - e \sin E \rightarrow M = 0.09 \rightarrow t = T - \frac{2MT}{2\pi} = 0.97T \rightarrow T$$

$$= a^{\frac{3}{2}} \rightarrow a = 2(AU) \rightarrow T = 2.82(yr) \rightarrow t = 1007(days)$$

سوال 24 : گزینه ب

از رابطه انرژی گاز کامل داریم:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \quad \begin{cases} m = 1000 \text{ kg} \\ v = 50 \text{ km h}^{-1} \end{cases}$$

$$T = 10^{28} \text{ K} = 10^{25} \text{ کیلو کلونین}$$

سوال 25 : گزینه ج

رابطه‌ی بین درخشندگی و پارامترهای داده شده در سوال را مینویسیم:

$$E_{\text{ccd به رسیده}} = b_* \times t \times S_{\text{تلسکوپ}} = \frac{L_*}{4\pi d^2} \times t \times S_{\text{تلسکوپ}}$$

$$d(pc) = \frac{1}{p''}$$

$$\rightarrow L_* = \frac{E_{\text{ccd}} \times 4\pi d^2}{t \times S_{\text{تلسکوپ}}} = 6.3 \times 10^{29} \text{ W}$$

از رابطه نشر خطا داریم:

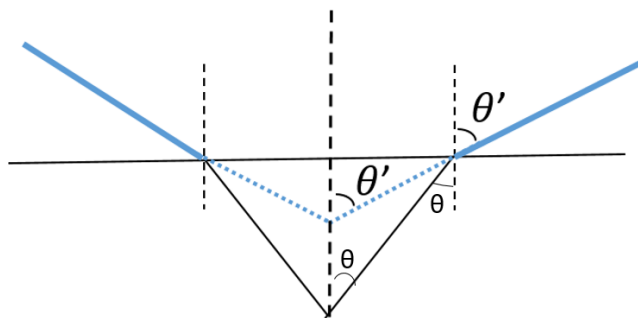
$$\Delta L_* = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial E} \Delta E\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{E_{\text{ccd}} \times 8 \pi d}{t \times S_{\text{تلسکوپ}}} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{4 \pi d^2}{t \times S_{\text{تلسکوپ}}} \Delta E_{\text{ccd}}\right)^2}$$

$$= 2.7 \times 10^{29} w$$

$$\Delta d = \left| \frac{\partial d}{\partial p} \Delta p \right| = \frac{\Delta p}{p^2}$$

سوال 26 : گزینه الف

زاویه فضایی اولیه‌ای که ناظر مشاهده میکند برابر است با: $\Omega = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}$
 درحالتی که ناظر به زیر آب میرود، ستاره‌هایی با زاویه فضایی Ω' نیز در میدان دید ناظر قرار میگیرند که $\Omega' = \frac{1 - \cos(\theta')}{2}$



از قانون اسنل دکارت داریم: $n \sin(\theta) = \sin(\theta')$

$$\theta = \frac{FOV}{2} = 30^\circ \rightarrow \theta' = 42.07^\circ$$

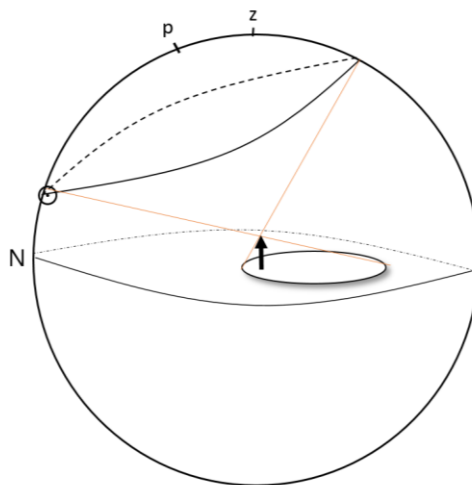
$$\rightarrow \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{1 - \cos(\theta')}{1 - \cos(\theta)} = 1.9$$

میل خورشید در روز 20 تیر را بدست می‌آوریم:

$$\lambda_{\odot} = 90 + \frac{20}{93} \times 90 = 109.35^{\circ}$$

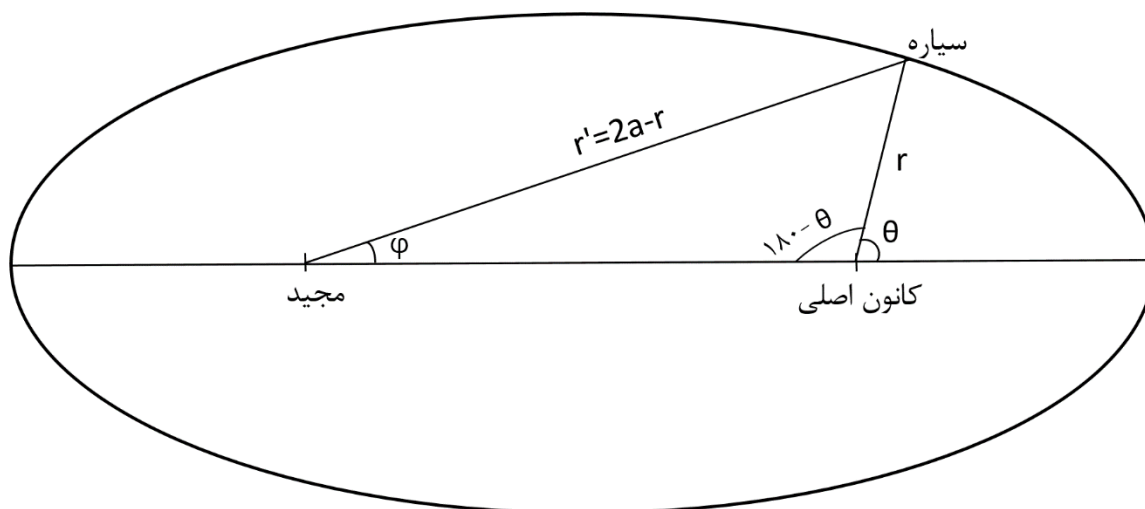
$$\sin(\delta_{\odot}) = \sin(\lambda_{\odot}) \sin(\varepsilon) \rightarrow \delta_{\odot} = 22.1^{\circ}$$

برای ناظری در عرض جغرافیایی 80° مسیر خورشید را در تاریخ 20 تیر رسم میکنیم و از شکل میدانیم:
 پس $P\odot = 90 - \delta_{\odot} = 67.9^{\circ}$, $P\text{N} = \varphi = 80^{\circ}$ مسیر سایه‌ی شاخص مداری بسته است و به این علت دایره نیست که ارتفاع خورشید و در نتیجه طول سایه‌ی شاخص در طول روز ثابت نیست.



سوال 28 : گزینه د

طرح مسئله را رسم میکنیم:



از معادله قطبی بیضی میدانیم: $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\theta)}$

با نوشتن قانون سینوس ها در مثلث سیاره-مجید-کانون داریم: $\frac{\sin(\varphi)}{r} = \frac{\sin(180-\theta)}{r'}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sin(\varphi) &= \sin(\theta) \frac{r}{r'} = \sin(\theta) \times \frac{\frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\theta)}}{2a - \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\theta)}} \\ &= \sin(\theta) \times \frac{1-e^2}{2 - \frac{1-e^2}{1+e \cos(\theta)}} \\ &\rightarrow \varphi \approx 41.1^\circ \end{aligned}$$

سوال 29 : گزینه الف

در ادامه عبارت درست هر گزینه آمده است:

ب : ماده تاریک و انرژی تاریک ربطی به هم ندارند (مطابق گزینه الف)

ج : از بررسی پارامتر کندشوندگی ، به وجود انرژی تاریک پی برده ایم

د : از نمودار سرعت کهکشان ها به وجود ماده تاریک پی بردا ایم

سوال 30 : گزینه ب

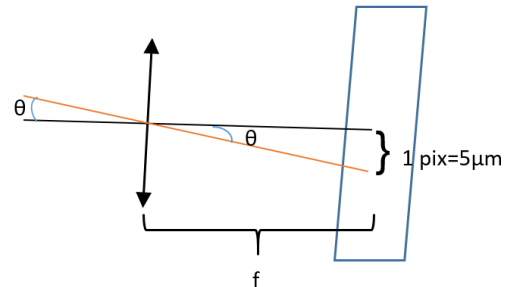
فاصله کانونی تلسکوپ را بدست می آوریم.

$$F = \frac{f}{D} = 2$$

$$D = 20 \text{ inch} = 50.8 \text{ cm}$$

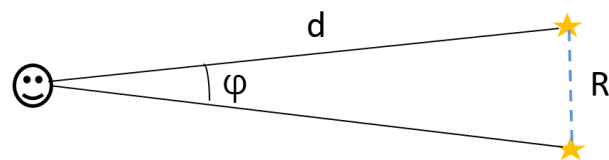
$$\rightarrow f = 101.6 \text{ cm}$$

مقیاس هر پیکسل را پیدا میکنیم (زاویه ی هر پیکسل روی آسمان چند درجه است):



$$\theta = \frac{1 \text{ pixel}}{f} = \frac{5 \mu m}{101.6 \text{ cm}} = 1.02''$$

زاویه ی بین ستاره ها را در آسمان پیدا میکنیم.



$$\varphi = \frac{R}{d} = \frac{2 \text{ AU}}{1 \text{ pc}} = 2''$$

$$\rightarrow N_{pix} = \frac{\varphi}{\theta} = 2 \text{ pix}$$

سوال 31 : گزینه ب

در حالتی که سرعت حرکت گلوله ثابت میشود، نیروی مقاومت هوا و گرانش باهم برابری میکنند:

$$f_b \propto R^2 v^2$$

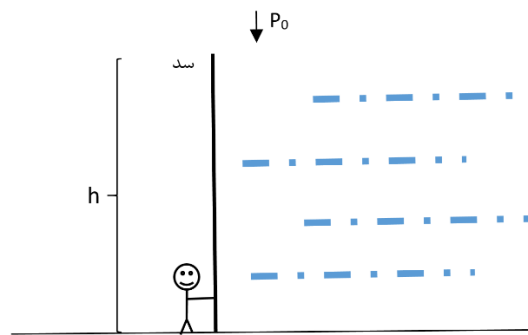
$$f_g = mg \propto \rho R^3 g$$

$$f_b = f_g \rightarrow \rho R^3 g \propto R^2 v_c^2$$

برای گلوله های هم جنس چگالی عددی ثابت است:

$$\rightarrow v_c \propto \sqrt{R}$$

طرحی از مسئله رسم میکنیم:



نیروی اصطکاک باید بر نیرویی که از طریق فشار آب به پتروس وارد میشود، برابری کند

$$F_s = \mu N = \mu mg$$

نیروی وارد شده از طرف آب: $F_w = A_f P_w$

$$P_w = P_0 + P_{\text{آب}} = P_0 + \rho gh$$

که $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ برابر چگالی آب است.

مساحت انگشت پتروس را تخمین میزنیم: $R_f \approx 1 \text{ cm} \rightarrow A_f = \pi R_f^2$

ارتفاع سد را از زمان سقوط آزاد آن حساب میکنیم: $h = \frac{gt^2}{2} = 176.4 \text{ m}$

$$\begin{aligned} F_s &= F_w \\ \rightarrow \mu mg &= (\pi R_f^2) \times (P_0 + \rho gh) \end{aligned}$$

جرم پتروس را 70 kg تخمین میزنیم:

$$\rightarrow \mu \approx 0.5$$

معادله‌ی فریدمان را برای سه جهان تخت حل میکنیم:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = H_0^2 \frac{\rho}{\rho_0}$$

ماده غالب: $\frac{\rho}{\rho_0} = a^{-3}$

پس از حل معادله و انتگرال گیری: $a(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (H_0 t)^{\frac{2}{3}}$

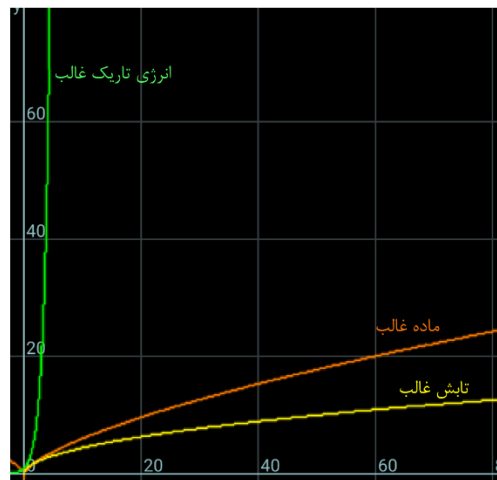
تابش غالب: $\frac{\rho}{\rho_0} = a^{-4}$

پس از حل معادله و انتگرال گیری: $a(t) = \sqrt{2H_0 t}$

انرژی تاریک غالب: $\rho = \rho_0$

پس از حل معادله و انتگرال گیری: $a(t) = e^{H_0 t}$

از روی نمودار a-t هر سه جهان میدانیم :



پس کمترین سرعت رشد مربوط به جهان تابش غالب و بیشترین آن مربوط به جهان انرژی تاریک غالب است.

سوال 34 : گزینه د

*متاسفانه متن سوال مقداری نامفهوم بود که می توانست باعث کژتابی شود و از آنجا که جواب روش دیگر در گزینه ها موجود نیست ، سوال حذف نگردیده است.

ساعت ، ساعت محلی است و ساعت تابستانی در آن اثری ندارد.

$$LMT = 16^h \rightarrow (LMT) = 12 + HAMS \rightarrow HAMS = 4^h$$

$$RAMS = \frac{360}{365.25} \Delta t = \frac{360}{365.25} \times 155.5 = 153.26^\circ$$

$$\lambda_{\odot} = 153.26^\circ$$

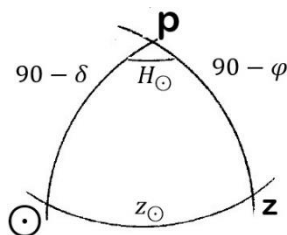
$$\sin(\delta_{\odot}) = \sin(\lambda_{\odot}) \sin(\varepsilon)$$

$$\rightarrow \delta_{\odot} = 10.33^\circ$$

$$\cos(\varepsilon) \tan(\lambda_{\odot}) = \tan(\alpha_{\odot})$$

$$\rightarrow \alpha_{\odot} = 155.20^\circ$$

$$\rightarrow H_{\odot} = LST - \alpha_{\odot} = 58.6^\circ$$



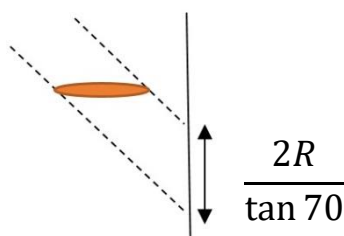
$$\cos z_{\odot} = \sin \varphi \sin \delta_{\odot} + \cos \varphi \cos \delta_{\odot} \cos H_{\odot}$$

$$\rightarrow z_{\odot} = 58.69^\circ$$

$$b = \frac{2R}{\tan 58.69}$$

$$a = 2R$$

$$e = 0.79$$



سوال 35 : گزینه د

در روشن ترین حالت ابرنواختر قدر آن کمینه میشود، پس از روی نمودار در روشن ترین حالت قدر آن -19.5 و 50 روز پس از انفجار اتفاق می افتد، سرعت انبساط آن نیز ثابت است، در نتیجه :

$$R = vt = \frac{c}{2} t = 6.48 \times 10^{14} m = 4320 AU$$