معادلات حالت :

متغیرهای حالت : یک سری متغیرها از هم مستقل هستند که با داشتن آنها باعث می‌شود مدار تجزیه و تحلیل گردد.

معادلات حالت : یک سری معادلات دیفرانسیل مرتبه 1 از هم مستقل براساس متغیرهای حالت هستند.

مدارها به دو دسته مناسب و نامناسب تقسیم بندی می‌شوند.

مدارهای مناسب مدارهایی هستند که 4 شرط زیر را دارا باشند.

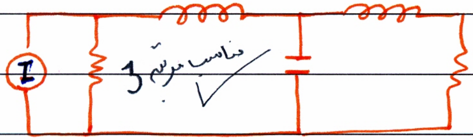
1 : حلقه خازنی نداشته باشد

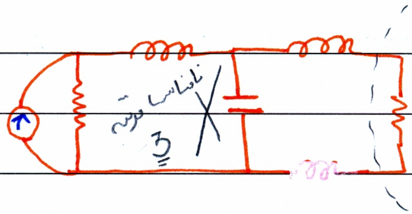
2 : حلقه خازنی به همراه منبع ولتاژ (مستقل یا وابسته) نداشته باشد

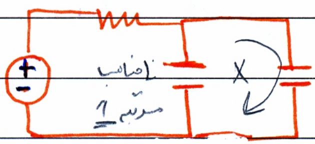
3 : کات ست سلفی نداشته باشد

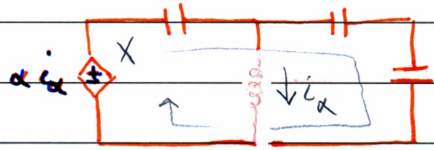
4 : کات ست سلفی به همراه منابع جریان (مستقل یا وابسته) نداشته باشد.

Example : کدام یک از مدارهای زیر مناسب است؟

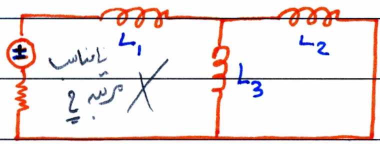


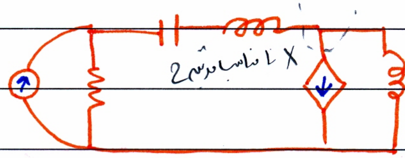


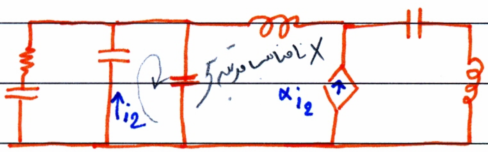




نامناسب مرتبه 3







مرتبه مدار = تعداد عناصر ذخیره کننده − تعداد حلقه‌های خازنی − تعداد کات ست‌های سلفی

روش نوشتن معادلات حالت در مدارهای مناسب :

در اینگونه از مدارها ولتاژ کلیه خازن ها و جریان کلیه سلف ها را به عنوان متغیر حالت در نظر می گیریم سپس داریم :

1. گراف مدار را ترسیم می نماییم

2. درختی انتخاب می کنیم که شامل منابع ولتاژ و خازن ها باشد. این درخت سلفها و منابع جریان را نباید داشته باشد و در صورت تکمیل نشدن درخت می توان از مقاومت ها استفاده نمود

3. برای خازن های روی شاخه درخت کات ست اساسی ترسیم نموده و معادله آن را می نویسیم

4. برای سلفهای روی لینک حلقه اساسی ترسیم و معادلات آنها را می نویسیم .

5. معادلات بدست آمده را ساختار معادلات حالت گویند. فقط با بیان متغیرهای داخل آن برحسب متغیرهای حالت که ولتاژ خازن ها و جریان سلف ها هستند تنظیم کرد .

6. معادلات بدست آمده را می توان به صورت زیر ماتریس نمود .

بردار متغیرهای حالت ←   ماتریس ورودی

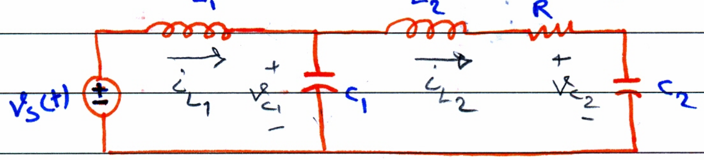
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BM(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + DM(t)$$

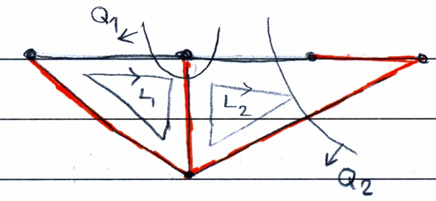
ماتریس خروجی ←

A, B, C, D ← ماتریس های ثابت هستند.

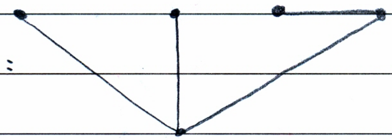
Example : معادلات حالت را برای مدار زیر بنویسید.



گراف



درخت :



متغیرهای حالت :
$$\begin{cases} v_{c_1} \\ v_{c_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{cases}$$

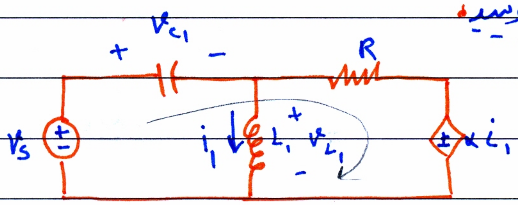
$$\begin{cases} Q_1: & -i_{L_1} + i_{C_1} + i_{L_2} = 0 \\ Q_2: & -i_{L_2} + i_{C_2} = 0 \\ L_1: & -v_S + v_{L_1} + v_{C_1} = 0 \\ L_2: & -v_{C_1} + v_{L_2} + v_R + v_{C_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -i_{L_1} + C_1\dfrac{dv_{C_1}}{dt} + i_{L_2} = 0 \\ -i_{L_2} + \dfrac{C_2 dv_{C_2}}{dt} = 0 \\ -v_S + L_1\dfrac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_1} = 0 \\ -v_{C_1} + L_2\dfrac{di_{L_2}}{dt} + R\times i_{L_2} + v_{C_2} = 0 \end{cases}$$

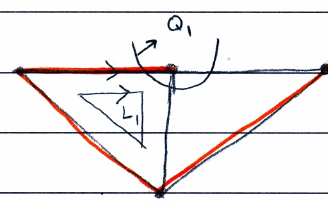
$$\begin{cases} \dfrac{dv_{C_1}}{dt} = \dfrac{i_{L_1}}{C_1} - \dfrac{i_{L_2}}{C_1} \\ \dfrac{dv_{C_2}}{dt} = \dfrac{1}{C_2}\times i_{L_2} \\ \dfrac{di_{L_1}}{dt} = \dfrac{v_S}{L_1} - \dfrac{v_{C_1}}{L_1} \\ \dfrac{di_{L_2}}{dt} = \dfrac{v_{C_1}}{L_2} - \dfrac{R}{L_2} i_{L_2} - \dfrac{v_{C_2}}{L_2} \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} [v_S]$$

Example: معادلات حالت را برای مدار زیر بنویسید.





$\left.\begin{matrix} i_{L_1} \\ v_{C_1} \end{matrix}\right\}$ متغیرهای حالت

$$I: -v_S + v_{C_1} + R\,i_R + \alpha i_1 = 0$$

$$i_R = \frac{v_S - v_{C_1} - \alpha i_1}{R}$$

$$\begin{cases} Q_1 : -i_{c_1}+i_1+i_R=0 \\ L_1 : -v_s+v_{c_1}+v_{L_1}=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -C_1\dfrac{dv_{c_1}}{dt}+i_1+\dfrac{v_s}{R}-\dfrac{v_{c_1}}{R}-\dfrac{\alpha i_1}{R}=0 \\ -v_s+v_{c_1}+L_1\dfrac{di_{L_1}}{dt}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_{c_1}}{dt} = \dfrac{i_1}{C_1}+\dfrac{v_s}{RC_1}-\dfrac{v_{c_1}}{RC_1}-\dfrac{\alpha i_1}{RC_1} \\ \dfrac{di_{L_1}}{dt} = \dfrac{v_s}{L}-\dfrac{v_{c_1}}{L} \end{cases}$$

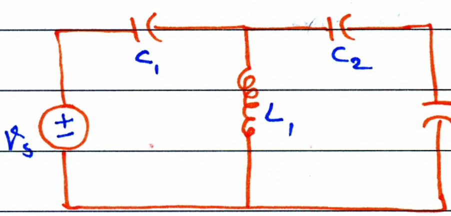
$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

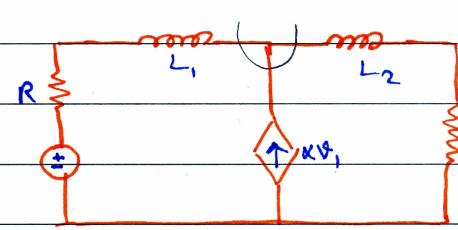
$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{c_1} \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{RC_1} & \frac{-\alpha}{RC_1}+\frac{1}{C_1} \\ \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [v_s]$$

روش نوشتن معادلات حالت در مدارهای نامناسب :

در مدارهای نامناسب لازم نیست که ولتاژ کلیه خازن‌ها و سلف‌ها به عنوان متغیر حالت در نظر گرفته شود بلکه به ازای هر حلقه خازنی یکی از خازن‌ها را به دلخواه می‌توان متغیر حالت در نظر نگرفت و به ازای هر کات‌ست سلفی نیز می‌توان یکی از سلف‌ها را متغیر حالت در نظر نگرفت.

Example : متغیرهای حالت را برای مدار زیر در نظر بگیرید.





متغیرهای حالت : $\left\{ \begin{array}{l} \text{از } v_{c_1} \text{ و } v_{c_2} \text{ و } v_{c_3} \text{ یکی به دلخواه} \\ i_{L_1} \end{array} \right.$

متغیر حالت : یکی از L_1 و L_2 را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

Subject:________________ Date:________________

روش حل :

1. گراف مدار ترسیم شود

2. درختی را انتخاب می کنیم که خازن هایی که متغیر حالت هستند و سلف هایی که متغیر حالت نیستند را شامل شود. این درخت منابع ولتاژ را نیز باید داشته باشد. در صورت تشکیل نشدن درخت از مقاومت ها استفاده می کنیم

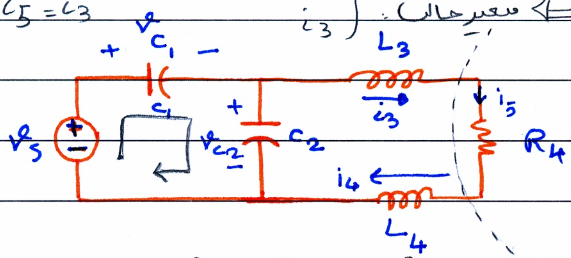
3. معادلات کات ست اساسی را برای خازن های روی شاخه درخت و معادلات حلقه اساسی را برای سلف های روی لینک می نویسیم

4. معادلات بدست آمده را برحسب متغیرهای حالت تبدیل می کنیم.

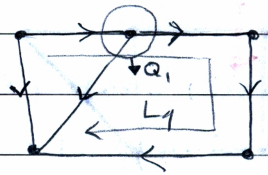
5. می توان معادلات را مثل قبل ماتریسی نیز نمود.

Example: معادلات حالت را برای مدار زیر بنویسید. $\Leftarrow$ متغیر حالت : $\left\{ \begin{array}{l} v_{c_1} \\ i_3 \end{array} \right.$

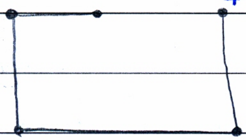
$i_5 = i_3$



گراف :



درخت :



$$\begin{cases} Q_1 : -I_{c_1} + I_{c_2} + i_3 = 0 \\ L_1 : -v_S + v_{c_1} + v_{L_3} + v_{R_4} + v_{L_4} = 0 \end{cases}$$

$$v_{c_2} = v_S - v_{c_1}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -C_1 \dfrac{dv_{c_1}}{dt} + C_2 \dfrac{d(v_S - v_{c_1})}{dt} + i_3 = 0 \\ -v_S + v_{c_1} + L_3 \dfrac{di_3}{dt} + R_4 i_3 + L_4 \dfrac{di_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -(C_1 + C_2) \dfrac{dv_{c_1}}{dt} = -\left(C_2 \dfrac{dv_S}{dt} + i_3\right) \\ (L_3 + L_4) \dfrac{di_3}{dt} = v_S - v_{c_1} - R_4 i_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_{c_1}}{dt} = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2} \dfrac{dv_S}{dt} + \dfrac{1}{C_1 + C_2} i_3 \\ \dfrac{di_3}{dt} = \dfrac{v_S}{L_3 + L_4} - \dfrac{v_{c_1}}{L_3 + L_4} - \dfrac{R_4}{L_3 + L_4} i_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v'_{c_1} \\ i'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C_1 + C_2} \\ \dfrac{-1}{L_3 + L_4} & \dfrac{R_4}{L_3 + L_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c_1} \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{C_2}{C_1 + C_2} \\ \dfrac{1}{L_3 + L_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_S \\ \dot{v}_S \end{bmatrix}$$

$$i_5 = i_3 \to [i_5] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} v_{c_1} \\ i_3 \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} v_s \\ \dot{v}_s \end{bmatrix}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

روش حل معادلات حالت:

1. حل تحلیلی
2. اولر ← در درس محاسبات عددی
3. اولر تعمیم یافته ← در درس محاسبات عددی

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

تبدیل لاپلاس

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) - x(0)$$

$$X(s) = \frac{1}{sI-A}\{BU(s) - x(0)\}$$

تبدیل لاپلاس: (به جزوه ترم قبل مراجعه شود)

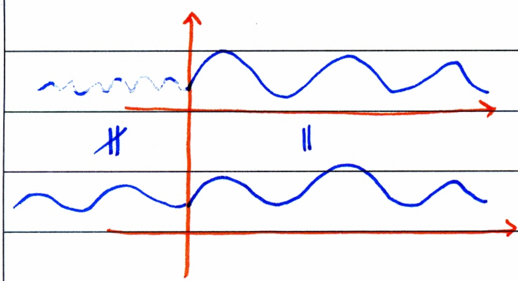
1. یادآوری از تبدیل لاپلاس:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = L\{f(t)\}$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \longrightarrow$$ تبدیل لاپلاس یکطرفه

* انتگرال هایی که یکی از کران هایشان ∞ باشد، ناسره نامیده می‌شود.

* تابع ها باید در نقطه صفر تعریف شده باشند تا تبدیل لاپلاس داشته باشند.



* تبدیل لاپلاس هر دو تابع یکسان است.

⇐ از این تبدیل ها تنها برای توابع یکطرفه استفاده می‌کنیم

→ $u(t), \cos t\,u(t), \ldots$

$f(t)$	$\delta(t)$	$u(t)$	$r(t)$	$e^{-\alpha t}$
$F(s)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+\alpha}$

قضایا:

قضیه مقدار اولیه:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

قضیه مشتقات تابع:

$$f'(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0)$$

قضیه انتگرال تابع:

$$\int_0^t f(t)\,dt \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s}$$

* به ازای هر انتگرال، $\frac{1}{s}$ در $F(s)$ ضرب می‌شود.

قضیه اول انتقال:

$$e^{\alpha t} f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s-\alpha)$$

$$e^{-\alpha s} F(s) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} f(t-\alpha)$$

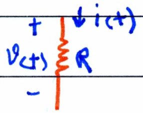
قضیه دوم انتقال:

$$u(t-c)\cdot f(t-c) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-sc}F(s)$$

تبدیل لاپلاس در مدار: مدارها را به دو دسته کلی تقسیم می‌کنیم.

۱. مدارهای بدون شرط اولیه:

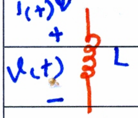
۱/۱. مقاومت:



$$v(t) = Ri(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} V_s = RI_s$$

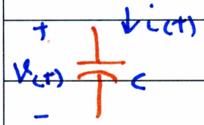
2. سلف



$$v(t) = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} V_S = LSI(s) - Li(0)$$

$$\xrightarrow{\text{شرایط اولیه صفر}} V_S = LSI(s)$$

3. خازن



$$v(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau =$$

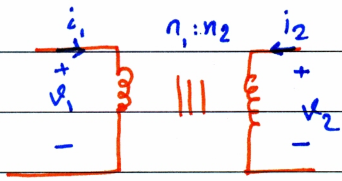
$$\frac{1}{c}\int_{-A}^{0} i(\tau)d\tau + \frac{1}{c}\int_{0}^{t} i(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow v_t = v_c(0) + \frac{1}{c}\int_{0}^{t} i(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad = \frac{v_c(0)}{s} + \frac{1}{cs}I(s)$$

$$\xrightarrow{\text{شرایط اولیه صفر}} V_S = \frac{1}{cs}I(s)$$

4. منابع ولتاژ یا جریان: برای بدست آوردن منابع در حوزه لاپلاس کافی است از منابع تحت منبع تبدیل لاپلاس گرفته شود

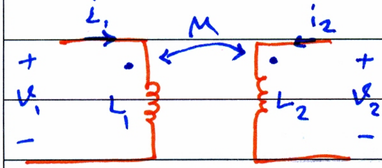
5. ترانس ایده‌آل:



$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{-i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{V_1(s)}{V_2(s)} = \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{n_1}{n_2}$$

6. سلف‌های تزویج:

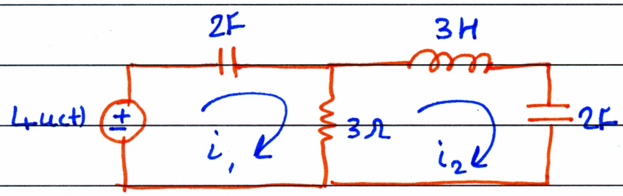


$$\begin{cases} v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

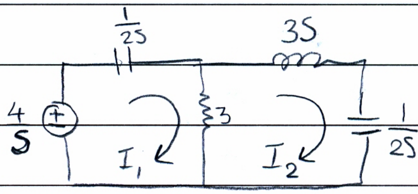
$$\Rightarrow \begin{cases} V_1(s) = L_1 s I_1(s) - L_1 i_1(0) + M s I_2(s) - M i_2(0) \\ V_2(s) = L_2 s I_2(s) - L_2 i_2(0) + M s I_1(s) - M i_1(0) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{شرایط اولیه صفر}} \begin{cases} V_1(s) = L_1 s I_1(s) + M s I_2(s) \\ V_2(s) = L_2 s I_2(s) + M s I_1(s) \end{cases}$$

Example : مدار زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس تحلیل نمایید : (i_1 و i_2 را بدست آورید) (شرط اولیه نداریم!)

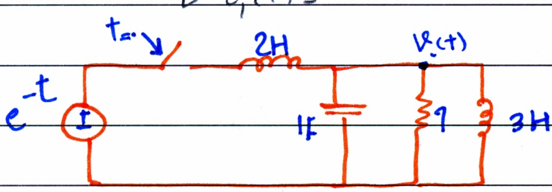


$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

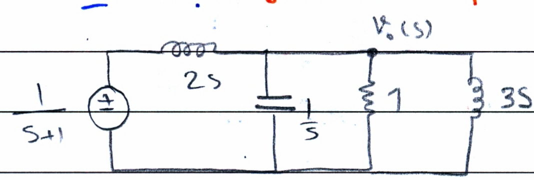


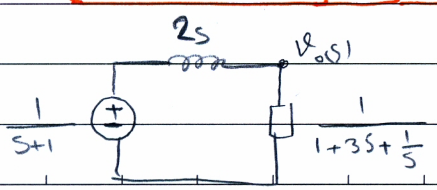
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2s}+3 & -3 \\ -3 & 3s+\frac{1}{2s}+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{s} & -3 \\ 0 & 3s+\frac{1}{2s}+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2s}+3 & -3 \\ -3 & 3s+\frac{1}{2s}+3 \end{vmatrix}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} i_1(t) = \quad , \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2s}+3 & \frac{4}{s} \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2s}+3 & -3 \\ -3 & 3s+\frac{1}{2s}+3 \end{vmatrix}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} i_2(t)$$



Examp : $V_o(s)$ را بدست آورید.

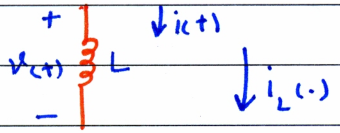




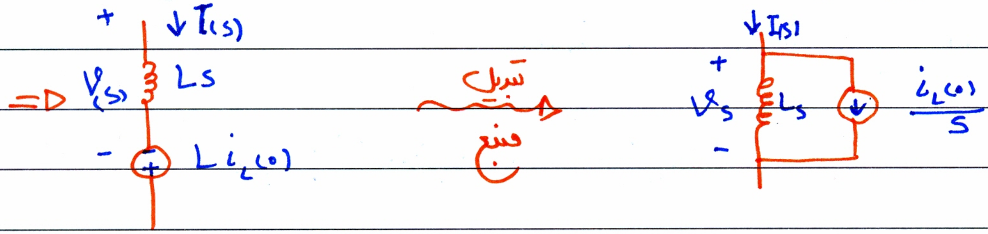
2. شرایط اولیه غیر صفر:

المان های سلف و خازن می توانند دارای شرایط اولیه باشند ⟸ در صورت وجود شرایط اولیه باید بر روی آن بحث نمود.

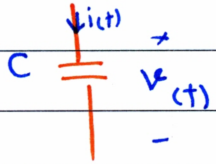
1. سلف:



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} V(s) = LSI(s) - L i_L(0)$$



2. خازن:

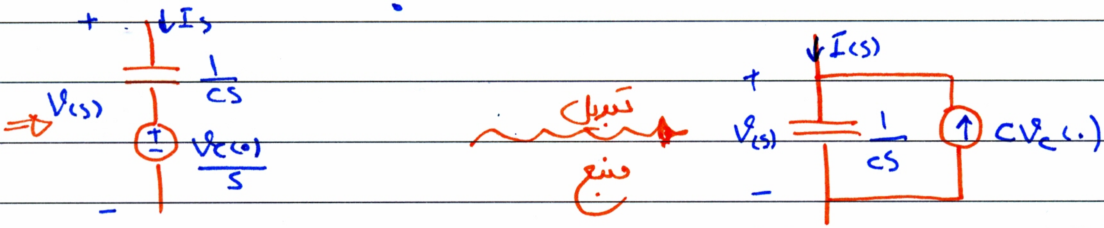


$$v(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d(\tau)$$

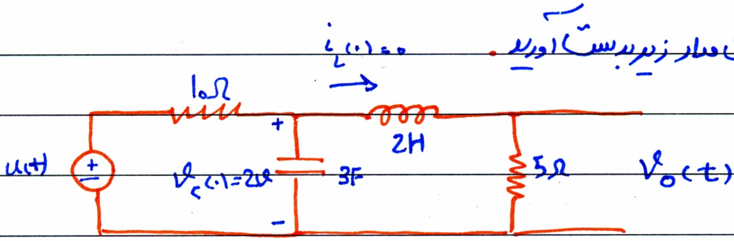
$$v(t) = \underbrace{\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{0} i(\tau)\,d\tau}_{v_c(0)} + \frac{1}{c}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

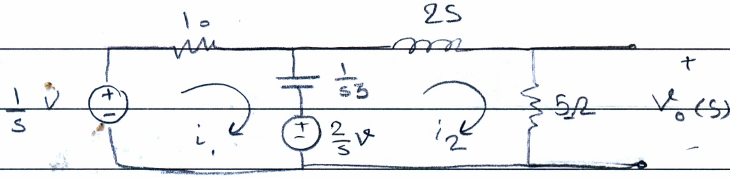
شرایط اولیه خازن

$$v(t) = v_c(0) + \frac{1}{c}\int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} V_s = \frac{v_c(0)}{s} + \frac{1}{cs} I(s)$$



Example: ولتاژ $V(s)$ را برای مدار زیر بدست آورید.

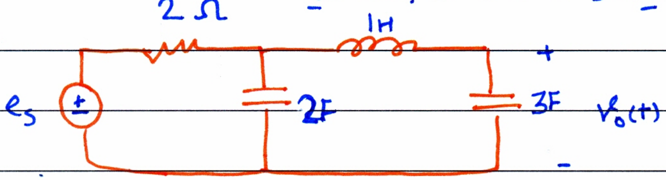


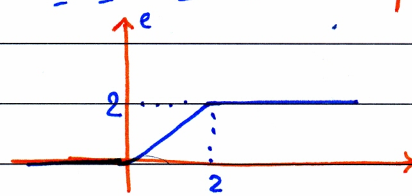


$$\begin{bmatrix} 10+\frac{1}{3S} & -\frac{1}{3S} \\ -\frac{1}{3S} & 2S+\frac{1}{3S}+5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S}-\frac{2}{S} \\ \frac{2}{S} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{|\quad|}{|\quad|} = a \rightarrow V_o(s) = a \times 5$$

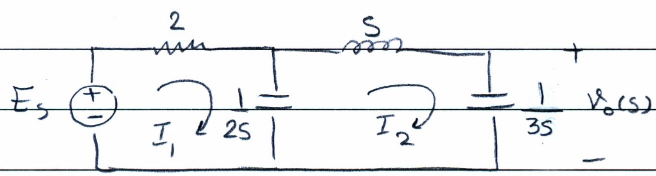
Example : بافرض اینکه شرایط اولیه در مدار صفر است $V_o(s)$ را بدست آورید.





$$e_s(t) = t\,u(t) - (t-2)u(t-2)$$

$$= \frac{1}{S^2} - \frac{e^{-2S}}{S^2}$$



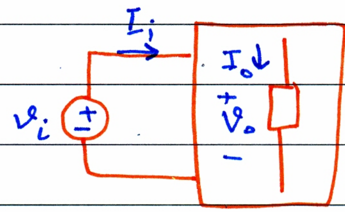
$$\begin{bmatrix} 2+\frac{1}{2S} & -\frac{1}{2S} \\ -\frac{1}{2S} & S+\frac{1}{3S} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow I_2 = \frac{|\quad|}{|\quad|} = a$$

$$V_o = a \times \frac{1}{3S}$$

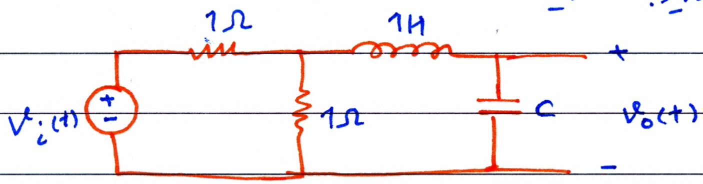
تابع تبدیل ، تابع شبکه :

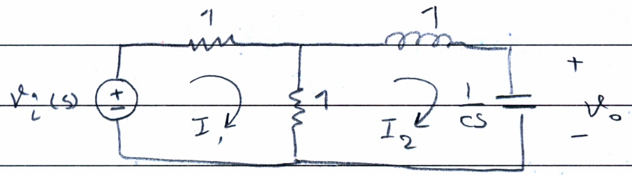
$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{\text{خروجی}\}}{\mathcal{L}\{\text{ورودی}\}}$$

• شرایط اولیه = ۰



Example : تابع شبکه $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ را برای مدار زیر بدست آورید .

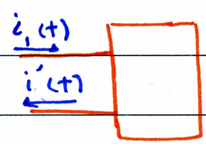




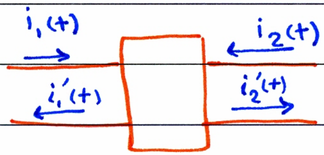
$$\begin{bmatrix} 1+1 & -1 \\ -1 & 1+s+\frac{1}{cs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \frac{|\quad|}{|\quad|} = a \Rightarrow v_o = a \times \frac{1}{cs} \Rightarrow H(s) = \frac{a\frac{1}{cs}}{v_i}$$

دوقطبی :



$\Rightarrow$ if $i_1(t) = i_1'(t) \Rightarrow$ تک قطبی



$$\Rightarrow \text{if} \begin{cases} i_1(t) = i_1'(t) \\ i_2(t) = i_2'(t) \end{cases} \Rightarrow \text{دوقطبی}$$

★ ساده‌ترین تک قطبی : مقاومت

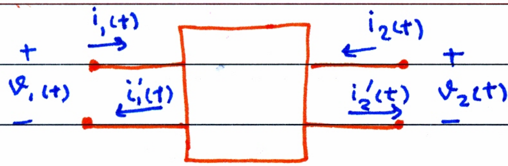
– در این مبحث فقط با دوقطبی‌ها با شرایط زیر سروکار داریم :

1, LTI

2, منبع مستقل نداشته باشد

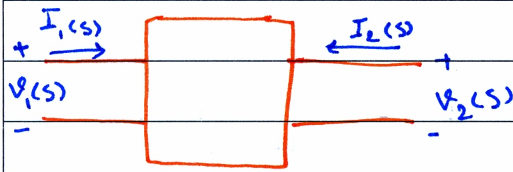
3, شرایط اولیه‌ها صفر باشد

4, تنها در حوزه لاپلاس کار می‌شود



– مدل Z . (امپدانس)

در این مدل فرض بر این است که با داشتن I_1 و I_2 ، V_1 و V_2 را بدست آوریم .



$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{22}I_2 + Z_{21}I_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

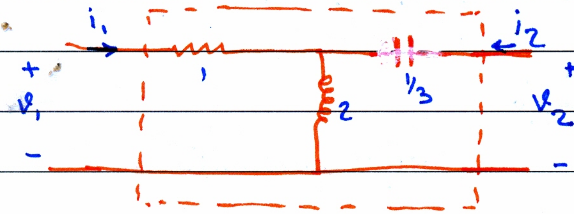
$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} \qquad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} \qquad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0} \qquad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0}$$

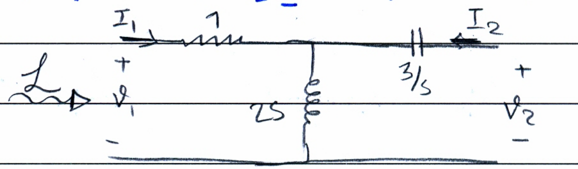
برای بدست آوردن پارامترهای Z یک دوقطبی می‌توان یکی از روابط زیر را استفاده کرد :

1) نوشتن KVL و KCL و مرتب نمودن روابط براساس روابط اصلی دوقطبی

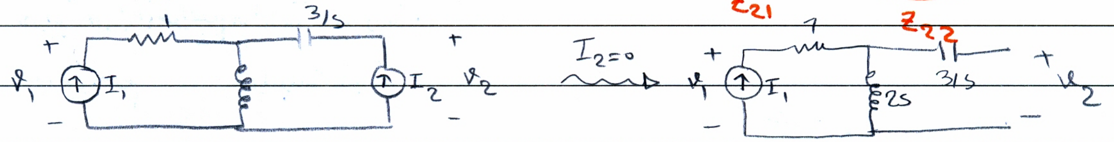
2) صفر نمودن I_1 و I_2 و بدست آوردن پارامترهای Z به صورت مجزا (قرار دادن دو منبع جریان با مقادیر معادل I_1 و I_2)

Example: برای مدار زیر پارامترهای Z را بدست آورید.



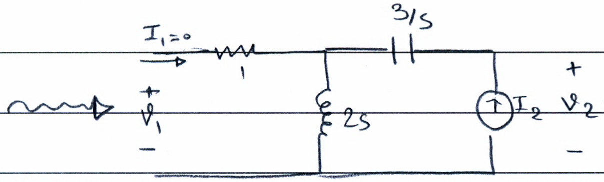


$$\begin{cases} -V_1 + I_1 + 2s(I_1 + I_2) = 0 \\ V_2 + \frac{3}{s} I_2 + 2s(I_1 + I_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \overbrace{(1+2s)}^{Z_{11}} I_1 + \overbrace{2s}^{Z_{12}} I_2 \\ V_2 = \underbrace{2s}_{Z_{21}} I_1 + \underbrace{(\frac{3}{s} + 2)}_{Z_{22}} I_2 \end{cases}$$



$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} = 1 + 2s \qquad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0} = 2s$$

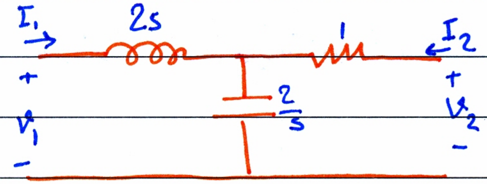
$$-V_1 + I_1 + 2sI_1 = 0 \qquad -V_2 + \frac{3}{s} I_2 + 2sI_1 = 0$$



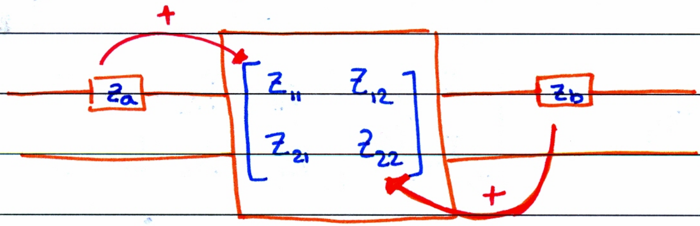
$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} = 2s \qquad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0} = \frac{3}{s} + 2s$$

* شرط تقابل یا هم پاسخی در دو قطبی های با مدل Z این است که $Z_{12} = Z_{21}$. اگر در مدار منبع وابسته وجود نداشته باشد حتماً این اتفاق می افتد و اگر وجود داشته باشد تنها می توان شرایطی را بدست آورد که این شرط برقرار باشد.

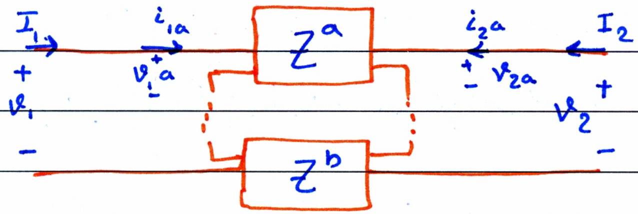
Example: پارامترهای Z مدار زیر را بدست آورید.



$$\begin{cases} v_1 = 2S I_1 + \frac{2}{s}(I_1 + I_2) \\ v_2 = I_2 + \frac{2}{s}(I_1 + I_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (2S + \frac{2}{s}) I_1 + \frac{2}{s} I_2 \\ v_2 = (1 + \frac{2}{s}) I_2 + \frac{2}{3} I_1 \end{cases}$$

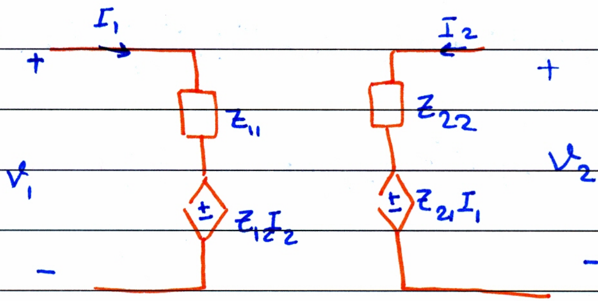


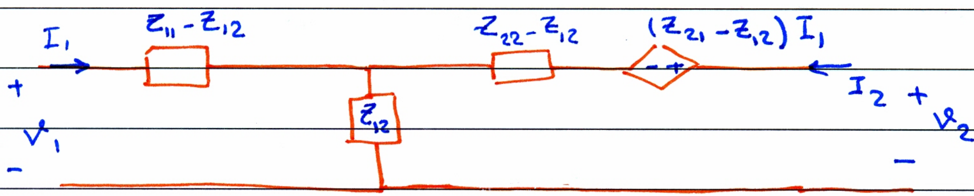
به هم بستن دوقطبی با مدل Z ،



$$Z_{کل}' = Z^a + Z^b$$

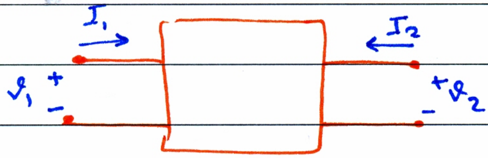
مدل معادل دوقطبی با مدل Z ،





مدل Y (ادمیتانس)

در این مدل فرض بر این است با داشتن V_{s_1} و V_{s_2} ، I_1 و I_2 را بدست آوریم.



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

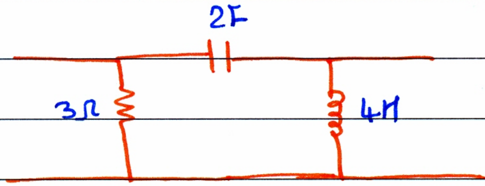
$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0} \qquad Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0} \qquad Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0} \qquad Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}$$

برای بدست آوردن پارامترهای این دوقطبی می توان هرکدام از دو روش زیر را دنبال نمود

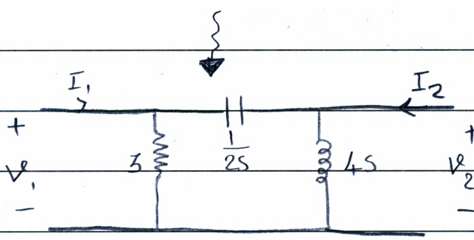
1. نوشتن KVL و KCL و مرتب نمودن روابط براساس رابطه اصلی دوقطبی

2. قرار دادن دو منبع ولتاژ با مقادیر V_1 و V_2 در سرهای اول و دوم و صفر نمودن تک تک آنها

Example: پارامترهای Y مدار زیر را بدست آورید.

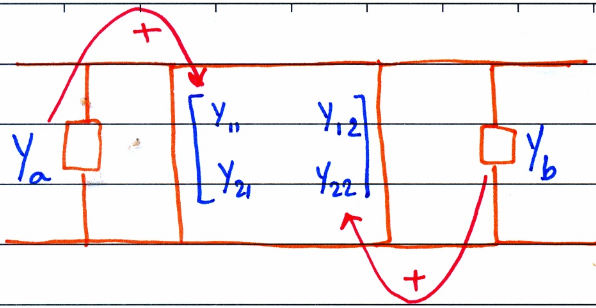


$$\begin{bmatrix} 2s+\frac{1}{3} & -2s \\ -2s & \frac{1}{4s}+2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

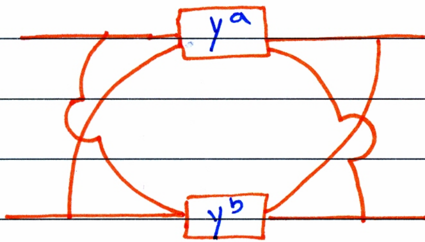


$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{3} + \dfrac{V_1 - V_2}{1/2s} = I_1 \\[2mm] \dfrac{V_2}{4s} + \dfrac{V_2 - V_1}{\frac{1}{2s}} = I_2 \end{cases}$$

شرط تقابل یا هم پاسخی در این مدل این است که $Y_{12} = Y_{21}$ باشد.



به هم بستن دوقطبی ها:



$$Y_{کل} = Y^a + Y^b$$

معادل مدل Y: