emamipour@bam.ac.ir

۲.۴ تفاوت‌های معادلات خطی و معادلات غیرخطی

قضیه وجود و یکتایی معادلات خطی - قضیه ۱

مسأله مقدار اولیه
$$\begin{cases} y' + P(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
مفروض است. اگر هر دو تابع P و g روی بازه (α, β) که $t_0 \in (\alpha, \beta)$ پیوسته باشند در این صورت IVP، جواب $y = \phi(t)$ دارد و این جواب در بازه (α, β) یکتا است و مشتق‌پذیر و بنابراین نمودارهای جواب‌های $y' + P(t)y = g(t)$ به ازای t_0های متفاوت که $t_0 \in (\alpha, \beta)$ هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

مثال:

بازه‌ای را معین کنید که
$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
در آن جواب یکتا داشته باشد.

حل: چون آن را به صورت $y' + \frac{2}{t}y = 4t$ می‌توان نوشت پس $P(t) = \frac{2}{t}$ و $g(t) = 4t$. از طرفی P و g هر دو همزمان برای $t \in (0, \infty)$ یا $t \in (-\infty, 0)$ پیوسته‌اند و چون $t_0 = 1 \in (0, \infty)$، پس بزرگترین بازه‌ای که در آن مسأله مقدار اولیه جواب یکتا دارد به صورت $I = (0, \infty)$ است.

توجه: اگر شرط اولیه را به صورت $y(-1) = 2$ تغییر دهیم چون $t_0 = -1 \in (-\infty, 0)$، پس بزرگترین بازه‌ای که IVP جدید در آن جواب یکتا دارد به صورت $(-\infty, 0)$ است.

نکته: در معادله خطی $y' + P(t)y = g(t)$ نقاط احتمالی تکین (تاتکینگی) جواب بدون حل معادله از روی ناپیوستگی‌های P و g مشخص می‌شوند. مثلاً در این مثال $t = 0$ تکین جواب است.

مثال: آیا
$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
جواب یکتا دارد و چرا؟

می‌بینیم که $P(t) = \frac{2}{t}$ در $t_0 = 0$ ناپیوسته است پس نمی‌توان از قضیه وجود و یکتایی معادلات خطی که در بالا آمده استفاده کرد زیرا فرضیات قضیه برقرار نیست. اما به طور مستقیم با حدس زدن می‌توان دید که $y = t^2$ جواب معادله $ty' + 2y = 4t^2$ است و $y(0) = 0$ و این تنها جواب با این ویژگی $y(0) = 0$ است پس با آنکه فرضیات قضیه (۱) برقرار نیست اما حکم آن برقرار است.

از طرف دیگر جواب عمومی معادله $ty' + 2y = 4t^2$ به صورت زیر است:
$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = t^2, \quad y(t) = \frac{1}{t^2}\left(\int t^2(4t)dt + C\right) = \frac{1}{t^2}(t^4 + C)$$
$$\Rightarrow y(t) = t^2 + \frac{C}{t^2}, \quad \text{if } C = 0 \Rightarrow y(t) = t^2 \text{ و } y(0) = 0$$
(که از حدس به دست آمده بود)

دیده می‌شود که سایر جواب‌های غیر از $y = t^2$ یعنی با فرض $C \neq 0$ همگی محور yها را به عنوان مجانب دارند یعنی سایر جواب در $t = 0$ ناپیوسته‌اند که از ناپیوستگی $P(t) = \frac{2}{t}$ ناشی می‌شود.

پس این مسأله مقدار اولیه ($y(0) = 0$) جواب یکتا دارد که اتفاقاً همه جا پیوسته است اما برای $t_0 \neq 0$ جواب‌ها در $(0, \infty)$ یا $(-\infty, 0)$ تعریف می‌شوند.

emamipour@bam.ac.ir

قضیه وجود و یکتایی جواب معادلات مرتبه اول (و به ویژه معادلات غیرخطی مرتبه اول) - قضیه ۲

مستطیل $(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ شامل نقطه (t_0,y_0) است و مسأله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

مفروضند. اگر اولاً f و ثانیاً $\frac{\partial f}{\partial y}$ هر دو در این مستطیل پیوسته باشند آنگاه در بازه‌ای مانند $(t_0-h, t_0+h)\subseteq(\alpha,\beta)$ جواب یکتایی $y=\phi(t)$ را دارد و وجود دارد جواب یکتا را قطعی می‌کند.

نکته: اگر فقط f بر مستطیل پیوسته باشد، جواب $y=\phi(t)$ وجود دارد ولی ممکن است یکتا نباشد.

مثال: آیا
$$\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$
جواب یکتا دارد؟ چرا؟

حل: چون معادله غیرخطی است از قضیه ۱ نمی‌توان استفاده کرد و سراغ قضیه ۲ می‌رویم.

از طرفی
$$f(x,y) = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)^2}$$

در هر مستطیلی که شامل خط $y=1$ نباشد پیوسته است، پس یک مستطیل کوچک حول نقطه $(0,-1)$ می‌توان در نظر گرفت که f و f_y هر دو در آن پیوسته‌اند پس IVP جواب یکتا دارد که پیدا از جداسازی متغیر به صورت $y = 1 - \sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$ است و در شرط $y(0)=-1$ صدق می‌کند.

نکته اضافه در این مثال: این مستطیل برای هر x وجود ندارد و بلکه باید $x>-2$. (دلیل آن قبلاً گفته شده)

مثال: آیا
$$\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
جواب یکتا دارد؟ چرا؟

حل: در اینجا هم از قضیه ۲ نمی‌توان استفاده کرد زیرا f و f_y در $y=1$ به ازای xها ناپیوسته‌اند. اما به طور مستقیم می‌توان دید که معادله جداشدنی است و جواب‌ها به صورت $y = 1+\sqrt{x^3+2x^2+2x}$ و $y = 1-\sqrt{x^3+2x^2+2x}$ که هر دو در $y(0)=1$ صدق می‌کنند.

پس IVP در $y(0)=1$ جواب دارد و بیش از یک جواب دارد (دو جواب) (البته $x>0$)

emamipour@bam.ac.ir

مثال: آیا $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0)=0 \end{cases}$ و $t \geq 0$ ، جواب یکتا دارد؟ چرا؟

حل: در اینجا $f(t,y)=\sqrt[3]{y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ که به وضوح $\frac{\partial f}{\partial y}$ در $y=0$ ناپیوسته است پس در اینجا هم از قضیه ۲ نمی‌توان استفاده کرد. اما اگر به نکته بعد از قضیه ۲ توجه کنیم چون فقط f همه جا پیوسته است پس می‌توان وجود جواب برای IVP را نتیجه گرفت. لکن ممکن است این جواب یکتا نباشد.

تحلیل بیشتر حل:

بررسی می‌کنیم که تعداد جواب‌های گذرنده از $(0,0)$ چند تا است.

$$y'=\sqrt[3]{y} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\sqrt[3]{y} \Rightarrow dy=\sqrt[3]{y}\,dt \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt[3]{y}}=dt$$

که یک معادله جداشدنی است. پس

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}=t+c \Leftarrow \int\frac{dy}{\sqrt[3]{y}}=\int dt$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y^2}=\frac{2}{3}(t+c) \Rightarrow y^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}(t+c) \Rightarrow y^2=\left[\frac{2}{3}(t+c)\right]^3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t+c)\right)^3}$$

$y(0)=0 \Leftrightarrow c=0$ یعنی $y(t)=\pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^3}$ جواب IVP است که وجود دارد $t\geq 0$.

جواب قبلاً با توجه به نکته بعد از قضیه ۲ قطعی شده بود ولی می‌بینیم که بیش از یک جواب برای IVP دارد.

از طرفی برای هر $\alpha>0$

$$y=\begin{cases}0 & 0\leq t<\alpha\\ -\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t-\alpha)\right)^3} & t\geq\alpha\end{cases} \quad , \quad y=\begin{cases}0 & 0\leq t<\alpha\\ +\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t-\alpha)\right)^3} & t\geq\alpha\end{cases}$$

نیز جواب‌های گذرنده از $(0,0)$ هستند. پس این مسئله مقدار اولیه بی‌نهایت جواب گذرنده از $(0,0)$ دارد. (البته توجه شود که $y=0$ به ازای هر $t\geq 0$ جواب IVP نیز می‌باشد)

توجه کنید که برای $\begin{cases} y'=\sqrt[3]{y} \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$ اگر $y_0\neq 0$ آنگاه مسئله IVP براساس قضیه ۲ دقیقاً یک جواب دارد چون شرایط قضیه ۲ برقرار است. مثلاً IVP زیر جواب یکتا دارد.

$$\begin{cases} y'=\sqrt[3]{y} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

که به صورت $y^2(t)=\left(\frac{2}{3}(t+c)\right)^3$ ، $y(0)=1$

$$\left(\frac{2}{3}c\right)^3=1 \Rightarrow c=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y(t)=+\sqrt{\left(\frac{2}{3}\left(t+\frac{3}{2}\right)\right)^3}}$$

emamipour@bam.ac.ir

مثال: بازه‌ای را تعیین کنید که $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ در آن جواب داشته باشد.

حل: طبق قضیه ۲ چون $f(t,y)=y^2$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$ همه جا در صفحه پیوسته هستند پس IVP جواب یکتا دارد.

حال معادله $y'=y^2$ را حل می‌کنیم $\frac{dy}{dt}=y^2 \Leftarrow$ اگر $y\neq 0$ فرض شود

$$\frac{dy}{y^2}=dt \underset{\text{جداشدنی}}{\Rightarrow} -\frac{1}{y}=t+c \Rightarrow y=\frac{-1}{t+c}$$

اگر $y(0)=+1 \Rightarrow c=-1 \Rightarrow y=\frac{-1}{1-t}$ جواب یکتای IVP است که

اگر $t\to 1$ این جواب بی‌کران می‌شود یعنی جواب فقط در بازه‌ی $(-\infty, 1)$ وجود دارد
since $t_0=0 \in (-\infty, 1)$
و نقطه تکین جواب است

نکته این مثال در این است که از ظاهر IVP اصلاً مشخص نبود که نشان دهد در $t=1$ مشکلی برای جواب وجود دارد.

از سوی دیگر در همین مثال قبل اگر $y(0)=y_0 \Rightarrow c=-\frac{1}{y_0}$ و $y=\frac{y_0}{1-y_0 t} \Leftrightarrow$

و $t=\frac{1}{y_0}$ نقطه تکین جواب است (مجانب قائم دارد)

که اگر $y_0>0 \Rightarrow$ بازه وجود جواب $(-\infty, \frac{1}{y_0})$ است و اگر $y_0<0$ آنگاه بازه‌ی جواب $(\frac{1}{y_0}, +\infty)$ است

نتیجه: در معادلات غیرخطی نقاط تکین جواب، به شرط اولیه بستگی دارد (یعنی با تغییر y_0، تکینگی جواب نیز احتمالاً تغییر می‌کند)

همچنین توجه کنید که $y=0$ نیز جواب معادله $y'=y^2$ است که از فرمول $y=\frac{-1}{t+c}$ به دست نمی‌آید.

پس در معادلات غیرخطی ممکن است برخی جواب‌ها از جوابی که شامل یک ثابت دلخواه است به دست نیاید.

اما در معادلات خطی همه جواب‌ها از جوابی که شامل یک ثابت دلخواه است به دست می‌آیند. به همین دلیل به این جواب در معادلات خطی، جواب عمومی می‌گوییم.

از طرفی در معادلات خطی همیشه جواب به صورت تابع صریح $y=\varphi(t)=\frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)g(t)\,dt+c\right)$ است ولی در معادلات غیرخطی معمولاً جواب‌ها به صورت رابطه ضمنی $\psi(t,y)=0$ هستند که y تابعی از t است یعنی $y=\varphi(t)$. در این حالت به جواب ضمنی $\psi(t,y)=0$ انتگرال اول معادله دیفرانسیل $y'=f(t,y)$ نیز می‌گویند.
$y=y(t)$ یا

تمرین: مسئله‌های صفحه ۸۰ کتاب درسی فقط شماره‌های زیر حل شوند:
از یک الی ۱۶ و ۲۱ و ۲۲ و ۲۷ و ۲۸ و ۲۹ و ۳۰ و ۳۱ و ۳۲ و ۳۳.