۳-۵-۵ قاعده هوپیتال

قبلاً اشاره کردیم که برای رفع ابهام از حدودی که به صورت $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ هستند، استفاده از قاعده هوپیتال نیز می‌تواند مفید باشد.

قضیه ۱۶. (قاعده هوپیتال)

اگر حد f و g در $x_۰$ برابر L باشد، (که $L = \pm\infty$ یا $L = ۰$) و تابع f و g در همسایگی محذوف $x_۰$ مشتق‌پذیر باشند و $\lim\limits_{x\to x_۰} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود یا بینهایت باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_۰} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تذکر۴۳. در این قضیه $x_۰$ می‌تواند $\pm\infty$ باشد و ضمناً برای محاسبه حد چپ و راست هم این قضیه، قابل استفاده است.

تذکر۴۴. اگر با استفاده از قاعده هوپیتال به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد کردیم، با شرط برقراری شرایط ذکر شده از این قضیه می‌توان چند بار استفاده کرد و در محاسبه هر یک از مراحل می‌توان به طور مجزا از هم‌ارزی یا هوپیتال استفاده نمود.

مثال ۲۸. اگر f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{f(a+x)+f(a-x)-۲f(a)}{x^۲}$ را بیابید.

چون f پیوسته است پس $f(a+x), f(a-x) \to f(a)$ و لذا حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ است. با استفاده از قاعده هوپیتال حد برابر $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{f'(a+x)-f'(a-x)}{۲x}$ است. چون مشتق f نیز پیوسته است، پس $f'(a+x), f'(a-x) \to f'(a)$ ولذا حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ است. با توجه به قاعد هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f''(a+x)+f''(a-x)}{۲} = \frac{f''(a)+f''(a)}{۲} = f''(a)$$

مثال ۲۹. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^x - x}{۱-x+\ln x}$ را به دست آورید.

روش اول. از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم. باید مشتق $y = x^x$ را با مشتق لگاریتمی محاسبه کنیم.

$$\text{حد} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to ۱} \frac{x^x(۱+\ln x)-۱}{-۱+\frac{۱}{x}} = \frac{۰}{۰}$$

پس دوباره از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم. برای محاسبه مشتق صورت کسر از قاعده مشتق لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

$$y = x^x(۱+\ln x) \implies \ln y = x\ln x + \ln(۱+\ln x)$$

$$\implies \frac{y'}{y} = \ln x + ۱ + \frac{\frac{۱}{x}}{۱+\ln x} \implies \text{حد} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^x(۱+\ln x)^۲ + \frac{x^x}{x}}{-\frac{۱}{x^۲}} = -۲$$

روش دوم. همین مسأله را بدون قاعده هوپیتال هم می‌توان حل کرد.

$$x = ۱+t \quad : \quad \text{حد} = \lim_{t\to ۰} \frac{(۱+t)^{۱+t}-۱-t}{-t+\ln(۱+t)} = \lim_{t\to ۰} \frac{e^{(۱+t)\ln(۱+t)}-۱-t}{-t+\ln(۱+t)}$$

با استفاده از هم‌ارزی $\ln(1+t) \sim t - \frac{t^2}{2}$ در مخرج کسر و $e^y - 1 \sim y + \frac{y^2}{2}$ در صورت کسر:

$$\text{حد} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)\ln(1+t) + \frac{1}{2}(1+t)^2 \ln^2(1+t) - t}{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\xlongequal{\text{هم‌ارزی}} \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)(t - \frac{t^2}{2}) + \frac{1}{2}(1+t)^2 t^2 - t}{-\frac{t^2}{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{-\frac{t^2}{2}} = -2$$

مثال ۳۰. مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x - 3\sin x + 1}{5x + 2\cos x + 1}$

حد به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ است. با استفاده از قاعده هوپیتال به $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2 - 3\cos x}{5 - 2\sin x}$ می‌رسیم که وجود ندارد. پس قاعده هوپیتال جواب نمی‌دهد. اما با استفاده از قوانین رشد چون $\sin x$ و $\cos x$ کراندار هستند، در مقابل بینهایت صرفنظر می‌شوند.

$$\text{حد} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

تست ۶۷ اگر f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a}$ برابر است با: (ریاضی ۸۲)

۱) $2af'(a) - a^2 f(a)$ ۲) $a^2 f(a) - 2af'(a)$ ۳) $2af'(a) - 2af(a)$ ۴) $2af(a) - a^2 f'(a)$

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است.

$$\text{حد} \xlongequal{\text{Hop}} \lim_{x\to a} \frac{2xf(a) - a^2 f'(x)}{1} = 2af(a) - a^2 f'(a)$$

تست ۶۸ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{x - 1 + \ln x}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) 0 ۲) 1 ۳) e ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است، با استفاده از قاعده هوپیتال (و مشتق لگاریتمی در صورت):

$$\text{حد} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1 + \ln x)}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

تست ۶۹ تابع $f(x)$ دارای این ویژگی است که حد $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = 3$ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)}$ برابر است با:

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 3

حل: گزینه ۱ درست است. حد $\frac{f(x)}{xf'(x)}$ با توجه به فرضیات سؤال برابر $\frac{\infty}{\infty}$ است. با استفاده از قاعده هوپیتال:

$$3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} \xlongequal{Hop} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f'(x) + xf''(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{xf''(x)}{f'(x)}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{xf''(x)}{f'(x)}\right) = \frac{1}{3} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{xf''(x)} = -\frac{3}{2}$$

$\boxed{\text{تست ۷۰}}$ مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۵)

۱) $\frac{1}{e}$ ۲) 0 ۳) موجود نیست ۴) $e^{\frac{2}{\pi}}$

حل: گزینه ۱ درست است. حالت 1^∞ است، پس

$$(\tan x)^{\tan 2x} \sim e^{\tan 2x(\tan x - 1)}$$

برای محاسبه $I = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x(\tan x - 1)$ از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$I = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cot 2x} \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{-2(1+\cot^2 2x)} = -1 \Longrightarrow \text{جواب} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

۳-۵-۶ اکسترمم مطلق و بهینه سازی

تعریف. x_0 را نقطه **ماکزیمم مطلق** برای تابع f بر بازه I می‌نامند، هرگاه $\forall x \in I \quad : \quad f(x) \leq f(x_0)$ و مقدار ماکزیمم مطلق $f(x_0)$ خواهد بود. با برعکس کردن جهت نابرابری، تعریف **می‌نیمم مطلق** به دست می‌آید.

قضیه ۱۷. اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، بر این بازه ماکزیمم و می‌نیمم مطلق خود را می‌گیرد و لذا تابع پیوسته بر $[a,b]$، کراندار است.

روش محاسبه اکسترمم مطلق:

۱) اگر تابع f بر بازه بسته و کراندار $[a,b]$ پیوسته باشد، کافی است مقادیر f را در نقاط بحرانی داخل بازه و نقاط ابتدا و انتهای بازه با یکدیگر مقایسه کنیم. بیشترین مقدار برابر ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار برابر می‌نیمم مطلق است.

۲) اگر تابع f بر بازه دلخواه I (نه لزوماً بازه بسته و کراندار) پیوسته باشد، کافی است مقادیر f را در نقاط بحرانی داخل بازه و مقدار حدی آنرا در نقاط ابتدا و انتهای بازه با یکدیگر مقایسه کنیم. بیشترین مقدار در صورت اتخاذ شدن برابر ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار در صورت اتخاذ شدن برابر می‌نیمم مطلق است.

تذکر ۴۵. توجه کنید که وقتی بازه بسته یا کراندار نیست، ممکن است تابع فاقد اکسترمم مطلق باشد. (مثال ۳۲ در صفحه بعد را ملاحظه کنید.)

نکته ۳۷. **اگر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع پیوسته f بر دامنه آن تابع برابر M و m به دست آید، طبق خاصیت مقدار میانی، f تمام مقادیر در بازه $[m,M]$ را می‌گیرد و لذا $R_f = [m,M]$.**

مثال ۳۱. برد تابع $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ را به دست آورید.

دامنه f بازه $[-2,2]$ و f تابعی پیوسته است، پس باید اکسترمم‌های مطلق f را بیابیم.

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{و} \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{4-x^2} \Longrightarrow x^2 = 4 - x^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \in (-2,2)$$

توجه کنید که $-\sqrt{2}$ در معادله آخر صدق می‌کند، اما پاسخ معادله $f'(x) = 0$ نمی‌باشد. پس این نقطه بحرانی

نیست. اما محاسبه آن اشکالی به وجود نمی‌آورد.

$$f(۲) = ۲\ ,\ f(-۲) = -۲\ ,\ f\big(\sqrt{۲}\big) = ۲\sqrt{۲}\ ,\ f\big(-\sqrt{۲}\big) = ۰$$

$$\Longrightarrow \max(f) = ۲\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad \min(f) = -۲ \Longrightarrow R_f = [-۲, ۲\sqrt{۲}]$$

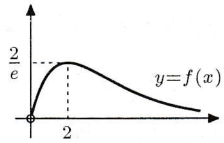
مثال ۳۲. اکسترمم‌های مطلق $f(x) = xe^{-\frac{x}{۲}}$ را بر بازه $(۰, +\infty)$ به دست آورید.

تابع f بر بازه داده شده پیوسته است اما بازه بسته و کراندار نیست پس f را به صورت حدی در مرزها بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{۲}}} = ۰$$

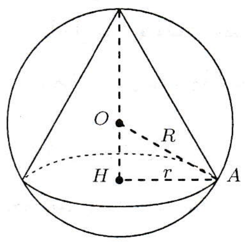
$$f'(x) = e^{-\frac{x}{۲}}(۱ - \frac{x}{۲}) \quad \text{و} \quad f'(x) = ۰ \implies x = ۲ \implies f(۲) = \frac{۲}{e}$$

با مقایسه با مقادیر f در نقاط بحرانی و مرزها کمترین مقدار برابر صفر است. اما عدد صفر اتخاذ نمی‌شود یعنی به ازای هیچ مقدار x مقدار تابع برابر صفر نمی‌باشد و چون تابع تا هر مقدار دلخواهی به صفر نزدیک می‌شود پس می‌نیمم مطلق وجود ندارد. بیشترین مقدار برابر $\frac{۲}{e}$ است که چون برابر $f(۲)$ است، اتخاذ می‌شود و لذا $\max(f) = \frac{۲}{e}$. پس برد f به صورت $(۰, \frac{۲}{e}]$ به دست می‌آید. نمودار f مطابق شکل است.



یکی از کاربردهای محاسبه اکسترمم مطلق، **بهینه سازی** است. به این مفهوم که هدف ما یافتن اکسترمم یک کمیت است. روش کلی برای حل مسائل بهینه سازی این است که تابعی که باید اکسترمم شود را برحسب یک متغیر بنویسیم و پس از یافتن دامنه متغیر، با روش ذکر شده اکسترمم مطلق تابع را محاسبه کنیم.

مثال ۳۳. کره به شعاع R مفروض است. مخروطی (مستدیر قائم) با حداکثر حجم در آن محاط کرده‌ایم، ارتفاع، شعاع قاعده و حجم مخروط چقدر است؟



تابعی که باید بهینه شود حجم مخروط یعنی $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ است که باید آنرا بر حسب یک متغیر و مثلاً ارتفاع بنویسیم. پس باید رابطه‌ای بین r و h داشته باشیم، $OH = h - R$ و در مثلث OAH داریم:

$$R^۲ = r^۲ + (h-R)^۲ \Longrightarrow r^۲ = R^۲ - (h-R)^۲ = h(۲R - h)$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که $۰ \le h \le ۲R$ ($h = ۰$ و $۲R$ از لحاظ هندسی معنی ندارد ولی از نظر جبری می‌نیمم حجم را محاسبه می‌کند.)

$$V(h) = \frac{\pi}{۳}h^۲(۲R - h) = \frac{\pi}{۳}(۲Rh^۲ - h^۳) \quad , \quad ۰ \le h \le ۲R$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{۳}(۴Rh - ۳h^۲) \quad \text{و} \quad V'(h) = ۰ \implies h = ۰ \text{ و } \frac{۴R}{۳}$$

با مقایسه V در نقاط مرزی و بحرانی در $h = \frac{۴}{۳}R$ ماکزیمم مقدار حجم به دست می‌آید. با جایگذاری

این مقدار در رابطه $V(h) = \frac{\pi}{۳}h^{۲}(۲R-h)$ ماکزیمم حجم برابر $\frac{۳۲\pi}{۸۱}R^{۳}$ و مقدار شعاع قاعده مخروط $r = \sqrt{h(۲R-h)} = \frac{۲\sqrt{۲}R}{۳}$ است.

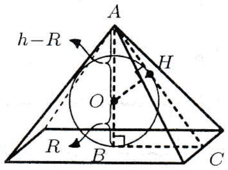
مثال ۳۴

کره‌ای به شعاع R مفروض است. هرمی با قاعده مربع و وجوه جانبی مثلثی شکل را بر این کره محیط می‌کنیم به طوریکه دارای کمترین حجم باشد. ارتفاع هرم و حداقل حجم را محاسبه نمایید. (توجه کنید که قاعده و وجوه جانبی هرم بر کره مماس هستند.)

اگر طول ضلع قاعده و ارتفاع هرم را به ترتیب a و h فرض کنیم، حجم هرم برابر است با:

$$\text{حجم} = \frac{۱}{۳} \times (\text{مساحت قاعده}) \times (\text{ارتفاع}) \implies V = \frac{۱}{۳}a^{۲}h$$

می‌توانیم هرمی که اکسترمم حجم را محاسبه می‌کند، قائم در نظر بگیریم. (زیرا هر هرمی که اکسترمم را بدهد، قاعده آنرا ثابت گرفته و رأس آن‌را روی صفحه‌ای موازی قاعده حرکت می‌دهیم تا هرمی قائم به دست آید. چون در این فرایند ارتفاع و قاعده عوض نمی‌شود، حجم هرم قائم با هرم مورد نظر برابر است.) حال باید رابطه‌ای بین a و h به دست آوریم. از مرکز کره به یکی از وجوه خطی عمود کرده و پای عمود را H می‌نامیم. چون دو مثلث ABC و AOH قائم الزاویه و در یک زاویه مشترک هستند، متشابه بوده و لذا نسبت تشابه را می‌نویسیم.



$$\frac{OH}{BC} = \frac{AH}{AB} \implies \frac{R}{\frac{۱}{۲}a} = \frac{\sqrt{(h-R)^{۲}-R^{۲}}}{h} \implies a^{۲} = \frac{۴R^{۲}h^{۲}}{h^{۲}-۲Rh} \implies V = \frac{۴R^{۲}h^{۲}}{۳(h-۲R)}$$

برای یافتن می‌نیمم مطلق تابع بالا داریم:

$$V'(h) = \frac{۴R^{۲}(h^{۲}-۴Rh)}{۳(h-۲R)^{۲}} = ۰ \implies h = ۴R$$

و به سادگی می‌توان بررسی کرد که این مقدار، می‌نیمم حجم را محاسبه می‌کند و حداقل حجم برابر $V(۴R) = \frac{۳۲}{۳}R^{۳}$ است.

گاهی می‌توانیم مقادیر اکسترمم مطلق را بدون استفاده از مشتق نیز به‌دست آوریم. نکات زیر در این مورد می‌تواند مفید باشد.

نکته ۳۸. **اگر مجموع متغیرهای مثبت $x_{۱},\dots,x_n$ ثابت باشد، حاصل ضرب $x_{۱}^{\alpha_{۱}}x_{۲}^{\alpha_{۲}}\cdots x_n^{\alpha_n}$ (که $\alpha_{۱},\cdots,\alpha_n > ۰$) وقتی ماکزیمم است که:**

$$\frac{x_{۱}}{\alpha_{۱}} = \frac{x_{۲}}{\alpha_{۲}} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha_n}$$

نکته ۳۹. **اگر $x_{۱},\dots,x_n$ متغیرهای مثبت و $\alpha_{۱},\cdots,\alpha_n$ اعداد ثابت مثبتی باشند که حاصل ضرب $x_{۱}^{\alpha_{۱}}x_{۲}^{\alpha_{۲}}\cdots x_n^{\alpha_n}$ مقداری ثابت باشد آنگاه $x_{۱}+\cdots+x_n$ وقتی می‌نیمم است که:**

$$\frac{x_{۱}}{\alpha_{۱}} = \frac{x_{۲}}{\alpha_{۲}} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha_n}$$

نکته ۴۰. اگر مجموع مربعات n متغیر $x_1, \cdots, x_n$ عددی ثابت باشد، ماکزیمم و می‌نیمم عبارت $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ وقتی حاصل می‌شود که $\frac{x_1}{a_1} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$.

نکته ۴۱. اگر متغیرهای $x_1, \cdots, x_n$ و اعداد ثابت $a_1, \cdots, a_n$ طوری باشند که $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ عددی ثابت باشد، می‌نیمم $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ وقتی حاصل می‌شود که $\frac{x_1}{a_1} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$.

نکته ۴۲. اگر حاصل جمع متغیرهای مثبت x و y ثابت باشد، $x^n + y^n$ وقتی می‌نیمم است که $x = y$.

نکته ۴۳. اگر y و x متغیرهای مثبتی باشند و $x^n + y^n$ ثابت باشد، $x + y$ وقتی ماکزیمم است که $x = y$.

مثال ۳۵

برد تابع $f(x) = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x$ را برای $n \in \mathbb{N}$ محاسبه کنید.

چون مجموع متغیرهای مثبت $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ مقداری ثابت است پس از نکته ۴۲، می‌نیمم $f(x)$ وقتی به دست می‌آید که $\sin^2 x = \cos^2 x = \frac{1}{2}$ پس $f(x) \geq (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^{n-1}}$. واضح است که $f(x) \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و چون f تابعی است پیوسته و $\frac{1}{2^{n-1}} \leq f(x) \leq 1$ پس $R_f = [\frac{1}{2^{n-1}}, 1]$.

تذکر ۴۶. نقطه اکسترمم در مثال ۳۳ را با نکته ۳۸ نیز می‌توان حل کرد.

هدف یافتن اکسترمم $h^2(2R - h)$ است و چون مجموع $x_2 = 2R - h$ و $x_1 = h$ ثابت است، تابع مورد نظر، یعنی $x_1^2 x_2$ وقتی ماکزیمم است که:

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1} \Longrightarrow \frac{h}{2} = \frac{2R - h}{1} \Longrightarrow h = \frac{4R}{3}$$

تست ۷۱ ماکزیمم تابع f با ضابطه $f(x) = (\frac{1}{x})^x$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۱)

۱) e^e ۲) $(\frac{1}{e})^e$ ۳) $e^{\frac{1}{e}}$ ۴) $(\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به تعریف باید $\frac{1}{x} > 0$ و لذا دامنه f فاصله $(0, +\infty)$ است.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \overset{\infty^0}{=} \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{-x \ln x} = e^0 = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^{+\infty} = 0$$

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^x \Longrightarrow \ln y = x \ln \frac{1}{x} = -x \ln x \Longrightarrow \frac{y'}{y} = -\ln x - 1$$

$$y' = 0 \Longrightarrow \ln x = -1 \Longrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \Longrightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}} > 1 \Longrightarrow \max(f) = e^{\frac{1}{e}}$$

تست ۷۲ اگر $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{x}{2} & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ را روی $[0, \frac{\pi}{2}]$ در نظر بگیریم. کدام عبارت صحیح است؟

(آمار ۸۲)

۱) f دارای می‌نیمم صفر است ولی ماکسیمم ندارد. ۲) f دارای می‌نیمم و ماکسیمم $\frac{\pi}{4}$ است.

۳) f دارای می‌نیمم صفرو ماکسیمم ۱ است . ۴) f نه می‌نیمم دارد نه ماکسیمم.

حل: گزینه ۱ درست است. چون $\sin x \geq 0$ و $\frac{x}{2} \geq 0$ پس می‌نیمم مطلق f می‌تواند برابر صفر باشد و چون $f(0) = 0$ پس $\min(f) = 0$. توجه کنید که $0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4}$ و $0 \leq \sin x \leq 1$ پس ماکزیمم باید عدد یک باشد. چون $f(\frac{\pi}{2})$ از ضابطه دوم به دست می‌آید پس $\sin x$ نمی‌تواند برابر یک شود اما چون برای اعداد گویای نزدیک $\frac{\pi}{2}$ مقدار $f(x) = \sin x$ نزدیک یک است پس f فاقد ماکسیمم مطلق است.

تست ۷۳ تابع $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ بازه بسته $[1, +\infty)$ را به کدام بازه می‌نگارد؟ (آمار ۷۷)

۱) $[0, 1]$ ۲) $[0, \frac{1}{2}]$ ۳) $(0, \frac{1}{2})$ ۴) $(0, 1)$

حل: گزینه ۲ درست است. باید برد تابع $f(x)$ با دامنه $[1, +\infty)$ به دست آوریم.

روش اول. از معادله $y = \frac{x}{1+x^2}$ باید x را بر حسب y محاسبه کنیم.

$$y = \frac{x}{1+x^2} \implies yx^2 + y = x \implies yx^2 - x + y = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

چون باید $x \geq 1$ پس علامت منفی قابل قبول نیست و لذا $x = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$. این عبارت برای $1 - 4y^2 \geq 0$ یعنی $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ تعریف می‌شود. از طرفی چون $x \geq 1$ پس $y = \frac{x}{1+x^2} > 0$ و لذا باید $0 < y \leq \frac{1}{2}$. حال باید بررسی کرد که آیا $x \geq 1$ بر این نابرابری تأثیری دارد؟

$$x = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y} \geq 1 \implies 2y \leq 1 + \sqrt{1-4y^2} \implies 2y - 1 \leq \sqrt{1-4y^2}$$

اما چون $y \leq \frac{1}{2}$ پس $2y - 1 \leq 0$ یعنی سمت چپ رابطه بالا منفی و سمت راست مثبت بوده و لذا رابطه بالا همواره برقرار است. پس برد f مجموعه $(0, \frac{1}{2}]$ است.

روش دوم. چون f تابعی پیوسته است، اکسترمم مطلق (کرانهای) آنرا بر مجموعه $[1, +\infty)$ به دست می آوریم.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \implies x = 1$$

با مقایسه $f(1) = \frac{1}{2}$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ نتیجه می‌شود که $\max(f) = \frac{1}{2}$ و بهترین کران پایین f عدد صفر است و لذا برد f مجموعه $(0, \frac{1}{2}]$ است.

تست ۷۴ مجموع دو عدد صحیح و مثبت برابر ۹ است. حاصلضرب این دو عدد وقتی حاصلضرب یکی در مربع دیگری ماکزیمم باشد، کدام است؟ (سیستم، ژئوفیزیک ۸۱)

۱) ۸ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

حل: گزینه ۳ درست است. اگر دو عدد را x و y بنامیم، $x + y = 9$ و xy^2 ماکزیمم است، پس از نکته ۳۸ در صفحه ۱۷۳:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} \implies y = 2x \implies x = 3 \text{ و } y = 6 \implies xy = 18$$

تست ۷۵ هر خط گذرنده از نقطه $(2, 3)$ با محورهای مختصات در ناحیه اول یک مثلث تشکیل می‌دهد، کمترین مساحت این مثلث‌ها چند واحد مربع است؟ (آمار ۸۰)

۱) ۱۱ ۲) ۱۱/۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۲/۵

حل: گزینه ۳ درست است. اگر خط مورد نظر محورها را در a و b قطع کند، معادله آن $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ است و چون این خط از $(2, 3)$ می‌گذرد، $\frac{3}{b} + \frac{2}{a} = 1$، باید کمترین مقدار مساحت یعنی $S = \frac{ab}{2}$ را محاسبه کنیم. چون جمع $\frac{3}{b}$ و $\frac{2}{a}$ ثابت است ضرب آنها یعنی $\frac{6}{ab} = \frac{3}{S}$ وقتی ماکزیمم است (و لذا S می‌نیمم است.) که:

$$\frac{۲}{a}=\frac{۳}{b}\Longrightarrow\frac{۲}{a}+\frac{۲}{a}=۱\Longrightarrow a=۴ \text{ و } b=۶\Longrightarrow \min(S)=\frac{۲۴}{۲}=۱۲$$

$\boxed{\text{تست ۷۶}}$ یک قطعه سیم به طول l را بریده و به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. یکی را به شکل مربع و دیگری را به شکل یک مثلث متساوی‌الاضلاع خم می‌کنیم. برای اینکه مجموع مساحت‌ها حداقل (می‌نیمم) شود، نسبت طول‌های بریده شده را تعیین کنید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

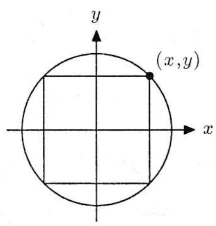
حل: گزینه ۴ درست است. دو قسمت را x و y می‌گیریم که $x+y=l$. با قطعه به طول x مربع می‌سازیم که طول ضلع آن $\frac{x}{۴}$ و مساحت آن $(\frac{x}{۴})^۲$ است. با قطعه به طول y مثلث می‌سازیم که طول ضلع آن $\frac{y}{۳}$ و مساحت آن $\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{y}{۳})^۲$ است. پس هدف می‌نیمم کردن $S(x)=\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{\sqrt{۳}}{۳۶}(l-x)^۲$ است.

$$S'(x)=\frac{x}{۸}-\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}(l-x) \text{ و } S'(x)=۰\xrightarrow{l-x=y}\frac{x}{۸}=\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}y\Longrightarrow\frac{x}{y}=\frac{۸}{۱۸}\sqrt{۳}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$$

$\boxed{\text{تست ۷۷}}$ یک دایره به شعاع R مفروض است. از میان مستطیلهای محاط در دایره، بزرگترین مساحت وقتی حاصل می‌شود که یک ضلع مستطیل برابر باشد با: (مواد ۷۷)

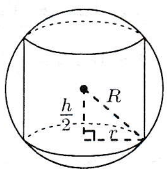
۱) $R\sqrt{۳}$ ۲) R ۳) $R\sqrt{۲}$ ۴) $۲R$

حل: گزینه ۳ درست است. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله مرکز دایره را مبدأ در نظر می‌گیریم و اضلاع مستطیل را به موازات محورهای مختصات فرض می‌کنیم. اگر رأسی از مستطیل که در ربع اول است را (x,y) بگیریم، مساحت $S=(۲x)(۲y)=۴xy$ بوده و داریم $x^۲+y^۲=R^۲$. بجای ماکزیمم کردن S کافی است $S^۲=۱۶x^۲y^۲$ را ماکزیمم کنیم که چون $x^۲+y^۲$ مقدار ثابت $R^۲$ است، بنا به نکته ۳۸ در صفحه ۱۷۳ ماکزیمم وقتی حاصل می‌شود که $x^۲=y^۲=\frac{R^۲}{۲}$ پس در این حالت $x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}R$ و لذا یک ضلع مستطیل $۲x=\sqrt{۲}R$ است. توجه کنید که در این حالت ضلع دیگر هم $۲y=R\sqrt{۲}$ بوده و مستطیل به مربع تبدیل می‌گردد و ضمناً حداکثر مساحت برابر $۲R^۲$ می‌باشد.



$\boxed{\text{تست ۷۸}}$ ارتفاع استوانه‌ای با حجم ماکزیمم که درون یک کره به شعاع واحد قرار می‌گیرد، کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$



حل: گزینه ۴ درست است. این مسأله را در حالت کلی برای کره به شعاع R حل می‌کنیم. اگر شعاع قاعده و ارتفاع استوانه‌ای r و h فرض شود، حجم آن $V=\pi r^۲h$ است و با توجه به قاعده فیثاغورس:

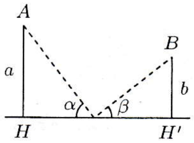
$$r^۲+\left(\frac{h}{۲}\right)^۲=R^۲\implies r^۲=R^۲-\frac{h^۲}{۴}\implies V=\pi\left(R^۲-\frac{h^۲}{۴}\right)h=\frac{\pi}{۴}\left(۴R^۲h-h^۳\right)$$

$$V'=\frac{\pi}{۴}(۴R^۲-۳h^۲)=۰\Longrightarrow h=\frac{۲}{\sqrt{۳}}R=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}R$$

به ازای $R=1$ حجم ماکزیمم وقتی به دست می‌آید که $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

تذکر۴۷. ماکزیمم حجم استوانه در این حالت برابر $V_{max}=\pi\left(R^2-\frac{R^2}{3}\right)\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$ و شعاع قاعده از رابطه $r^2=R^2-\frac{h^2}{4}=\frac{2R^2}{3}$ برابر $r=\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ است.

تست ۷۹ دو شهر که در یک طرف رودخانه‌ای واقع هستند، توافق کرده‌اند که مشترکاً یک موتورخانه و تصفیه خانه آب در منطقه‌ای در کنار رودخانه بنا کنند و آنرا توسط دو لوله‌کشی جداگانه به دو شهر متصل نمایند (مطابق شکل) هرگاه فاصله دو شهر از رودخانه a و b و فاصله آنها از هم c باشد، حداقل لوله لازم برای اتصال این شهرها به تصفیه خانه: (مکانیک ۶۸)



۱) برابر است با $\sqrt{c^2+4ab}$ ۲) برابر است با $\sqrt{c^2+2ab}$

۳) به ازای $\alpha=\frac{3}{2}\beta$ حاصل می‌شود. ۴) به ازای $\alpha=\frac{4}{3}\beta$ حاصل می‌شود.

حل: گزینه ۱ درست است. محل تصفیه‌خانه را D می‌گیریم. باید می‌نیمم $AD+DB$ را بیابیم.

روش اول. در مثلث قائم الزاویه ADH و BDH' طول وتر را می‌توان محاسبه نمود. اگر DH را برابر x و HH' را برابر عددی ثابت ℓ فرض کنیم داریم $DH'=\ell-x$.

$$f(x)=AD+DB=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(\ell-x)^2}$$

$$\Longrightarrow f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{2(\ell-x)}{2\sqrt{b^2+(\ell-x)^2}}=0 \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\ell-x}{\sqrt{b^2+(\ell-x)^2}}$$

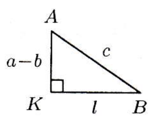
$$\Longrightarrow \frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{(\ell-x)^2}{b^2+(\ell-x)^2} \Longrightarrow b^2x^2+x^2(\ell-x)^2=a^2(\ell-x)^2+x^2(\ell-x)^2$$

$$\Longrightarrow b^2x^2=a^2(\ell-x)^2 \Longrightarrow bx=a(\ell-x) \Longrightarrow x=\frac{a\ell}{a+b} \quad \text{و} \quad \ell-x=\frac{b\ell}{a+b}$$

$$f\left(\frac{a\ell}{a+b}\right)=\sqrt{a^2+\frac{a^2\ell^2}{(a+b)^2}}+\sqrt{b^2+\frac{b^2\ell^2}{(a+b)^2}}=\frac{a}{a+b}\sqrt{(a+b)^2+\ell^2}+\frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2+\ell^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+b)^2+\ell^2}}{a+b}(a+b)=\sqrt{\ell^2+(a+b)^2}$$

حال توجه کنید که اگر از نقطه B عمود بر AH رسم کنیم (به فرض آنکه $a>b$)، این عمود AH را در نقطه K قطع می‌کند و در مثلث قائم الزاویه ABK، ضلع AB وتر و برابر فاصله A و B یعنی برابر c است و $AK=a-b$ و $BK=HH'=\ell$ پس $c^2=\ell^2+(a-b)^2$

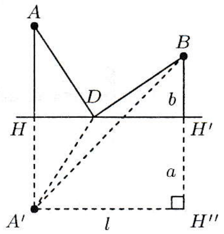


$$\min(f)=\sqrt{\ell^2+(a+b)^2}=\sqrt{c^2-(a-b)^2+(a+b)^2}=\sqrt{c^2+4ab}$$

البته برای اطمینان حاصل کردن از اینکه این مقدار می‌نیمم f است باید مقدار بالا را با $f(0)$ و $f(\ell)$ نیز مقایسه گردد.

توجه کنید که در حالتی که $x = \frac{al}{a+b}$ یعنی در حالتی که اکسترمم رخ می‌دهد داریم:

$$\tan\alpha = \frac{AH}{DH} = \frac{a+b}{l} \quad \text{و} \quad \tan\beta = \frac{BH'}{DH'} = \frac{b}{l - \frac{al}{a+b}} = \frac{a+b}{l} \implies \alpha = \beta$$



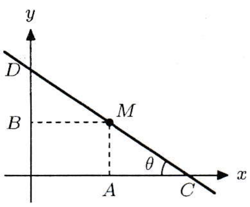
روش دوم. قرینه نقطه A نسبت به خط HH' را نقطه A' می‌نامیم. اگر محل تصفیه خانه نقطه D باشد $AD = A'D$ پس هدف یافتن حداقل مقدار $AD + DB = A'D + DB$ است. با توجه به شکل در مثلث $A'DB$ بنا به نابرابری مثلث داریم $A'D + DB \geq A'B$ و لذا حداقل طول مورد نیاز برابر $A'B$ می‌باشد. برای محاسبه طول $A'B$ از A' خطی به موازات HH' رسم می‌کنیم تا امتداد BH' را در H'' قطع کند.

$$A'B = \sqrt{A'H''^{۲} + H''B^{۲}} = \sqrt{\ell^{۲} + (a+b)^{۲}} = \sqrt{c^{۲} - (a-b)^{۲} + (a+b)^{۲}} = \sqrt{c^{۲} + ۴ab}$$

توجه کنید که در این حالت نیز چون نقطه مناسب D محل تقاطع $A'B$ با HH' است، پس $\alpha = \beta$.

تست ۸۰ **a و b اعداد ثابت مثبت هستند. خطوط گذرنده از نقطه $M(a,b)$ در ربع اول صفحه مختصات یک مثلث می‌سازد. حداقل طول وتر این مثلث برابر است با:**

۱) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{\frac{۳}{۲}}$ ۲) $(a^{\frac{۲}{۳}} + b^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}$ ۳) $\sqrt{a^{\frac{۲}{۳}} + b^{\frac{۲}{۳}}}$ ۴) $(a^{\frac{۳}{۲}} + b^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۳}{۲}}$



حل: گزینه ۲ درست است. اگر زاویه خط با محور x ها را θ در نظر بگیریم، در مثلث AMC داریم $\sin\theta = \frac{AM}{MC} = \frac{b}{MC}$ و چون BM موازی محور x ها است، زاویه BMD نیز برابر θ بوده و لذا در مثلث BMD داریم $\cos\theta = \frac{BM}{DM} = \frac{a}{DM}$. حال وتر مثلث یعنی CD را باید اکسترمم کنیم.

$$CD = CM + MD = b\csc\theta + a\sec\theta = f(\theta) \implies f'(\theta) = -b\csc\theta\cot\theta + a\sec\theta\tan\theta = ۰$$

$$\implies -b\frac{\cos\theta}{\sin^{۲}\theta} + a\frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta} = ۰ \implies a\frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta} = b\frac{\cos\theta}{\sin^{۲}\theta} \implies \frac{\sin^{۳}\theta}{\cos^{۳}\theta} = \frac{b}{a} \implies \tan\theta = \sqrt[۳]{\frac{b}{a}}$$

برای یافتن حداقل مقدار باید $\theta = \tan^{-۱}\sqrt[۳]{\frac{b}{a}}$ را در $f(\theta)$ جایگذاری کنیم. (چون حد تابع $f(\theta)$ در ۰^{+} و $\frac{\pi}{۲}^{-}$ برابر $+\infty$ است پس مقدار به دست آمده، حداقل $f(\theta)$ را محاسبه می‌کند.)

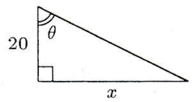
$$\sec\theta = \sqrt{۱ + \tan^{۲}\theta} = \sqrt{۱ + \frac{b^{\frac{۲}{۳}}}{a^{\frac{۲}{۳}}}} = \frac{\sqrt{a^{\frac{۲}{۳}} + b^{\frac{۲}{۳}}}}{a^{\frac{۱}{۳}}} \quad \text{و} \quad \csc\theta = \cot\theta\sec\theta = \frac{\sqrt{a^{\frac{۲}{۳}} + b^{\frac{۲}{۳}}}}{b^{\frac{۱}{۳}}}$$

$$\implies \min(f) = b^{\frac{۲}{۳}}\sqrt{a^{\frac{۲}{۳}} + b^{\frac{۲}{۳}}} + a^{\frac{۲}{۳}}\sqrt{a^{\frac{۲}{۳}} + b^{\frac{۲}{۳}}} = \sqrt{a^{\frac{۲}{۳}} + b^{\frac{۲}{۳}}}\left(a^{\frac{۲}{۳}} + b^{\frac{۲}{۳}}\right) = \left(a^{\frac{۲}{۳}} + b^{\frac{۲}{۳}}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

۳-۵-۷ کمیت‌های وابسته

گاهی یک کمیت، رابطه‌ای با چند متغیر دارد که هر کدام از آنها تابعی از متغیر دیگری (معمولاً زمان t) هستند. با تغییر هر یک از این متغیرها، کمیت مورد نظر نیز تغییر می‌کند. با داشتن آهنگ تغییر هر یک از این متغیرها، با مشتق گرفتن از رابطه موجود نسبت به زمان می‌توان آهنگ تغییر کمیت مورد نظر را به دست آورد.

مثال ۳۶. در مثلثی قائم‌الزاویه یک ضلع مقدار ثابت $۲۰cm$ است. در لحظه‌ای که وتر مثلث $۶۰cm$ باشد، ضلع دیگر زاویه قائمه با آهنگ $۳/۶\frac{cm}{s}$ کاهش می‌یابد. زاویه روبرو به این ضلع با چه آهنگی تغییر می‌کند؟



اگر زاویه مورد نظر θ و ضلع مقابل به آن x باشد، $\frac{dx}{dt} = -۳/۶$ بنابراین باید رابطه‌ای بین θ و x به دست آوریم.

$$\tan\theta = \frac{x}{۲۰} \xRightarrow{\frac{d}{dt}} \sec^{۲}\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۲۰}\frac{dx}{dt}$$

در لحظه‌ای که $\frac{dx}{dt} = -۳/۶$، وتر $۶۰cm$ است و بنابراین:

$$\cos\theta = \frac{۲۰}{۶۰} = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow \sec\theta = ۳ \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۹} \times \frac{۱}{۲۰} \times (-۳/۶) = -۰/۰۲$$

علامت منفی نشان می‌دهد که زاویه کاهش می‌یابد.

تست ۸۱ حجم یک هرم به نسبت $۳۰cm^{۳}$ در ثانیه و مساحت قاعده آن به نسبت $۵cm^{۲}$ در ثانیه اضافه می‌شود. موقعی که سطح قاعده هرم $۱۰۰cm^{۲}$ و ارتفاع آن $۸cm$ است، ارتفاع با چه سرعت نسبت به زمان اضافه می‌شود؟

(هسته‌ای ۷۷)

۱) $\frac{۱}{۴}\frac{cm}{s}$ ۲) $\frac{۱}{۳}\frac{cm}{s}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\frac{cm}{s}$ ۴) $\frac{۲}{۳}\frac{cm}{s}$

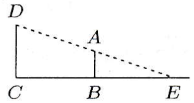
حل: گزینه ۳ درست است. اگر مساحت قاعده و ارتفاع هرم به ترتیب S و h باشد آنگاه $V = \frac{۱}{۳}Sh$ حجم هرم است. از این رابطه نسبت به t مشتق می‌گیریم.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{۱}{۳}\left(S\frac{dh}{dt} + h\frac{dS}{dt}\right) \Longrightarrow ۳۰ = \frac{۱}{۳}\left(۱۰۰\frac{dh}{dt} + ۸ \times ۵\right) \Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{۱}{۲}$$

تست ۸۲ اندازه قد مردی ۱۸۰ سانتی‌متر است. اگر این شخص با سرعت ۲۴۰ سانتی‌متر در ثانیه از تیری به ارتفاع ۵۴۰ سانتی‌متر که در بالای آن چراغی نصب شده است، دور شود در این صورت سایه این شخص روی زمین با سرعت چند سانتی‌متر بر ثانیه از تیر دور خواهد شد؟ (عمران ۷۶)

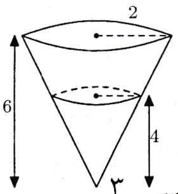
۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۸۰

حل: گزینه ۳ درست است. باتوجه به مفروضات مسأله $CD = ۵۴۰$ و $AB = ۱۸۰$. E را نوک سایه شخص می‌گیریم اگر BC را برابر x فرض کنیم $\frac{dx}{dt} = ۲۴۰$. چنانچه $y = CE$ هدف مسأله یافتن $\frac{dy}{dt}$ است پس باید بین x و y رابطه برقرار کنیم. با توجه به رابطه تالس در مثلث CDE:



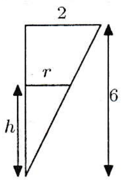
$$\frac{AB}{CD}=\frac{BE}{CE}\Longrightarrow\frac{۱۸۰}{۵۴۰}=\frac{y-x}{y}\Longrightarrow\frac{y-x}{y}=\frac{۱}{۳}\Longrightarrow ۳y-۳x=y\Longrightarrow y=\frac{۳}{۲}x\Longrightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{۳}{۲}\frac{dx}{dt}=۳۶۰$$

تست ۸۳ در یک مخزن آب که به شکل مخروط است و رأس مخروط به طرف پایین قرار دارد، آب با سرعت ۰/۵ متر مکعب در دقیقه وارد می‌شود. اگر ارتفاع مخزن ۶ متر و شعاع قاعده آن ۲ متر باشد، ارتفاع آب وقتی به ۴ متری برسد با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟ (۸۱ MBA)



۱) $\frac{۹}{۸\pi}$ ۲) $\frac{۹}{۳۲\pi}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶\pi}$ ۴) $\frac{۳}{۳۲\pi}$

حل: گزینه ۲ درست است.



اگر زمانی که ارتفاع آب درون مخزن h باشد، شعاع سطح مقطع آب را r بگیریم حجم آب موجود در مخزن $V=\frac{\pi}{۳}r^{۲}h$ است و $\frac{dV}{dt}=۰/۵$. باید رابطه‌ای بین V و h به دست آوریم. اگر مقطعی از مخزن را در نظر بگیریم، با توجه به شکل و رابطه تالس $\frac{h}{۶}=\frac{r}{۲}$ پس $r=\frac{h}{۳}$ و لذا $V(h)=\frac{\pi}{۲۷}h^{۳}$.

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{۹}h^{۲}\frac{dh}{dt}\Longrightarrow ۰/۵=\frac{\pi}{۹}(۴)^{۲}\frac{dh}{dt}\Longrightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{۹}{۳۲\pi}$$

۸-۵-۳ فرایندهای نمایی (رشد و زوال)

$x=x(t)$ کمیتی است که بر حسب زمان تغییر می‌کند به طوری که آهنگ تغییرات آن در هر لحظه متناسب با مقدار آن (در آن لحظه) است. در این صورت اگر k ضریب تناسب باشد $\frac{dx}{dt}=kx$. می‌توان ثابت کرد $x(t)$ در رابطه $x(t)=x_{۰}e^{kt}$ صدق می‌کند، که $x_{۰}=x(۰)$ برابر مقدار اولیه کمیت است. در این صورت $x(t)$ را کمیت نمایی می‌نامیم. ضریب ثابت k در حالتی که مثبت باشد، ضریب رشد و در حالتی که منفی باشد، ضریب زوال نامیده می‌شود.

تذکر ۴۸. رشد باکتری و واپاشی ماده رادیواکتیو از جمله فرایندهایی هستند که در رابطه ذکر شده صدق می‌کنند.

نکته ۴۴. در حالتی که ماده دچار زوال می‌شود (مثلاً واپاشی ماده رادیواکتیو)، مدت زمانی که طول می‌کشد تا نیمی از ماده نابود شود، نیمه عمر نامیده می‌شود و داریم:

$$\text{نیمه عمر}:\ T=-\frac{\ln ۲}{k}$$

نکته ۴۵. مستقل از مقدار اولیه کمیت اگر در دو زمان مختلف $t_{۱}$ و $t_{۲}$ مقدار کمیت $x_{۱}=x(t_{۱})$ و $x_{۲}=x(t_{۲})$ باشد، داریم $\frac{x_{۲}}{x_{۱}}=e^{k(t_{۲}-t_{۱})}$ و بنابراین اگر طول بازه زمانی ثابت باشد، نسبت مقدار کمیت در دو زمان مختلف مقدار ثابت باقی می‌ماند.

$\boxed{\text{تست ۸۴}}$ نسبت درگذشتگان یک جمعیت ۹ در هزار و نسبت متولدین ۲۱ در هزار این جمعیت است. اگر این نسبت دائماً برقرار باشد با گذشت چند سال این جمعیت دو برابر می‌شود؟$(\ln 2 \simeq 0/69)$

۱) ۴۶ ۲) ۵۲ ۳) ۵۲/۵ ۴) ۵۷/۵

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به اطلاعات مسأله نسبت افزایش جمعیت ۱۲ در هزار جمعیت است یعنی اگر $x = x(t)$ جمعیت در سال t باشد داریم $\frac{dx}{dt} = \frac{12}{1000}x$ و بنا به نکته ۴۵:

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{\frac{12}{1000}\Delta t} \implies \Delta t = \frac{1000}{12}\ln 2 \simeq 57/5$$

$\boxed{\text{تست ۸۵}}$ اگر ۲۰ درصد یک جسم رادیواکتیو در سال نابود شود، نیمه عمر این جسم رادیواکتیو چقدر است؟

(سیستم ۷۸)

۱) ۱/۳۸۶ سال ۲) ۲/۲۳ سال ۳) ۳/۱۰۶۷ سال ۴) ۶/۹۳۱ سال

حل: گزینه ۳ درست است.

روش اول. اگر $x(t)$ مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t و x_0 مقدار اولیه آن باشد:

$$x(t) = x_0 e^{kt} \Rightarrow 0/8x_0 = x_0 e^{k} \Rightarrow k = \ln(0/8) \Rightarrow \text{نیمه عمر} = -\frac{\ln 2}{k} = -\frac{\ln 2}{\ln 0/8} \simeq 3/1067$$

روش دوم. چون در هر سال ۲۰ درصد از این ماده نابود می‌شود، هر سال ۸۰ درصد آن باقی می‌ماند. پس اگر مقدار اولیه را x_0 بگیریم در سال اول $x_1 = 0/8x_0$ و در سال دوم $x_2 = 0/8x_1 = (0/8)^2x_0 = 0/64x_0$ و در سال سوم $x_3 = 0/8x_2 = (0/8)^3x_0 = 0/512x_0$ باقی می‌ماند. بنابراین نیمه عمر یعنی مدت زمانی که نیمی از ماده باقی می‌ماند باید حدود ۳ سال (کمی بیشتر از سه سال) باشد.

$\boxed{\text{تست ۸۶}}$ نیمه‌عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۶۰۰ سال است. پس از چند سال مقدار این ماده به $\frac{1}{4}$ مقدار اولیه تقلیل پیدا می‌کند؟

(هسته‌ای ۸۰)

۱) ۳۲۰۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۴۲۰۰ ۴) ۴۸۰۰

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. با توجه به فرمول نیمه عمر در نکته ۴۴ در صفحه قبل داریم $1600 = T = -\frac{\ln 2}{k}$ پس اگر در زمان t_1 مقدار کمیت $\frac{1}{4}x_0$ باشد:

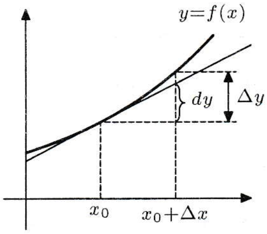
$$x(t) = x_0 e^{kt} \implies \frac{1}{4}x_0 = x(t_1) = x_0 e^{kt_1} \implies t_1 = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{4} = -\frac{2\ln 2}{k} = 2T = 3200$$

روش دوم. چون در هر ۱۶۰۰ سال مقدار ماده نصف می‌شود، در ۱۶۰۰ سال دوم مقدار ماده دوباره نصف ولذا $\frac{1}{4}$ برابر مقدار اولیه می‌شود. پس ۳۲۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار ماده $\frac{1}{4}$ برابر شود.

۳-۵-۹ دیفرانسیل و تقریب خطی

اگر متغیر x از $x_{\circ}$ به $x_{\circ}+\Delta x$ تغییر کند، نمو تابع $y=f(x)$ عبارت است از:

$$\Delta y = f(x_{\circ}+\Delta x) - f(x_{\circ})$$



اگر f در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد، نمو تابع یعنی Δy با تغییرات عرض خط مماس در $x_{\circ}$ وقتی x از $x_{\circ}$ به $x_{\circ}+\Delta x$ تغییر می‌کند، به طور تقریبی برابر است یعنی:

$$\Delta y \simeq f'(x_{\circ})\Delta x$$

بنابراین $f(x_{\circ}+\Delta x) \simeq f(x_{\circ}) + f'(x_{\circ})\Delta x$. مقدار $f(x_{\circ}) + f'(x_{\circ})\Delta x$ **تقریب خطی** f حول $x_{\circ}$ و فرایند جایگذاری آن به جای $f(x_{\circ}+\Delta x)$ را **خطی سازی** می‌نامند. $f'(x_{\circ})\Delta x = f'(x_{\circ})dx$ را **دیفرانسیل** y نامیده و با dy نمایش می‌دهند. خطای عمل خطی سازی در این حالت $\Delta y - dy$ خواهد بود.

نکته ۴۶. **می‌توان ثابت کرد اگر f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد $\Delta y - dy = \frac{f''(\alpha)}{۲!}(\Delta x)^{۲}$ که α نقطه‌ای مناسب بین $x_{\circ}$ و $x_{\circ}+\Delta x$ است، خصوصاً اگر مشتق دوم کراندار باشد یعنی $|f''(x)| \leq M$ آنگاه:**

$$|\Delta y - dy| \leq \frac{M}{۲}(\Delta x)^{۲}$$

تذکر۴۹. اگر تقعر f رو به بالا باشد، خطا یعنی $\Delta y - dy$ مثبت و اگر تقعر f رو به پایین باشد، خطا منفی است.

تذکر۵۰. تقریب خطی در $x_{\circ}$ در واقع چند جمله‌ای درجه اول تیلور حول $x_{\circ}$ و خطای خطی سازی برابر باقیمانده تیلور است که در قضیه ۹ در صفحه ۵۲۸ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تعریف. تغییرات نسبی تابع f در $x_{\circ}$ برابر است با $\left|\frac{\Delta y}{f(x_{\circ})}\right|$.

تذکر۵۱. نسبت تغییرات توابع f و g در نقطه $x_{\circ}$ عبارتست از:

$$\frac{\Delta f}{\Delta g} \simeq \frac{f'(x_{\circ})\Delta x}{g'(x_{\circ})\Delta x} = \frac{f'(x_{\circ})}{g'(x_{\circ})}$$

مثال ۳۷. مقدار تقریبی $\sqrt[۶]{۶۵}$ را محاسبه و حداکثر خطای خطی سازی را مشخص کنید.

اگر $f(x) = \sqrt[۶]{x}$ آنگاه $x_{\circ} = ۶۴$ و $\Delta x = ۱$ و $f'(x) = \frac{۱}{۶}x^{-\frac{۵}{۶}}$ پس

$$f(۶۵) \simeq f(۶۴) + f'(۶۴)\Delta x = ۲ + \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۳۲}(۱) = ۲ + \frac{۱}{۱۹۲} \simeq ۲/۰۰۵$$

خطای خطی سازی برابر $\frac{f''(\alpha)}{۲!}(\Delta x)^{۲}$ برای $۶۴ < \alpha < ۶۵$ است.

$$f''(x) = -\frac{۵}{۳۶}x^{-\frac{۱۱}{۶}} \Longrightarrow \text{خطا} = -\frac{۵}{۷۲}\alpha^{-\frac{۱۱}{۶}}$$

حال چون $۶۴ < \alpha$ پس $\alpha^{-\frac{۱۱}{۶}} < ۲^{-۱۱}$ ولذا: $|\text{خطا}| \leq \frac{۵}{۷۲ \times ۲^{۱۱}}$ چون $f''(x) < ۰$، خطا منفی است یعنی مقدار $۲/۰۰۵$ از مقدار واقعی بزرگتر است. (تقریب اضافی)

تذکر ۵۲. تمام قواعد محاسبه مشتق برای دیفرانسیل نیز برقرار است.

تست ۸۷ در بین مقادیر زیر کدامیک بهترین تقریب برابر $\ln(1/001)$ است؟ (فلسفه ۸۰)

۱) $0/001$ ۲) $0/0001$ ۳) e^{-2} ۴) $2e^{-3}$

حل: گزینه ۱ درست است. اگر $f(x) = \ln x$ آنگاه $f'(x) = \frac{1}{x}$. با قرار دادن $x_\circ = 1$ و $\Delta x = 0/001$ با توجه به فرمول تقریب خطی:

$$f(x_\circ + \Delta x) \simeq f(x_\circ) + f'(x_\circ)\Delta x \implies \ln(1/001) \simeq f(1) + f'(1)(0/001) = 0/001$$

تست ۸۸ کدامیک از مقادیر زیر تقریب بهتری برای کسینوس یک رادیان است؟ (فلسفه ۸۱)

۱) $0/48$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $0/54$ ۴) $0/61$

حل: گزینه ۳ درست است. چون $\pi \simeq 3/14$ پس یک رادیان نزدیک $\frac{\pi}{3}$ است. با توجه به فرمول تقریب خطی به ازای $x_\circ = \frac{\pi}{3}$ و $\Delta x = 1 - \frac{\pi}{3}$ و انتخاب $f(x) = \cos x$:

$$f(1) \simeq f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(1 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{\pi}{3}\right) \simeq 0/5 + 0/04 = 0/54$$

تست ۸۹ اگر شعاع داخلی یک کره فلزی ۴ و شعاع خارجی آن $4\frac{1}{16}$ سانتی‌متر باشد، حجم تقریبی جدار کره چقدر است؟ (کامپیوتر ۷۳)

۱) 3π ۲) 4π ۳) 2π ۴) π

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم کره باشد:

$$\text{حجم جدار} = V\left(4\frac{1}{16}\right) - V(4) \simeq V'(4)\Delta r \quad \text{و} \quad V'(r) = 4\pi r^2 \implies \text{حجم جدار} \simeq 4\pi(4)^2\frac{1}{16} = 4\pi$$

تست ۹۰ اضلاع مخزن مکعبی به ضلع $10m$ در اثر حرارت $2cm$ بزرگ شده‌اند، مقدار تقریبی سطح مکعب چقدر است؟

۱) $602/2$ ۲) $602/3$ ۳) $602/4$ ۴) $602/5$

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $S(x) = 6x^2$ سطح مکعب باشد $S'(x) = 12x$.

$$S(10 + 2 \times 10^{-2}) \simeq S(10) + S'(10)(0/02) = 600 + 2/4 = 602/4$$

تست ۹۱ تقریب $\sqrt[10]{1+h} \simeq 1 + \frac{h}{10}$ را در نظر می‌گیریم. کدامیک از احکام زیر برای $|h| < \frac{1}{100}$ درست است؟ (فلسفه ۸۱)

۱) تقریب برای h مثبت دقیق‌تر از تقریب برای h منفی با همان قدرمطلق است.
۲) تقریب برای h منفی دقیق‌تر از تقریب برای h مثبت با همان قدرمطلق است.
۳) تقریب برای h مثبت و h منفی باقدرمطلق برابر به یک دقت است.
۴) هیچ یک از سه حکم بالا برای h با $0 < |h| < \frac{1}{100}$ صادق نیست.

حل: گزینه ۱ درست است. ابتدا توجه کنید که $1 + \frac{h}{10}$ تقریب خطی، $\sqrt[10]{1+h}$ در $h = 0$ است زیرا اگر

$f(x)=\sqrt[10]{x}=x^{\frac{1}{10}}$ داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{10}x^{-\frac{9}{10}} \implies f'(1)=\frac{1}{10}$$

$$\implies \text{تقریب خطی} : f(1+h)\simeq f(1)+f'(1)h \implies \sqrt[10]{1+h}\simeq 1+\frac{h}{10}$$

حال این تقریب برای دو مقدار مثبت h_1 و منفی h_2 که $|h_1|=|h_2|$ به صورت $\sqrt[10]{1+h_1}\simeq 1+\frac{h_1}{10}$ و $\sqrt[10]{1+h_2}\simeq 1+\frac{h_2}{10}$ است. تقریبی دقیق‌تر است که خطای کمتری داشته باشد. بنا به نکته ۴۶ در صفحه ۱۸۲ اگر خطا را به ترتیب E_1 و E_2 بگیریم، با توجه به اینکه $f''(x)=-\frac{9}{100}x^{-\frac{19}{10}}$ داریم:

$$E_1=\frac{f''(x_1)}{2!}h_1^2 \ , \quad 1<x_1<1+h_1 \implies |E_1|=\frac{9h_1^2}{200}x_1^{-\frac{19}{10}}$$

$$E_2=\frac{f''(x_2)}{2!}h_2^2 \ , \quad 1+h_2<x_2<1 \implies |E_2|=\frac{9h_2^2}{200}x_2^{-\frac{19}{10}}$$

چون $1<x_1$ پس $x_1^{-\frac{19}{10}}=\frac{1}{x_1^{\frac{19}{10}}}<1$ و لذا $|E_1|<\frac{9h_1^2}{200}$ اما $x_2<1$ پس $x_2^{-\frac{19}{10}}>1$ پس $|E_2|>\frac{9h_2^2}{200}$ و چون مقادیر h_1 و h_2 از نظر قدرمطلق با هم برابر هستند، داریم $h_1^2=h_2^2$ و لذا $|E_1|<|E_2|$. پس خطای مربوط به محاسبه h_1 کمتر و تقریب آن دقیق‌تر است.

تست ۹۲ نسبت تغییرات عبارت $x^4+5x-\sqrt[5]{x}$ به تغییر عبارت x^2+3x+1 در نقطه $x=1$ کدام است؟

(شیمی نساجی ۸۲)

۱) $\frac{44}{25}$ ۲) $\frac{44}{10}$ ۳) $\frac{44}{15}$ ۴) $\frac{44}{30}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\text{نسبت تغییرات}=\frac{4x^3+5-\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}}{2x+3}=\frac{9-\frac{1}{5}}{5}=\frac{44}{25}$$

خلاصه نکات مهم

۱) شرط لازم و کافی برای مشتق‌پذیری آن است که مشتق چپ و راست با هم برابر باشند.

۲) توابعی که در اعداد گویا و گنگ ضابطه‌های مختلف و مشتق‌پذیر دارند، در صورتی در یک نقطه مشتق‌پذیرند که در آن نقطه پیوسته بوده و مشتق ضابطه‌های گویا و گنگ در آن نقطه با هم برابر باشند.

۳) برای محاسبه مشتق یک تابع مراحل زیر را انجام دهید.

مرحله اول: پیوستگی f را در آن بررسی می‌کنیم. اگر f در $x_\circ$ ناپیوسته باشد، مشتق‌پذیر نخواهد بود.

مرحله دوم: در صورت پیوستگی f، با استفاده از قواعد و فرمول‌های مشتق، تابع $f'(x)$ را محاسبه و سپس $x_\circ$ را در آن جایگذاری می‌کنیم. اگر با جایگذاری $x_\circ$ به حالت مبهم $(\frac{\circ}{\circ})$ برخورد کنیم، $\lim\limits_{x\to x_\circ} f'(x)$ در صورت موجود بودن برابر $f'(x_\circ)$ است.

مرحله سوم: اگر حد تابع مشتق موجود نباشد، باید از تعریف مشتق استفاده نماییم.

۴) برای محاسبه مشتق یک تابع در نقاطی که ضابطه عوض می‌شود یا در نقاطی که تقسیم بر صفر رخ می‌دهد، بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنید.

۵) برای محاسبه مشتق از توابع شامل قدرمطلق در یک نقطه خاص، بهتر است با توجه به علامت عبارت موجود در قدرمطلق، قدرمطلق را حذف کرده و سپس مشتق بگیریم.

۶) اگر $f(x) = |g(x)|$ که $g(x)$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد و $g(x_\circ) = \circ$، فقط در حالتی که $x_\circ$ ریشه ساده $g(x)$ است یعنی $g(x_\circ) = \circ$ و $g'(x_\circ) \neq \circ$ تابع f در $x_\circ$ فاقد مشتق است.

۷) تابع $y = [f(x)]$ در هر نقطه که پیوسته باشد، مشتق پذیر بوده و مشتق آن برابر صفر است.

۸) اگر f در $x_\circ$ پیوسته بوده و $f(x_\circ) = \circ$ و داشته باشیم $f(x) \sim g(x)$ آنگاه $f'(x_\circ) = g'(x_\circ)$.

۹) اگر $f(x_\circ) = \circ$ برای محاسبه $f'(x_\circ)$ کافی است از عامل صفرکنندهٔ f، مشتق بگیریم و در حد عبارت باقیمانده در نقطه $x_\circ$ ضرب کنیم.

۱۰) (**مشتق لگاریتمی**) هر گاه f از ضرب و تقسیم چند عبارت به‌دست آمده باشد یا به‌صورت $u(x)^{v(x)}$ باشد، برای محاسبه $f'(x)$، ابتدا از تابع $\ln$ گرفته و سپس مشتق را محاسبه می‌کنیم.

۱۱) (**مشتق تابع وارون**) اگر $b = f(a)$ آنگاه $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

۱۲) (مشتق تابع ضمنی) اگر $F(x,y)=0$ آنگاه $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$

۱۳) (مشتق پارامتری) اگر $x=f(t)$ و $y=g(t)$ آنگاه $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}$

۱۴) اگر $y=f(x)$ و $u=g(x)$، مشتق f نسبت به g یعنی $\frac{dy}{du}$ برابر است با $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

۱۵) شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه (x_0,y_0) برابر $f'(x_0)$ و شیب خط قائم برابر $-\frac{1}{f'(x_0)}$ است.

۱۶) طرز نوشتن معادله خط مماس بر نمودار f از نقطه $A(x_1,y_1)$ خارج نمودار:

روش اول. معادله خط مماس را در نقطه دلخواه (x_0,y_0) واقع بر نمودار f می‌نویسیم. سپس (x_0,y_0) را طوری تعیین کنیم که A در معادله صدق کند.

روش دوم. معادله دسته خطوط گذرنده از A یعنی $y-y_1=m(x-x_1)$ را نوشته و آنرا با نمودار منحنی تلاقی می‌دهیم. این معادله باید دارای ریشه با مرتبه تکرار بیشتر از یک (مثلاً ریشه مضاعف) باشد.

۱۷) برای نوشتن معادله خط قائم بر نمودار f از نقطه $A(x_1,y_1)$ خارج نمودار، ابتدا معادله قائم را در نقطه دلخواه (x_0,y_0) واقع بر نمودار f می‌نویسیم و سپس (x_0,y_0) را طوری تعیین کنیم که A در معادله صدق کند.

۱۸) برای محاسبه زاویه بین نمودارهای f و g در نقطه برخورد، زاویه بین خطوط مماس بر آنها را محاسبه می‌کنیم. یعنی قرار می‌دهیم $m_1=f'(x_0)$ و $m_2=g'(x_0)$ و زاویه (حاده یا قائمه) را با رابطه $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ محاسبه می‌کنیم.

۱۹) اگر g وارون تابع f و $b=f(a)$ آنگاه $g''(b)=-\frac{f''(a)}{\left(f'(a)\right)^3}$.

۲۰) برای محاسبه $f^{(k)}(x_0)$ کافی است بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه x_0 را تا توان k نوشته و آنرا $g(x)$ بنامیم. در این صورت $f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$. توجه کنید که در این روش در واقع کافی است فقط از جمله دارای توان k در $g(x)$ مشتق گرفته شود.(مشتق سایر جملات صفر می‌شود.)

۲۱) (فرمول لایپ‌نیتز) اگر $u(x)$ و $v(x)$ توابعی مشتق‌پذیر از x باشند:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)} \qquad \text{و} \qquad u^{(0)}=u\ ,\ u^{(1)}=u'\ ,\ u^{(2)}=u''\ ,\cdots$$

۲۲) برای محاسبه مشتقات مراتب بالا از رابطه ضمنی $F(x,y)=0$ بهتر است از رابطه ضمنی به‌طور مستقیم و به تعداد مورد نیاز و با توجه به اینکه y تابعی از x است، مشتق بگیریم.

۲۳) (**آزمون مشتق اول**) برای یافتن اکسترمم یک تابع، ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورده و در صورت پیوستگی تابع در نقطه بحرانی، مشتق را در اطراف آن تعیین علامت می‌کنیم. وضعیت نقطه اکسترمم به صورت زیر است.

x		$x_\circ$	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

x		$x_\circ$	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

۲۴) برای تعیین وضعیت نقطه بحرانی اگر آن نقطه ناپیوستگی باشد، باید به وضعیت حدی و مقدار تابع در نقطه بحرانی توجه نمود.

۲۵) برای تعیین تعداد ریشه‌های تابع $f(x)$، باید در هر یک از بازه‌هایی که $f'(x)$ علامت ثابت دارد(یعنی بازه‌هایی که f بر آنها یکنوا است) تعداد ریشه‌ها را با استفاده از خاصیت مقدار میانی تعیین نماییم.

۲۶) اگر $f'(x_\circ) = \circ$ برای تعیین وضعیت نقطه بحرانی $x_\circ$ می‌توانیم در نقطه $x_\circ$ از تابع f تا جایی مشتق بگیریم که مشتق مخالف صفر شود، اگر اولین مرتبه‌ای که مشتق در $x_\circ$ غیر صفر است را n بنامیم.

الف) نمودار f حول $x_\circ$ مشابه هم‌ارز آن یعنی $f(x_\circ) + \frac{f^{(n)}(x_\circ)}{n!}(x - x_\circ)^n$ است.

ب) اگر n فرد باشد، $x_\circ$ نقطه عطف خواهد بود.

ج) اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(x_\circ) > \circ$ آنگاه $x_\circ$ نقطه می‌نیمم نسبی است.

د) اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(x_\circ) < \circ$ آنگاه $x_\circ$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

هـ) اگر $f(x_\circ) = \circ$ آنگاه $x_\circ$ ریشه با تکرار n برای f خواهد بود.

۲۷) برای یافتن نقطه عطف تابع f نقاطی که در آنها f'' صفر شود یا وجود ندارد را تعیین کرده و f'' را تعیین علامت کنید. اگر در این نقاط علامت f'' عوض شود و خط مماس موجود باشد، آنگاه نقطه، عطف خواهد بود.

۲۸) (**قضیه رُل**) اگر f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b)$ نقطه $a < c < b$ موجود است که $f'(c) = \circ$.

۲۹) اگر f دارای n ریشه و دارای مشتق مرتبه n باشد، f' حداقل دارای $(n - ۱)$ ریشه است.

۳۰) اگر مشتق یک تابع دارای n ریشه باشد، آن تابع دارای حداکثر $n + ۱$ ریشه خواهد بود.

۳۱) (**قضیه مقدار میانگین**) اگر f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد، نقطه $a < c < b$ موجود است که $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

۳۲) کاربرد مهم قضیه مقدار میانگین در تخمین زدن تغییرات تابع است. به این ترتیب که اگر شرایط قضیه برقرار باشد و $\alpha \leq f'(x) \leq \beta$ آنگاه $\alpha(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq \beta(b - a)$.

۳۳) برای محاسبه $\lim\limits_{x\to x_\circ}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ اگر حالت $\dfrac{\circ}{\circ}$ یا $\dfrac{\infty}{\infty}$ رخ دهد، می‌توانیم $\lim\limits_{x\to x_\circ}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ را محاسبه کنیم. اگر حاصل برابر عدد یا بینهایت باشد با مقدار حد اولیه برابر است. اگر دوباره به حالت مبهم برخورد کردیم می‌توانیم از قاعده هوپیتال تا رفع ابهام شدن استفاده نماییم.

۳۴) برای سایر حالات مبهم پس از تبدیل به $\dfrac{\circ}{\circ}$ و $\dfrac{\infty}{\infty}$ می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده نماییم.

۳۵) برای محاسبه اکسترمم مطلق یک تابع فرایند زیر را دنبال کنید.

الف) اگر تابع f بر بازه بسته و کراندار $[a,b]$ پیوسته باشد، کافی است مقادیر f را در نقاط بحرانی داخل بازه و نقاط ابتدا و انتهای بازه با یکدیگر مقایسه کنیم. بیشترین مقدار برابر ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار برابر می‌نیمم مطلق است.

ب) اگر تابع f بر بازه دلخواه I (نه لزوماً بازه بسته و کراندار) پیوسته باشد، کافی است مقادیر f را در نقاط بحرانی داخل بازه و مقدار حدی آنرا در نقاط ابتدا و انتهای بازه با یکدیگر مقایسه کنیم. بیشترین مقدار در صورت اتخاذ شدن برابر ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار در صورت اتخاذ شدن برابر می‌نیمم مطلق است.

۳۶) اگر ماکزیمم و می‌نیمم تابع پیوسته f بر دامنه آن تابع برابر M و m به دست آیدآنگاه $R_f=[m,M]$.

۳۷) اگر مجموع متغیرهای مثبت $x_۱,\dots,x_n$ ثابت باشد و $\alpha_۱,\cdots,\alpha_n>\circ$، حاصل ضرب $x_۱^{\alpha_۱}x_۲^{\alpha_۲}\cdots x_n^{\alpha_n}$ وقتی $\dfrac{x_۱}{\alpha_۱}=\dfrac{x_۲}{\alpha_۲}=\cdots=\dfrac{x_n}{\alpha_n}$ ماکزیمم می‌شود.

۳۸) اگر $x_۱,\dots,x_n$ متغیرهای مثبت و $\alpha_۱,\cdots,\alpha_n>\circ$ و حاصل ضرب $x_۱^{\alpha_۱}x_۲^{\alpha_۲}\cdots x_n^{\alpha_n}$ مقداری ثابت باشد آنگاه $x_۱+\cdots+x_n$ وقتی $\dfrac{x_۱}{\alpha_۱}=\dfrac{x_۲}{\alpha_۲}=\cdots=\dfrac{x_n}{\alpha_n}$ می‌نیمم می‌شود.

۳۹) اگر کمیتی بر حسب زمان طوری تغییر می‌کند که آهنگ تغییرات آن در هر لحظه متناسب با مقدار آن باشد، یعنی $\dfrac{dx}{dt}=kx$ آنگاه این فرایند در رابطه نمایی $x(t)=x_\circ e^{kt}$ صدق می‌کند.

۴۰) در هر فرایند نمایی نیمه عمر یعنی مدت زمانی که طول می‌کشد تا نیمی از ماده نابود شود، با رابطه $T=-\dfrac{\ln ۲}{k}$ تعیین می‌شود.

۴۱) در هر فرایند نمایی در بازه‌های زمانی با طول برابر، نسبت مقدار کمیت در آن بازه ثابت باقی می‌ماند.

۴۲) مقدار تقریبی $f(x_\circ+\Delta x)$ با فرمول تقریب خطی $f(x_\circ+\Delta x)\simeq f(x_\circ)+f'(x_\circ)\Delta x$ بدست می‌آید.

۴۳) خطای عمل خطی سازی با رابطه $\Delta y-dy=\dfrac{f''(\alpha)}{۲!}(\Delta x)^۲$ که α نقطه‌ای مناسب بین $x_\circ$ و $x_\circ+\Delta x$ است، بیان می‌شود و از آن برای تخمین زدن خطا استفاده می‌شود.

۴۴) نسبت تغییرات توابع f و g در نقطه $x_\circ$ از رابطه $\dfrac{\Delta f}{\Delta g}\simeq\dfrac{f'(x_\circ)\Delta x}{g'(x_\circ)\Delta x}=\dfrac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$ به دست می‌آید.