توابع معکوس[5]

هــر تــابـع $y = f(x)$ دارای این خاصیت است که مقدار متغیر وابستهٔ y منحصرا" به وسیلهٔ مقدار متغیر مستقل x معین می‌شود ،ولی بعضی‌از توابع این خاصیت اضافی را دارند که مقدار x نیز منحصرا" به‌وسیلهٔ y معین می‌شود . توابع از این نوع خاص را **توابع یک به یک** می‌نامند . به هر چنین تابع $y = f(x)$ می‌توان یک **تابع معکوس** $x = f^{-1}(y)$ مربوط‌کرد که مقادیر y را به مقادیر x برمی‌گرداند . به‌علاوه ، همانطور که بخشهای ۵ . ۱ و۵ . ۲ نشان داده‌اند ، اگر f پیوسته باشد ، f^{-1} پیوسته است ، و اگر f دارای مشتق ناصفر باشد ، f^{-1} نیز چنین می‌باشد .گاهی معکوس یک تابع یک به‌یک آشنا تابع جدیدی است که خود ارزش مطالعه دارد . این درمورد **توابع مثلثاتی معکوس**، که‌دربخش۵ . ۳معرفی‌شده‌اند ،وتعدادی تابع دیگر که در فصل بعد مطرح می‌شوند صحت دارد .

۵ . ۱ معکوس تابع یک به یک

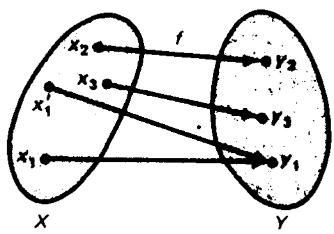
فرض‌کنیم f تابعی باشد که برمجموعهٔ X تعریف شده است ، و Y نقش X تحت f باشد ؛ یعنی ، مجموعهٔ تمام مقادیر $y = f(x)$ که f با تغییر x روی مجموعهٔ X می‌گیرد ؛ با نماد نظریــهٔ مجموعـــه‌ها ، $Y = \{y : y = f(x), x \in X\}$. در ایــن صــورت ، اینکه x منحصرا" y را معین می‌کند بدین معنی است که به ازای هر نقطهٔ x در X یک و فقط یک نقطه مانند y در Y هست به‌طوری که $y = f(x)$. در واقع ، این یکتایی جوهر مفهوم تابع است .البته، f ممکن است بیش‌از یک نقطه از X را به نقطهٔ واحدی از Y بنگارد ، و این عموما" رخ خواهد داد . مثلا" ، هرگاه $y = f(x) = |x|$ ، آنگاه f هر دو نقطهٔ $x = 3$ و$x = -3$را به نقطهٔ واحد $y = 3$ می‌نگارد .

با اینحال، فرض‌کنیم f بیش‌از یک نقطهٔ X را به نقطهٔ واحدی از y **ننگـارد** . در این صورت ، به ازای هر نقطهٔ y در Y ، یک و فقط یک نقطه مانند x در X هست به طوری

که $f(x) = y$ ، و می‌گوییم f یک **تابع یک به یک**، یا f **یک به یک** بر X است. به عبارت دیگر، اگر f بر X یک به یک بوده و x و x' نقاطی از X باشند، تساوی $f(x) = f(x')$ فقط وقتی ممکن است که $x = x'$. به بیان دقیق، تابع یک به یک f نقاط متمایز X را به نقاط متمایز Y می‌نگارد.

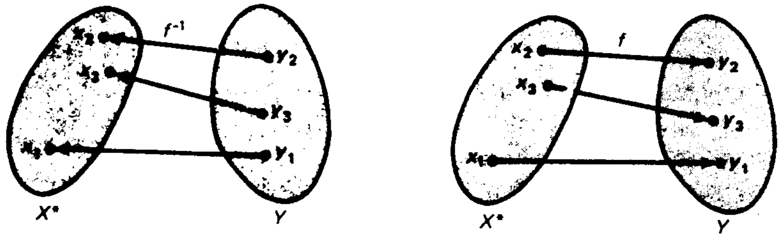
توابع معکوس. در تابع یک به یک، و **فقط** در این مورد، می‌توان تابع دیگری تعریف‌کرد که با f^{-1} نموده و **تابع معکوس** (یا فقط **معکوس**) تابع اصلی f نامیده می‌شود. تابع معکوس بر Y تعریف شده و هر y در Y را به نقطهٔ منحصر به فرد x در X می‌نگارد که $f(x) = y$. واضح است که X نقش Y تحت f^{-1} است درست همانطور که Y نقش X تحت f است. هرگاه X بزرگترین مجموعه‌ای باشد که f بر آن تعریف شده است، آنگاه X قلمرو f و برد f است، درحالی که Y برد f و قلمرو f^{-1} می‌باشد. به آسانی معلوم می‌شود که f^{-1} خود یک تابع یک به یک بوده و f معکوس آن می‌باشد؛ درنتیجه، $f = (f^{-1})^{-1}$.

مثال ۱. تابع f را که با " نمودار " شکل ۱ مشخص می‌شود درنظر می‌گیریم. اشکالی که X و Y نامیده شده‌اند نمایش قلمرو و برد f اند، و مقادیر متغیر مستقل x و متغیر وابستهٔ y با نقاط نموده شده‌اند. هر مقدار x با یک سهم به مقدار y که توسط f بدان نگاشته شده مربوط



شکل ۱

می‌شود، و جهت سهم جهت نگاشت (از X به Y) را نشان می‌دهد. تابع f بر تمام قلمرو X یک به یک نیست، زیرا دو سهم به نقطهٔ y_1 ختم می‌شوند. اما، همانطور که از شکل ۲ (آ) واضح است، f بر مجموعهٔ X^* که با حذف x'_1 از X به دست می‌آید یک به یک است، و تابع معکوس نظیر f^{-1} ، که در شکل ۲ (ب) رسم شده، با عکس‌کردن جهت سهمها که از نقاط Y به نقاط X^* بروند به دست می‌آید. توجه کنید که f یک به یک است و درنتیجه برهرزیر مجموعهٔ X که شامل x_1 و x'_1 نباشد معکوس دارد.



(ب) (آ)

شکل ۲

مثال ۲. نشان دهید که تابع

$$y = \frac{1+x}{1-x} \qquad (x \neq 1) \tag{۱}$$

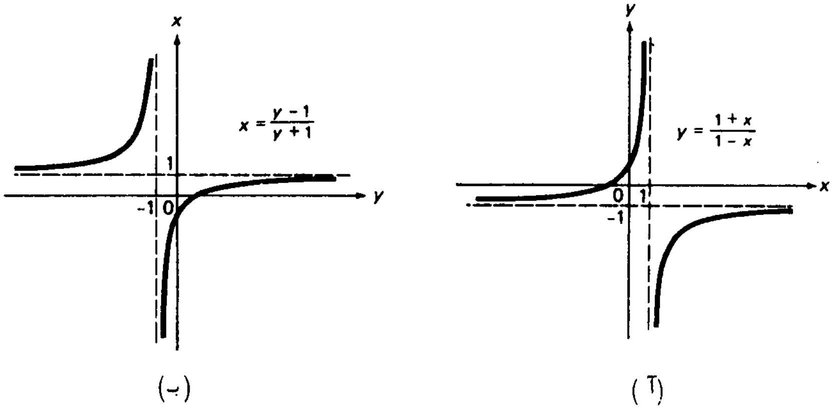
یک به یک است، و معکوس آن را بیابید.

حل. از (۱) معلوم می‌شود که $1 + x = y - xy$ ، یا معادلاً $x + xy = y - 1$. بنابراین،

$$x = \frac{y-1}{y+1} \qquad (y \neq -1), \tag{۲}$$

و به آسانی می‌توان (۱) را نسبت به x و برحسب y حل کرد. به‌علاوه، فرمول (۲) مسلماً به هر $y \neq -1$ مقدار منحصر به فردی از x را نسبت می‌دهد. از اینرو، (۱) تابع یک به یکی مانند $y = f(x)$ است، و (۲) تابع معکوس آن $x = f^{-1}(y)$ می‌باشد. فرض کنیم X مجموعهٔ تمام $x \neq 1$ ها بوده و Y مجموعهٔ تمام $y \neq -1$ های باشد. در این صورت، f دارای قلمرو X و برد Y است، درحالی که f^{-1} دارای قلمرو Y و برد X می‌باشد. نمودار این توابع در شکلهای ۳(آ) و ۳(ب) نموده شده‌اند. توجه کنید که در شکل ۳(ب) **عرض** x و **طول** y می‌باشد.

مثال ۳. تابع $y = f(x) = x^2$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ یک به یک نیست، زیرا به‌ازای‌هر $y > 0$ دو نقطه در $(-\infty, \infty)$ ، یعنی $x = \sqrt{y}$ و $x = -\sqrt{y}$ ، وجوددارندکه $f(x) = y$. (مثل همیشه، $\sqrt{y}$ ریشهٔ دوم **مثبت** y می‌باشد.) اما f بر بازهٔ $[0, \infty)$ یک به یک *است*، زیرا درست یک نقطه در $[0, \infty)$ ، یعنی $x = \sqrt{y}$ ، وجود دارد که به ازای آن $f(x) = y$ به‌عبارت



شکل ۳

دیگر، تابع

$$y = f(x) = x^2 \qquad (0 \le x < \infty)$$

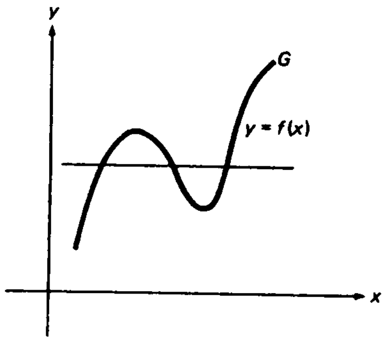
یک تابع یک به یک است با معکوس

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \qquad (0 \le y < \infty). \tag{۳}$$

به‌علاوه، به آسانی معلوم می‌شود که f بر هر بازه که در آن x علامت ثابت دارد یک به‌یک است، ولی بر هیچ بازه‌ای که x در آن تغییر علامت می‌دهد چنین نیست.

خاصیت خط افقی. از صفحهٔ ۷۶ به یاد می‌آوریم که نمودار هر تابع $y = f(x)$ دارای این خاصیت است که هیچ خط قائم، یعنی هیچ خط موازی‌محور y، نمی‌تواند نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند. نمودار یک تابع **یک به یک** دارای این خاصیت اضافی است که هیچ **خط افقی**، یعنی هیچ خط موازی محور x، نمی‌تواند نمودار را در بیش از یک نقطه‌قطع کند زیرا هرگاه خط افقی $y = c$ نمودار $y = f(x)$ را در دو یا چند نقطه قطع کند، آنگاه دو یا چند مقدار از x، یعنی طول این نقاط، وجود دارند که نظیر یک مقدار از y، یعنی c، می‌باشند، و این تعریف تابع یک به یک را نقض می‌کند.

مثال ۴. بررسی شکل ۳ (آ) نشان می‌دهدکه‌هیچ خط افقی نمودار تابع (۱) را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند. بنابراین، همانطور که از قبل می‌دانیم، (۱) یک تابع یک به‌یک‌است. از آن سو، تابع $y = f(x)$ با نمودار G شکل ۴ نمی‌تواند یک به یک باشد، زیرا خطوطی افقی وجود دارند که G را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند (یک چنین خط درشکل نشان



شکل ۴

داده شده است) .

فرض کنیم $y = f(x)$ تابع یک‌به‌یکی با معکوس $x = f^{-1}(y)$ باشد. باگذاردن $y = f(x)$ در $x = f^{-1}(y)$ و نیز گذاردن $x = f^{-1}(y)$ در $y = f(x)$ جفت اتحاد مهم زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, \qquad f(f^{-1}(y)) \equiv y,$$

یا معادلاً

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, \qquad f(f^{-1}(x)) \equiv x, \tag{۴}$$

که در آن به‌خاطر هماهنگ بودن نمادها y در اتحاد دوم به x تغییر یافته است. بنابر رابطهٔ (۴)، هر یک از توابع f و f^{-1} عمل دیگری را خنثی می‌کند. به عبارت‌دیگر، حاصل اعمال توابع f و f^{-1} با هر ترتیب مقدار x را تغییر نمی‌دهد. فرمولهای (۴) را می‌توان به طور فشرده‌تر نوشت:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I, \tag{۵}$$

که در آن I ***تابع همانی*** است؛ یعنی، تابع هر عدد x را به خودش می‌نگارد.[1] معادلهٔ (۵) نشان می‌دهد که f^{-1} متقابل f نسبت به عمل **ترکیب** است. f^{-1} را با متقابل f نسبت به عمل ضرب، که با $1/f$ نموده می‌شود، خلط نکنید. تابع $1/f$ با فرمول

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

---

۱. به طور دقیقتر، به ازای هر x در قلمرو f، $f^{-1} \circ f = I$، حال آنکه به ازای هر x در برد f (قلمرو f^{-1})، $f \circ f^{-1} = I$.

تعریف می‌شود مشروط براینکه $f(x) \neq 0$.

مثال ۵. با استفاده از فرمول $f(f^{-1}(x)) \equiv x$ ، معکوس تابع (۱) مثال ۲ را به‌دست‌آورید .

حل. با نوشتن $y = f(x)$ در (۱) ، داریم

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \qquad (x \neq 1). \tag{۱'}$$

سپس، با اعمال فرمول ذکر شده ، نتیجه می‌شود که

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1+f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)} = x.$$

بنابراین ،

$$1 + f^{-1}(x) = x - xf^{-1}(x),$$

و با حل نسبت به $f^{-1}(x)$ به دست می‌آوریم

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad (x \neq -1). \tag{۲'}$$

تفاوتها ظاهری‌اند؛ فرمولهای (۲) و (۲') در واقع دو طریق معادل برای نوشتن‌تابع واحدی است . در واقع ، برای تبدیل (۲) به (۲') ، کافی است متغیرهای x و y را باهم عوض کرده ، و سپس قرار دهیم $y = f^{-1}(x)$. چگونه (۲') به (۲) تبدیل می‌شود ؟

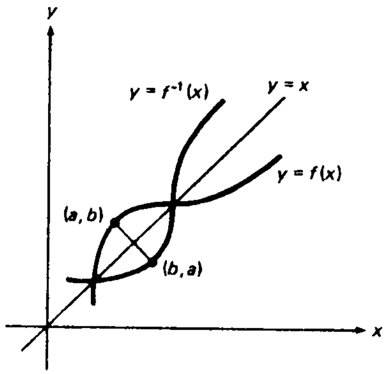
رابطهٔ بین‌نمودارهای f و f^{-1} . فرض کنیم $y = f(x)$ یک تابع یک به یک با تابع معکوس f^{-1} باشد . در این صورت ، ***نمودار f^{-1} منعکس نمودار f نسبت به خط $y = x$*** (خط ماربر مبداء به شیب 1) است . برای مشاهدهٔ این امر ، فرض‌کنیم a نقطه‌ای در قلمرو f باشد . هرگاه $b = f(a)$ ، آنگاه $a = f^{-1}(b)$. بنابراین ، اگر نقطهٔ (a, b) متعلق به نمودار f باشد ، نقطهٔ (b, a) متعلق به نمودار f^{-1} است (ر.ک. شکل ۵) . اما این دو نقطه ***نسبت به خط $y = x$ متقارن اند***؛ یعنی ، خط $y = x$ عمود منصف پاره‌خط واصل بین‌نقاط (a, b) و (b, a) می‌باشد. در واقع ، خط ماربر نقاط (a, b) و (b, a) به شیب

$$\frac{a-b}{b-a} = -1$$

است؛ و درنتیجه، بر خط $y = x$ عمود است ، ولی نقطهٔ میانی پاره‌خط واصل بین نقاط (a, b) و (b, a) مساوی

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

بوده؛ و درنتیجه، برخط $y = x$ قرار دارد. توجه‌کنید که برای رسم‌نمودار تابع f ومعکوسش f^{-1} در یک دستگاه مختصات قائم، باید مثل شکل ۵ از یک علامت برای شناسه‌های هردو تابع استفاده کنیم.



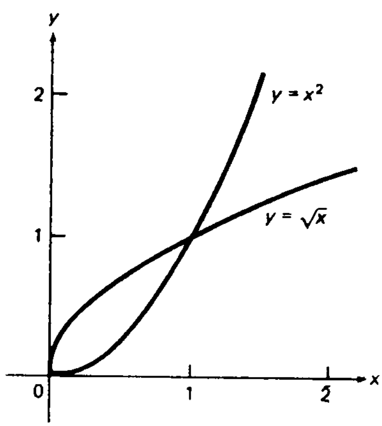
شکل ۵

مثال ۶. در شکل ۶ تابع

$$y = f(x) = x^2 \qquad (0 \leq x < \infty)$$

و معکوسش

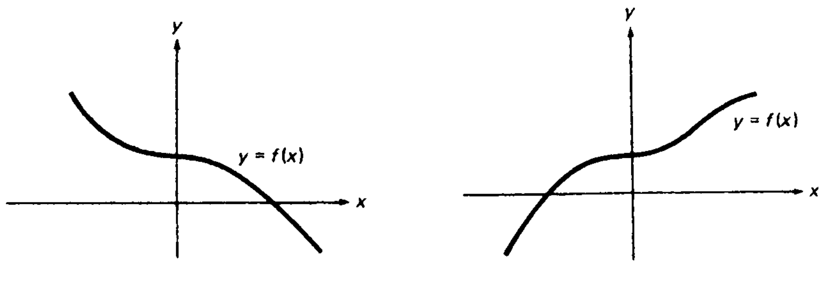
$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad (0 \leq x < \infty)$$



شکل ۶

در یک دستگاه مختصات قائم رسم شده است. (عبارت مربوط بـه $f^{-1}(x)$ را می‌تـوان از فرمول (۳) به‌وسیلهٔ تعویض‌متغیرهای x و y باهم به‌دست‌آورد.) توجه کنید که هر نمودار نیمی از سهمی است، و انعکاس نسبت به خط $y = x$ هر یک از این نمودارها را به دیگری تبدیل می‌کند. چطور می‌توان با یک نگاه گفت که توابع f و f^{-1} یک به یک‌اند؟

معکوس تابع یکنوا. همانطور که احتمالا" حدس زده‌اید، هر تابع یکنوا (یعنی، هـر تابع صعودی یا نزولی) خود بخود یک به یک بوده؛ و درنتیجه، دارای معکوس می‌باشد. زیرا، هرگاه نمـودار f مثـل شکل ۷ (آ) بالا رود یا مثل شکل ۷ (ب) پایین بیاید، آنگاه‌هیچ خط



(ب) (آ)

شکل ۷

افقی نمی‌تواند نمـودار f را در بیش از یک نقطه قطع کند. به‌علاوه، همانطور کـه اینک نشان می‌دهیم، معکوس یک تابع یکنوا خود تابعی یکنواست.

قضیهٔ ۱ (معکوس یک تابع یکنوا). ***هر تابع صعودی یک به یک و دارای معکوسی صعودی است. هر تابع نزولی یک به یک با معکوسی نزولی می‌باشد.***

برهان. فرض کنیم f (بر مجموعه‌ای) صعودی بوده و $x \neq x'$. در این صورت، یا $x < x'$ یا $x' < x$. درحالت اول $y < y'$، که در آن $y = f(x), y' = f(x')$، و درحالت دوم $y' < y$، ولـی در هر حالت $y \neq y'$. بنابراین، f در نقاط مختلف مقادیرمتفـاوت می‌گیرد؛ یعنی، f یک به یک است؛ و درنتیجه، دارای تابع معکوس f^{-1} می‌باشد. فرض کنیـم $y < y'$، و قرار می‌دهیم $x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$. در این صورت، $x < x'$، زیرا $x = x'$ ایجاب می‌کند که $y = y'$ (f تابع است)، حال آنکه $x > x'$ ایجاب می‌کند که $y > y'$ (f صعودی است). بنابراین، f^{-1} نیز (بر Y، یعنی نقش X تحت f) صعودی

است . اثبات نزولی بودن f اساسا " همین است .

مثال ۷. فرض کنیم

$$y = f(x) = x^n \qquad (0 \le x < \infty),$$

که در آن n عدد صحیح مثبتی است . بنابر آزمون یکنوایی (قضیهٔ ۷ ، صفحهٔ ۲۶۹) ، f بر قلمرو $[0, \infty)$ صعودی است ، زیرا $f'(x) = nx^{n-1}$ بر $(0, \infty)$ صعودی است . از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که f یک به یک است با تابع معکوس

$$x = f^{-1}(y) = y^{1/n},$$

یا ، پس از تعویض متغیرهای x و y ،

$$y = f^{-1}(x) = x^{1/n}, \tag{۶}$$

و f^{-1} بر J ، یعنی نقش I تحت f ، صعودی است . مجموعهٔ J باید بازه باشد ، چون f بر I پیوسته است (قضیهٔ ۱۵ ، صفحهٔ ۱۶۰ ، را به یاد آورید) . درواقع ، J بازهٔ $[0, \infty)$ است ، زیرا $f(0) = 0$ ، f بر $[0, \infty)$ نامنفی است ، و

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^n = \infty.$$

چون $J = [0, \infty)$ قلمرو تابع معکوس (۶) است ، این *ثابت می‌کند* که‌ریشهٔ n م $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ به ازای هر x نامنفی موجود و منحصر به فرد است ، و این در طول راه تلویحا " فرض شده بود .

مثال ۸. نشان دهید که تابع

$$f(x) = x^{11} + 3x^7 + 2x + \sin 2x - 13 \tag{۷}$$

یک به یک است .

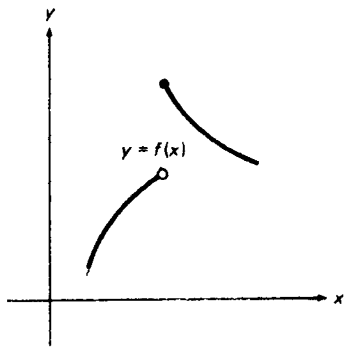
حل. با مشتقگیری از (۷) ، تابع

$$f'(x) = 11x^{10} + 21x^6 + 2(1 + \cos 2x)$$

به دست می‌آید ، که به ازای هر x مثبت است (چرا ؟) .

از آزمون یکنوایی نتیجه می‌شود که f بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است . لذا ، طبق قضیهٔ ۱ ، f بر قلمرو خود $(-\infty, \infty)$ یک به یک است . به‌علاوه ، با آنکه نمی‌توان فرمول صریحی برای تابع معکوس f^{-1} به‌دست‌آورد ، قضیه به ما می‌گوید که f^{-1} یک تابع صعودی است . به‌عنوان تمرین ، نشان دهیدکه برد f ، و درنتیجه‌قلمرو f^{-1} ، مجددا " بازهٔ $(-\infty, \infty)$ می‌باشد .

توابع یک به یک پیوسته. بنابر قضیهٔ ۱، هر تابع یکنوا باید یک به یک باشد. عکس این درست نیست؛ یعنی، توابع یک به یکی وجود دارند که یکنوا نیستند. نمودار یک چنین تابع f در شکل ۸ نموده‌شده‌است. ناپیوسته بودن این تابع تصادفی نیست، زیرا همانطور که اینک نشان می‌دهیم، هر تابع یک به یک **پیوسته** باید یکنوا باشد.



شکل ۸

قضیهٔ ۲ (توابع یک به یک پیوسته یکنوایند). *هرگاه f بر بازهٔ I پیوسته و یک به یک باشد، آنگاه f بر I صعودی است یا نزولی.*

برهان. می‌توان فرض کرد که f غیرثابت باشد، زیرا یک تابع ثابت مسلما "یک‌به‌یک‌نیست". فرض‌کنیم f بر I پیوسته و یک به یک بوده ولی بر I نه صعودی باشد نه نزولی. در این صورت، سه نقطهٔ a, b, c در I وجود دارند به‌طوری که $a < b < c$ و

$$f(a) < f(b), \qquad f(c) < f(b), \tag{۸}$$

یا

$$f(a) > f(b), \qquad f(c) > f(b). \tag{۸'}$$

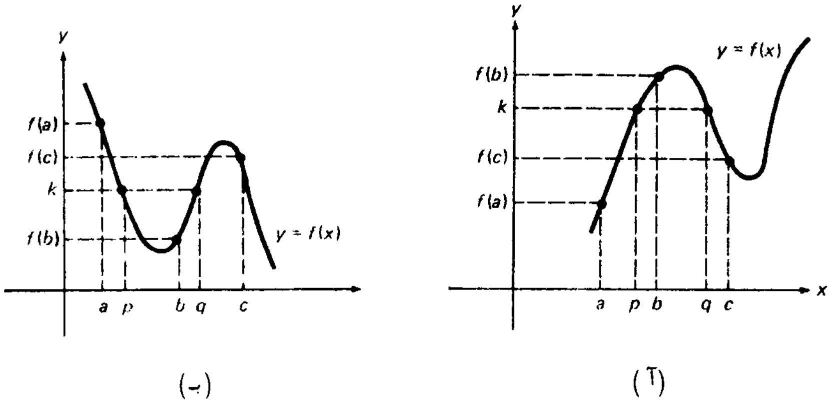
فرض‌کنیم (۸) برقرارباشد، و k را طوری می‌گیریم‌که در نامساویهای

$$f(a) < k < f(b), \qquad f(c) < k < f(b)$$

صدق کند[ر.ک. شکل ۹(آ)]. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند p در بازهٔ (a, b) هست به‌طوری که $f(p) = k$ و نقطه‌ای مانند q در بازهٔ (b, c) هست به طوری که $f(q) = k$. اما در این صورت $f(p) = f(q)$، که با فرض یک به یک بودن f بر I تعارض دارد. با انتخاب

$$f(a) > k > f(b), \qquad f(c) > k > f(b)$$

می‌توان به تناقض مشابهی رسید [ر.ک. شکل ۹ (ب)] .



شکل ۹

شهودا " واضح است که معکوس یک تابع پیوسته خود پیوسته می‌باشد ، چـرا که اگر نمودار f یک تکه باشد ، پس از انعکاس نسبت به خط $y = x$ (عملی که نمودار f^{-1} را می‌دهد) یک تکه می‌ماند . این قضیهٔ زیر را به ما می‌دهد که از برهان آن (که‌درآخراین بخش داده شده) به‌خاطر ماهیت تکنیکی‌اش چشم پوشیده‌ایم .

قضیهٔ ۳ (پیوستگی تابع معکوس) . فرض‌کنیم f بر بازهٔ I پیوسته و یک به یک بوده ، و J نقش I تحت f باشد (بنابر پیوستگی f ، J بازه است) . دراین صورت ، f^{-1} بر J پیوسته می‌باشد .

مثال ۹ . تابع $f(x) = x^n$ (n یک عدد صحیح مثبت است) بر $(-\infty, \infty)$ ، و بخصوص بر $[0, \infty)$ ، پیوسته‌است . به‌علاوه ، f بر $[0, \infty)$ صعودی ،و درنتیجه یک به یک ، بامعکوس $f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ می‌باشد (ر.ک. مثال ۷) . چون نقش بازهٔ $[0, \infty)$ تحـت f مجددا " بازهٔ $[0, \infty)$ است ،ازقضیهٔ۳نتیجه‌می‌شود که $\sqrt[n]{x}$ بر $[0, \infty)$ پیوسته‌می‌باشد . در بخشهای ۸.۱ و ۹.۱ ، پیوستگی $\sqrt[n]{x}$ به‌روش کاملا " متفاوتی ثابت شده است .

مثال ۱۰ . تابع یک به یک

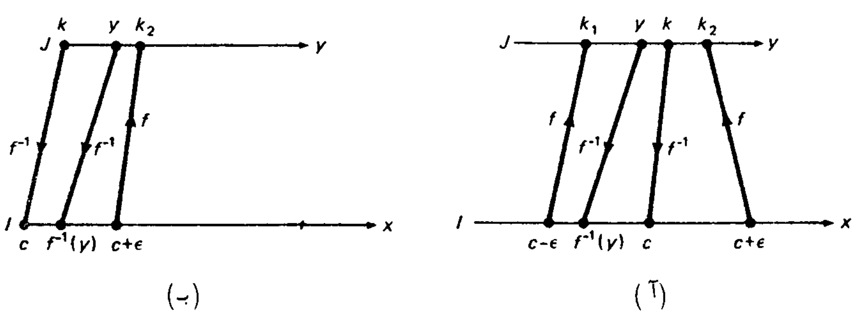
$$f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$$

مثالهای ۲ و ۵ بر $I_1 = (-\infty, 1)$ و $I_2 = (1, \infty)$ پیوسته است . لذا ، معکوسش

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

بر نقشهای این دو بازه تحت f ، یعنی بازه‌هـای $J_1 = (-1, \infty)$ و $J_2 = (-\infty, -1)$ ، پیوسته می‌باشد .

برهان قضیهٔ ۳ *(اختیاری)*. بنابر قضیهٔ ۲ ، f بر I صعودی یا نزولی است . فرض کنیم f بر I صعودی باشد . در این صورت ، طبق قضیهٔ ۱ ، f^{-1} بر J صعودی می‌باشد . فرض کنیم k یک نقطهٔ درونی J بوده ، و $c = f^{-1}(k)$. در این صورت ، c یک نقطهٔ درونی I است (چرا ؟) . برای اثبات پیوسته بودن f^{-1} در k ، به صورت زیر عمل می‌کنیم . فرض کنیم ε عدد مثبت به‌قدر کافی کوچکی باشد که هر دو نقطهٔ $c \pm \varepsilon$ تعلق به I داشته‌باشند ، و قرار می‌دهیم $k_1 = f(c-\varepsilon)$ ، $k_2 = f(c+\varepsilon)$ که ، همانطور که شکل ۱۰ (آ) نشان داده ، ایجاب می‌کند که $c-\varepsilon = f^{-1}(k_1), c+\varepsilon = f^{-1}(k_2)$. در این صورت ، $k_1 < k < k_2$ ، زیرا f صعودی است . هرگاه y متعلق به بازهٔ (k_1, k_2) باشد ، یعنی $k_1 < y < k_2$ ، آنگاه $f^{-1}(k_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(k_2)$ ، زیرا f^{-1} صعودی‌است ، یامعادلاً $c-\varepsilon < f^{-1}(y) < c+\varepsilon$ به عبارت دیگر ، می‌توان $f^{-1}(y)$ را هرقدر بخواهیم به $c = f^{-1}(k)$ نزدیـک کـرد ؛ یعنی با انتخاب y به‌قدر کافی‌نزدیک k ، یعنی دربازهٔ (k_1, k_2) ، در فاصلهٔ ε از c . بنابراین ، وقتی $y \to k$ ، $f^{-1}(y) \to f^{-1}(k)$ ؛ درنتیجه ، f^{-1} در k پیوسته است ، که k یک نقطهٔ درونی دلخواه J می‌باشد . اگر k یک نقطهٔ انتهایی J و متعلق به J باشد ، تعدیل (وساده سازی !) مختصر استدلال فوق ، که در شکل ۱۰ (ب) نموده شده ، ثابت می‌کند که اگـر k



(ب) (آ)

شکل ۱۰

یک نقطهٔ انتهایی چپ (راست) J باشد ، f^{-1} از راست (چپ) پیوسته می‌باشد . دوحکم اخیر باهم نشان‌می‌دهند که f^{-1} بر بازهٔ J پیوسته‌است . اگر جهت افزایش y راعکس‌کرده ،

و این را به حساب بیاوریم که با این کار در شکل ۱۰ (آ) داریم $k_2 < k < k_1$ یا در شکل ۱۰ (ب) داریم $k_2 < k$ ، برهان نزولی بودن f به همین ترتیب جریان خواهد یافت .

مسائل

۱. چه شرطی بر ثابت a تابع خطی $f(x) = ax + b$ را یک به یک می‌سازد ؟ تابع معکوس نظیر f^{-1} را بیابید . چه شرط اضافی بر a باعث تقاطع نمودار f و نمودار f^{-1} در تنها یک نقطه می‌شود ؟ این نقطه را بیابید .

۲. نشان دهید که تابع زوج f نمی‌تواند بر هیچ بازه (یا مجموعه) که نسبت به مبداء متقارن است یک به یک باشد .

۳. نشان دهید هرگاه f یک به یک و فرد باشد ، آنگاه f^{-1} نیز فرد می‌باشد .

۴. نشان دهید هرگاه f و g یک به یک باشند ، آنگاه $f \circ g$ نیز یک به یک بوده و $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

آیا تابع داده شده بر بازهٔ ذکر شده یک به یک است ؟ جواب خود را در هر حالت توضیح دهید .

۵. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ بر $(-\infty, 1]$ ✓

۶. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ بر $[2, 4]$ ✓

۷. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ بر $[-1, 1]$ ✓

۸. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ بر $[1, \infty)$ ✓

۹. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ بر $[1, 3]$ ✓

۱۰. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ بر $[0, 2]$ ✓

۱۱. $f(x) = x^{3/5}$ بر $(-\infty, \infty)$

۱۲. $f(x) = x^{8/3}$ بر $(-\infty, \infty)$

۱۳. $f(x) = x^{-2/5}$ بر $(-\infty, 0)$

۱۴. $f(x) = x^{-5/4}$ بر $(0, \infty)$

۱۵. $f(x) = \sin x$ بر $[\pi/4, 3\pi/4]$ ✓

۱۶. $f(x) = \cos x$ بر $[0, \pi]$ ✓

۱۷. $f(x) = \tan x$ بر $(-\pi/2, \pi/2)$

۱۸. $f(x) = \sec x$ بر $(-\pi/2, \pi/2)$ ✓

۱۹. $f(x) = \cos x + \sin x$ بر $[0, \pi]$ ✓

۲۰. $f(x) = x + \cos x$ بر $(-\infty, \infty)$ ✓

تمام بازه‌ها به طول π را بیابید که بر آنها

۲۱. $\sin x$ یک به یک باشد. ۲۲. $\cos x$ یک به یک باشد.

با حل نسبت به x به عنوان تابعی از y، معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

۲۳. $y = -x$

۲۴. $y = 2x + 1$

۲۵. $y = \dfrac{1}{x}$

۲۶. $y = \dfrac{1}{1-x}$

۲۷. $y = \dfrac{x}{x+1}$

۲۸. $y = \dfrac{3x-1}{3x+1}$

۲۹. $y = x^3 - 2$

۳۰. $y = \sqrt[3]{x-1}$

۳۱. $y = \sqrt{x(8-x)} \quad (0 \le x \le 4)$

۳۲. $y = \sqrt{x(8-x)} \quad (4 \le x \le 8)$

با استفاده از فرمول $f(f^{-1}(x)) \equiv x$، مثل مثال ۵، معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

۳۳. $f(x) = 1 - 3x$

۳۴. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

۳۵. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \quad (0 \le x < \infty)$

۳۶. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \quad (-\infty < x \le 0)$

۳۷. $f(x) = 2 - \sqrt{x-3}$

۳۸. $f(x) = (x^3+1)^{1/3}$

۳۹. $f(x) = x^2 - 2x + 5 \quad (-\infty < x \le 1)$

۴۰. $f(x) = x^2 - 2x + 5 \quad (1 \le x < \infty)$

۴۱. نمودار تابع $y = f(x)$ که معکوس خودش است را توصیف کنید.

نشان دهید که هر یک از توابع زیر معکوس خودش است.

۴۲. $f(x) = 2 - x$

۴۳. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

۴۴. $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$

۴۵. $f(x) = \dfrac{3x+5}{4x-3}$

۴۶. $f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad (0 \le x \le 3)$

۴۷. با استفاده از قضیهٔ ۳، نشان دهید اگر n فرد باشد، $\sqrt[n]{x}$ بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته‌است.

۴۸. در تعریف جفت مرتبی یک تابع (ر.ک. مسئلهٔ ۵۸، صفحهٔ ۷۲)، دو جفت مرتب در f با عنصر اول یکسان نمی‌توانند وجود داشته باشند. چه شرط اضافی f را یک‌به یک می‌سازد؟ اگر f یک به یک باشد، تابع معکوس f^{-1} چطور به دست می‌آید؟

۴۹. نشان دهید که معکوس تابع (۷) بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته است.

۲.۵ مشتق یک تابع معکوس

همانطور که اینک نشان می‌دهیم، رابطهٔ ساده‌ای بین مشتق f^{-1}، معکوس تابع یک به یک f، و مشتق خود f وجود دارد.

قضیهٔ ۴ (مشتق تابع معکوس). *فرض کنیم f در همسایگی نقطهٔ x پیوسته و یک به یک بوده، و f در x مشتق ناصفر متناهی داشته باشد. در این صورت، f^{-1} درنقطهٔ $y = f(x)$ مشتقی مساوی*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (1)$$

دارد، که در آن $x = f^{-1}(y)$

برهان. فرض کنیم I همسایگی x بوده، و J نقش I تحت f باشد. در این صورت، f^{-1} بر J، بخصوص در نقطهٔ $y = f(x)$ که یک نقطهٔ درونی J است، پیوسته می‌باشد (این احکام از قضایای ۲ و ۳، صفحات ۴۵۵ و ۴۵۶ نتیجه می‌شوند). فرض کنیم y بوده، و $u = f^{-1}(v)$. در این صورت،

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{v \to y} \frac{f^{-1}(v) - f^{-1}(y)}{v - y}$$

$$= \lim_{v \to y} \frac{u - x}{f(u) - f(x)} = \lim_{v \to y} \frac{1}{\dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}}$$

(چرا مخرج صفر وجود ندارد؟). اما f^{-1} در y پیوسته‌است؛ و درنتیجه، $v \to y$ ایجاب می‌کند که $f^{-1}(v) \to f^{-1}(y)$، یا معادلاً" $u \to x$. پس نتیجه می‌شود که

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{u \to x} \frac{1}{\dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}} = \frac{1}{\lim\limits_{u \to x} \dfrac{f(u) - f(x)}{u - x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

این روش اثبات در صفحهٔ ۲۲۰ در اثبات $D_x x^r = rx^{r-1}$ به ازای عدد گویای دلخواه r پیش‌بینی شد. با نماد d ، (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x)}{dx}}.$$

به‌طور فشرده، داریم

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}},$$

یا معادلاً

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}, \qquad \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = 1.$$

سه فرمول اخیر شبیه اتحادهای جبری‌اند، ولی البته برهانی برای قضیه به ما نمی‌دهند. اما گواه دیگری هستند بر شایستگی نماد d .

مثال ۱. تابع

$$y = f(x) = \frac{1+x}{1-x} \qquad (x \neq 1) \tag{۲}$$

پیوسته، مشتقپذیر، و یک به یک است با معکوس

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1} \qquad (y \neq -1) \tag{۳}$$

(ر.ک. مثال ۲، صفحهٔ ۴۴۸). از اینرو، طبق قضیهٔ ۴،

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \qquad (y \neq -1),$$

مشروط بر اینکه $f'(x) \neq 0$. با مشتقگیری از (۲) نسبت به x ، به دست می‌آوریم

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \qquad (x \neq 1),$$

که هرگز صفر نیست. بنابراین، به ازای هر $x \neq 1, y \neq -1$ ،

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{2}{(1-x)^2}} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

با گذاردن (۳) در این فرمول، خواهیم داشت

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{\left(1-\frac{y-1}{y+1}\right)^2}{2}=\frac{2}{(y+1)^2}, \tag{۴}$$

یا معادلاً"، اگر x را متغیر مستقل بگیریم،

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx}=\frac{2}{(x+1)^2}.$$

به عنوان تمرین، اعتبار (۴) را با مشتقگیری مستقیم از (۳) نسبت به y تحقیق کنید

مثال ۲. هرگاه $y=\sqrt{x}$، آنگاه $x=y^2$. بنابراین، همانطور که از قبل می‌دانیم،

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x>0).$$

مثال ۳. به فرض آنکه

$$f(x)=x^8+3x^4+2x^2+1 \qquad (0\le x<\infty),$$

$(f^{-1})'(7)$ را بیابید.

حل. چون به ازای $x>0$، $f'(x)=8x^7+12x^3+4x>0$، می‌دانیم که f بر $[0,\infty)$ صعودی است. بنابراین، f بر $[0,\infty)$ یک به یک با تابع معکوس f^{-1} می‌باشد. به آسانی معلوم می‌شود که $f(1)=7, f'(1)=24$. از اینرو، طبق قضیهٔ ۴،

$$(f^{-1})'(7)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{24}.$$

توجه کنید که قضیهٔ ۴ به ما توان محاسبهٔ مقدار مشتق f^{-1} را حتی در حالاتی که یافتن فرمول صریح برای f^{-1} ناممکن است می‌بخشد. این وضع یادآور تکنیک مشتقگیری ضمنی است، و این امری تصادفی نیست (ر.ک. مسئلهٔ ۱).

مثال ۴. به فرض آنکه

$$f(x)=2x+\sin^3 x,$$

$(f^{-1})'(0)$ را بیابید.

حل. داریم

$$f'(x) = 2 + 3\sin^2 x \cos x = 2 + \frac{3}{2}\sin x \sin 2x,$$

که در آن

$$|\sin x \sin 2x| = |\sin x|\,|\sin 2x| \le 1.$$

لذا، به ازای هر x، $f'(x) \ge \frac{1}{2} > 0$، و f بر $(-\infty, \infty)$ صعودی است. پس نتیجه‌می‌شود که f بر $(-\infty, \infty)$ یک به یک با تابع معکوس f^{-1} می‌باشد. به‌علاوه، $f(0) = 0, f'(0) = 2$؛ و درنتیجه، طبق قضیهٔ ۴،

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

این حالت دیگری است که در آن یافتن فرمول صریح برای معکوس f^{-1} ممکن نیست.

مسائل

۱. به فرض مشتقپذیر بودن f و f^{-1}، فرمول (۱) را به کمک مشتقگیری ضمنی ثابت کنید.

۲. فرض کنید $y = f(x) = x^2 + 2x + 1$، که در آن $x \ge -1$. $(f^{-1})'(9)$ را با استفاده از قضیهٔ ۴ حساب کنید. سپس جواب را ابتدا با حل نسبت به x به عنوان تابعی از y امتحان نمایید.

با استفاده از قضیهٔ ۴، $(f^{-1})'(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۳. $f(x) = 4x^2 - 5x + 1, c = 10$

۴. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4, c = -16$

۵. $f(x) = \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - 1, c = 7$

۶. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, c = 5$

۷. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}, c = -3$

۸. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}, c = \dfrac{1}{2}$

۹. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, c = 4$

۱۰. $f(x) = x^{21} + 2x^{11} + 5x^7, c = -8$

۱۱. $f(x) = x + \cos x, c = \pi - 1$

۱۲. $f(x) = x^3 + x + \sin x,\ c = 0$

۱۳. $f(x) = \tan x,\ c = -\sqrt{3}$

۱۴. $f(x) = \cot^3 x,\ c = 1$

در هر حالت تحقیق کنید که f بر بازهٔ مناسبی یک به یک است.

در مسائل ۱۵ تا ۲۰ هر تابع f یک به یک با معکوس f^{-1} است. مماس بر منحنی $y = f^{-1}(x)$ در نقطهٔ دادهٔ شدهٔ P را بیابید.

۱۵. $f(x) = \dfrac{x}{x-4},\ P = (-3, 3)$

۱۶. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-5},\ P = (2, 11)$

۱۷. $f(x) = x^3 + x,\ P = (-10, -2)$

۱۸. $f(x) = x + \sin x,\ P = \left(\dfrac{\pi}{2} + 1, \dfrac{\pi}{2}\right)$

۱۹. $f(x) = \sqrt{169 - x^2}\ (0 \le x \le 13),\ P = (12, 5)$

۲۰. $f(x) = \sqrt{169 - x^2}\ (-13 \le x \le 0),\ P = (5, -12)$

۲۱. فرض کنید $f(x) = \int_1^x \sqrt{2 + \sin^{11} t}\, dt$. نشان دهید که f بر $(-\infty, \infty)$ یک به یک است. قرار دهید $a = f(\pi), b = f(3\pi/2)$ ، با آنکه قادر به محاسبهٔ این اعداد نیستیم. $(f^{-1})'(a)$ و $(f^{-1})'(b)$ را بیابید. همچنین، $(f^{-1})'(0)$ را پیدا نمایید.

فرض کنید $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + u^6}\, du$. $(f^{-1})'(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۲۲. $c = 0$ ۲۳. $c = f(\frac{1}{2})$ ۲۴. $c = f(\sqrt{2})$

۲۵. فرض کنید f در همان شرایط قضیهٔ ۴ صدق کرده، و نیز f در نقطهٔ x مشتق دوم متناهی داشته باشد. نشان دهید که f^{-1} در نقطهٔ $y = f(x)$ مشتق دومی مساوی

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \qquad \text{(یک)}$$

دارد

در مسائل ۲۶ تا ۳۱، هر یک از توابع یک به یک با معکوس f^{-1} می‌باشد. با استفاده از (یک)، $(f^{-1})''(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۲۶. $f(x) = x^{3/2},\ c = 8$

۲۷. $f(x) = \dfrac{3x+1}{3x-1},\ c = 2$

۰۲۸. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+2}, c = 1$

۰۲۹. $f(x) = x + \sin x, c = 0$

۰۳۰. $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+v^2}\, dv, c = f(1)$

۰۳۱. $f(x) = \tan^3 x\ (-\pi/2 < x < \pi/2), c = -1$

۰۳۲. فرض کنید f بر بازهٔ I مشتقپذیر با مشتق f' بوده، و f' بر I ناصفر باشد. در این صورت، f بر I یکنوا و یک به یک با معکوس f^{-1} است. فرض کنید بازهٔ J نقش I تحت f باشد. نشان دهید هرگاه f بر I به بالا (پایین) مقعر باشد، آنگاه f^{-1} در حالت نزولی بودن f بر J به بالا (پایین) مقعر و در حالت صعودی بودن f بر J به پایین (بالا) مقعر است. نشان دهید هرگاه f در نقطهٔ درونی c از I نقطهٔ عطف داشته باشد، آنگاه f^{-1} در $f(c)$ نقطهٔ عطف دارد.

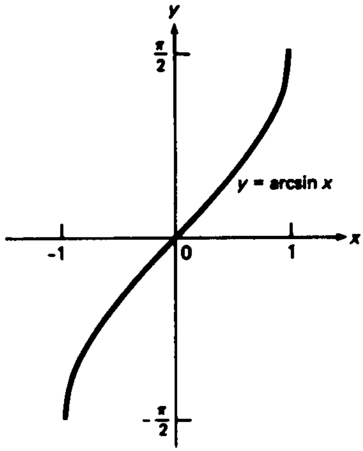
۳۰۵ توابع مثلثاتی معکوس

حال به یافتن توابع معکوس مناسبی برای توابع مثلثاتی $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$، $\cot x$، $\sec x$، و $\csc x$ می‌پردازیم. هر یک از این شش تابع متناوب است؛ و درنتیجه، نمی‌تواند برقلمرو تعریف طبیعی خود یک‌به‌یک باشد. مثلاً، $\sin x$ بر $(-\infty, \infty)$ متناوب با دورهٔ تناوب اساسی 2π است، و شرط تناوب $\sin(x+2\pi) \equiv \sin x$ خود $\sin x$ را از یک به یک بودن وا می‌دارد، زیرا این شرط می‌گوید که سینوس در نقاط متمایز x و $x+2\pi$ مقدار یکسان می‌گیرد. برای آنکه تابع $\sin x$ یک به یک شود که بتواند تابع معکوس داشته باشد، باید قلمرو X آن را به طرز شایسته‌ای، بدون آنکه بی‌جهت خیلی کوچک شود، محدود کنیم. انتخاب متعارف X بازهٔ $[-\pi/2, \pi/2]$ است، که بر آن $\sin x$ صعودی و درنتیجه یک به یک است. (به آسانی معلوم می‌شود که $\sin x$ بر هر بازه به طول بزرگتر از π یک به یک نیست.) پس برد $\sin x$ بازهٔ $Y = [-1, 1]$ است، که همان برد $\sin x$ است وقتی بر تمام بازهٔ $(-\infty, \infty)$ تعریف شده باشد.

سینوس معکوس. حال‌که قلمرو $\sin x$ به‌بازهٔ $X = [-\pi/2, \pi/2]$ محدود شده‌است، می‌توان معکوس $\sin x$ را گرفته تابعی به‌نام **سینوس معکوس** به دست آوریم. به طور مشخص، سینوس معکوس y، که با $\arcsin y$ نموده می‌شود، عدد منحصر به فرد x در بازهٔ $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ است به طوری که $y = \sin x$. نماد دیگر $\sin^{-1} y$ است، ولی در استفاده از این نماد باید مواظب خلط با متقابل $\sin y$ بود که با $1/\sin y$ یا $(\sin y)^{-1}$ نموده می‌شود؛ این تذکر را

در مورد توابع مثلثاتی معکوس دیگر نیز می‌دهیم . هر دو نماد مرسوم است . "نماد قوس" کمتر مبهم است ، ولی " نماد -1 " جای کمتری را می‌گیرد ؛ و درنتیجه ، برای مهره‌های ماشینهای حساب علمی جیبی ارجح است . توجه کنید که تابع $\arcsin y$ دارای قلمرو $Y = [-1, 1]$ و برد $X = [-\pi/2, \pi/2]$ می‌باشد .

پیش از رسم تابع سینوس معکوس، $\arcsin y$ را با $\arcsin x$ عوض کرده x را متغیر مستقل می‌گیریم . نمودار $\arcsin x$ در شکل ۱۱ نموده شده است ، و منعکس بخشی از نمودار $\sin x$ ،



شکل ۱۱

یعنی بخشی که بین خطوط $x = \pm\pi/2$ است ، نسبت به خط $y = x$ می‌باشد .خواهید دید که $\arcsin x$ بر $[-1, 1]$ صعودی است که با قضیهٔ ۱ سازگار است ، و بر $[-1, 1]$ پیوسته است که با قضیهٔ ۳ سازگار می‌باشد . همچنین ، توجه کنید که طبق انتظار ما $\arcsin x$ بر $[-1, 1]$ فرد است (ر.ک. مسئلهٔ ۳ ، صفحهٔ ۴۵۸) .

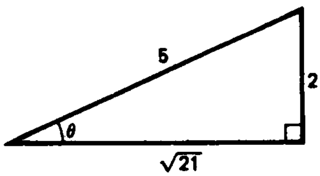
مثال ۱ . $\sin(\arcsin 1)$ و $\arcsin(\sin \pi)$ را حساب کنید .

حل . سینوس زاویه‌ای‌که سینوس آن 1 است باید 1 باشد ؛ و درنتیجه ، $\sin(\arcsin 1) = 1$. این حالت خاصی‌از فرمول $f(f^{-1}(x)) = x$ است‌که برای هر تابع یک به یک f ومعکوس f^{-1} درست است . به خاطر فرمول $f^{-1}(f(x)) = x$ ممکن است اغوا شده و بنویسیم $\arcsin(\sin \pi) = \pi$ ، ولی این رابطه درست نیست‌ا در واقع ، π مقداری از تابع سینوس معکوس، که بردش $[-\pi/2, \pi/2]$ است ، نیست . از آن سو، $\sin \pi = 0$ و زاویهٔ منحصربه‌فردی

در $[-\pi/2, \pi/2]$ ، یعنی زاویهٔ 0 ، هست که سینوس آن 0 می‌باشد . پس نتیجه می‌شود که $\arcsin(\sin\pi) = 0$.

مثال ۲ . $\tan(\arcsin \frac{2}{5})$ را حساب کنید .

حل . منظور از $\arcsin \frac{2}{5}$ یعنی زاویهٔ θ بین $-\pi/2$ و $\pi/2$ که سینوس آن $\frac{2}{5}$ است . شکل ۱۲ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ حادهٔ θ را نشان می‌دهد که طول ضلع مقابل θ مساوی 2 بوده



شکل ۱۲

و طول وتر برابر 5 می‌باشد . بنابر قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع دیگر مساوی است با $\sqrt{25-4} = \sqrt{21}$. از اینرو، $\tan\theta$ ، یعنی نسبت طول ضلع مقابل θ به ضلع مجاور θ ، مساوی است با $2/\sqrt{21}$ ؛ و لذا ، $\tan(\arcsin \frac{2}{5}) = 2/\sqrt{21}$.

برای مشتقگیری از سینوس معکوس، قرار می‌دهیم $y = \arcsin x,\ x = \sin y$ و قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۴۶۰ ، را به کار می‌بریم . درنتیجه ، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin y)} = \frac{1}{\cos y},$$

مشروط براینکه $\cos y \neq 0$. توجه کنید که این فرمول فقط بر بازهٔ باز $-\pi/2 < y < \pi/2$ برقرار است که $\cos y > 0$ و

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

از تلفیق دو فرمول اخیر معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (1)$$

مشروط براینکه $-1 < x < 1$. از (۱) فورا" نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (|x| < 1). \tag{۲}$$

به‌علاوه، بااستفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای از $\arcsin (x/a)$ که $a > 0$ مشتق می‌گیریم ، به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dx} \arcsin \frac{x}{a} = \frac{1/a}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad (a > 0, |x| < a), \tag{۲'}$$

که تعمیم (۲) می‌باشد .

مثال ۳ . انتگرال $I = \int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ را حساب کنید .

حل . چون

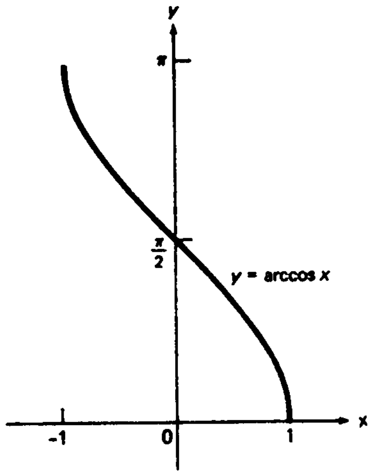
$$I = \int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{\sqrt{9(\frac{4}{9}-x^2)}} = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{2}/3} \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}},$$

از فرمول (۲') به ازای $a = \frac{2}{3}$ نتیجه می‌شود که

$$I = \frac{1}{3}\left[\arcsin \frac{3x}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/3} = \frac{1}{3}\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin 0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

به بیان دیگر، چون $\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4-(3x)^2}$ ، همین جواب را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ (چهار) ، صفحهٔ ۴۰۲ ، و فرمول (۲') به ازای $a = 2$ به دست آورد .

کسینوس معکوس . برای تعریف کسینوس معکوس، که با $\arccos x$ یا $\cos^{-1} x$ نموده می‌شود، به همین‌نحو عمل می‌کنیم .از آغازنقشهای x و y را باهم عوض‌کرده، می‌نویسیم $x = \cos y$ ؛ درنتیجه ، وقتی تابع معکوس را تشکیل می‌دهیم ، x متغیر مستقل و y متغیر وابسته‌می‌باشد. سپس قلمرو $\cos y$ را به بازهٔ $[0, \pi]$ محدود می‌کنیم . تابع $\cos y$ بر این بازه نزولی و در نتیجه یک به یک است که این بازه را به‌روی بازهٔ $[-1, 1]$ می‌نگارد . تابع معکوس نظیر $y = \arccos x$ بر $[-1, 1]$ نزولی و پیوسته است ،و نمودارش در شکل ۱۳ نموده شده است .



شکل ۱۳

مقایسهٔ اشکال ۱۱ و ۱۳ باهم نشان می‌دهد که نمودار $\arccos x$ را می‌توان از $\arcsin x$ با انعکاس نسبت به محور y و سپس انتقالی به اندازهٔ $\pi/2$ واحد به بالا به دست آورد. بنابر این،

$$\arccos x = \arcsin(-x) + \frac{\pi}{2},$$

یا، معادلاً،

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \qquad (۳)$$

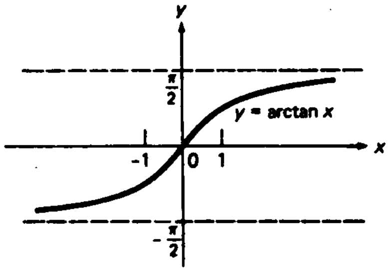
زیرا $\arcsin x$ فرد است. با مشتقگیری از (۳) معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{d}{dx}\arcsin x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (۴)$$

مشروط براینکه $-1 < x < 1$.

تانژانت معکوس. حال به *تانژانت معکوس* می‌پردازیم که با $\arctan x$ یا $\tan^{-1} x$ نموده می‌شود. می‌نویسیم $x = \tan y$، و یکی از بی‌نهایت شاخهٔ $\tan y$ را با تحدید قلمرو $\tan y$ به بازهٔ باز $(-\pi/2, \pi/2)$ انتخاب می‌کنیم. تابع $\tan y$ بر این بازه صعودی و درنتیجه‌یک به یک است، که‌این بازه را به‌رویبازهٔ $(-\infty, \infty)$ می‌نگارد. تابع معکوس‌نظیر $y = \arctan x$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ صعودی و پیوسته است، که این بازه را به روی بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$

می‌نگارد ، و نمودارش در شکل ۱۴ نموده شده است . نمودار $\arctan x$ منعکس شاخه‌ٔ معینی از $\tan x$ نسبت به خط $y = x$ است ، و تحت این انعکاس ، مجانبهای قائم $x = \pm\pi/2$ از $\tan x$ به مجانبهای افقی $y = \pm\pi/2$ از $\arctan x$ تبدیل می‌شوند . توجه کنید که $\arctan x$ یک تابع فرد مانند $\tan x$ است .



شکل ۱۴

برای مشتقگیری از تانژانت معکوس ، قرار می‌دهیم $x = \tan y$ ، $y = \arctan x$ و با اعمال قضیه‌ٔ ۴ به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\tan y} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

اما

$$\sec^2 y = \tan^2 y + 1 = x^2 + 1$$

(ر.ک . فرمول (۶) ، صفحه‌ٔ ۸۸) ؛ و لذا ،

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1}. \tag{۵}$$

از رابطه‌ٔ (۵) فوراً نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C. \tag{۶}$$

به‌علاوه ، با استفاده از قاعده‌ٔ زنجیره‌ای ، از $\arctan (x/a)$ مشتق گرفته به‌دست‌می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\arctan\frac{x}{a} = \frac{1/a}{(x/a)^2+1} = \frac{a}{x^2+a^2}.$$

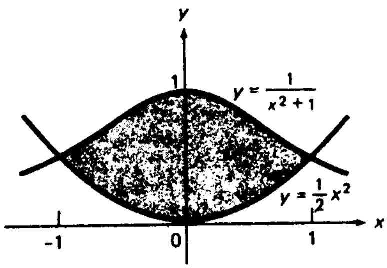
پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0), \tag{۶'}$$

که رابطهٔ (۶) را تعمیم می‌دهد. در واقع، فرض $a > 0$ هیچ کلیتی را خدشه‌دار نمی‌کند.

مثال ۴. مساحت بین منحنیهای $y = 1/(x^2 + 1)$ و $y = \frac{1}{2}x^2$ را بیابید.

حل. مساحت A ی ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۱۵ را جستجو می‌کنیم. برای یافتن مختصات x نقاطی که در آنها دو منحنی متقاطعند، معادلهٔ $1/(x^2 + 1) = \frac{1}{2}x^2$ را حل می‌کنیم، که



شکل ۱۵

معادل است با

$$x^4 + x^2 - 2 = (x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0. \tag{۷}$$

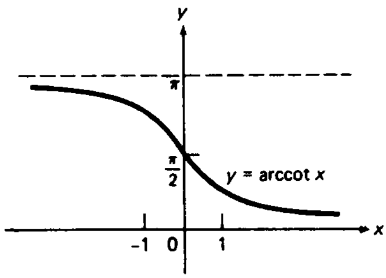
چون عامل $x^2 + 2$ هرگز صفر نیست، معادلهٔ (۷) فقط دو ریشهٔ $x = 1$ و $x = -1$ را دارد. بر بازهٔ $[-1, 1]$، منحنی "زنگدیس" $y = 1/(x^2 + 1)$ منحنی بالایی و سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ منحنی پایینی می‌باشد. به کمک (۶) نتیجه می‌شود که

$$A = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}x^2\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$= 2\left[\arctan x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = 2\left(\arctan 1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

زوج بودن انتگرالده در مرحلهٔ دوم به کار رفته است (مسئلهٔ ۱، صفحهٔ ۴۱۵ را به یاد آورید).

کتانژانت معکوس. برای تعریف *کتانژانت معکوس* که با $\operatorname{arccot} x$ یا $\cot^{-1} x$ نموده می‌شود می‌نویسیم $x = \cot y$ و قلمرو $\cot y$ را به بازهٔ $(0, \pi)$ محدود می‌کنیم. تابع $\cot y$ بر این بازه نزولی، و درنتیجه یک به یک، است، که این بازه را به روی بازهٔ $(-\infty, \infty)$ می‌نگارد. تابع معکوس نظیر $y = \operatorname{arccot} x$ بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ نزولی و پیوسته است، که این بازه را به

روی بازهٔ $(0, \pi)$ می‌نگارد، و دارای نمودار شکل ۱۶ است. مقایسهٔ اشکال ۱۴ و ۱۶ نشان می‌دهد که نمودار $\operatorname{arccot} x$ را می‌توان از نمودار $\arctan x$ با انعکاس نسبت به محور x و



شکل ۱۶

سپس انتقال به اندازهٔ $\pi/2$ واحد به بالا به دست آورد. بنابراین،

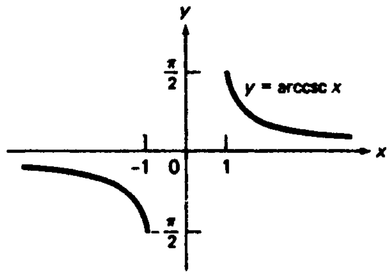
$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x. \tag{۸}$$

با مشتقگیری از (۸) معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\frac{d}{dx}\arctan x = -\frac{1}{x^2+1}. \tag{۹}$$

سکانت و کسکانت معکوس. دو تابع مثلثاتی معکوس باقیمانده **سکانت معکوس** است که با $\operatorname{arcsec} x$ یا $\sec^{-1} x$ نموده می‌شود، و **کسکانت معکوس** است که با $\operatorname{arccsc} x$ یا $\csc^{-1} x$ نموده می‌شود. مطلب را با $\operatorname{arccsc} x$ شروع می‌کنیم، زیرا این تابع عملاً از دو تابع دیگر به خاطر فرد بودن ساده‌تر است. می‌نویسیم $x = \csc y$ و قلمرو $\csc y$ را جفت‌بازهٔ $[-\pi/2, 0)$ و $(0, \pi/2]$ اختیار می‌کنیم؛ نقطهٔ 0 باید مستثنی شود، زیرا $\csc 0$ تعریف نشده است. تابع $\csc y$ بر هر یک از این دو بازه نزولی، و درنتیجه یک به یک، است. به علاوه، بر هر یک از بازه‌های $[-\pi/2, 0)$ و $(0, \pi/2]$ پیوسته است، که آنها را به‌ترتیب به‌روی بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$ می‌نگارد. تمام این اطلاعات را می‌توان از شکل ۲۵، صفحهٔ ۱۰۵، به‌دست‌آورد. تابع معکوس نظیر $y = \operatorname{arccsc} x$ بر هر یک از بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$ نزولی و پیوسته است، که این بازه‌ها را به ترتیب به روی $[-\pi/2, 0)$ و $(0, \pi/2]$ می‌نگارد، ولی بر بازهٔ $(-1, 1)$ تعریف نشده است. نمودار $\operatorname{arccsc} x$ در شکل ۱۷ نموده شده است، که از آن معلوم می‌شود که $\operatorname{arccsc} x$ مانند $\csc x$ یک تابع فرد است.

برای مشتقگیری از کسکانت معکوس، به شکل معمول عمل کرده، می‌نویسیم



شکل ۱۷

$x = \csc y, \ y = \text{arccsc}\, x$ و قضیهٔ ۴ را اعمال می‌کنیم . درنتیجه ، به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\text{arccsc}\, x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\csc y} = \frac{1}{-\csc y \cot y}.$$

اما

$$\cot^2 y = \csc^2 y - 1 = x^2 - 1$$

(ر.ک. فرمول (۶) ، صفحهٔ ۸۸) ؛ و درنتیجه ،

$$\cot y = \pm\sqrt{x^2 - 1}. \qquad (۱۰)$$

در انتخاب علامت در (۱۰) باید خیلی محتاط بود . درواقع ، چون $\cot y$ وقتی $0 < y < \pi/2$ مثبت و وقتی $-\pi/2 < y < 0$ منفی است ، باید وقتی $0 < y < \pi/2$ ، یعنی $x = \csc y > 1$ ، علامت به‌علاوه ، و وقتی $-\pi/2 < y < 0$ ، یعنی $x = \csc y < -1$ ، علامت منها را برگزینیم . بنابراین ،

$$\frac{d}{dx}\text{arccsc}\, x = \begin{cases} -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{اگر } x > 1 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{اگر } x < -1 \end{cases}$$

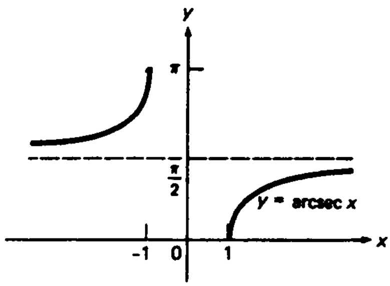
یا ، به طور ساده ،

$$\frac{d}{dx}\text{arccsc}\, x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad (۱۱)$$

مشروط براینکه $|x| > 1$

بالاخره ، برای تعریف $\text{arcsec}\, x$ می‌نویسیم $x = \sec y$ و قلمرو $\sec y$ را جفت بازهٔ $[0, \pi/2)$ و $(\pi/2, \pi]$ اختیار می‌کنیم ؛ نقطهٔ $\pi/2$ باید مستثنی شود ، زیرا $\sec(\pi/2)$ تعریف

نشده است . تابع $\sec y$ بر هر یک از این دو بازه صعودی ، و درنتیجه یک به یک ،است . به علاوه ، بر هر یک از بازه‌های $[0, \pi/2)$ و $(\pi/2, \pi]$ پیوسته است ، که این بازه‌ها را به‌ترتیب روی بازه‌های $[1, \infty)$ و $(-\infty, -1]$ می‌نگارد . تمام این اطلاعات را نیز می‌توان از شکل ۲۵ ، صفحهٔ ۱۰۵ ،به دست آورد . تابع معکوس نظیر $\operatorname{arcsec} x$ بر هر یک از بازه‌های $[1, \infty)$ و $(-\infty, -1]$ صعودی و پیوسته است ، که آنها را به ترتیب روی بازه‌های $[0, \pi/2)$ و $(\pi/2, \pi]$ می‌نگارد ، ولی بر بازهٔ $(-1, 1)$ تعریف نشده است . نمودار $\operatorname{arcsec} x$ در شکل ۱۸ نموده شده است . مقایسهٔ شکلهای ۱۷ و ۱۸ باهم نشان می‌دهد که نمودار $\operatorname{arcsec} x$ را می‌توان از



شکل ۱۸

نمودار $\operatorname{arccsc} x$ به وسیلهٔ انعکاس نسبت به محور x و پس از آن انتقال به اندازهٔ $\pi/2$ واحد به بالا به دست آورد . بنابراین ،

$$\operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccsc} x. \qquad (۱۲)$$

با مشتقگیری از (۱۲) معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = -\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad (۱۳)$$

مشروط براینکه $|x| > 1$.

مثال ۵ . نشان دهید که

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos\frac{1}{x}, \qquad (۱۴)$$

$$\operatorname{arccsc} x = \arcsin\frac{1}{x}, \qquad (۱۴')$$

مشروط براینکه $|x| \geq 1$.

حل . هرگاه $y = \operatorname{arcsec} x$ ، آنگاه $\sec y = x$ یا معادلا" $\cos y = 1/x$. پس نتیجه می‌شود که $y = \arccos (1/x)$ ، زیرا y عددی در بازهٔ $0 \le y \le \pi$ می‌باشد . از مقایسهٔ دو عبارت مربوط به y رابطهٔ (۱۴) به دست می‌آید . با استدلالی مشابه ، که به عنوان تمرین گذارده می‌شود ، فرمول (۱۴') ثابت خواهد شد .

با جمع‌آوری فرمولهای (۱) ، (۴) ، (۵) ، (۹) ، (۱۱) ، و (۱۳) در یک‌جا، داریم

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}, \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

مثال ۶ . با استفاده از این فرمولها و قاعدهٔ زنجیره‌ای ، از

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}$$

مشتق گرفته به دست می‌آوریم

$$f'(x) = \frac{1}{(1/x)^2 + 1} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{-1/x^2}{(1/x)^2 + 1} = -\frac{1}{x^2 + 1},$$

که در آن باید فرض کنیم $x \neq 0$ ، زیــرا $f(0)$ ، و درنتیجه $f'(0)$ ، تعریف نشده است . بنابر این ، $f(x)$ بر هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ دارای همان مشتق $-\arctan x$ اســت . پس نتیجه می‌شود که

$$\arctan \frac{1}{x} = -\arctan x + C_1 \qquad (0 < x < \infty), \tag{۱۵}$$

$$\arctan \frac{1}{x} = -\arctan x + C_2 \qquad (-\infty < x < 0), \tag{۱۵'}$$

که در آنها C_1 و C_2 دو ثابت‌اند که لازم نیست یکی باشند . در واقع ، C_1 و C_2 نامساوی‌اند زیرا ، با گذاردن $x = 1$ در (۱۵) ، داریم

$$\arctan 1 = -\arctan 1 + C_1, \qquad \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + C_1,$$

درنتیجه ، $C_1 = \pi/2$ ، و نیز با گذاردن $x = -1$ در (۱۵') نتیجه می‌شود که

$$\arctan(-1) = -\arctan(-1) + C_2, \qquad -\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + C_2,$$

درنتیجه ، $C_2 = -\pi/2$. با این مقادیر C_1 و C_2 می‌توان (۱۵) و (۱۵') را به فرمول واحدی تلفیق کرد :

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ ، اگر } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ ، اگر } x < 0 \end{cases} \qquad (۱۶)$$

مسائل

کمیات زیر را بدون استفاده از جدول یا ماشین حساب محاسبه نمایید .

۱ . $\arcsin \frac{1}{2}$ — ۲ . $\operatorname{arccot}(-1)$

۳ . $\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$ — ۴ . $\operatorname{arccsc}(2/\sqrt{3})$

۵ . $\arctan(-1/\sqrt{3})$ — ۶ . $\arccos 1$

۷ . $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$ — ۸ . $\operatorname{arcsec} 2$

۹ . $\operatorname{arccsc}(-\sqrt{2})$ — ۱۰ . $\arctan\sqrt{3}$

۱۱ . $\arccos(-\frac{1}{2})$ — ۱۲ . $\arcsin(1/\sqrt{2})$

۱۳ . $\arcsin(\sin(3\pi/2))$ — ۱۴ . $\sin(\arccos(-1/\sqrt{2}))$

۱۵ . $\cos(\arcsin\frac{1}{3})$ — ۱۶ . $\tan(\arccos\frac{1}{4})$

۱۷ . $\operatorname{arcsec}(\sec(5\pi/4))$ — ۱۸ . $\operatorname{arccot}(\tan(4\pi/3))$

۱۹ . معکوس تابع $\sin x$ در صورت محدود شدن قلمروش به بازهٔ $[\pi/2, 3\pi/2]$ چیست ؟

عبارات زیر را بدون استفاده از توابع مثلثاتی یا مثلثاتی معکوس بیان کنید .

۲۰ . $\sin(\operatorname{arcsec} x)$ — ۲۱ . $\cos(\arctan x)$

۲۲ . $\tan(\arcsin x)$ — ۲۳ . $\sin(2\arccos x)$

۲۴ . $\cos(2\arccos x)$ — ۲۵ . $\cos(2\arcsin x)$

از عبارات زیر مشتق بگیرید .

۲۶ . $(\arccos x)^2$ — ۲۷ . $\operatorname{arcsec}(2x+1)$

۲۸ . $\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ — ۲۹ . $\operatorname{arccot}\dfrac{2t}{1-t^2}$

۳۰ . $\arcsin t^2$ — ۳۱ . $\operatorname{arccsc}\dfrac{1}{t}$

۳۲. $\arcsin \sqrt{1-u^2}$

۳۳. $\arccos \dfrac{1-u}{\sqrt{2}}$

۳۴. $\operatorname{arcsec} \sqrt{u^2-1}$

۳۵. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arccot} \dfrac{\sqrt{3}}{v}$

۳۶. $\operatorname{arccsc} \sqrt{v}$

۳۷. $\arctan \dfrac{3 \sin v}{4 + 5 \cos v}$

۳۸. با شروع از فرمولهای (۱۴) و (۱۴')، فرمولهایی برای مشتقات $\operatorname{arcsec} x$ و $\operatorname{arccsc} x$ به دست آورید.

۳۹. نشان دهید که

$$\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{اگر } x > 0 \\[2mm] \dfrac{3\pi}{2} & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

۴۰. نشان دهید که

$$\arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{اگر } x > -1 \\[2mm] -\dfrac{3\pi}{4} & \text{اگر } x < -1 \end{cases}$$

۴۱. فرمول انتگرالگیری

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} |x| + C \qquad (|x| > 1) \tag{یک}$$

و، به‌طورکلی،

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|x|}{a} + C \qquad (|x| > a > 0) \tag{یک'}$$

را تحقیق کنید.

انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید.

۴۲. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

۴۳. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+121}$

۴۴. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-49}}$

۴۵. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{16-4t^2}}$

۴۶. $\displaystyle\int \frac{du}{64u^2+36}$

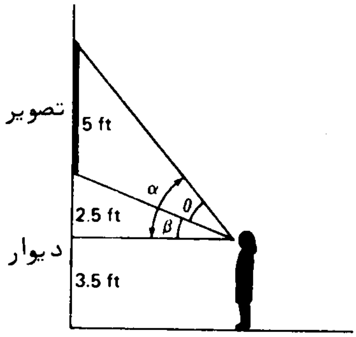
۴۷. $\displaystyle\int \frac{dv}{v\sqrt{121v^2-144}}$

۴۸. $\displaystyle\int_{1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۴۹. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

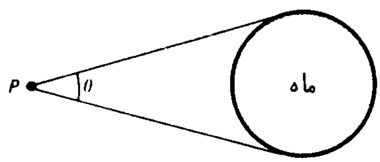
۵۰. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

۵۱. یک تصویر به ارتفاع 5 ft از دیواری آویزان است به طوری که پایین آن از کف اطاق 6 ft فاصله دارد. یک بچه که سطح دید وی 3.5 ft بالای کف اطاق است می‌خواهد بهترین دید را از تصویر داشته باشد. با این فرض که بهترین دید وقتی به دست می‌آید که زاویهٔ θ ی تصویر در چشمان کودک (ر.ک. شکل ۱۹) ماکزیمم است، کودک در چه فاصله‌ای از دیوار باید بایستد؟



شکل ۱۹

۵۲. یک سفینهٔ فضایی در فاصلهٔ 20,000 km تا سطح ماه بوده و با سرعت 2 km/sec به آن نزدیک می‌شود. زاویهٔ ماه در موضع P سفینه با چه‌سرعتی افزایش می‌یابد؟ (این زاویه زاویهٔ θ در شکل ۲۰ است.) شعاع ماه 1738 km است.



شکل ۲۰

مساحت A ناحیهٔ R به

۵۳. محور x، خط $x = 1$، و منحنی $y = \arcsin x$

۵۴. محور y، خط $y = \pi/2$، و منحنی $y = \arcsin x$

۵۵. محورهای مختصات و منحنی $y = \arccos x$

محدود است. در هر حالت ناحیهٔ R را رسم نمایید. **راهنمایی.** نسبت به y انتگرال بگیرید.

۵۶. از شش تابع مثلثاتی معکوس چهارتا نقاط عطف دارند. اینها کدامند و نقاط عطف آنها کجا قرار دارند؟

۵۷. فرمولهای زیر را تحقیق کنید:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \qquad \text{(دو)}$$

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}, \qquad \text{(سه)}$$

که در (دو) فرض است که $|\arcsin x + \arcsin y| \le \pi/2$ و در (سه) فرض است که $|\arctan x + \arctan y| < \pi/2$.

نشان دهید که

۵۸. $\arcsin\frac{4}{5} - \arcsin\frac{3}{5} = \arcsin\frac{7}{25}$

۵۹. $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

۶۰. $\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4}$

۶۱. $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{2}{9} = \frac{\pi}{4}$

۶۲. فرمول

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}.$$

را تحقیق کنید.

در سال ۱۷۰۶ جان ماشن با استفاده از این فرمول اولین صدرقم اعشار π رامحاسبه کرد. امروزه بیش از هشت میلیون رقم اعشاری π معلوم شده است.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

توابع یک به یک

معکوس تابع یک به یک

نمودار تابع یک به یک و خاصیت خط افقی

رابطهٔ بین نمودار f^{-1} و نمودار f

خواص توابع پیوستهٔ یک به یک

مشتق تابع معکوس

سینوس و کسینوس معکوس

تانژانت و کتانژانت معکوس
سکانت و کسکانت معکوس
مشتقات توابع مثلثاتی معکوس

مسائل تکمیلی

۱. نشان دهید هرگاه f بر $[-a, a]$ زوج و بر $[0, a]$ یک به یک باشد، آنگاه f بر $[-a, 0]$ یک به یک است. آیا f بر $[-a, a]$ یک به یک است؟

۲. نشان دهید هرگاه f بر $[-a, a]$ فرد و بر $[0, a]$ یک‌به‌یک‌باشد، آنگاه f بر $[-a, 0]$ یک به یک است. آیا f بر $[-a, a]$ یک به یک است؟

آیا تابع داده شده بر بازهٔ مشخص شده یک به یک است؟

۳. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ بر $(-\infty, 0]$

۴. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ بر $(-1, 1)$

۵. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ بر $(1, \infty)$

۶. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ بر $[0, \infty)$

معکوس تابع یک به یک داده شده را بیابید.

۷. $f(s) = s^2 + s + 1 \quad (-\frac{1}{2} \le s < \infty)$

۸. $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + 1} \quad (0 \le t < \infty)$

۹. $h(u) = (u^3 + 1)^{1/5}$

۱۰. $k(v) = (10 + v^{1/3})^5$

۱۱. تابع غیرثابتی چون f مثال بزنید که بر هر بازه، ولو خیلی کوچک، یک به یک نباشد.

۱۲. فرض‌کنید n عدد صحیح مثبتی باشد. نشان دهید که $f(x) = x^n$ بر $(-\infty, 0]$ یک به یک است. معکوس f بر $(-\infty, 0]$ چیست؟

نشان دهید که هر یک از توابع زیر معکوس خودش است.

۱۳. $f(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \quad (0 \le x \le a)$

۱۴. $f(x) = \dfrac{9x + 11}{13x - 9}$

۱۵. $f(x)=\sqrt[3]{27-x^3}$

۱۶. $f(x)=\sqrt[4]{16-x^4} \quad (0\le x\le 2)$

$(f^{-1})'(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۱۷. $f(x)=x^7+x^3+2x,\ c=4$

۱۸. $f(x)=\dfrac{x-4}{3-x},\ c=-2$

۱۹. $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^2+1}\ (x\ge 0),\ c=1$

۲۰. $f(x)=\tan^3 x,\ c=3\sqrt{3}$

در هر حالت، تحقیق کنید که f بر بازهٔ مناسبی یک به یک است.

$(f^{-1})''(c)$ را درصورتی حساب کنید که

۲۱. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-6},\ c=0$

۲۲. $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1},\ c=\frac{1}{2}$

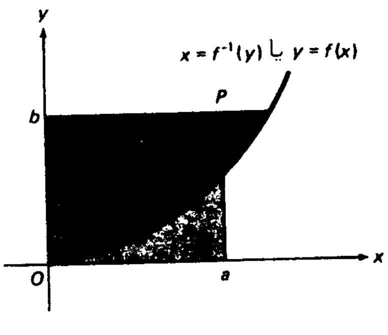
۲۳. $f(x)=2x+\cos x,\ c=1$

۲۴. $f(x)=\cot^5 x,\ c=-1$

۲۵. فرض کنید f بر $[0,\infty)$ پیوسته و صعودی بوده و $f(0)=0$. در این صورت، f یک به یک با معکوس f^{-1} می‌باشد. با استفاده از شکل ۲۱، **نامساوی یانگ**[1] را ثابت‌کنید:

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(x)\,dx\ge ab,$$

که در آن a و b اعداد مثبت دلخواهی هستند. چه وقت نامساوی به تساوی بدل می‌شود؟



شکل ۲۱

1. *Young*

۲۶. فرض کنید a ، b ، c ، و d ثابتهایی باشند به‌طوری که $c^2 + d^2 \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$. نشان دهید که تبدیل خطی کسری

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(که حالات بسیاری از آن قبلاً " مطرح شده‌اند) بر قلمرو خود یک به یک است. این قلمرو چیست؟ اگر $ad - bc = 0$ چه رخ می‌دهد؟ چه‌وقت تابع f معکوس‌خودش است؟ $(f^{-1})'(0)$ و $(f^{-1})''(0)$ را حساب کنید.

کمیات زیر را بدون استفاده از جدول یا ماشین حساب محاسبه نمایید.

۲۷. $\operatorname{arcsec}(-2/\sqrt{3})$

۲۸. $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$

۲۹. $\operatorname{arccot} 1$

۳۰. $\arccos(\sqrt{3}/2)$

۳۱. $\operatorname{arccsc}(-2)$

۳۲. $\arctan(-1)$

۳۳. $\sec(\arctan 2)$

۳۴. $\cot(\operatorname{arcsec}(-3))$

۳۵. $\arccos(\tan \pi)$

۳۶. $\operatorname{arccsc}(\sec \pi)$

۳۷. $\csc(\operatorname{arccot} \frac{2}{3})$

۳۸. $\arctan(-\tan(5\pi/4))$

۳۹. $\sin(\arcsin \frac{1}{2} - \arcsin \frac{1}{3})$

۴۰. $\cos(\arccos \frac{2}{3} + \arcsin \frac{3}{4})$

۴۱. $\tan(\arctan 5 - \arctan 4)$

۴۲. $\cot(\arctan \sqrt{3} + \operatorname{arccot} 1)$

۴۳. $\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0)$

۴۴. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x$

۴۵. $\arctan\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)$

۴۶. $\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۴۷. $\int_{-3/7}^{0} \frac{dx}{\sqrt{36 - 49x^2}}$

۴۸. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2 + 2}$

۴۹. $\int_{5\sqrt{2}/3}^{10/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 25}}$

۵۰. تابع $f(x) = \arcsin(\sin x)$ را رسم کرده، و نشان دهید متناوب با دورهٔ تناوب اساسی 2π است.

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، حدود زیر را حساب کنید.

۵۱. $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

۵۲. $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}$

۵۳. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - x}{x^3}$

۵۴. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x - \arcsin x}$

۵۵. منحنیهای $y = \arcsin x$ و $y = \arccos x$ مستطیل محدود به خطوط $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، و $y = \pi/2$ را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. منحنیها و مستطیل را رسم کرده، و مساحت A ی هر ناحیه را رویش بنویسید.

۵۶. نشان دهید که به ازای هر دو عدد دلخواه a و b ، $|\arctan a - \arctan b| \le |a - b|$.

۵۷. معکوس تابع

$$f(x) = 4 \arcsin \sqrt{1 - x^2} \qquad (0 \le x \le 1)$$

را بیابید.