

استنباط آماري

پيشرفته (۲)

نادر نعمت الهی

گروه آمار

دانشگاه علامه طباطبائی

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول: فواصل اطمینان	۱
۱- فواصل اطمینان	۲
۲- فاصله اطمینان بیزی یا نواحی اعتبار	۹
فصل دوم: آزمون فرض‌های آماری	۱۵
۱- مقدمه	۱۶
۲- پرتوانترین آزمون	۱۷
فصل سوم: پرتوانترین آزمونهای یکنواخت	۳۱
۱- مفاهیم اولیه	۳۲
۲- خاصیت نسبت درستنمایی یکنوا	۳۵
۳- پرتوانترین آزمونهای یکنواخت	۳۸
۴- خاصیت به‌طور تصادفی صعودی بودن خانواده توزیع‌ها	۵۲
فصل چهارم: آزمون فرض‌های آماری به‌وسیله نظریه تصمیم	۵۷
۱- مفاهیم اولیه	۵۸
۲- آزمون بیزی	۵۹
۳- پرتوانترین آزمون	۶۳
۴- آزمون مینیماکس	۶۷
۵- آزمون مجاز	۶۹
فصل پنجم: آزمون‌های دو طرفه	۷۳
۱- تعمیم لم نیمن پیرسون	۷۴
۲- آزمون‌های دو طرفه	۷۷
فصل ششم: پرتوانترین آزمون‌های یکنواخت نااریب	۱۰۰
۱- پرتوانترین آزمون‌های یکنواخت نااریب	۱۰۱
۲- آزمون‌های UMPU برای خانواده‌ی نمایی k پارامتری	۱۰۹
۳- روش تبدیل آزمون‌های شرطی به غیرشرطی در حالت چند پارامتری	۱۳۲

صفحه	عنوان
۱۴۰	فصل هفتم: رابطه آزمون فرض و فاصله اطمینان
۱۴۱	۱- رابطه آزمون فرض و فاصله اطمینان.....
۱۴۳	۲- فواصل اطمینان بطور یکنواخت صحیح ترین.....
۱۵۰	فصل هشتم: پرتوانترین آزمون‌های یکنواخت پایا
۱۵۱	۱- خلاصه‌ای از مطالب پایایی.....
۱۵۳	۲- پرتوانترین آزمونهای یکنواخت پایا.....
۱۶۴	۳- فواصل اطمینان پایا.....
۱۶۹	مراجع

فصل ١

فواصل اطمینان

مقدمه

در استنباط آماری (۱) برآوردیابی پارامترهای مجهول مورد بررسی قرار گرفت. دو جنبه‌ی دیگر استنباط آماری یعنی فواصل اطمینان و آزمون فرضهای آماری موضوع بحث استنباط آماری (۲) می‌باشد. در ابتدا خلاصه‌ای از فواصل اطمینان و پرتوانترین آزمون (MP) و پرتوانترین آزمون یکنواخت (UMP) را مرور می‌کنیم و سپس پرتوانترین آزمون یکنواخت ناریب (UMPU) و پرتوانترین آزمون یکنواخت پایا (UMPI) را به طور مشروح بررسی کرده و ارتباط آنها با انواع فواصل اطمینان را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بخش ۱: فواصل اطمینان^۱

تعریف ۱-۱: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از خانواده توزیعهای $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ باشند. همچنین فرض کنید $L(\underline{X}) = L(X_1, \dots, X_n)$ و $U(\underline{X}) = U(X_1, \dots, X_n)$ دو آماره باشند به گونه‌ای که $L(\underline{X}) \leq U(\underline{X})$ و

$$P_\theta(L(\underline{X}) < \theta < U(\underline{X})) = 1 - \alpha$$

در این صورت فاصله تصادفی $(L(\underline{X}), U(\underline{X}))$ را یک خانواده از فواصل اطمینان در سطح $1 - \alpha$ برای θ گویند. (فواصل اطمینان یک طرفه نیز به طور مشابه تعریف می‌شود). ■

معمولاً برای تعیین فواصل اطمینان، ابتدا یک تابع محور $Q = Q(\underline{X}; \theta)$ که تابعی از نمونه تصادفی و پارامتر مجهول θ است و توزیع آن به θ بستگی ندارد را تعیین می‌کنند و سپس اعداد a, b را به گونه‌ای پیدا می‌کنند که

$$p(a < Q < b) = 1 - \alpha \quad (۱)$$

حال با حل نامعادله‌ی درون پرانتز نسبت به θ به رابطه زیر می‌رسیم

$$P(L(\underline{X}) < \theta < U(\underline{X})) = 1 - \alpha \quad (۲)$$

^۱ قسمتی از بخش ۵-۷ کتاب لهن

بنابراین $(L(\bar{X}), U(\bar{X}))$ یک خانواده از فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ برای θ است. برای تعیین a و b روشهای مختلفی وجود دارد که عبارتند از:

الف- فاصله اطمینان با دمهای برابر: اگر برای هر تابع محور Q مقادیر a و b در رابطه (۱) چنان انتخاب شوند که

$$P_{\theta}(Q \leq a) = P_{\theta}(Q \geq b) = 1 - \alpha$$

آنگاه فاصله به دست آمده در (۲) را فاصله اطمینان در سطح $1-\alpha$ با دمهای برابر^۱ گویند.

ب- کوتاهترین فاصله اطمینان: اگر برای هر تابع محور Q مقادیر a و b در رابطه (۱) چنان انتخاب شوند که طول فاصله (۲) یعنی $L = u - l$ می‌نیم شود آنگاه فاصله به دست آمده در (۲) براساس این a, b را کوتاهترین فاصله اطمینان^۲ در سطح $1-\alpha$ برای θ گویند.

ج- فاصله اطمینان نااریب: اگر برای هر تابع محور Q مقادیر a و b در رابطه (۱) چنان انتخاب شوند که

$$H(\theta, \theta') = P_{\theta}(L < \theta' < U) = \begin{cases} \geq 1-\alpha & \theta' = \theta \\ \leq 1-\alpha & \theta' \neq \theta \end{cases}$$

آنگاه فاصله به دست آمده در (۲) را فاصله اطمینان نااریب^۳ در سطح $1-\alpha$ برای θ گویند. در تمامی حالات $H(\theta, \theta')$ بستگی به تابعی از θ و θ' دارد که آن را با λ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$H(\theta, \theta') = H(\lambda) = \begin{cases} \geq 1-\alpha & \theta' \neq \theta \\ \leq 1-\alpha & \theta' = \theta \end{cases}$$

و اگر Q دارای یک توزیع احتمال پیوسته باشد آنگاه

$$H(\lambda) = \begin{cases} = 1-\alpha & \theta' = \theta \\ < 1-\alpha & \theta' \neq \theta \end{cases}$$

یعنی $H(\lambda)$ ماکسیمم خود را وقتی که $\theta' = \theta$ باشد می‌گیرد.

د) فاصله اطمینان پایا^۴: به مبحث رابطه فاصله اطمینان و آزمون فرض مراجعه شود.

^۱ Equal Tail

^۲ Shortest Confidence Interval

^۳ Unbiased Confidence Interval

^۴ Invariant Confidence Interval

مثال ۱-۱: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, \sigma^2)$ باشند که در آن σ مقداری معلوم است. فاصله اطمینان بادهای برابر، کوتاه و ناریب را برای θ به دست آورید.

$$Q = \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \text{حل:}$$

$$1 - \alpha = P_{\theta} \left(a < \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma / \sqrt{n}} < b \right) = P_{\theta} \left(\bar{X} - b \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (3)$$

الف- فاصله اطمینان بادهای برابر: برای این حالت قرار می دهیم $b = -a = +z_{\alpha/2}$ در نتیجه

$$\theta \in \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ب- کوتاهترین فاصله:

$$(3) \Rightarrow L = (b - a) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \min L = (b - a) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{s.t. } \int_a^b \phi(t) dt = 1 - \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{L} = (b - a) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \lambda \int_a^b \phi(t) dt - (1 - \alpha)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \lambda \phi(a) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \lambda \phi(b) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(a) = \phi(b) \Rightarrow a = \pm b$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \int_a^b \phi(t) dt = 1 - \alpha \Rightarrow b = -a = z_{\alpha/2}$$

که همان فاصله (الف) را به دست می دهد.

ج- فاصله اطمینان ناریب:

$$(3) \Rightarrow H(\lambda) = P_{\theta} \left(\bar{X} - b \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta' < \bar{X} - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = P_{\theta} \left(a < \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma / \sqrt{n}} + \frac{\theta - \theta'}{\sigma / \sqrt{n}} < b \right)$$

با قرار دادن $\lambda = \frac{\theta' - \theta}{\sigma / \sqrt{n}}$ داریم

$$H(\lambda) = P(a + \lambda < Z < b + \lambda) = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} \phi(t) dt$$

$$\begin{cases} H(0) = 1 - \alpha \\ \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} H(\lambda) \right|_{\lambda=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b \phi(t) dt = 1 - \alpha \\ \phi(a) = \phi(b) \end{cases} \Rightarrow b = -a = z_{\alpha/2}$$

■ که همان فاصله اطمینان (الف) را به دست می‌دهد.

توجه: در مواردی که تابع محور Q دارای توزیعی باشد که نسبت به θ متقارن است، این ۳ فاصله با یکدیگر مساوی می‌شوند.

■

مثال ۱-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع لاپلاس با تابع چگالی زیر باشند.

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} \quad x \in R, \theta > 0$$

فاصله اطمینان‌های بادمهای برابر، کوتاه و ناریب را برای θ به دست آورید.

$$Q = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i| \sim \chi^2_{(2n)} \quad \text{حل:}$$

$$1 - \alpha = P_{\theta} \left(a < \frac{2}{\theta} \sum |x_i| < b \right) = P_{\theta} \left(\frac{2 \sum |x_i|}{b} < \theta < \frac{2 \sum |x_i|}{a} \right) \quad (1)$$

الف- فاصله اطمینان بادمهای برابر: برای این حالت قرار هیم

$$a = \chi^2_{1-\alpha/2}(2n), b = \chi^2_{\alpha/2}(2n)$$

در نتیجه

$$\theta \in \left(\frac{2 \sum |x_i|}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}, \frac{2 \sum |x_i|}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} \right)$$

ب- کوتاهترین فاصله:

$$\begin{cases} \min L = \sum |x_i| \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ s.t. \int_a^b h_{\sum}(t) dt = 1 - \alpha \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \sum |x_i| \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \lambda \left\{ \int_a^b h_{\sum}(t) dt - (1 - \alpha) \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} &= \frac{-\sum |x_i|}{a^2} + \lambda h_{\sum}(a) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} &= \frac{\sum |x_i|}{b^2} - \lambda h_{\sum}(b) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2 h_{\sum}(a) = b^2 h_{\sum}(b) \\ \int_a^b h_{\sum}(t) dt = 1 - \alpha \end{cases}$$

بنابراین فاصله اطمینان کوتاه به فرم $\theta \in \left(\frac{\sum |x_i|}{b}, \frac{\sum |x_i|}{a} \right)$ است که مقادیر a و b از دستگاه

معادلات بالا با روشهای عددی بدست می آیند.

ج- فاصله اطمینان نااریب:

$$(1) \Rightarrow H(\lambda) = P_{\theta} \left(\frac{\sum |x_i|}{b} < \theta' < \frac{\sum |x_i|}{a} \right) = P_{\theta} \left(a < \frac{\sum |x_i|}{\theta} < \frac{\theta}{\theta'} < b \right)$$

با قرار دادن $\lambda = \frac{\theta'}{\theta}$ داریم:

$$H(\lambda) = P_{\theta} \left(a\lambda < \chi_{(\sum)}^{\sum} < b\lambda \right) = \int_{a\lambda}^{b\lambda} h_{\sum}(t) dt$$

$$\left\{ \begin{aligned} H(1) &= 1 - \alpha \\ \left. \frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b h_{\sum}(t) dt = 1 - \alpha \\ ah_{\sum}(a) = bh_{\sum}(b) \end{cases}$$

بنابراین فاصله اطمینان کوتاه به فرم $\theta \in \left(\frac{\sum |x_i|}{b}, \frac{\sum |x_i|}{a} \right)$ است که مقادیر a و b از دستگاه

معادلات بالا با روشهای عددی بدست می آیند. ■

مثال ۳-۱: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $U(0, \theta)$ باشند. فاصله اطمینانهای با دمه‌های برابر، کوتاه و نااریب را برای θ به دست آورید.

حل:
$$Q = \frac{X_{(n)}}{\theta} \sim Be(n, 1)$$

$$1 - \alpha = P_{\theta} \left(a < \frac{X_{(n)}}{\theta} < b \right) = P_{\theta} \left(\frac{X_{(n)}}{b} < \theta < \frac{X_{(n)}}{a} \right) \quad (5)$$

الف- فاصله اطمینان با دمه‌های برابر:

برای این حالت قرار می‌دهیم

$$b = \sqrt[n]{1 - \frac{\alpha}{2}}, a = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}$$

پس

$$\theta \in \left(\frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1 - \frac{\alpha}{2}}}, \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}} \right)$$

ب- کوتاهترین فاصله:

$$\begin{cases} \min L = X_{(n)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ s.t. \int_a^b n y^{n-1} dy = 1 - \alpha \Rightarrow b^n - a^n = 1 - \alpha \end{cases} \quad (6)$$

$$(6) \Rightarrow \begin{cases} b^n \geq b^n - a^n = 1 - \alpha \Rightarrow b \geq \sqrt[n]{1 - \alpha} \\ a^n = b^n - (1 - \alpha) = b^n - 1 + \alpha \leq \alpha \Rightarrow a \leq \sqrt[n]{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq \sqrt[n]{\alpha} \\ \sqrt[n]{1 - \alpha} \leq b \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b} &= X_{(n)} \left(\frac{-1}{a^n} \frac{\partial a}{\partial b} + \frac{1}{b^n} \right) \\ \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \left. \begin{aligned} nb^{n-1} - na^{n-1} \frac{\partial a}{\partial b} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial b} = \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial b} &= X_{(n)} \left(-\frac{b^{n-1}}{a^{n+1}} + \frac{1}{b^n} \right) \\ &= X_{(n)} \left(\frac{a^{n+1} - b^{n-1}}{a^{n+1} b^n} \right) < 0 \end{aligned}$$

پس L یک تابع نزولی نسبت به b است و برای می‌نیمم شدن آن بایستی b حداکثر مقدار خود یعنی $b=1$ را بگیرد پس

$$b=1 \stackrel{(\epsilon)}{\Rightarrow} a = \sqrt[n]{\alpha} \Rightarrow \theta \in \left[x_{(n)}, \frac{x_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}} \right]$$

ج- فاصله اطمینان نااریب:

$$\begin{aligned} (\delta) \Rightarrow H(\lambda) &= P_{\theta} \left(\frac{X_{(n)}}{b} < \theta' < \frac{X_{(n)}}{a} \right) = P_{\theta} \left(a < \frac{X_{(n)}}{\theta} \cdot \frac{\theta}{\theta'} < b \right) \\ &= P_{\theta} (a\lambda < Q < b\lambda) \quad (\lambda = \frac{\theta'}{\theta}) \end{aligned}$$

بنابراین اگر $b\lambda \leq 1$ باشد آنگاه

$$H(\lambda) = \int_{a\lambda}^{b\lambda} n y^{n-1} dy = \lambda^n (b^n - a^n) \stackrel{(\epsilon)}{=} \lambda^n (1 - \alpha) \quad (\lambda) \quad (8)$$

حال اگر فاصله مورد نظر را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $b < 1$ ، آنگاه برای یک $\lambda > 1$ خواهیم داشت که $b\lambda \leq 1$ و در نتیجه

$$H(\lambda) = \lambda^n (1 - \alpha) > 1 - \alpha$$

که با $H(\lambda) \leq 1 - \alpha$ متناقض است. پس بایستی $b=1$ باشد و بنابراین از رابطه (ϵ) داریم که $a = \sqrt[n]{\alpha}$ و $b=1$ با این مقادیر داریم

$$(\lambda) \Rightarrow H(\lambda) = \begin{cases} \lambda^n (1 - \alpha) & \lambda \leq 1 \\ \int_{\lambda \sqrt[n]{\alpha}}^1 n y^{n-1} dy & 1 < \lambda < \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} \leq \lambda \end{cases} = \begin{cases} \lambda^n (1 - \alpha) & \lambda \leq 1 \\ 1 - \alpha \lambda^n & 1 < \lambda < \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} \leq \lambda \end{cases}$$

که این تابع ماکسیمم خود را در $\lambda=1$ می‌گیرد و مقدار ماکسیمم برابر $1 - \alpha$ است که این با شرط

نااریبی سازگار است پس فاصله $\left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}} \right]$ فاصله اطمینان نااریب در سطح $1 - \alpha$ برای θ

است. ■

بخش ۲: فاصله اطمینان بیزی یا نواحی اعتبار^۱

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $\{f(x|\theta): \theta \in \Theta\}$ باشند. درآمارکلاسیک فاصله تصادفی $(L(\bar{X}), U(\bar{X}))$ را که $P_\theta(L(\bar{X}) < \theta < U(\bar{X})) = 1 - \alpha$ ، به دست می‌آوردیم و به آن یک خانواده از فواصل اطمینان سطح $1 - \alpha$ برای θ گویند. برای مثال اگر نمونه تصادفی مورد

نظر ما از توزیع $N(\theta, 1)$ باشند آنگاه با داشتن تابع محور $Q = \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{n}}$ $\sim N(0, 1)$ خانواده فواصل

اطمینان $\theta \in \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ به دست می‌آید. معنای این فاصله تصادفی این است

که این فاصله پارامتر θ را با احتمال $1 - \alpha$ در بردارد. فاصله تصادفی بالا دارای یافته‌های بی‌شماری می‌باشد که هر کدام بصورت یک فاصله عددی است. اگر احتمال را به طریق فراوانی نسبی تعبیر کنیم و $1 - \alpha = 0.90$ باشد می‌توان گفت که نود درصد از این گونه فواصل θ را در بردارند. مثلاً اگر یافته $\bar{X}$ برای نمونه $n = 25$ تایی برابر $\bar{x} = 5$ شود آنگاه یافته‌ی فاصله اطمینان مذکور فاصله عددی $(4/608, 5/392)$ می‌شود. چون نود درصد از این گونه فواصل θ را در بردارند، از اینرو این فاصله عددی را هم اصطلاحاً یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی می‌نامند. ولی نباید تصور کنیم که این فاصله عددی با احتمال ۰/۹۰ پارامتر θ را در بر دارد زیرا $P(4/608 < \theta < 5/392)$ برابر صفر یا یک است.

در آمار بیزی θ را به‌عنوان یک متغیر تصادفی با توزیع پیشین $\pi(\theta)$ در نظر می‌گیرند. در این حالت θ می‌تواند در یک فاصله عددی با احتمال غیر از صفر و یک نیز قرار گیرد که این فاصله را فاصله اطمینان بیزی گویند و تعبیر این فاصله عددی بعنوان فاصله‌ای که با احتمال $1 - \alpha$ پارامتر θ را در بر دارد کاملاً معنی دارد.

^۱ بخش ۵-۹ کتاب لهن^۲ Bayesian Confidence Set or Credible Regions

تعریف ۱-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $\{f(x|\theta): \theta \in \Theta\}$ باشند که θ دارای توزیع پیشین $\pi(\theta)$ و چگالی پسین $\pi(\theta|x)$ باشد. یک فاصله اطمینان بیزی یا ناحیه اعتبار در سطح $1-\alpha$ برای پارامتر $\gamma(\theta)$ عبارت است از فاصله $(L(x), U(x))$ به طوری که

$$P(L(x) < \gamma(\theta) < U(x) | X = x) = 1 - \alpha$$

■

برای یافتن یک فاصله اطمینان بیزی می توان مانند حالت کلاسیک عمل کرد. فرض کنید $Q = Q(X, \gamma(\theta))$ تابعی باشد که توزیع شرطی آن به شرط X به پارامتر مجهول بستگی نداشته باشد. در این صورت از رابطه $P(a < Q < b | X = x) = 1 - \alpha$ می توان رابطه $P(L(x) < \theta < U(x) | X = x) = 1 - \alpha$ را نتیجه گرفت که فاصله مورد نظر را به دست می دهد.

مثال ۱-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشند و $\theta \sim N(\mu, \tau^2)$. یک فاصله اطمینان بیزی در سطح $1-\alpha$ برای θ پیدا کنید. اگر $\mu = 0, \tau^2 = 1$ و برای یک نمونه $n = 25$ تا $\bar{x} = 25$ باشد. فاصله اطمینان ۹۰ درصدی بیزی را برای θ پیدا کنید.

حل: می دانیم که $\theta|x \sim N(\mu(x), \sigma^2)$ ، $\mu(x) = \frac{\mu + n\tau^2\bar{x}}{n\tau^2 + 1}$ ، $\sigma^2 = \frac{\tau^2}{n\tau^2 + 1}$

بنابراین $Q = \frac{\theta - \mu(x)}{\sigma} | x \sim N(0, 1)$

و در نتیجه

$$1 - \alpha = P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\theta - \mu(x)}{\sigma} < z_{\alpha/2} | x\right) = P\left(\mu(x) - z_{\alpha/2}\sigma < \theta < \mu(x) + z_{\alpha/2}\sigma | x\right)$$

بنابراین $\mu(x) \pm z_{\alpha/2}\sigma$ یک فاصله اطمینان $1-\alpha$ بیزی برای θ است

$$\mu = 0, \tau^2 = 1, n = 25, \bar{x} = 5 \Rightarrow \mu(x) = \frac{125}{26}, \sigma = \sqrt{\frac{1}{26}}$$

$$\Rightarrow \theta \in \left(\frac{125}{26} - \frac{1/96}{\sqrt{26}}, \frac{125}{26} + \frac{1/96}{\sqrt{26}}\right) = (4/423, 5/192)$$

بنابراین $P(4/423 < \theta < 5/192 | x) = 0/90$ می باشد. ■

مثال ۲-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با تابع چگالی زیر باشد

$$f_{\theta}(x) = \theta e^{-\theta x} \quad x > 0, \quad \theta > 0$$

اگر $\theta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ ، آنگاه یک فاصله اطمینان بیزی در سطح $1-\alpha$ برای θ پیدا کنید.

حل: می‌دانیم که

$$\theta | \bar{x} \sim \Gamma\left(n + \alpha, \frac{1}{n\bar{x} + \frac{1}{\beta}}\right)$$

قرار می‌دهیم $A = n + \alpha$ ، $B(\bar{x}) = \frac{1}{n\bar{x} + \frac{1}{\beta}}$ در این صورت

$$\theta | \bar{x} \sim \Gamma(A, B(\bar{x})) \Rightarrow \frac{\gamma\theta}{B(\bar{x})} | \bar{x} \sim \chi^2_{(\gamma A)}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(\chi^2_{\frac{1-\alpha}{\gamma}}(\gamma A) < \frac{\gamma\theta}{B(\bar{x})} < \chi^2_{\frac{\alpha}{\gamma}}(\gamma A) | \bar{x}\right) \\ &= P\left(\underbrace{\frac{B(\bar{x})}{\gamma} \chi^2_{\frac{1-\alpha}{\gamma}}(\gamma A)}_{L(\bar{x})} < \theta < \underbrace{\frac{B(\bar{x})}{\gamma} \chi^2_{\frac{\alpha}{\gamma}}(\gamma A)}_{U(\bar{x})} | \bar{x}\right) \end{aligned}$$

■

مثال ۳-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $P(\theta)$ باشند و

$\theta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. یک فاصله اطمینان بیزی در سطح $1-\alpha$ برای θ پیدا کنید. اگر

$\alpha = \beta = 1$ ، $n = 10$ و $\sum x_i = 6$ ، فاصله اطمینان ۹۰ درصدی بیزی را برای θ پیدا کنید.

حل: داریم که

$$\theta | \bar{x} \sim \Gamma\left(n\bar{x} + \alpha, \frac{1}{n + \frac{1}{\beta}}\right)$$

اگر قرار دهیم $A(\bar{x}) = n\bar{x} + \alpha$ ، $B = \frac{1}{n + \frac{1}{\beta}}$ آنگاه $\theta | \bar{x} \sim \Gamma(A(\bar{x}), B) \Rightarrow \frac{\gamma\theta}{B} | \bar{x} \sim \chi^2_{(\gamma A(\bar{x}))}$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 1 - \alpha &= P \left(\chi_{1-\alpha/\gamma}^2(\gamma A(\tilde{x})) < \frac{\gamma \theta}{B} < \chi_{\alpha/\gamma}^2(\gamma A(\tilde{x})) | \tilde{x} \right) \\
 &= P \left(\underbrace{\frac{B}{\gamma} \chi_{1-\alpha/\gamma}^2(\gamma A(\tilde{x}))}_{L(\tilde{x})} < \theta < \underbrace{\frac{B}{\gamma} \chi_{\alpha/\gamma}^2(\gamma A(\tilde{x}))}_{U(\tilde{x})} | \tilde{x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = 1, n = 10, \sum x_i = 6 \Rightarrow A(\tilde{x}) = 6 + 1 = 7, B = \frac{1}{11}$$

$$\theta \in \left(\frac{1}{22} (6 / 571), \frac{1}{22} (23 / 685) \right) = (0 / 299, 1 / 077)$$

■

در انتخاب فاصله اطمینان بیزی می‌خواهیم فاصله‌ای را انتخاب کنیم که دارای کمترین طول باشد. برای این منظور از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

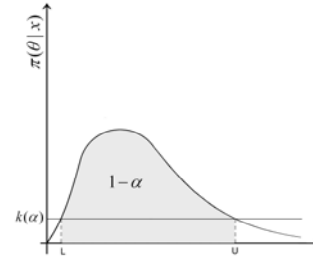
قضیه ۱-۲: فرض کنید فاصله $(L(\tilde{x}), U(\tilde{x}))$ یک فاصله اطمینان بیزی برای θ در سطح $1 - \alpha$ باشد. این فاصله دارای کمترین طول خواهد بود هرگاه عددی مانند $k(\alpha)$ وجود داشته باشد بطوری که

$$L(\tilde{x}) < \theta < U(\tilde{x}) \Leftrightarrow \pi(\theta | \tilde{x}) > k(\alpha)$$

اثبات: می‌خواهیم طول فاصله یعنی U-L را نسبت به محدودیت $\int_L^U \pi(\theta | \tilde{x}) d\theta = 1 - \alpha$ و یا $P(L(\tilde{x}) < \theta < U(\tilde{x}) | \tilde{x}) = 1 - \alpha$ می‌نیمیم کنیم. برای این کار از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\mathcal{L} = U - L - \lambda \left(\int_L^U \Pi(\theta | \tilde{x}) d\theta - (1 - \alpha) \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} &= 1 - \lambda \pi(U | \tilde{x}) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= -1 + \lambda \pi(L | \tilde{x}) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \pi(L | \tilde{x}) = \pi(U | \tilde{x}) \\ \int_L^U \pi(\theta | \tilde{x}) d\theta = 1 - \alpha \end{cases}$$



روابط فوق یا شکل بالا معادل این است که $\pi(\theta | \tilde{x}) > k(\alpha)$ باشد. ■

تعریف ۲-۲: فاصله اعتبار چگالی پسین رفیع^۱ (HPD) $(1-\alpha) \cdot 100\%$ برای θ زیر مجموعه C از فضای پارامتری Θ به فرم $C = \{\theta \in \Theta | \pi(\theta | \tilde{x}) > k(\alpha)\}$ است که در آن $k(\alpha)$ مقداری است که $P(C | \tilde{x}) = 1 - \alpha$ باشد. ■

مثال ۲-۴: در مثال ۱-۲ فاصله اطمینان HPD سطح $1 - \alpha$ را برای θ پیدا کنید.

حل: $\theta | \tilde{x} \sim N(\mu(\tilde{x}), \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \pi(\theta | \tilde{x}) > k(\alpha) &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta - \mu(\tilde{x}))^2} \geq k(\alpha) \Leftrightarrow \left(\frac{\theta - \mu(\tilde{x})}{\sigma}\right)^2 \geq k'(\alpha) \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{\theta - \mu(\tilde{x})}{\sigma}\right| < c(\alpha) \end{aligned}$$

$$P\left(\left|\frac{\theta - \mu(\tilde{x})}{\sigma}\right| < c(\alpha) | \tilde{x}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow c(\alpha) = z_{\alpha/2} \Rightarrow \overline{\mu(\tilde{x}) \pm z_{\alpha/2} \sigma}$$

که همان فاصله اطمینان بیزی $(1-\alpha) \cdot 100\%$ برای θ است زیرا چگالی پسین نسبت به $\mu(\tilde{x})$ متقارن است. ■

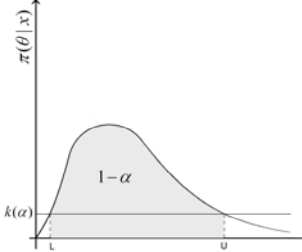
^۱ Highest Posterior Density

مثال ۲-۵: در مثال ۲-۳ فاصله اطمینان $HPD \ 100(1-\alpha)\%$ را برای θ به دست آورید و آن را با فاصله اطمینان ۹۰ درصدی بیزی برای θ مقایسه کنید.

حل:

$$\pi(\theta|\tilde{x}) \sim \Gamma(A(\tilde{x}), B)$$

$$\pi(\theta|\tilde{x}) > k(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{B^{A(\tilde{x})}\Gamma(A(\tilde{x}))} \theta^{A(\tilde{x})} e^{-\frac{\theta}{B}} > k(\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi(L|\tilde{x}) = \pi(U|\tilde{x}) \\ \int_L^U \pi(\theta|\tilde{x}) d\theta = 1-\alpha \end{cases}$$


حل این دستگاه معادلات به وسیله روش‌های عددی انجام می‌گیرد. برای مثال ۲-۳ با $\sum x_i = 6$ ، $n = 10$ ، $\alpha = \beta = 1$ و $1-\alpha = 0.90$ مقدار $k(\alpha) = 0.44$ خواهد بود و فاصله مورد نظر برابر $(0.253, 1.005)$ است که دارای طول 0.752 است در حالی که فاصله اطمینان بیزی مورد نظر $(0.299, 1.077)$ است که دارای طول 0.778 است که دارای طول بیشتری است و هر دو فاصله با احتمال 0.90 پارامتر θ را در بردارند. ■

فصل ۲

آزمون فرض‌های آماری

بخش ۱: مقدمه

در مبحث آزمون فرض‌های آماری، با تصمیم‌گیری در مورد پذیرش یا رد فرض از پیش تعیین شده‌ای روبرو هستیم. تصمیم‌گیری ما براساس یک نمونه $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ مشاهده شده از جمعیت می‌باشد که فرض می‌شود X دارای توزیعی از خانواده توزیعهای $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ است. فرض‌های ما با تقسیم کردن فضای پارامتری Θ به دو فضای مجزای Θ_0 و Θ_1 به دست می‌آیند که یکی را فرض صفر Θ_0 و دیگری را فرض مقابل Θ_1 گویند. یعنی

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \in \Theta_1 \text{ s.t. } \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset, \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

براساس فرض‌های H_0 و H_1 خانواده توزیعهای $P_0 = \{P_\theta : \theta \in \Theta_0\}$ نیز به دو خانواده P_0 و $P_1 = \{P_\theta : \theta \in \Theta_1\}$ تقسیم می‌شوند. براساس مشاهده $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ و ساختن آماره $T(X) = T(X_1, \dots, X_n)$ از روی این مشاهده که به آن آماره آزمون گویند در مورد پذیرش یا رد فرض H_0 تصمیم‌گیری می‌کنیم. تصمیم‌گیری ما به این صورت است که براساس آماره $T(X)$ فضای $\mathcal{X}$ (مجموعه مقادیر X) را به دو ناحیه بحرانی^۱ یا رد C و پذیرش^۲ A تقسیم می‌کنیم و اگر مقدار مشاهده شده آماره آزمون $T(X)$ در ناحیه C قرار گرفت، آنگاه فرض H_0 را رد می‌کنیم و در غیر این صورت گوییم که دلیلی بر رد فرض H_0 براساس مشاهدات موجود نداریم. چنین آزمونی را آزمون غیر تصادفی^۳ گویند و می‌توان این آزمون را به وسیله یک تابع نشانگر که به آن تابع آزمون گویند به صورت زیر نمایش داد

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & T(x) \in C \\ 0 & T(x) \notin C \end{cases} \quad (1)$$

در حقیقت با توجه به مطالب فوق ما با مشاهده $X = x$ فرض H_0 را با احتمال $\varphi(x)$ رد می‌کنیم. با داشتن آماره آزمون $T(X)$ ، تعیین مقدار C بستگی به احتمال خطای نوع اول و دوم آزمون دارد که

^۱ Critical Region^۲ Acceptance Region^۳ Non Randomized

به ترتیب به صورت $\alpha = P_{H_0}(T(\tilde{x}) \in C)$ و $\beta = P_{H_1}(T(\tilde{x}) \notin C)$ تعریف می‌شوند. معمولاً سعی بر این است که با در نظر گرفتن یک حداکثر مقدار α_0 برای α (که به آن اندازه آزمون گویند) مقدار β را کاهش و یا معادلاً توان آزمون یعنی $1 - \beta$ را افزایش دهند. چنین آزمونی را پرتوانترین آزمون^۱ گویند.

اما همواره برای مقدار از پیش تعیین شده اندازه آزمون α_0 ، نمی‌توان ناحیه C را به گونه‌ای تعیین کرد که آزمون غیر تصادفی شده (۱) دارای اندازه دقیقاً برابر α_0 باشد و با کمی تغییر ناحیه C اندازه آزمون φ از α_0 کمتر یا بیشتر می‌گردد. در این حالت از آزمون تصادفی شده^۲ به صورت زیر استفاده می‌کنند:

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & T(\tilde{x}) \in C \\ \gamma & T(\tilde{x}) \in \bar{C} \cap \bar{A} \\ 0 & T(\tilde{x}) \in A \end{cases} \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (2)$$

که در آن $\bar{A}$ مجموعه بستار^۳ مجموعه A است. در این حالت $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ و با مشاهده $\tilde{x} = X_{\tilde{x}}$ فرض H_0 را با احتمال $\varphi(\tilde{x})$ رد می‌کنیم.

در ادامه بستگی به آنکه فرض‌های H_0 و H_1 ساده یا مرکب باشند روش‌هایی برای به دست آوردن آماره آزمون $T(\tilde{X})$ و ناحیه بحرانی C و به طور کلی آماره آزمون $\varphi(\tilde{x})$ به فرم (۱) یا (۲) ارایه می‌گردد.

بخش ۲: پرتوانترین آزمون

در این قسمت آزمون فرض ساده در مقابل فرض ساده دیگر را در نظر خواهیم گرفت. یعنی فرض می‌کنیم X یک متغیر تصادفی دارای توزیعی از خانواده توزیع‌های $\{P_\theta: \theta \in \Theta\}$ باشد و خواهیم آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ را انجام دهیم. در این حالت $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ و خانواده

^۱ Most Powerful Test

^۲ Randomized

^۳ Closure

توزیع‌های ما دارای دو عضو P_1, P_0 هستند و فرض کنیم به ترتیب دارای چگالی‌های f_1 و f_0 نسبت به اندازه μ باشند. بنابراین می‌خواهیم آزمون کنیم که X دارای چگالی f_1 یا f_0 است (برای راحتی از یک متغیر تصادفی X استفاده می‌کنیم. حالت کلی‌تر نمونه $\tilde{X} = (X_1, \dots, X_n)$ نیز به طور مشابه است).

در این حالت احتمال خطای نوع اول به صورت $\alpha = E_{\theta_0}[\varphi(X)]$ ، احتمال خطای نوع دوم به صورت $\beta = E_{\theta_1}[1 - \varphi(X)]$ و توان آزمون به صورت $\Pi = \beta^* = 1 - \beta = E_{\theta_1}[\varphi(X)]$ خواهد بود.

مثال ۱-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_{25}$ یک نمونه تصادفی از $N(\mu, 4)$ باشند و آزمون زیر را در

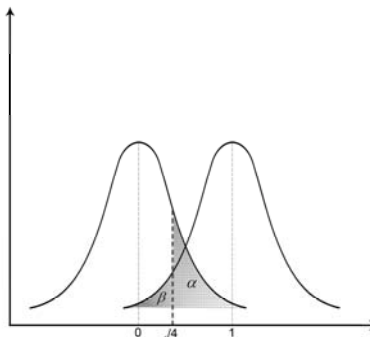
$$H_0: \mu = 0 \text{ vs } H_1: \mu = 1 \quad \text{نظر بگیرید}$$

اگر تابع آزمون به صورت $\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x} \geq 0.4 \\ 0 & \bar{x} < 0.4 \end{cases}$ باشد، احتمال خطای نوع اول و دوم و توان آزمون را محاسبه کنید.

$$\alpha = E_{\mu=0}[\varphi(\tilde{X})] = P_{\mu=0}(\bar{X} \geq 0.4) = P(Z \geq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \quad \text{حل:}$$

$$\beta = E_{\mu=1}[1 - \varphi(\tilde{X})] = P_{\mu=1}(\bar{X} < 0.4) = P(Z < -1/5) = 0.668$$

$$\beta^* = 1 - \beta = 1 - 0.668 = 0.332$$



در نمودار بالا α و β نمایش داده شده‌اند. دیده می‌شود که هر چه α را کاهش دهیم مقدار β افزایش می‌یابد. می‌خواهیم تابع آزمون φ را چنان تعیین کنیم که با قرار دادن یک حداکثر مقدار برای α ، مقدار β را کاهش یا معادلاً توان آزمون را تا حد ممکن افزایش دهیم. ■

در آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ تعاریف زیر را برای پرتوانترین آزمون می‌آوریم.

تعریف ۱: الف- آزمون φ را یک آزمون در سطح α ($Level \alpha$) می‌نامیم اگر $E_{\theta_0}[\varphi(x)] \leq \alpha$.

ب- آزمون φ را یک آزمون به اندازه α ($Size \alpha$) می‌نامیم اگر $E_{\theta_0}[\varphi(x)] = \alpha$ ■

توجه: هر آزمون به اندازه α یک آزمون در سطح α نیز هست.

تعریف ۲-۲: آزمون φ^* پرتوانترین آزمون در سطح α نامیده می‌شود اگر $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] \leq \alpha$ و

برای هر آزمون دیگر φ در سطح α (یعنی با شرط $E_{\theta_0}[\varphi(X)] \leq \alpha$) داشته باشیم

$$E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] \geq E_{\theta_0}[\varphi(X)] \quad \blacksquare$$

توجه: اگر در تعریف ۲-۲، $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha$ باشد آنگاه φ^* را پرتوانترین آزمون به اندازه α گویند.

برای به دست آوردن پرتوانترین آزمون از لم مشهور زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱-۲ (لم نیمن - پیرسون): فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیعی از خانواده توزیعهای

$P = \{P_0, P_1\}$ باشد که P_0 و P_1 به ترتیب دارای چگالی‌های f_0 و f_1 نسبت به اندازه μ باشند و

بخواهیم آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ را انجام دهیم.

الف- برای آزمون H_0 در مقابل H_1 ، اگر آزمون φ^* را برای $0 \leq k < \infty$ و $0 \leq \gamma < 1$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & f_1(x) > kf_0(x) \\ \gamma & f_1(x) = kf_0(x) \\ 0 & f_1(x) < kf_0(x) \end{cases} \quad (I)$$

به طوری که $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha$ باشد، آنگاه φ^* پرتوانترین آزمون به اندازه α برای آزمون H_0 در

مقابل H_1 می‌باشد. در حالتی که $k = \infty$ است آزمون

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } f_0(x) = 0 \\ 0 & \text{if } f_0(x) > 0 \end{cases} \quad (II)$$

پرتوانترین آزمون به اندازه $\alpha = 0$ برای آزمون H_0 در مقابل H_1 است. (شرط کافی)

ب- شرط وجودی^۱: برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ آزمون φ^* به فرم (I) یا (II) وجود دارد به طوری که

$$E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha$$

ج- شرط یکتایی^۲: فرض کنید φ^* آزمونی به فرم (I) یا (II) باشد. اگر آزمون دیگری به اندازه α وجود داشته باشد که توان هر دو آزمون برابر باشند یعنی $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = E_{\theta_1}[\varphi(X)]$ ، آنگاه روی مجموعه $\{x \mid f_1(x) \neq kf_0(x)\}$ ، $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ a.e. μ (به جز روی مجموعه‌ای از X ها با احتمال صفر) (شرط لازم).

اثبات: الف- فرض کنید $0 \leq k < \infty$ و φ هر آزمون دیگر در سطح α در آزمون H_0 در مقابل H_1 باشد، یعنی $E_{\theta_0}[\varphi(X)] \leq \alpha$ می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$E_{\theta_1}[\varphi^*(X)] \geq E_{\theta_1}[\varphi(X)]$$

به راحتی دیده می‌شود که:

$$\int [\varphi^*(x) - \varphi(x)][f_1(x) - kf_0(x)] d\mu(x) \geq 0 \quad (۳)$$

زیرا اگر $f_1(x) - kf_0(x) > 0$ باشد آنگاه $\varphi^*(x) = 1 \geq \varphi(x)$ پس

$$[\varphi^*(x) - \varphi(x)][f_1(x) - kf_0(x)] \geq 0$$

و اگر $f_1(x) - kf_0(x) = 0$ آنگاه

$$[\varphi^*(x) - \varphi(x)][f_1(x) - kf_0(x)] = 0$$

و اگر $f_1(x) - kf_0(x) < 0$ باشد آنگاه $\varphi^*(x) = 0 \leq \varphi(x)$ پس

$$[\varphi^*(x) - \varphi(x)][f_1(x) - kf_0(x)] \leq 0$$

و در هر صورت رابطه (۳) برقرار است. بنابراین از رابطه (۳) نتیجه می‌شود که

$$\int \varphi^*(x) f_1(x) d\mu(x) - \int \varphi(x) f_1(x) d\mu(x) \geq k \left\{ \int \varphi^*(x) f_0(x) d\mu(x) - \int \varphi(x) f_0(x) d\mu(x) \right\}$$

$$\Rightarrow E_{\theta_1}[\varphi^*(X)] - E_{\theta_1}[\varphi(X)] \geq k \underbrace{\{E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] - E_{\theta_0}[\varphi(X)]\}}_{=\alpha} \underbrace{\}_{\leq \alpha} \geq 0$$

$$\Rightarrow E_{\theta_1}[\varphi^*(X)] \geq E_{\theta_1}[\varphi(X)]$$

^۱ Existence

^۲ Uniqueness

برای $k = \infty$ داریم که

$$E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \int \varphi^*(x) f_{\theta_0}(x) d\mu(x) = \int_{\{x: f_{\theta_0}(x) > 0\}} \varphi^*(x) f_{\theta_0}(x) d\mu(x) \stackrel{(II)}{=} \int_{\{x: f_{\theta_0}(x) > 0\}} 0 \times f_{\theta_0}(x) d\mu(x) = 0$$

همچنین اگر φ نیز آزمونی به اندازه $\alpha = 0$ باشد آنگاه

$$0 = E_{\theta_0}[\varphi(X)] = \int \varphi(x) f_{\theta_0}(x) d\mu(x) = \int_{\{x: f_{\theta_0}(x) > 0\}} \varphi(x) f_{\theta_0}(x) d\mu(x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) f_{\theta_0}(x) = 0 \quad \text{on} \quad \{x: f_{\theta_0}(x) > 0\} \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = 0 \quad \text{on} \quad \{x: f_{\theta_0}(x) > 0\}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}[\varphi^*(X) - \varphi(X)] &= \overbrace{\int_{\{x: f_{\theta_0}(x) > 0\}} [\varphi^*(x) - \varphi(x)] f_{\theta_0}(x) d\mu(x)}^0 + \int_{\{x: f_{\theta_0}(x) = 0\}} [\varphi^*(x) - \varphi(x)] f_{\theta_0}(x) d\mu(x) \\ &= \int_{\{x: f_{\theta_0}(x) = 0, f_1(x) > 0\}} [\varphi^*(x) - \varphi(x)] f_{\theta_0}(x) d\mu(x) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] \geq E_{\theta_0}[\varphi(X)]$$

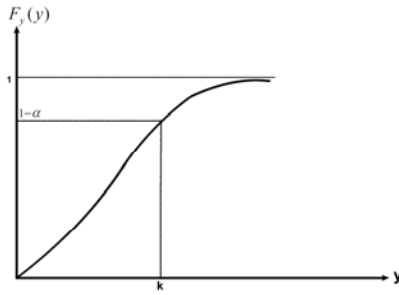
(ب) اگر $\alpha = 0$ باشد آنگاه هر آزمون φ^* بفرم (II) پرتوانترین آزمون به اندازه $\alpha = 0$ است. بنابراین فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ می‌باشد. برای $0 \leq k < \infty$ و $0 \leq \gamma \leq 1$ آزمون φ^* به فرم (I) دارای اندازه زیر است

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] &= P_{\theta_0}[f_1(X) > k f_{\theta_0}(X)] + \gamma P_{\theta_0}[f_1(X) = k f_{\theta_0}(X)] \\ &= P_{\theta_0}\left[\frac{f_1(X)}{f_{\theta_0}(X)} > k\right] + \gamma P_{\theta_0}\left[\frac{f_1(X)}{f_{\theta_0}(X)} = k\right] \\ &= P_{\theta_0}(Y > k) + \gamma P_{\theta_0}(Y = k) \end{aligned}$$

که در آن $Y = \frac{f_1(X)}{f_{\theta_0}(X)}$. بنابراین برای اینکه $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha$ باشد بایستی k و γ به گونه‌ای انتخاب شوند که

$$P_{\theta_0}(Y > k) + \gamma P_{\theta_0}(Y = k) = \alpha \quad (۴)$$

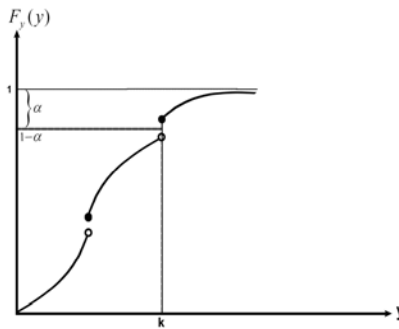
با توجه به رابطه (۴) دو حالت زیر پیش می‌آید:



- اگر متغیر تصادفی Y به گونه‌ای باشد که بتوان مقدار k را چنان یافت که $P_{\theta_0}(Y > k) = \alpha$ ، آنگاه با انتخاب این k و $\gamma = 0$ شرط (۴) برقرار می‌شود (چنین حالاتی معمولاً برای متغیرهای تصادفی پیوسته برقرار است (شکل روبرو)).

- اگر مقداری برای k وجود نداشته باشد که $P_{\theta_0}(Y > k) = \alpha$ ، در این صورت مقداری از k وجود دارد به طوری که:

$$P_{\theta_0}(Y < k) \leq 1 - \alpha < P_{\theta_0}(Y \leq k) \Rightarrow 1 - P_{\theta_0}(Y \leq k) < \alpha \leq 1 - P_{\theta_0}(Y < k) \\ \Rightarrow P_{\theta_0}(Y > k) < \alpha \leq P_{\theta_0}(Y \geq k)$$



در این صورت با انتخاب این مقدار k و انتخاب

$$\gamma = \frac{\alpha - P_{\theta_0}(Y > k)}{P_{\theta_0}(Y = k)} \quad \text{به صورت}$$

شرط (۱) برقرار می‌شود (شکل روبرو).

(ج)

اگر $\alpha = 0$ باشد آنگاه در قسمت (الف) دیدیم که آزمون φ^* بفرم (II) روی مجموعه $\{x : f_0(x) > 0\}$ برابر صفر است و φ^* پرتوانترین آزمون به اندازه $\alpha = 0$ است. حال اگر φ نیز یک آزمون به اندازه $\alpha = 0$ باشد آنگاه در قسمت الف دیدیم که $\varphi(x) = 0$ on $\{x : f_0(x) > 0\}$.

همچنین:

$$E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = E_{\theta_0}[\varphi(X)] \Rightarrow \int_{\{x : f_1(x) > 0\}} [\varphi^*(x) - \varphi(x)] f_1(x) d\mu(x) = 0$$

$$\stackrel{(\Delta)}{\Rightarrow} \int_{\{x : f_1(x) > 0, f_0(x) = 0\}} [\varphi^*(x) - \varphi(x)] f_1(x) d\mu(x) = 0$$

$$\stackrel{(II)}{\Rightarrow} \int_{\{x : f_1(x) > 0, f_0(x) = 0\}} [1 - \varphi(x)] f_1(x) d\mu(x) = 0$$

در نتیجه

$$\varphi(x) = 1 \text{ with prob. one on } \{x : f_1(x) > 0, f_0(x) = 0\} \quad (۶)$$

بنابراین

$$P_{\theta_0}[\varphi(X) \neq \varphi^*(X)] \stackrel{(\Delta)}{=} P_{\theta_0}[\{x : \varphi(x) \neq 0, f_0(x) > 0\}] \stackrel{(\Delta)}{=} 0$$

$$\begin{aligned} P_{\theta}[\varphi(X) \neq \varphi^*(X)] &= P_{\theta}[\varphi(X) \neq \varphi^*(X), f_1(X) > 0] \\ &= P_{\theta}[\varphi(X) \neq \varphi^*(X), f_1(X) > 0, f_0(X) = 0] \\ &= P_{\theta}[\varphi(X) \neq 1, f_1(X) > 0, f_0(X) = 0] \stackrel{(\epsilon)}{=} 0 \end{aligned}$$

زیرا روی $\{x : f_0(x) > 0\}$ ، $\varphi^*(x) = 0 = \varphi(x)$ است و روی $\{x : f_0(x) = 0\}$ ، $\varphi^*(x) = 1$ است. پس اگر $\alpha = 0$ باشد با احتمال یک $\varphi^*(X) = \varphi(X)$ است.

حال اگر $\alpha > 0$ باشد و φ^* آزمون به اندازه α به فرم Π باشد چون

$$E_{\theta_i}[\varphi^*(X)] = E_{\theta_i}[\varphi(X)] \quad i = 0, 1$$

$$\int [\varphi^*(x) - \varphi(x)][f_1(x) - kf_0(x)]d\mu(x) = 0 \quad \text{پس}$$

اما همواره $[\varphi^*(x) - \varphi(x)][f_1(x) - kf_0(x)] \geq 0$ و در نتیجه با احتمال یک داریم که

$$[\varphi^*(X) - \varphi(X)][f_1(X) - kf_0(X)] = 0$$

و یا روی مجموعه $\{x : f_1(x) \neq kf_0(x)\}$ با احتمال یک $\varphi^*(X) = \varphi(X)$ است. بنابراین به جز احتمالاً روی مجموعه‌ای با احتمال صفر (مربوط به حالت پیوسته) $\varphi(x)$ دارای فرم (I) با همان مقدار k ی آزمون $\varphi^*(x)$ می‌باشد. ■

نتیجه ۱-۲: فرض کنید $1 - \beta$ توان یک پرتوانترین آزمون (MP) به اندازه α برای آزمون H_0 در مقابل H_1 باشد در این صورت $\alpha < 1 - \beta$ است به جز اینکه با احتمال یک $f_0(X) = f_1(X)$ باشد.

اثبات: آزمون $\varphi(X) \equiv \alpha$ را در نظر بگیرید. چون $E_{\theta_0}[\varphi(X)] = \alpha$ و $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha$ پرتوانترین آزمون به اندازه α است بنابراین

$$E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] \geq E_{\theta_0}[\varphi(X)] = \alpha \Rightarrow \overline{1 - \beta} \geq \alpha$$

حال اگر $\alpha = 1 - \beta < 1$ باشد آنگاه آزمون $\varphi(X) \equiv \alpha$ بایستی پرتوانترین آزمون به اندازه α باشد و بر طبق قسمت (ج) لم نیمن پیرسون بایستی بصورت (I) باشد (زیرا $\varphi(X) \neq 1$) اما چون $\varphi(X) = \alpha, \forall x$ پس بایستی با احتمال یک $f_1(x) = kf_0(x)$ باشد و بنابراین

$$\int f_1(x) d\mu(x) = k \int f_0(x) d\mu(x) \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f_1(x) = f_0(x) \text{ with Prob. one}$$

■

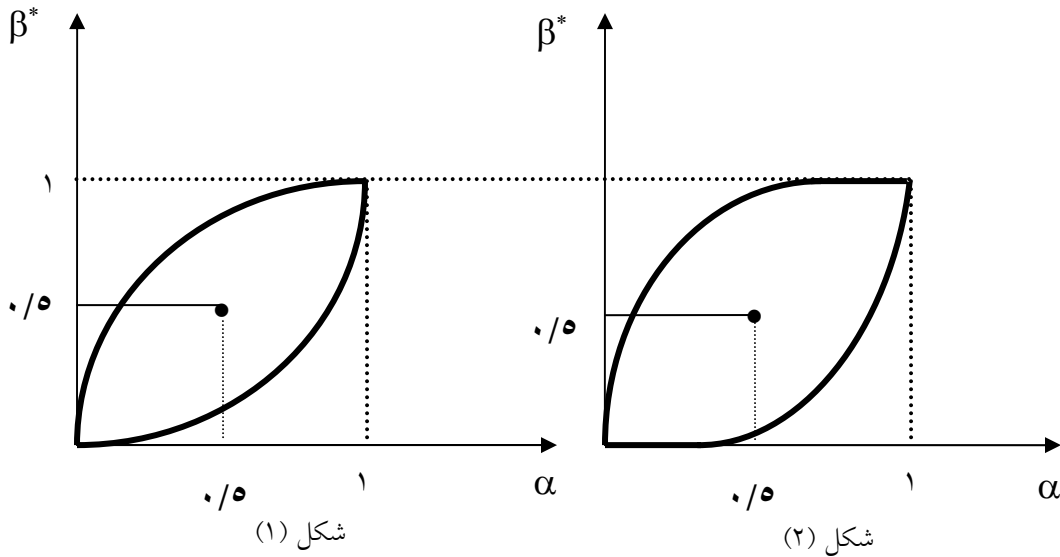
نمایش هندسی آزمون فرض ساده در مقابل ساده:

فرض کنید

$$N = \left\{ (\alpha_\varphi, \beta_\varphi^*) \mid \varphi, \alpha_\varphi = E_{\theta_0}[\varphi(X)], \beta_\varphi^* = E_{\theta_1}[\varphi(X)] \right\}$$

در این صورت می‌توان نشان داد که N یک مجموعه محدب است که شامل نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ است و نسبت به نقطه $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ متقارن است همچنین این مجموعه یک مجموعه بسته است (شکل ۱ و ۲ را ملاحظه کنید).

برای هر $0 < \alpha_0 < 1$ آزمون‌های در سطح α با نقاطی از N که طول آنها کمتر یا مساوی α_0 است نمایش داده می‌شوند. پرتوانترین آزمون به اندازه α_0 متعلق به پوسته بالای N با طول α_0 است و این تنها نقطه مربوط به پرتوانترین آزمون به اندازه α_0 است (شکل ۱) مگر آنکه نقطه‌ای از N به فرم $(\alpha, 1)$ با شرط $\alpha < \alpha_0$ وجود داشته باشد (شکل ۲ مربوط به حالت ج لم نیمن پیرسون).



مثال ۲-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با چگالی

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, x \in R, \theta > 0$$

دهیم. پرتوانترین آزمون به اندازه α را به دست آورده و توان آن را تعیین کنید.

$$f_\theta(x) = (2\theta)^{-1} \cdot e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i|}$$

حل:

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{2^{-1} \cdot e^{-\sum |x_i|}}{2^{-1} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum |x_i|}} = 2^{\frac{1}{2} \sum |x_i|} > k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| < c$$

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \sum |x_i| < c \\ 0 & \sum |x_i| > c \end{cases}$$

بنابراین پرتوانترین آزمون عبارت است از

که در آن

$$0.05 = \alpha = E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^n |X_i| < c\right) = P_{\theta_0}\left(\frac{2}{3} \sum_{i=1}^n |X_i| < \frac{2}{3}c\right) = P\left(\chi_{(20)}^2 < \frac{2}{3}c\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}c = \chi_{0.95}^2(20) = 10.9 \Rightarrow c = 16.35$$

$$\beta^* = E_{\theta_1}[\varphi^*(X)] = P_{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^n |X_i| < c\right) = P_{\theta_1}\left(2 \sum_{i=1}^n |X_i| < 2c\right) = P\left(\chi_{(20)}^2 < 32.7\right) = 0.9616$$

■

تمرین: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با چگالی زیر باشند

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}, \quad x \in R, \quad \theta > 0$$

الف- اگر $n=10$ و بخواهیم آزمون $H_0: \theta=3$ vs $H_1: \theta=5$ را انجام دهیم پرتوانترین آزمون به اندازه $\alpha=0.05$ را به دست آورده و توان آزمون را محاسبه کنید.

ب- در هریک از حالات زیر پرتوانترین آزمون به اندازه α را با اندازه نمونه n به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

(i) $H_0: \theta=3$ vs $H_1: \theta=\theta_1$ ($\theta_1 > 3$)

(ii) $H_0: \theta=3$ vs $H_1: \theta=\theta_1$ ($\theta_1 < 3$)

■

مثال ۳-۲: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با یکی از توابع احتمال زیر باشد:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f_0(x)$	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۲
$f_1(x)$	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۰۵	۰/۰۵

و بخواهیم آزمون $H_0: X \sim f_0$ vs $H_1: X \sim f_1$ را انجام دهیم. پرتوانترین آزمون به اندازه‌های: الف- ۰/۰۵ ب- ۰/۱۵ ج- ۰/۱ را به دست آورید و توان هر یک را محاسبه کنید.

حل:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f_0(x)$	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۲
$f_1(x)$	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۰۵	۰/۰۵
$y = \frac{f_1(x)}{f_0(x)}$	۲	۳	۲/۵	۱/۵	۱/۲۵	۰/۱۶۷	۰/۲۵
	(۳)	(۱)	(۲)	(۴)	(۵)	(۷)	(۶)

$$\alpha = E_{\theta_0}[\varphi_1(X)] = P_{\theta_0}(X = 2) = 0.5 \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 0 & x \neq 2 \end{cases} \quad \text{الف-}$$

است که توان آن برابر است با:

$$\beta^* = E_{\theta_1}[\varphi_1(X)] = P_{\theta_1}(X = 2) = 0.15$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & x = 2, 3 \\ 0 & x \neq 2, 3 \end{cases} \quad \text{ب-}$$

$$\alpha = E_{\theta_0}[\varphi_2(X)] = P_{\theta_0}(X = 2 \text{ or } X = 3) = 0.5 + 0.1 = 0.6$$

است که توان آن برابر است با:

$$\beta^* = E_{\theta_1}[\varphi_2(X)] = P_{\theta_1}(X = 2 \text{ or } X = 3) = 0.15 + 0.25 = 0.4$$

ج- با توجه به (الف) و (ب) در این حالت پرتوانترین آزمون به فرم تصادفی شده‌ی

$$\varphi_\gamma(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ \gamma & x = 3 \\ 0 & x \neq 2, 3 \end{cases}$$

است که در آن

$$\gamma = \frac{\alpha - P_{\theta_0}(X = 2)}{P_{\theta_0}(X = 3)} = \frac{0.6 - 0.5}{0.1} = 1$$

است و توان آن عبارت است از:

$$\beta^* = E_{\theta_1}[\varphi_\gamma(X)] = P_{\theta_1}(X = 2) + \gamma P_{\theta_1}(X = 3) = 0.15 + 1(0.25) = 0.4$$

■

مثال ۲-۴: فرض کنید X دارای تابع چگالی $f(x)$ باشد. آزمون زیر را در سطح α انجام دهید:

$$H_0: f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad \text{vs} \quad H_1: f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

حل:

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{\frac{1}{\pi(1+x^2)}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{+x^2}}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{+y}}{1+y}, \quad y = x^2 > 0$$

$$g(y) = \frac{e^{+y}}{1+y} \quad y > 0 \Rightarrow \ln g(y) = y - \ln(1+y)$$

$$\frac{\partial \ln g(y)}{\partial y} = 1 - \frac{1}{1+y} = \frac{y}{1+y} \Rightarrow g'(y) = \frac{y}{1+y} g(y) = \frac{y}{1+y} \frac{e^y}{1+y} > 0$$

پس g یک تابع صعودی بر حسب y است بنابراین $\frac{f_1(x)}{f_0(x)}$ نیز یک تابع صعودی از $y = x^r$ است.

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k \Leftrightarrow x^r > c \Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} 1 & x^r > c \\ 0 & x^r < c \end{cases}$$

$$\alpha = E_{H_0}[\varphi(X)] = P_{H_0}(X^r > c) = P_{H_0}(rX^r > rc) = P_{H_0}(\chi_{(1)}^r > rc)$$

$$\Rightarrow rc = \chi_{1-\alpha}^r(1) \Rightarrow c = \frac{1}{r} \chi_{1-\alpha}^r(1)$$

■

مثال ۲-۵: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ باشند. آزمون زیر را در سطح α انجام دهید.

$$H_0: \mu = \mu_0, \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu = \mu_1, \sigma = \sigma_1 \quad (\sigma_1 > \sigma_0)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{f_1(\tilde{x})}{f_0(\tilde{x})} &= \frac{(\pi\sigma_1^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2}}{(\pi\sigma_0^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(x_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{(x_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} \right]} \\ &= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0} \right) \left(\frac{x_i - \mu_1}{\sigma_1} - \frac{x_i - \mu_0}{\sigma_0} \right) \right]} \\ &= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{(\sigma_0 + \sigma_1)x_i - \sigma_0\mu_1 - \sigma_1\mu_0}{\sigma_0\sigma_1} \right) \left(\frac{(\sigma_0 - \sigma_1)x_i - \sigma_0\mu_1 + \sigma_1\mu_0}{\sigma_0\sigma_1} \right) \right]} \\ &= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2 \sigma_1^2} \sum_{i=1}^n \left[\left(x_i - \frac{\sigma_0\mu_1 + \sigma_1\mu_0}{\sigma_0 + \sigma_1} \right) \left(x_i + \frac{\sigma_0\mu_1 - \sigma_1\mu_0}{\sigma_1 - \sigma_0} \right) \right]} \end{aligned}$$

$$T(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n \left[\left(x_i - \frac{\sigma_0\mu_1 + \sigma_1\mu_0}{\sigma_1 + \sigma_0} \right) \left(x_i - \frac{\sigma_0\mu_1 - \sigma_1\mu_0}{\sigma_1 - \sigma_0} \right) \right]$$

قرار دهید

در این صورت $\sigma_o < \sigma_1 \Rightarrow \sigma_o^r - \sigma_1^r < 0 \Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_o(x)}$ is increasig in $T(x)$

بنابراین پرتوانترین آزمون به صورت زیر است:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & T(x) > k \\ 0 & T(x) < k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T > k &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[\left(x_i - \frac{\sigma_o \mu_1 + \sigma_1 \mu_o}{\sigma_1 + \sigma_o} \right) \left(x_i - \frac{\sigma_o \mu_1 - \sigma_1 \mu_o}{\sigma_1 - \sigma_o} \right) \right] > k \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[x_i^r + \left(\frac{\sigma_o \mu_1 + \sigma_1 \mu_o}{\sigma_1 - \sigma_o} - \frac{\sigma_o \mu_1 - \sigma_1 \mu_o}{\sigma_1 + \sigma_o} \right) x_i \right] > k^* \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(x_i^r - r \frac{\sigma_1^r \mu_o + \sigma_o^r \mu_1}{\sigma_1^r - \sigma_o^r} x_i \right) > k^* \end{aligned}$$

با فرض اینکه $w = \frac{\sigma_1^r \mu_o - \sigma_o^r \mu_1}{\sigma_1^r + \sigma_o^r}$ است داریم:

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i^r - r w x_i) > k^*$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - w)^r > c$$

$$\therefore \varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{i=1}^n (x_i - w)^r > c \\ 0 & \text{if } \sum_{i=1}^n (x_i - w)^r < c \end{cases}$$

under $H_o: X_i - w \sim N(\delta, \sigma_o^r)$ $\delta = \mu_1 - w = \mu_1 - \frac{\sigma_1^r \mu_o - \sigma_o^r \mu_1}{\sigma_1^r - \sigma_o^r} = \frac{\sigma_1^r (\mu_1 - \mu_o)}{\sigma_1^r - \sigma_o^r}$

$$\therefore \sum (X_i - w)^r \sim \sigma_o^r \chi'^r_{\left(n, \frac{n \delta^r}{r \sigma_o^r} \right)}$$

$$\alpha = E_{H_o}[\varphi^*(X)] \Rightarrow K = \sigma_o^r \chi'^r_{1-\alpha} \left(n, \frac{n \delta^r}{r \sigma_o^r} \right)$$

■

توجه: اگر $\mu_0 = \mu_1$ باشد آنگاه $\delta = 0$ و آزمون به صورت

$$H_0: \sigma = \sigma_0 \text{ vs } H_1: \sigma = \sigma_1$$

تبدیل می‌شود و $k = \sigma_0^2 \chi_{(n,1-\alpha)}^2$.

تمرین: در مثال بالا حالات زیر را بررسی کنید:

$$\begin{cases} (i) & \sigma_0 = \sigma_1, \mu_1 > \mu_0 \\ (ii) & \sigma_0 = \sigma_1, \mu_1 < \mu_0 \end{cases}$$

فصل ۳

پرتوانترین آزمونهای
یکنواخت

بخش ۱: مفاهیم اولیه

در فصل قبل در مورد آزمون فرض ساده در مقابل فرض ساده دیگر بحث کردیم. در این قسمت در مورد آزمون فرضهای مرکب (خصوصاً فرضهای یک طرفه) بحث خواهیم کرد.

فرض کنید $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی از خانواده توزیعهای $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ با توزیع احتمال توام $f_\theta(\tilde{x})$ باشند و بخواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

که در آن $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ و $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. تابع آزمون را به صورت $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱-۱: تابع توان مربوط به تابع آزمون φ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta(\theta) = \Pi_\varphi(\theta) = E_\theta[\varphi(\tilde{X})] \quad \forall \theta \in \Theta$$

توجه کنید که تابع توان مربوط به آزمون φ بستگی به ادعاهای فرضهای H_0 و H_1 ندارد و تنها بستگی به ناحیه بحرانی تابع آزمون φ دارد.

تعریف ۲-۱: برای آزمون $H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \in \Theta_1$

الف- آزمون φ یک آزمون در سطح α نامیده می‌شود هر گاه

$$\Pi_\varphi(\theta) = E_\theta[\varphi(\tilde{X})] \leq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

ب- آزمون φ یک آزمون به اندازه α نامیده می‌شود هر گاه

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \Pi_\varphi(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta[\varphi(\tilde{X})] = \alpha$$

ج- تابع توان آزمون φ برای هر $\theta \in \Theta_1$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta^*(\theta) = E_\theta[\varphi(\tilde{X})] = \Pi_\varphi(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

د- به طور مشابه با اندازه آزمون α ، مقدار β را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\beta = \sup_{\theta \in \Theta_1} [1 - \Pi_\varphi(\theta)] = \sup_{\theta \in \Theta_1} [1 - E_\theta[\varphi(\tilde{X})]]$$

■

توجه: اگر $\Pi_{\varphi}(\theta)$ یک تابع یکنوا باشد آنگاه

$$\alpha + \beta = \sup_{\theta \in \Theta_0} \Pi_{\varphi}(\theta) + \sup_{\theta \in \Theta_1} [1 - \Pi_{\varphi}(\theta)] = 1 + \left\{ \sup_{\theta \in \Theta_0} \Pi_{\varphi}(\theta) - \inf_{\theta \in \Theta_1} \Pi_{\varphi}(\theta) \right\} = 1 + 0 = 1$$

■

مثال ۱-۱: فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی ۳ تایی از توزیع $B(1, p)$ باشند و بخواهیم

$$H_0: p \leq \frac{1}{4} \quad \text{vs} \quad H_1: p > \frac{1}{4} \quad \text{آزمون}$$

را انجام دهیم. برای هر یک از آزمونهای زیر تابع توان و مقادیر α و β را به دست آورید.

$$\varphi_2(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^3 x_i \geq 2 \\ 0 & \sum_{i=1}^3 x_i < 2 \end{cases} \quad \text{ب-} \quad \varphi_1(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^3 x_i = 3 \\ 0 & \sum_{i=1}^3 x_i \neq 3 \end{cases} \quad \text{الف-}$$

$$\Pi_{\varphi_1}(p) = E_p[\varphi_1(\underline{X})] = P_p\left(\sum_{i=1}^3 x_i = 3\right) = p^3 \quad \text{حل: الف-}$$

که تابعی صعودی از p است.

$$\alpha = \sup_{P \leq \frac{1}{4}} \Pi_{\varphi_1}(p) = \Pi_{\varphi_1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64}, \quad \beta = \sup_{P > \frac{1}{4}} [1 - \Pi_{\varphi_1}(p)] = 1 - \Pi_{\varphi_1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{63}{64}$$

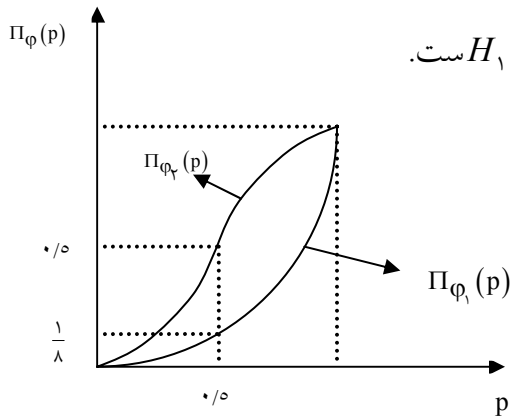
$$\Rightarrow \underline{\alpha + \beta = 1}$$

پس φ_1 یک آزمون به اندازه $\frac{1}{64}$ برای آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

$$\Pi_{\varphi_2}(p) = E_p[\varphi_2(\underline{X})] = P_p\left(\sum_{i=1}^3 X_i \geq 2\right) = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3 = 3p^2 - 2p^3 \quad \text{ب-}$$

که تابعی صعودی از p است.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sup_{P \leq \frac{1}{4}} \Pi_{\varphi_2}(p) = \Pi_{\varphi_2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \beta &= \sup_{P > \frac{1}{4}} [1 - \Pi_{\varphi_2}(p)] = 1 - \Pi_{\varphi_2}\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$



پس φ_2 یک آزمون به اندازه $\frac{1}{4}$ برای آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

تابع توان دو آزمون بالا در روبرو رسم شده است:

با توجه به این نمودارها دیده می شود که

$$\Pi_{\varphi_2}(p) > \Pi_{\varphi_1}(p) \quad \forall p \in (0, 1)$$

که این نامساوی به ازای $\frac{1}{4} < p < 1$ برای آزمون

φ_2 مناسب است (چون توان آن بیشتر است) ولی به ازای $0 < p < \frac{1}{4}$ برای آزمون φ_2 مناسب نیست

زیرا در این ناحیه به ازای هر مقدار $0 < p < \frac{1}{4}$ احتمال خطای نوع اول آزمون تعیین می گردد.

■

تعریف ۳-۱: آزمون φ^* پرتوانترین آزمون یکنواخت (UMP) در سطح α برای آزمون

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta \in \Theta_1$$

است هرگاه

الف- φ^* یک آزمون در سطح α باشد، یعنی

$$E_{\theta}[\varphi^*(X)] \leq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

ب- اگر φ هر آزمون دیگر در سطح α باشد آنگاه

$$E_{\theta}[\varphi^*(X)] \geq E_{\theta}[\varphi(X)] \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

■

توجه: اگر در شرط (الف) داشته باشیم که: $\sup_{\theta \in \Theta_0} E_{\theta}[\varphi^*(X)] = \alpha$ آنگاه φ^* را پرتوانترین آزمون

یکنواخت به اندازه α گویند.

با توجه به تعریف فوق برای به دست آوردن پرتوانترین آزمون یکنواخت در سطح α بایستی آزمونی

را پیدا کنیم که در بین آزمونهای در سطح α ، دارای بیشترین توان به ازای تمام $\theta \in \Theta_1$ نسبت به

آزمونهای دیگر باشد. بنابراین بایستی انواع حالتی که برای Θ_1 برقرار می شود را مورد نظر قرار داد

که عبارتند از:

الف- آزمونهای یک طرفه:

$$H_0: \theta \geq \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta < \theta_0 \quad \text{یا} \quad H_0: \theta \leq \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta > \theta_0$$

یا

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta < \theta_0 \quad \text{یا} \quad H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta > \theta_0$$

ب- آزمونهای دو طرفه:

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta \neq \theta_0$$

ج- آزمونهای فاصله‌ای:

$$H_0: \theta_{01} \leq \theta \leq \theta_{02} \text{ vs } H_1: \theta < \theta_{01} \text{ یا } \theta > \theta_{02}$$

یا

$$H_0: \theta \leq \theta_{01} \text{ یا } \theta \geq \theta_{02} \text{ vs } H_1: \theta_{01} < \theta < \theta_{02}$$

برخلاف آزمون فرض‌های ساده در مقابل ساده دیگر که همواره برای هر $\alpha \in [0, 1]$ یک آزمون پرتوان طبق لم نیمین پیرسون وجود داشت، پرتوانترین آزمون یکنواخت برای فرض‌های مرکب همیشه وجود ندارد و عمدتاً این نوع آزمونها برای فرض‌های مقابل یک طرفه وجود دارند. در خصوص فرض‌های مقابل دو طرفه و فاصله‌ای در حالت‌هایی خاص پرتوانترین آزمون یکنواخت نااریب (UMPU) وجود دارد. در این فصل آزمون‌های UMP و در فصل‌های بعد آزمون‌های UMPU و آزمون‌های دیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بخش ۲: خاصیت نسبت درستنمایی یکنوا^۱

برای به‌دست آوردن آزمون‌های UMP نیاز به مفهومی به نام خاصیت نسبت درستنمایی یکنوا داریم که آن را در زیر معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱-۲: فرض کنید $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی از یک توزیع احتمال $f_\theta: \theta \in \Theta \subset R$ باشد و برای هر $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ که $\theta_0 \neq \theta_1$ داشته باشیم که $f_{\theta_0}(\underline{x}) \neq f_{\theta_1}(\underline{x})$ گویند خانواده $\{f_\theta: \theta \in \Theta \subset R\}$ دارای خاصیت نسبت درستنمایی یکنوا (MLR) در آماره

^۱ Monotone Likelihood Ratio Property

$T(\tilde{x})$ است اگر برای $\theta_0 < \theta_1$ نسبت $\frac{f_{\theta_1}(\tilde{x})}{f_{\theta_0}(\tilde{x})}$ یک تابع غیرنزولی از $T(\tilde{x})$ روی مجموعه‌ای که این نسبت وجود دارد، باشد یعنی روی مجموعه‌ای از نقاط $\tilde{x}$ که برای آن f_{θ_1} و f_{θ_0} مثبت باشند (اگر $f_{\theta_0}(\tilde{x}) = 0$ و $f_{\theta_1}(\tilde{x}) > 0$ ، آنگاه نسبت فوق ∞ تعریف می‌شود).

■

مثال ۲-۱: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از خانواده توزیع‌های نمایی یک پارامتری باشند در این صورت

$$\theta_0 < \theta_1 \Rightarrow \frac{f_{\theta_1}(\tilde{x})}{f_{\theta_0}(\tilde{x})} = \frac{e^{c(\theta_1) \sum_{i=1}^n d(x_i) + nQ(\theta_1)}}{e^{c(\theta_0) \sum_{i=1}^n d(x_i) + nQ(\theta_0)}} = e^{[c(\theta_1) - c(\theta_0)] \sum_{i=1}^n d(x_i) + n(Q(\theta_1) - Q(\theta_0))}$$

بنابراین

الف- اگر $c(\theta)$ تابعی صعودی از θ باشد آنگاه این نسبت یک تابع صعودی از $\sum_{i=1}^n d(x_i)$ است

پس این خانواده دارای خاصیت MLR در $T(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n d(x_i)$ است.

ب- اگر $c(\theta)$ تابعی نزولی از θ باشد آنگاه این نسبت یک تابع صعودی از $-\sum_{i=1}^n d(x_i)$ است پس

این خانواده دارای خاصیت MLR در $T(\tilde{x}) = -\sum_{i=1}^n d(x_i)$ است.

بنابراین خانواده توزیع‌های نرمال $(N(0, \sigma^2), N(\theta, 1))$ ، دو جمله‌ای (n معلوم و $B(n, p)$)، دو جمله‌ای منفی، پواسون، گاما و بتا دارای خاصیت MLR هستند.

■

مثال ۲-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $E(\theta, 1)$ باشند. نشان دهید این خانواده دارای خاصیت MLR است.

حل: $f_{\theta}(\tilde{x}) = \prod_{i=1}^n e^{-(x_i - \theta)} I_{(\theta, +\infty)}(x_i) = e^{-n(\bar{x} - \theta)} I_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta)$

$$\theta_0 < \theta_1 \Rightarrow \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} = \frac{e^{-n(\bar{x}-\theta_1)} I_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta_1)}{e^{-n(\bar{x}-\theta_0)} I_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta_0)} = \begin{cases} \text{بیرممکن} & x_{(1)} < \theta_0 < \theta_1 \\ 0 & \theta_0 < x_{(1)} < \theta_1 \\ e^{n(\theta_1-\theta_0)} & \theta_0 < \theta_1 < x_{(1)} \end{cases}$$

بنابراین این نسبت یک تابع صعودی از $X_{(1)}$ است پس این خانواده دارای خاصیت MLR در $T(X_{(1)}) = X_{(1)}$ است.

■

مثال ۲-۳: فرض کنید X دارای توزیع فوق هندسی با تابع احتمال زیر باشد.

$$f_{\theta}(x) = \frac{\binom{\theta}{x} \binom{N-\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x = 0, 1, \dots, n$$

که در آن N مقداری معلوم و $\theta \in \{0, 1, 2, \dots, N\} = \Theta$. نشان دهید که این خانواده دارای خاصیت MLR در $T(X) = X$ است.

$$\frac{f_{\theta+1}(x)}{f_{\theta}(x)} = \frac{\theta+1}{N-\theta} \cdot \frac{N-\theta-n+x}{\theta+1-x} \uparrow \text{ in } x \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} \theta_0 < \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_0 + k \Rightarrow \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} &= \frac{f_{\theta_0+k}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \\ &= \frac{f_{\theta_0+k}(x)}{f_{\theta_0+k-1}(x)} \cdot \frac{f_{\theta_0+k-1}(x)}{f_{\theta_0+k-2}(x)} \cdot \dots \cdot \frac{f_{\theta_0+1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \uparrow \text{ in } x \end{aligned}$$

■

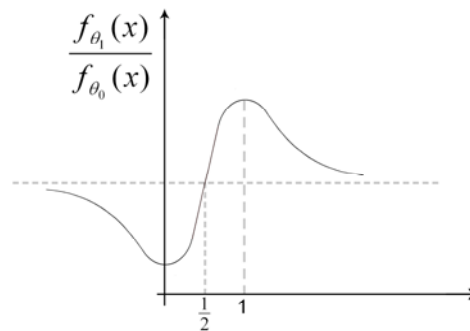
مثال ۲-۴: نشان دهید که خانواده توزیع‌های کوشی $C(\theta, 1)$ دارای خاصیت MLR نیست.

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\pi[1+x-\theta]^2} \quad \theta \in R, x \in R \quad \text{حل:}$$

$$\theta_0 < \theta_1 \Rightarrow \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} = \frac{1 + (x - \theta_0)^2}{1 + (x - \theta_1)^2} = \begin{cases} 1 & x \rightarrow -\infty \\ < 1 & (x - \theta_0)^2 < (x - \theta_1)^2 \\ > 1 & (x - \theta_0)^2 > (x - \theta_1)^2 \\ 1 & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & x \rightarrow -\infty \\ < 1 & x < \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \\ > 1 & x > \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \\ 1 & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

که تابعی یکنوا از x نیست (شکل زیر $(\theta_0 = 0$ و $\theta_1 = 1)$ پس خانواده توزیع‌های کوشی فوق دارای خاصیت MLR نیست.



■

بخش ۳: پرتوانترین آزمونهای یکنواخت^۱ (UMPT)

در این بخش پرتوانترین آزمون یکنواخت (UMP) به اندازه α در کلاس توزیع‌هایی که دارای خاصیت MLR هستند را برای آزمون‌های یک طرفه به دست می‌آوریم و سپس حالت‌های خاص مربوط به آزمون‌های دو طرفه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

^۱ Uniformly Most Powerful Tests

قضیه ۳-۱ (قضیه کارلین-روبین)^۱: فرض کنید $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی از توزیع احتمال $f_\theta: \theta \in \Theta \subset R$ باشد که این خانواده دارای خاصیت MLR در $T(x)$ است و تابع آزمون زیر را در نظر بگیرید

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & T(x) > c \\ \gamma & T(x) = c \\ 0 & T(x) < c \end{cases} \quad (۱)$$

الف- تابع توان $\Pi_{\varphi^*}(\theta) = E_\theta[\varphi^*(X)]$ تابعی غیرنزولی از θ است مگر آنکه برای هر $\theta \in \Theta$ ، $E_\theta[\varphi^*(X)] = 0$ یا $E_\theta[\varphi^*(X)] = 1$ باشد.

ب- اگر $E_\theta[\varphi^*(X)] = \alpha$ باشد آنگاه آزمون φ^* پرتوانترین آزمون یکنواخت (UMP) به اندازه $0 < \alpha \leq 1$ برای آزمون یک طرفه زیر است.

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta > \theta_0 \quad (۲)$$

و اگر $\alpha = 0$ باشد آنگاه آزمون زیر یک آزمون UMP به اندازه صفر برای انجام آزمون (۲) است.

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & f_{\theta_0}(x) = 0 \\ 0 & f_{\theta_0}(x) > 0 \end{cases} \quad (۳)$$

ج- برای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ آزمون φ^* به فرم (۱) یا (۳) وجود دارد به طوری که $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha$.

اثبات: الف- فرض کنید برای بعضی $\theta \in \Theta$ ، $E_\theta[\varphi^*(X)] \neq 0$ و $E_\theta[\varphi^*(X)] \neq 1$ و قرار

می‌دهیم $\theta_0 < \theta$. با استفاده از لم نیمن-پیرسون پرتوانترین آزمون برای انجام آزمون

$$H'_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H'_1: \theta = \theta_1$$

عبارت است از:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & f_{\theta_1}(x) > k f_{\theta_0}(x) \\ \gamma & f_{\theta_1}(x) = k f_{\theta_0}(x) \\ 0 & f_{\theta_1}(x) < k f_{\theta_0}(x) \end{cases} \quad (۴)$$

و چون خانواده دارای خاصیت MLR در $T(x)$ است پس

^۱ Karlin & Rubin (۱۹۵۶)

$$\frac{f_{\theta_1}(\underline{x})}{f_{\theta_0}(\underline{x})} > k \Leftrightarrow T(\underline{x}) > c$$

بنابراین آزمون‌های (۱) و (۴) معادل می‌باشند و در نتیجه آزمون (۱) پرتوانترین آزمون به اندازه $\alpha = E_{\theta}[\varphi^*(\underline{X})] \neq 0$ برای انجام آزمون H'_0 در مقابل H'_1 است. چون $f_{\theta_1}(\underline{x})$ و $f_{\theta_0}(\underline{x})$ یکسان نیستند پس بنابر نتیجه لم نیمن-پیرسون $1 - \beta > \alpha$ و یا $E_{\theta_1}[\varphi^*(\underline{X})] > E_{\theta_0}[\varphi^*(\underline{X})]$ حال اگر $\alpha = E_{\theta_0}[\varphi^*(\underline{X})] = 0$ آنگاه طبق لم نیمن-پیرسون آزمون φ^* به فرم (۳) پرتوانترین آزمون برای انجام آزمون H'_0 در مقابل H'_1 است و بنابراین:

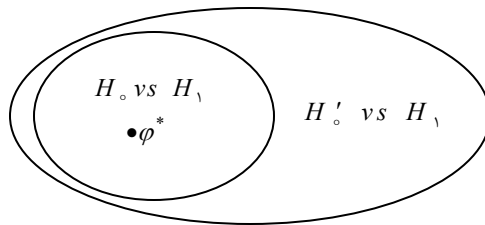
$$E_{\theta_1}[\varphi^*(\underline{X})] \geq 0 = E_{\theta_0}[\varphi^*(\underline{X})]$$

و در هر دو حالت $E_{\theta}[\varphi^*(\underline{X})]$ یک تابع غیر نزولی از θ است.

ب- با توجه به قسمت (الف) φ^* در رابطه (۱) پرتوانترین آزمون به اندازه α برای انجام آزمون H'_0 در مقابل H'_1 است که در آن $\alpha = P_{\theta_0}(T(\underline{X}) > c) + \gamma P_{\theta_0}(T(\underline{X}) = c)$ پس c و در نتیجه آزمون φ^* بستگی به θ_1 تنها از طریق $\theta_1 > \theta_0$ دارد و به خود مقدار θ_1 بستگی ندارد. بنابراین φ^* پرتوانترین آزمون یکنواخت به اندازه $\alpha = E_{\theta_0}[\varphi^*(\underline{X})] > 0$ برای انجام آزمون زیر است

$$\boxed{H'_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H'_1: \theta > \theta_0} \quad (5)$$

$$E_{\theta}[\varphi(\underline{X})] \leq \alpha \quad \forall \theta \leq \theta_0 \Rightarrow E_{\theta_0}[\varphi(\underline{X})] \leq \alpha \quad \forall \varphi \quad \text{از طرفی}$$



بنابراین کلاس آزمونهای در سطح α برای آزمون (۲) زیر کلاسی از آزمونهای در سطح α برای انجام آزمون (۵) است و چون $E_{\theta}[\varphi^*(\underline{X})]$ تابعی غیر نزولی از θ است پس:

$$E_{\theta}[\varphi^*(\underline{X})] \leq E_{\theta_0}[\varphi^*(\underline{X})] \quad \forall \theta \leq \theta_0.$$

یعنی φ^* یک آزمون در سطح α برای آزمون (۲) نیز هست.

حال چون φ^* پرتوانترین آزمون یکنواخت در سطح α در کلاس بزرگتر (۵) است بنابراین پرتوانترین آزمون یکنواخت در سطح α در کلاس کوچکتر (۲) است و چون

$$\sup_{\theta \leq \theta_0} E_{\theta}[\varphi^*(X)] = E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha$$

پس $\varphi^*(X)$ در (۱) پرتوانترین آزمون یکنواخت به اندازه α در آزمون (۲) می‌باشد.

اگر $\alpha = \sup_{\theta \leq \theta_0} E_{\theta}[\varphi^*(X)] = E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = 0$ باشد آنگاه پرتوانترین آزمون یکنواخت به اندازه

$\alpha = 0$ برای انجام آزمون (۵) به صورت (۳) است و مابقی اثبات با همان استدلال بالا انجام می‌گیرد.

(تمرین)

ج- هر آزمون به فرم (۱) دارای اندازه زیر است

$$0 < \alpha = \sup_{\theta \leq \theta_0} E_{\theta}[\varphi^*(X)] = E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = P_{\theta_0}(T > c) + \gamma P_{\theta_0}(T = c)$$

حال برای مقدار داده شده $\alpha \in (0, 1)$ با استدلال مشابه قسمت (ب) لم نیمن-پیرسون مقادیر c و γ را می‌توان یافت که $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha$ (اثبات به عهده دانشجو).

■

نتیجه ۳-۱: اگر $X = (X_1, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی از توزیع احتمال $f_{\theta} : \theta \in \Theta \subset R$ باشد که این خانواده دارای خاصیت MLR در $T(X)$ است در این صورت برای هر آزمون φ و هر $\theta_0 \in \Theta$ به گونه‌ای که $0 < E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] < 1$ آزمونی مانند φ^* به فرم (۱) وجود دارد که:

$$\begin{cases} E_{\theta}[\varphi^*(X)] \leq E_{\theta}[\varphi(X)] & \forall \theta \leq \theta_0 \\ E_{\theta}[\varphi^*(X)] \geq E_{\theta}[\varphi(X)] & \forall \theta \geq \theta_0 \end{cases}$$

اثبات: فرض کنید $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha \neq 0$ و $\varphi^*(X)$ پرتوانترین آزمون یکنواخت به اندازه α در

آزمون $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ به فرم (۱) باشد. در این صورت:

$$E_{\theta}[\varphi^*(X)] \geq E_{\theta}[\varphi(X)] \quad \forall \theta \geq \theta_0$$

همچنین با استفاده از تقارن، $1 - \varphi^*(X)$ پرتوانترین آزمون یکنواخت برای آزمون

$H_0^* : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1^* : \theta < \theta_0$ است (به شرط آنکه $\alpha \neq 1$) و بنابراین

$$E_{\theta}[1 - \varphi^*(X)] \geq E_{\theta}[1 - \varphi(X)] \quad \forall \theta \leq \theta_0 \Rightarrow E_{\theta}[\varphi^*(X)] \leq E_{\theta}[\varphi(X)] \quad \forall \theta \leq \theta_0$$

■

نتیجه ۳-۲: نتیجه ۳-۱ برای حالتی که $E_{\theta_0}[\varphi(X)] = 0$ یا $E_{\theta_0}[\varphi(X)] = 1$ نیز برقرار است به شرط آنکه در $(1, c)$ را به سمت $\pm\infty$ میل دهیم. ■

نتیجه ۳-۳: با شرایط قضیه ۳-۱ اگر خانواده توزیع‌ها دارای خاصیت MLR در $T(\tilde{X})$ باشند آنگاه آزمون

$$\varphi_0^*(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & T(\tilde{x}) < c \\ \gamma & T(\tilde{x}) = c \\ 0 & T(\tilde{x}) > c \end{cases}$$

پرتوانترین آزمون یکنواخت برای انجام آزمون $H_1^*: \theta < \theta_0$ vs $H_0^*: \theta \geq \theta_0$ است که در آن c و γ به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند که $E_{\theta_0}[\varphi_0^*(\tilde{X})] = \alpha$ باشد. لازم به ذکر است که $\varphi_0^*(\tilde{X}) = 1 - \varphi^*(\tilde{X})$.

اثبات: تمرین.

■

مثال ۳-۱: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $N(\theta, 1)$ باشند. پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت به اندازه α در آزمون $H_1: \theta > \theta_0$ vs $H_0: \theta \leq \theta_0$ را به دست آورید.

حل:
$$f_{\theta}(x) = (\sqrt{2\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} = (\sqrt{2\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2 + \theta x - \frac{1}{2}\theta^2}$$

بنابراین $f_{\theta}(x)$ متعلق به یک خانواده نمایی یک پارامتری با $c(\theta) = \theta$, $d(x) = x$ است و چون

$c(\theta)$ تابعی صعودی از θ است پس این خانواده دارای خاصیت MLR در $\sum_{i=1}^n X_i$ و یا

$T(\tilde{X}) = \bar{X}$ است. در نتیجه پرتوانترین آزمون یکنواخت به اندازه α عبارت است از:

$$\varphi_0^*(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x} > c \\ 0 & \bar{x} < c \end{cases}$$

که در آن

$$\alpha = E_{\theta_0}[\varphi_0^*(\tilde{X})] = P_{\theta_0}(\bar{X} > c) = P_{\theta_0}\left(Z > \frac{c - \theta_0}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{c - \theta_0}{1/\sqrt{n}} = z_\alpha \Rightarrow c = \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} z_\alpha \Rightarrow \varphi_0^*(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{x} - \theta_0}{1/\sqrt{n}} > z_\alpha \\ 0 & \frac{\bar{x} - \theta_0}{1/\sqrt{n}} < z_\alpha \end{cases}$$

■

مثال ۳-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_5$ یک نمونه تصادفی از $B(1, p)$ باشند پرتوانترین آزمون یکنواخت به اندازه $\alpha = 0.05$ برای انجام آزمون زیر را به دست آورید.

$$H_0: p \geq 0.4 \text{ vs } H_1: p < 0.4$$

$$f_p(x) = p^x (1-p)^{1-x} = (1-p) e^{x \ln \frac{p}{1-p}} \quad \text{حل:}$$

بنابراین $f_p(x)$ به یک خانواده نمایی یک پارامتری با $c(p) = \ln \frac{p}{1-p}$ و $d(x) = x$ متعلق است

که $c(p)$ یک تابع صعودی از p است ($c'(p) = \frac{1}{p(1-p)} > 0$) پس این خانواده دارای خاصیت

MLR در $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^5 X_i$ است. در نتیجه پرتوانترین آزمون یکنواخت به اندازه $\alpha = 0.05$

عبارت است از

$$\varphi_0^*(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \sum x_i < c \\ \gamma & \sum x_i = c \\ 0 & \sum x_i > c \end{cases}$$

که در آن c و γ به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $E_{p=0.4}[\varphi_0^*(\underline{X})] = 0.05$.

اما $P\left(\sum_{i=1}^5 X_i < 0\right) = 0.0778$ و $P\left(\sum_{i=1}^5 X_i \leq 0\right) = 0.05$ پس با انتخاب $c = 0$ و

$\gamma = \frac{0.05 - 0}{0.0778} = 0.643$ آزمون UMP به اندازه $\alpha = 0.05$ عبارت است از:

$$\varphi_0^*(\underline{x}) = \begin{cases} 0.643 & \sum x_i = 0 \\ 0 & \sum x_i > 0 \end{cases}$$

■

نکاتی در مورد پرتوانترین آزمونهای یکنواخت

(۱) پرتوانترین آزمون یکنواخت برای هر آزمون فرضی وجود ندارد و تنها برای حالت‌های خاصی با شرایط معین این آزمون وجود دارد (مثلاً این آزمون برای فرض‌های یک طرفه در خانواده‌های دارای خاصیت MLR حتماً وجود دارد ولی در خانواده‌های دیگر با فرض‌های نوع دیگر ممکن است وجود نداشته باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۳: در مثال ۱-۳ نشان دهید که برای آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ آزمون UMP وجود ندارد.

حل: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\varphi_1(\underline{x})$ یک آزمون UMP برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 باشد. حال یک نقطه $\theta_1 > \theta_0$ را در نظر بگیرید. در این صورت طبق لم نیمن پیرسون آزمون زیر پرتوانترین آزمون به اندازه α برای انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1': \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$) است.

$$\varphi^*(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\sqrt{n}}} > z_\alpha \\ 0 & \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sqrt{\sqrt{n}}} < z_\alpha \end{cases}$$

یعنی φ^* دارای بالاترین توان نسبت به آزمون‌های در سطح α در نقطه $\theta = \theta_1$ است و طبق یکتایی لم نیمن-پیرسون هر آزمون دیگری در سطح α که بخواهد دارای توانی برابر یا بیشتر از φ^* باشد بایستی با احتمال یک با φ^* برابر باشد بنابراین بایستی با احتمال یک $\varphi^*(\underline{x}) = \varphi_1(\underline{x})$ باشد. حال تابع آزمون

$$\varphi_1(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha \\ 0 & \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -z_\alpha \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. برای هر $\theta_1 < \theta_0$ داریم که

$$\begin{aligned}
\Pi_{\varphi_r}(\theta_r) &= P_{\theta_r} \left(\frac{\bar{X} - \theta_r}{\sqrt{\sqrt{n}}} < -z_\alpha \right) = P_{\theta_r} \left(\frac{\bar{X} - \theta_r}{\sqrt{\sqrt{n}}} < -Z_\alpha + \frac{\theta_0 - \theta_r}{\sqrt{\sqrt{n}}} \right) \\
&> P_{\theta_r} \left(\frac{\bar{X} - \theta_r}{\sqrt{\sqrt{n}}} < -z_\alpha \right) \quad (\theta_0 - \theta_r > 0 \text{ زیرا}) \\
&= P_{\theta_r} \left(\frac{\bar{X} - \theta_r}{\sqrt{\sqrt{n}}} > z_\alpha \right) \\
&> P_{\theta_r} \left(\frac{\bar{X} - \theta_r}{\sqrt{\sqrt{n}}} > z_\alpha + \frac{\theta_0 - \theta_r}{\sqrt{\sqrt{n}}} \right) \\
&= P_{\theta_r} \left(\frac{\bar{X} - \theta_r}{\sqrt{\sqrt{n}}} > z_\alpha \right) \\
&= \Pi_{\varphi_l}(\theta_r)
\end{aligned}$$

یعنی φ_r دارای توانی بیشتر از φ_l در نقطه $\theta = \theta_r$ است که این یک تناقض است. پس آزمون UMP برای آزمون فوق وجود ندارد. ■

(۲) در حالت آزمون فرض ساده در مقابل فرض ساده‌ی دیگر براساس لم نیمین پیرسون همواره پرتوان‌ترین آزمون یکتا می‌باشد در حالی که در مواردی که تکیه‌گاه توزیع به پارامتر مجهول θ بستگی دارد پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت الزاماً یکتا نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۴: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $U(0, \theta)$ ، $\theta > 0$ باشند و بخواهیم آزمون به اندازه α برای آزمون فرض $H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ را به دست آوریم.

الف- نشان دهید که پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت (قضیه کارلین روبین) به اندازه α برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 عبارت است از

$$\varphi_\alpha^*(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} \geq \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \\ 0 & x_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \end{cases}$$

ب- به وسیله مقایسه توان‌های آزمون نشان دهید که آزمون زیر نیز پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت به اندازه α برای آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

$$\varphi_{\gamma}^*(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} \geq \theta_0 \\ \alpha & x_{(n)} < \theta_0 \end{cases}$$

حل: الف- به راحتی می‌توان نشان داد که خانواده توزیعهای $U(\theta_0, \theta)$ دارای خاصیت MLR در $X_{(n)}$ است بنابراین طبق قضیه کارلین-روبین آزمون UMP به اندازه α برای H_0 در مقابل H_1 عبارتست از

$$\varphi_{\gamma}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} \geq c \\ 0 & x_{(n)} < c \end{cases}$$

$$f_n(x) = n \left(\frac{1}{\theta} \right) \left(\frac{x}{\theta} \right)^{n-1} = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \quad 0 < x < \theta \quad \text{که در آن}$$

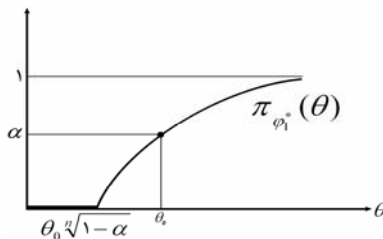
$$\alpha = E_{\theta_0}[\varphi_{\gamma}^*(X_{(n)})] = P_{\theta_0}(X_{(n)} \geq c) = \int_c^{\theta_0} \frac{nx^{n-1}}{\theta_0^n} dx = \left(\frac{x}{\theta_0} \right)^n \Big|_c^{\theta_0} = 1 - \left(\frac{c}{\theta_0} \right)^n$$

$$\Rightarrow c = \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \Rightarrow \varphi_{\gamma}^*(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} \geq \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \\ 0 & x_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \end{cases}$$

و تابع توان این آزمون عبارتست از

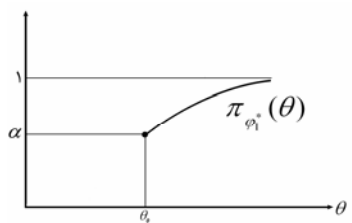
$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi_{\gamma}^*}(\theta) &= P_{\theta}(X_{(n)} \geq \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}) = \begin{cases} 0 & \theta < \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \\ \left(\frac{x}{\theta} \right)^n \Big|_{\theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}}^{\theta} & \theta \geq \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \theta < \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \\ 1 - (1-\alpha) \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^n & \theta \geq \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

که شکل آن به صورت زیر است



ب-

$$\Pi_{\varphi^*}(\theta) = P_{\theta}(X_{(n)} \geq \theta_0) + \alpha P_{\theta}(X_{(n)} < \theta_0) = \begin{cases} 0 + \alpha & \theta \leq \theta_0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \Big|_{\theta_0}^{\theta} + \alpha \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \Big|_0^{\theta_0} & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha & \theta \leq \theta_0 \\ 1 - (1 - \alpha) \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n & \theta > \theta_0 \end{cases}$$


بنابراین

$$\sup_{\theta \leq \theta_0} \Pi_{\varphi^*}(\theta) = \alpha, \quad \Pi_{\varphi^*}(\theta) = \Pi_{\varphi_1^*}(\theta) \quad \forall \theta > \theta_0.$$

و در نتیجه φ^* نیز آزمون UMP به اندازه α برای انجام آزمون فرض H_0 در مقابل H_1 است.



(۳) در مواردی خاص پرتوانترین آزمون یکنواخت برای آزمونهای دوطرفه نیز وجود دارد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۵: در مثال ۳-۴ فرض کنید بخواهیم آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ را انجام دهیم. نشان دهید که آزمون زیر آزمون UMP به اندازه α برای انجام آزمون فرض H_0 در مقابل H_1 است.

$$\varphi^*(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} \geq \theta_0 \text{ or } x_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حل: ابتدا آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1': \theta > \theta_0$ را در نظر بگیرید. بنابر قضیه کارلین روبین آزمون

UMP به اندازه α برای انجام این آزمون عبارتست از

$$\varphi_1(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} \geq c \\ 0 & x_{(n)} < c \end{cases}$$

که در آن

$$\alpha = E_{\theta_0}[\varphi(X)] = P_{\theta_0}(X_{(n)} \geq c) = \dots = 1 - \left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n \Rightarrow c = \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} \geq \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \\ 0 & x_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \end{cases}$$

که تابع توان آن عبارتست از

$$\Pi_{\varphi}(\theta) = 1 - (1 - \alpha) \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \quad \theta \geq \theta_0. \quad (۶)$$

حال آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$ را در نظر بگیرید به راحتی دیده می شود که آزمون UMP به اندازه α برای انجام این آزمون عبارتست از

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \\ 0 & x_{(n)} > \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \end{cases}$$

که تابع توان آن برابر است با

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi}(\theta) &= E_{\theta}[\varphi(X)] = P_{\theta}(X_{(n)} \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha}) \\ &= \begin{cases} 1 & \theta < \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \Big|_{\theta_0 \sqrt[n]{\alpha}}^{\theta_0 \sqrt[n]{\alpha}} & \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \theta < \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \\ \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \alpha & \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \leq \theta \leq \theta_0 \end{cases} \quad (۷) \end{aligned}$$

همچنین تابع توان آزمون $\varphi^*(x)$ عبارتست از

$$\pi_{\varphi^*}(\theta) = E_{\theta}[\varphi^*(x)] = P_{\theta}(X_{(n)} \geq \theta_0) + P_{\theta}(X_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{\alpha})$$

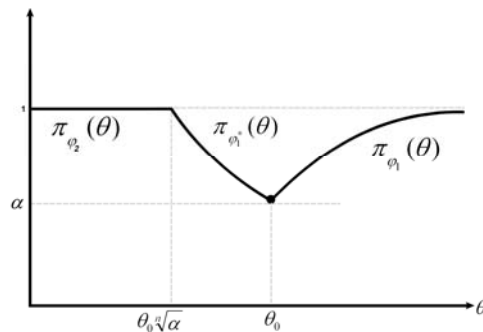
$$= \begin{cases} 1 & \theta < \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \\ 0 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mid_{\theta_0 \sqrt[n]{\alpha}}^{\theta_0} & \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \leq \theta < \theta_0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mid_{\theta_0}^{\theta} + \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mid_{\theta_0 \sqrt[n]{\alpha}}^{\theta_0} & \theta_0 \leq \theta \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \theta < \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \\ \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \alpha & \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \leq \theta < \theta_0 \\ 1 - (1 - \alpha) \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n & \theta_0 \leq \theta \end{cases} \quad (۸)$$

بنابراین از روابط (۶) و (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که

$$\begin{cases} \Pi_{\varphi^*}(\theta_0) = \alpha \\ \Pi_{\varphi^*}(\theta) = \Pi_{\varphi_1}(\theta) & \forall \theta > \theta_0 \\ \Pi_{\varphi^*}(\theta) = \Pi_{\varphi_2}(\theta) & \forall \theta < \theta_0 \end{cases}$$

و چون φ_1 آزمون UMP برای H_0 vs H_1' و φ_2 آزمون UMP برای H_0 vs H_1'' می‌باشند پس φ^* آزمون UMP به اندازه α برای انجام آزمون فرض H_0 در مقابل H_1 است (شکل زیر)



■

(۴) با استفاده از روش اثبات قضیه کارلین-روبین می‌توان برای بعضی از مسایل آزمون UMP را یافت. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۳-۶: فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2} [\phi(x - \theta) + \phi(x + \theta)] \quad x \in R \quad \theta \in R$$

که ϕ تابع چگالی نرمال استاندارد است. آزمون UMP برای انجام آزمون $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: \theta \neq 0$ به اندازه α را به دست آورید.

حل: ابتدا آزمون $H_0: \theta = 0$ vs $H_1': \theta = \theta_1$ ($\theta_1 \neq 0$) را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta=0}(x)} &= \frac{\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta_1)^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+\theta_1)^2} \right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\theta_1^2}{2}} [e^{\theta_1 x} + e^{-\theta_1 x}] \\ &= e^{-\theta_1^2/2} \cosh(\theta_1 x) > k \Leftrightarrow \theta_1 x > k \text{ or } \theta_1 x < -k \Leftrightarrow |x| > c \end{aligned}$$

بنابراین

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & |x| > z_{\alpha/2} \\ 0 & |x| < z_{\alpha/2} \end{cases}$$

پرتوانترین آزمون به اندازه α برای آزمون H_0 در مقابل H_1' است و چون ϕ^* تنها به θ_1 از طریق $\theta_1 \neq 0$ بستگی دارد پس آزمون UMP به اندازه α برای آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

■

مثال ۳-۷: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(\theta, \theta+1)$ باشند. آزمون

UMP به اندازه α برای انجام آزمون فرض $H_0: \theta \leq 0$ vs $H_1: \theta > 0$ را به دست آورید.

حل: ابتدا آزمون $H_0': \theta = 0$ vs $H_1': \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > 0$) را در نظر بگیرید.

$$f_{\theta}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n I_{(\theta, \theta+1)}(x_i) = I_{\left(x_{(n)}^{-1}, x_{(1)}\right)}(\theta)$$

$$\frac{f_{\theta_1}(\underline{x})}{f_{\theta=0}(\underline{x})} = \frac{I_{(x_{(n)}^{-1}, x_{(1)})}(\theta)}{I_{(x_{(n)}^{-1}, x_{(1)})}(\circ)} < k < \infty \Leftrightarrow x_{(n)}^{-1} < \circ < x_{(1)} \quad , \quad \theta_1 > \circ \quad , \quad \begin{cases} \theta_1 < x_{(n)}^{-1} < x_{(1)} \\ \text{بی} \\ x_{(n)}^{-1} < \theta_1 < x_{(1)} \\ \text{بی} \\ x_{(n)}^{-1} < x_{(1)} < \theta_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{(n)}^{-1} < \circ < x_{(1)} < \theta_1 \Rightarrow \frac{f_{\theta_1}(\underline{x})}{f_{\theta=0}(\underline{x})} = \circ \\ x_{(n)}^{-1} < \circ < \theta_1 < x_{(1)} \Rightarrow \frac{f_{\theta_1}(\underline{x})}{f_{\theta=0}(\underline{x})} = 1 \end{cases}$$

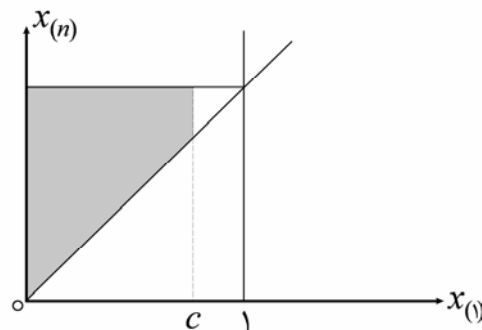
به علت صعودی بودن نسبت بالا در $x_{(1)}$

$$\Leftrightarrow x_{(n)} < 1 \quad , \quad x_{(1)} < c$$

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \circ & x_{(n)} < 1, x_{(1)} < c \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases} \quad \text{پس پرتوانترین آزمون عبارت است از}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \alpha &= E_{\theta=0}[\varphi^*(X)] = 1 - P_{\theta=0}(X_{(n)} < 1, X_{(1)} < c) \\ &= 1 - \int_0^c \int_x^1 f_{1,n}(x, y) dy dx = 1 - \int_0^c \int_x^1 n(n-1)(y-x)^{n-2} dy dx \\ &= 1 - \int_0^c n(1-x)^{n-1} dx = 1 + (1-x)^n \Big|_0^c = 1 + (1-c)^n - 1 = (1-c)^n \Rightarrow c = 1 - \sqrt[n]{\alpha} \end{aligned}$$



با استدلالی مشابه اثبات قضیه کارلین-روبین می‌توان نشان داد که φ^* آزمون UMP برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 نیز هست (اثبات تمرین).



بخش ۴: خاصیت به طور تصادفی صعودی بودن^۱ خانواده توزیع‌ها

یک خاصیت ضعیف‌تر از خاصیت MLR خاصیت به طور تصادفی صعودی بودن (SI) خانواده توزیع‌های $\{f_\theta : \theta \in \Theta \subseteq R\}$ است.

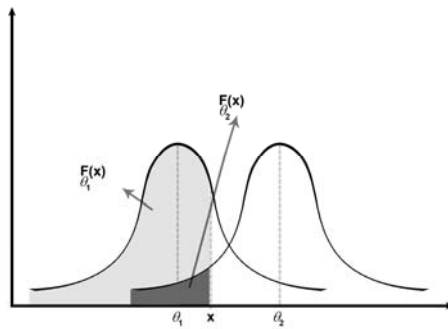
تعریف ۴-۱: فرض کنید برای هر $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ که $\theta_1 \neq \theta_2$ توابع $F_{\theta_1}(x)$ و $F_{\theta_2}(x)$ یکسان نباشند. گویند خانواده $\{F_\theta(x) : \theta \in \Theta \subseteq R\}$ دارای خاصیت SI است اگر برای $\theta_1 < \theta_2$ داشته باشیم که

$$F_{\theta_2}(x) \leq F_{\theta_1}(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

(یا معادلاً $(1 - F_{\theta_2}(x) \geq 1 - F_{\theta_1}(x) \Leftrightarrow P_{\theta_2}(X > x) \geq P_{\theta_1}(X > x))$) ■

به عبارت دیگر اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی باشند که X_i دارای تابع توزیع F_{θ_i} ، $i = 1, 2$ باشد آنگاه

$$\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow P_{\theta_1}(X_1 > x) \leq P_{\theta_2}(X_2 > x)$$



و بنابراین X_2 دارای مقادیر بزرگتری نسبت به X_1 است. در این حالت گوییم که X_2 به طور تصادفی بزرگتر از X_1 است.

برای درک بهتر مفهوم SI به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۴-۱: فرض کنید F_1 و F_2 دو تابع توزیع روی خط حقیقی باشند. در این صورت $F_1(x) < F_2(x)$ برای هر x ، اگر و فقط اگر دو تابع غیرنزولی f_1 و f_2 و متغیر تصادفی V موجود باشند که

^۱ Stochastically Increasing Property

الف- برای هر v ، $f_0(v) < f_1(v)$

ب- $f_0(V)$ دارای تابع توزیع F_0 و $f_1(V)$ دارای تابع توزیع F_1 باشند.

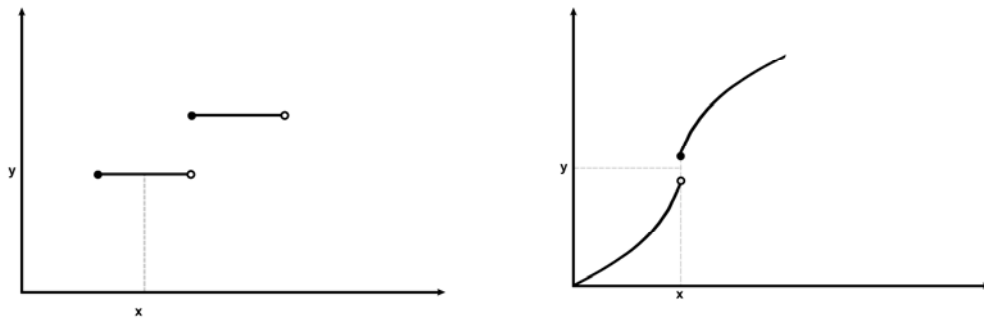
اثبات: فرض کنید توابع f_0 و f_1 و متغیر تصادفی V موجود باشند که در شرایط (الف) و (ب) صدق کنند. در این صورت

$$F_1(x) = P(f_1(V) \leq x) \leq P(f_0(V) \leq x) = F_0(x) \quad \forall x$$

برعکس، فرض کنید برای هر x ، $F_1(x) \leq F_0(x)$ باشد و قرار دهید

$$f_i(y) = \inf \{x : F_i(x - \circ) \leq y \leq F_i(x)\}, \quad i = 0, 1$$

(f_i همانند تابع معکوس F_i عمل می‌کند اگر تابع در نقطه پیوسته نباشد (شکل‌های زیر))



توابع f_i غیرنزولی هستند و

$$f_i[F_i(x)] \leq x, \quad F_i[f_i(y)] \geq y \quad \forall x, y$$

چون f_i ها غیر نزولی هستند بنابراین

$$y \leq F_i(x_0) \Rightarrow f_i(y) \leq f_i[F_i(x_0)] \leq x_0.$$

و چون F_i ها غیر نزولی هستند

$$f_i(y) \leq x_0 \Rightarrow F_i(f_i(y)) \leq F_i(x_0) \Rightarrow y \leq F_i(x_0)$$

در نتیجه

$$f_i(y) \leq x_0 \Leftrightarrow y \leq F_i(x_0) \quad i = 1, 2$$

حال فرض کنید V یک متغیر تصادفی دارای توزیع $U(0, 1)$ باشد در این صورت

$$P(f_i(V) \leq x) = P(V \leq F_i(x)) = F_i(x) \quad i = 1, 2$$

یعنی $f_i(V)$ دارای تابع توزیع F_i است. حال چون $F_1(x) \leq F_2(x)$ است بنابراین از رابطه فوق نتیجه می‌شود که $f_1(y) \leq f_2(y), \forall y$ که اثبات را تمام می‌کند.



مثال ۴-۱: نشان دهید که خانواده توزیع‌های مکان دارای خاصیت SI است. آیا این خانواده دارای خاصیت MLR نیز هست؟

$$F_\theta(x) = F(x - \theta) \quad \text{حل:}$$

با توجه به صعودی بودن F داریم که

$$\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow x - \theta_1 > x - \theta_2 \Rightarrow F(x - \theta_1) > F(x - \theta_2) \Rightarrow F_{\theta_1}(x) > F_{\theta_2}(x)$$

بنابراین خانواده توزیع‌های مکان دارای خاصیت SI است. اما بعضی از اعضای این خانواده دارای خاصیت MLR است و بعضی نیست. برای مثال خانواده $N(\theta, 1)$ دارای خاصیت MLR در

$$\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{است ولی خانواده } C(\theta, 1) \text{ دارای خاصیت MLR نیست.}$$



قضیه ۴-۲: فرض کنید خانواده $\{f_\theta : \theta \in \Theta \subset R\}$ خانواده‌ای از توزیع‌ها باشند که دارای خاصیت MLR در $T(X) = X$ باشند.

الف- اگر تابعی غیرنزولی از x باشد آنگاه $E_\theta(\psi(X))$ تابعی غیرنزولی از θ است. اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی با چگالی f_θ باشند و ψ' تابعی از $x_1, \dots, x_n$ باشد که برحسب هر یک از آرگومان‌هایش غیرنزولی است آنگاه $E_\theta[\psi'(X_1, \dots, X_n)]$ یک تابع غیرنزولی از θ است.

ب- خانواده توزیع‌های فوق دارای خاصیت SI است.

ج- اگر ψ تابعی باشد که تنها یک بار تغییر علامت دهد، یعنی یک x_0 وجود داشته باشد که

$$E_\theta[\psi(X)] = \begin{cases} \leq 0 & \theta < \theta_0 \\ \geq 0 & \theta > \theta_0 \end{cases} \quad \text{که } \psi(x) = \begin{cases} \leq 0 & x < x_0 \\ \geq 0 & x \geq x_0 \end{cases}$$

به‌جز اینکه $E_\theta[\psi(X)]$ برای هر θ کاملاً مثبت یا کاملاً منفی باشد.

د- فرض کنید $f_\theta(x)$ برای هر θ و هر x مثبت باشد و $\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}$ یک تابع اکیداً صعودی از x برای

$\theta_1 < \theta_0$ باشد و $\psi(x)$ تابعی همانند حالت (ج) باشد که با احتمال یک مخالف صفر باشد. اگر

$$E_\theta[\psi(X)] = \begin{cases} < 0 & \theta < \theta_0 \\ = 0 & \theta = \theta_0 \\ > 0 & \theta > \theta_0 \end{cases} \text{ آنگاه } E_{\theta_0}[\psi(X)] = 0$$

اثبات: الف- چون f_θ دارای خاصیت MLR در $T(X) = X$ است پس برای $\theta_1 < \theta_0$ ، $\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}$

یک تابع غیرنزولی از $T(x) = x$ است و همچنین $\psi(x)$ نیز یک تابع غیرنزولی از x است بنابراین

$$\text{cov}_{\theta_1}\left(\psi(X), \frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_0}(X)}\right) \geq 0 \Rightarrow \underbrace{E_{\theta_1}\left[\psi(X) \frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_0}(X)}\right]}_{E_{\theta_1}[\psi(X)]} - E_{\theta_1}[\psi(X)] \underbrace{E_{\theta_1}\left[\frac{f_{\theta_1}(X)}{f_{\theta_0}(X)}\right]}_1 \geq 0$$

$$\Rightarrow E_{\theta_1}[\psi(X)] - E_{\theta_0}[\psi(X)] \geq 0$$

برای حالت نمونه n تایی، با استفاده از استقراء نتیجه حاصل می شود.

ب- قرار می دهیم $\psi(X) = I_{[x, +\infty)}(X) = \begin{cases} 1 & X > x \\ 0 & X \leq x \end{cases}$ در این صورت $\psi(X)$ یک تابع

غیرنزولی از X است. بنابراین طبق قسمت (الف) داریم که

$$\theta_1 < \theta_0 \Rightarrow E_{\theta_1}[\psi(X)] \geq E_{\theta_0}[\psi(X)] \Rightarrow P_{\theta_1}(X > x) \geq P_{\theta_0}(X > x)$$

یعنی خانواده فوق دارای خاصیت SI است.

ج- نشان می دهیم که برای هر $\theta_1 < \theta_0$ ، $E_{\theta_1}[\psi(X)] \geq 0$ نتیجه می دهد که $E_{\theta_0}[\psi(X)] \geq 0$.

اگر $\frac{f_{\theta_1}(x_0)}{f_{\theta_0}(x_0)} = \infty$ باشد آنگاه طبق فرض (صعودی بودن این نسبت) بایستی

$f_{\theta_1}(x) = 0, \forall x > x_0$ و در نتیجه طبق فرض روی $\psi(X)$ داریم که

$$E_{\theta_1}[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_{\theta_1}(x) d\mu(x) = \int_{-\infty}^{x_0} \psi(x) f_{\theta_1}(x) d\mu(x) \leq 0$$

حال فرض کنید $\frac{f_{\theta_1}(x_0)}{f_{\theta_0}(x_0)} = c < \infty$ در این صورت روی مجموعه

$$S = \{x \mid f_{\theta_1}(x) = 0, f_{\theta_0}(x) > 0\}$$

$\psi(x) \geq 0$ خواهد بود (اگر چنین نباشد آنگاه برای یک $x_1 \in S$ ، $\psi(x) < 0$ است یعنی $x_1 < x_0$ است. بنابراین $x_1 < x_0$ در داخل S است و برای آن

$$f_{\theta_1}(x_1) = 0 \text{ است که با صعودی بودن } \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \text{ و همچنین } \frac{f_{\theta_1}(x_0)}{f_{\theta_0}(x_0)} = c < \infty \text{ در تناقض است.}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} E_{\theta_1}[\psi(X)] &= \int_S \psi(x) f_{\theta_1}(x) d\mu(x) + \int_{\bar{S}} \psi(x) f_{\theta_1}(x) d\mu(x) \\ &\geq \int_{\bar{S}} \psi(x) \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} f_{\theta_0}(x) d\mu(x) \\ &\geq \int_{-\infty}^{x_0^-} \underbrace{c}_{<0} \psi(x) f_{\theta_0}(x) d\mu(x) + \int_{x_0}^{\infty} c \psi(x) f_{\theta_0}(x) d\mu(x) \\ &\quad \uparrow \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} < c \quad \quad \quad \uparrow \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} > c \\ &= c E_{\theta_0}[\psi(X)] \geq 0 \end{aligned}$$

پس نشان دادیم که اگر $E_{\theta_1}[\psi(X)] > 0$ و $\theta_1 \leq \theta_0$ آنگاه $E_{\theta_1}[\psi(X)] \geq 0$ است.

حال اگر قرار دهیم $\theta_0 = \inf\{\theta \mid E_{\theta}(\psi(X) > 0)\}$ ، آنگاه نتیجه موردنظر با این θ_0 حاصل می‌شود.

د- اثبات مشابه حالت (ج) است. (تمرین)



توجه: عکس قسمت (ب) قضیه بالا در حالت کلی برقرار نیست (به مثال ۴-۱ مراجعه کنید).

فصل ۴

آزمون فرض‌های آماری
به وسیله نظریه تصمیم

بخش ۱: مفاهیم اولیه

فرض کنید پارامتر موردنظر ما θ در یک فضای پارامتری Θ قرار داشته باشد و براساس یک نمونه تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ از توزیع $\{f(x|\theta) : \theta \in \Theta\}$ بخواهیم آزمون فرض زیر را انجام دهیم

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

که در آن $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ و $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. در این مسئله فضای کارها^۱ از دو نقطه $A = \{a_0, a_1\}$ تشکیل شده است. کار a_0 را پذیرش فرض H_0 و کار a_1 را پذیرش فرض H_1 در نظر می‌گیریم. اگر مجموعه مقادیر داده‌های $\underline{x}$ را به دو ناحیه C و $\bar{C}$ تقسیم کنیم که در آن C ناحیه بحرانی و ناحیه رد فرض H_0 و $\bar{C}$ ناحیه پذیرش فرض H_0 باشد آنگاه یک تابع تصمیم $\delta(\underline{x})$ تابعی از $\underline{x}$ به A است که دو مقدار a_0 و a_1 را به‌صورت زیر می‌گیرد.

$$\delta(\underline{x}) = \begin{cases} a_0 & \underline{x} \in \bar{C} \\ a_1 & \underline{x} \in C \end{cases}$$

بنابراین $C = \{\underline{x} | \delta(\underline{x}) = a_1\}$ و $\bar{C} = \{\underline{x} | \delta(\underline{x}) = a_0\}$ و تابع آزمون عبارتست از

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \delta(\underline{x}) = a_1 \\ 0 & \delta(\underline{x}) = a_0 \end{cases}$$

یعنی ما با احتمال $\varphi(\underline{x})$ فرض H_0 را رد می‌کنیم. در این حالت تابع زیان و تابع مخاطره عبارتند از

$$L(\theta, \varphi) = L(\theta, a_1)\varphi(\underline{X}) + L(\theta, a_0)(1 - \varphi(\underline{X}))$$

$$R(\theta, \varphi) = L(\theta, a_1)E_\theta[\varphi(\underline{X})] + L(\theta, a_0)E_\theta[1 - \varphi(\underline{X})]$$

در مسئله آزمون فرض تابع زیان بایستی به‌گونه‌ای باشد که اگر $\theta \in \Theta_0$ باشد و ما کار a_1 را انجام دهیم و یا $\theta \in \Theta_1$ و ما کار a_0 را انجام دهیم مقداری زیان متحمل شویم (خطا انجام داده‌ایم) و در غیر اینصورت مقدار زیان صفر باشد. بنابراین تابع زیان در این حالت از دو قسمت تشکیل می‌شود. تابع $L(\theta, a_0)$ مقدار زیان ناشی از پذیرش فرض H_0 و تابع $L(\theta, a_1)$ مقدار زیان ناشی از پذیرش

^۱ Action Space

فرض H_1 به ازای مقادیر مختلف θ است. ساده‌ترین نوع تابع زیان، تابع زیان $0-1$ بصورت زیر می‌باشد:

$$L(\theta, a_0) = \begin{cases} 0 & \theta \in \Theta_0 \\ 1 & \theta \in \Theta_1 \end{cases} \quad \text{و} \quad L(\theta, a_1) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_0 \\ 0 & \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

در این حالت انجام هر یک از خطاهای نوع اول و دوم دارای یک مقدار زیان است. حالت تعمیم یافته تابع زیان $0-1$ به صورت زیر است

$$L(\theta, a_0) = \begin{cases} 0 & \theta \in \Theta_0 \\ c_{II} & \theta \in \Theta_1 \end{cases} \quad \text{و} \quad L(\theta, a_1) = \begin{cases} c_I & \theta \in \Theta_0 \\ 0 & \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

در این تابع زیان c_I مقدار هزینه انجام خطای نوع اول و c_{II} مقدار هزینه انجام خطای نوع دوم است. توجه کنید که در هر دو حالت داریم که

$$\begin{cases} L(\theta, a_1) > L(\theta, a_0) & \forall \theta \in \Theta_0 \\ L(\theta, a_0) > L(\theta, a_1) & \forall \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

تابع توان آزمون $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_1: \theta \in \Theta_1$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Pi(\theta) = E_\theta[\varphi(\tilde{X})] = P_\theta(\delta(\tilde{X}) = a_1)$$

همچنین تابع مخاطره مربوط به تابع زیان $0-1$ تعمیم یافته بصورت زیر بدست می‌آید

$$R(\theta, \varphi) = \begin{cases} c_I E_\theta[\varphi(\tilde{X})] & \theta \in \Theta_0 \\ c_{II} E_\theta[1 - \varphi(\tilde{X})] & \theta \in \Theta_1 \end{cases} = \begin{cases} c_I \Pi(\theta) & \theta \in \Theta_0 \\ c_{II} (1 - \Pi(\theta)) & \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

بخش ۲: آزمون بیزی

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از خانواده توزیع‌های $\{f(x|\theta): \theta \in \Theta\}$ باشند و θ دارای توزیع پیشین $\pi(\theta)$ و توزیع پسین $\pi(\theta|x)$ باشد و بخواهیم آزمون $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_1: \theta \in \Theta_1$ را انجام دهیم. در آزمون بیزی موقعی که $P(\theta \in \Theta_0 | x) < P(\theta \in \Theta_1 | x)$ باشد ما فرض H_0 را رد خواهیم کرد یعنی زمانی که احتمال قرار گرفتن θ در Θ_0 کمتر از قرار گرفتن θ در Θ_1 باشد موقعی که $\tilde{X} = X$ مشاهده شود. چون

$P(\theta \in \Theta_0 | x) < \frac{1}{\gamma}$ و در $P(\theta \in \Theta_1 | x) = 1 - P(\theta \in \Theta_0 | x)$ ، بنابراین شرط بالا برابر است با $\frac{1}{\gamma}$

نتیجه یک ناحیه بحرانی آزمون بیزی به صورت $C = \left\{ x \mid P(\theta \in \Theta_0 | x) < \frac{1}{\gamma} \right\}$ می‌باشد و تابع

آزمون به صورت زیر است

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & P(\theta \in \Theta_0 | x) < \frac{1}{\gamma} \\ 0 & P(\theta \in \Theta_0 | x) \geq \frac{1}{\gamma} \end{cases}$$

مثال ۱-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, \sigma^2)$ باشند که

$\theta \sim N(\mu, \tau^2)$ و σ^2 و τ^2 ، همگی معلوم هستند. آزمون بیزی برای انجام آزمون

$H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ را بدست آورید.

حل:

$$P(\theta \in \Theta_0 | x) < \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow P(\theta \leq \theta_0 | x) < \frac{1}{\gamma}$$

$$\theta | x \sim N(\mu(x), \eta^2) \quad \mu(x) = \frac{\mu\sigma^2 + n\tau^2\bar{x}}{\sigma^2 + n\tau^2}, \quad \eta^2 = \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2}$$

توجه کنید که طریقه به دست آوردن توزیع $\theta | x$ به صورت زیر است

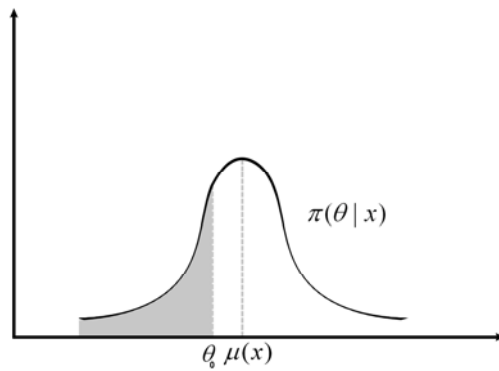
$$f(x | \theta) = (\gamma\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{\gamma}} e^{-\frac{1}{\gamma\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2} \propto e^{\frac{n\theta\bar{x}}{\sigma^2} - \frac{n}{\gamma\sigma^2}\theta^2}$$

$$\pi(\theta) = (\gamma\pi\tau^2)^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{1}{\gamma\tau^2}(\theta - \mu)^2} \propto e^{-\frac{1}{\gamma\tau^2}\theta^2 + \frac{\mu}{\tau^2}\theta}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi(\theta | x) &\propto f(x | \theta) \pi(\theta) \propto e^{-\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \right) \theta^2 - \left(\frac{n\bar{x}}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\tau^2} \right) \theta \right\}} \\
&= e^{-\frac{1}{2} \left\{ \frac{n\tau^2 + \sigma^2}{\sigma^2 \tau^2} \theta^2 - \frac{n\tau^2 \bar{x} + \mu \sigma^2}{\sigma^2 \tau^2} \theta \right\}} \\
&= e^{-\frac{1}{2} \frac{n\tau^2 + \sigma^2}{\sigma^2 \tau^2} \left\{ \theta^2 - \frac{n\tau^2 \bar{x} + \mu \sigma^2}{n\tau^2 + \sigma^2} \theta \right\}} \\
&\propto e^{-\frac{1}{2} \frac{n\tau^2 + \sigma^2}{\sigma^2 \tau^2} \left\{ \theta - \frac{n\tau^2 \bar{x} + \mu \sigma^2}{n\tau^2 + \sigma^2} \right\}^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \theta | x \sim N \left(\frac{n\tau^2 \bar{x} + \mu \sigma^2}{n\tau^2 + \sigma^2}, \frac{\sigma^2 \tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2} \right)$$

چون توزیع $\pi(\theta | x)$ نسبت به $\mu(x)$ متقارن است و با توجه به شکل زیر داریم:



$$P(\theta \leq \theta_0 | x) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mu(x) > \theta_0 \Leftrightarrow \frac{\mu \sigma^2 + n\tau^2 \bar{x}}{\sigma^2 + n\tau^2} > \theta_0.$$

$$\Leftrightarrow n\tau^2 \bar{x} > \theta_0 (\sigma^2 + n\tau^2) - \mu \sigma^2 \Leftrightarrow \bar{x} > \theta_0 + \frac{\sigma^2 (\theta_0 - \mu)}{n\tau^2}$$

بنابراین فرض H_0 رد می‌شود اگر و فقط اگر $\bar{x} > \theta_0 + \frac{\sigma^2 (\theta_0 - \mu)}{n\tau^2}$ باشد و اگر در توزیع پیشین

$\mu = \theta_0$ باشد (یعنی به فرض‌های H_0 و H_1 شانس پیشین یکسان $\frac{1}{4}$ را نسبت دهیم) آنگاه H_0 رد

می‌شود اگر و فقط اگر $\bar{x} > \theta_0$



آزمون بیزی را می‌توان براساس نظریه تصمیم و استفاده از تابع زیان ۱-۰ تعمیم یافته نیز به‌صورت زیر انجام داد.

قضیه ۱-۲: آزمون بیزی برای انجام آزمون $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_1: \theta \in \Theta_1$ را در نظر بگیرید. تحت تابع زیان ۱-۰ تعمیم یافته هر آزمون بفرم

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & P(\theta \in \Theta_0 | x) < \frac{c_{II}}{c_I + c_{II}} \\ 0 & P(\theta \in \Theta_0 | x) > \frac{c_{II}}{c_I + c_{II}} \end{cases}$$

یک تصمیم بیزی (یک آزمون بیزی) است.

اثبات: در آزمون بیزی فرض H_0 را زمانی رد می‌کنیم که $r(x, a_1) < r(x, a_0)$ یعنی مقدار مخاطره پسین کار a_1 (پذیرش فرض H_1) کمتر از مقدار مخاطره پسین کار a_0 (پذیرش فرض H_0) باشد اما

$$r(x, a_0) = \int_{\Theta} L(\theta, a_0) \pi(\theta | x) d\theta = \int_{\Theta_1} c_{II} \pi(\theta | x) d\theta = c_{II} P(\theta \in \Theta_1 | x)$$

$$r(x, a_1) = \int_{\Theta} L(\theta, a_1) \pi(\theta | x) d\theta = \int_{\Theta_0} c_I \pi(\theta | x) d\theta = c_I P(\theta \in \Theta_0 | x)$$

$$H_0 \text{ رد شود} \Leftrightarrow r(x, a_1) < r(x, a_0) \Leftrightarrow c_I P(\theta \in \Theta_0 | x) < c_{II} P(\theta \in \Theta_1 | x)$$

$$\Leftrightarrow c_I P(\theta \in \Theta_0 | x) < c_{II} (1 - P(\theta \in \Theta_1 | x)) \Leftrightarrow P(\theta \in \Theta_0 | x) < \frac{c_{II}}{c_I + c_{II}}$$

■

توجه کنید که اگر $c_I = c_{II}$ (یعنی هزینه خطای نوع اول و دوم یکسان باشد) آنگاه این آزمون با آزمون گفته شده قبلی یکی می‌شود.

مثال ۲-۲: در مثال ۱-۲ آزمون بیزی را براساس تابع زیان ۱-۰ تعمیم یافته بدست آورید.

حل: قرار می‌دهیم $\gamma = \frac{c_{II}}{c_I + c_{II}}$ در این صورت

$$H_0 \text{ رد شود} \Leftrightarrow P(\theta \leq \theta_0 | x) < \gamma \Leftrightarrow P\left(\frac{\theta - \mu(x)}{\eta} \leq \frac{\theta_0 - \mu(x)}{\eta} \middle| x\right) < \gamma$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{\theta_0 - \mu(x)}{\eta}\right) < \gamma$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta_0 - \mu(\tilde{x})}{\eta} < z_\gamma \Leftrightarrow \mu(\tilde{x}) > \theta_0 - \eta z_\gamma$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} > \theta_0 + \frac{\sigma^2(\theta_0 - \mu)}{n\tau^2} - \sqrt{\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2}} z_\gamma$$

توجه کنید که اگر $c_I = c_{II}$ باشد آنگاه $\gamma = \frac{1}{2}$ و $z_\gamma = 0$ و این آزمون با آزمون مثال ۱-۲ یکی می‌شود.



توجه کنید که در آزمون بیزی اندازه آزمون از رابطه $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta[\varphi(\tilde{X})] = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(X \in C)$ بدست می‌آید که برای رسیدن به یک اندازه‌ی آزمون دلخواه بایستی چگالی پیشین را به گونه‌ای انتخاب کرد که اندازه آزمون برابر α شود.

بخش ۳: پرتوانترین آزمون

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $f(x|\theta): \theta \in \Theta$ باشد و بخواهیم آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ را انجام دهیم. اگر توزیع پیشین بصورت $\pi(\theta) = \begin{cases} \pi_0 & \theta = \theta_0 \\ \pi_1 & \theta = \theta_1 \end{cases}$ باشد در این صورت آزمون بیزی بصورت زیر بدست می‌آید

$$H_0 \Leftrightarrow P(\theta = \theta_0 | \tilde{x}) < \frac{c_{II}}{c_I + c_{II}} \Leftrightarrow \pi(\theta_0 | \tilde{x}) < \frac{c_{II}}{c_I + c_{II}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi(\theta_0 | \tilde{x})}{\pi(\theta_1 | \tilde{x})} < \frac{c_{II}}{c_I} \Leftrightarrow \frac{f(\tilde{x} | \theta_0)}{f(\tilde{x} | \theta_1)} < \frac{\pi_1 c_{II}}{\pi_0 c_I} \Leftrightarrow \frac{f(\tilde{x} | \theta_1)}{f(\tilde{x} | \theta_0)} > \frac{\pi_0 c_I}{\pi_1 c_{II}} = k$$

بنابراین تابع آزمون بیزی بفرم زیر می‌باشد

$$\varphi^*(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{f(\tilde{x} | \theta_1)}{f(\tilde{x} | \theta_0)} > k \\ 0 & \frac{f(\tilde{x} | \theta_1)}{f(\tilde{x} | \theta_0)} < k \end{cases} \quad (1)$$

$$k = \frac{\pi_0 c_I}{\pi_1 c_{II}} \quad \text{که در آن}$$

در آمار کلاسیک طبق لم نیمین پیرسون تابع آزمون $\varphi^*(x)$ پرتوان‌ترین آزمون یکتا را برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 می‌دهد که در آن k به گونه‌ای تعیین می‌شود که اندازه آزمون α شود یعنی $E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = \alpha$. بنابراین با انتخاب توزیع پیشین مناسب (انتخاب π_0 و π_1 مناسب) آزمون بیزی نیز یک آزمون پرتوان یکتا می‌باشد.

همچنین در آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ آزمون $\varphi^*(x)$ در (۱) با $k = \frac{\pi_0 c_I}{\pi_1 c_{II}}$ یک آزمون

بیزی است و در نتیجه مخاطره بیزی را می‌نیمم می‌کند. از طرفی

$$\begin{aligned} r(\pi, \varphi) &= E[R(\theta, \varphi)] = \pi_0 R(\theta_0, \varphi) + \pi_1 R(\theta_1, \varphi) \\ &= \pi_0 L(\theta_0, a_1) E_{\theta_0}[\varphi(X)] + \pi_1 L(\theta_1, a_0) E_{\theta_1}[1 - \varphi(X)] \\ &= \pi_0 c_I \alpha(\varphi) + \pi_1 c_{II} \beta(\varphi) \end{aligned}$$

(که در آن $\alpha(\varphi)$ و $\beta(\varphi)$ به ترتیب احتمال خطای نوع اول و نوع دوم آزمون φ هستند). بنابراین آزمون فوق (۱)، مخاطره بیزی یعنی

$$r(\pi, \varphi) = \pi_0 c_I \alpha(\varphi) + \pi_1 c_{II} \beta(\varphi)$$

را می‌نیمم می‌کند.

مثال ۳-۱: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی $f_{\theta}(x)$ باشد و بخواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0: X \sim f_{\theta_0}(x) \quad \text{vs} \quad H_1: X \sim f_{\theta_1}(x)$$

که در آن $0 < x < 1$ ، $f_{\theta_0}(x) = 1$ و $f_{\theta_1}(x) = 2x$ ، آزمونی را پیدا کنید که مقدار $\beta(\varphi) + 3\alpha(\varphi)$ را می‌نیمم کند و سپس احتمال خطای نوع اول و دوم آزمون را پیدا کنید.

حل:

$$r(\pi, \varphi) = \pi_0 c_I \alpha(\varphi) + \pi_1 c_{II} \beta(\varphi) = 3\alpha(\varphi) + \beta(\varphi)$$

$$\pi_0 c_I = 3, \quad \pi_1 c_{II} = 1 \Rightarrow k = \frac{\pi_0 c_I}{\pi_1 c_{II}} = \frac{3}{1} = 3$$

بنابراین آزمون بیزی که مخاطره بیزی را می‌نیمم می‌کند عبارتست از

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} > 3 \\ 0 & \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} < 3 \end{cases}$$

اما $\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} = \frac{2x}{1} = 2x$ بنابراین

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & x > \frac{3}{2} \\ 0 & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

و چون $f_{\theta_0}(x) = 0 \quad \forall x > 1$ پس $\varphi^*(X)$ با احتمال یک روی مجموعه $\{x | f_{\theta_0}(x) > 0\}$ صفر است و بنابراین

$$\alpha = E_{\theta_0}[\varphi^*(X)] = P_{\theta_0}\left(X > \frac{3}{2}\right) = 0, \quad \beta = E_{\theta_1}[1 - \varphi^*(X)] = P_{\theta_1}\left(X < \frac{3}{2}\right) = 1$$

■

مثال ۳-۲: در مثال ۳-۱ فرض کنید بخواهیم آزمونی را پیدا کنیم که در آن $\alpha(\varphi) \leq 0.1$ و $\beta(\varphi)$ می‌نیم مقدار خود را بگیرد. آزمون موردنظر را پیدا کرده و کمترین مقداری را که $\beta(\varphi)$ می‌تواند بگیرد تعیین کنید.

$$\text{حل: فرض کنید } \varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & x > \frac{k}{2} \\ 0 & x < \frac{k}{2} \end{cases} \text{ یا } \varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} > k \\ 0 & \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} < k \end{cases}$$

مقدار k را چنان تعیین کنیم که $\alpha(\varphi) \leq 0.1$ و $\beta(\varphi)$ می‌نیم شود.

$$\alpha(\varphi) = E_{\theta_0}[\varphi(X)] = P_{\theta_0}\left(X > \frac{k}{2}\right) = 1 - \frac{k}{2} \leq 0.1 \Rightarrow \frac{k}{2} \geq 0.9 \Rightarrow k \geq 1.8$$

$$\beta(\varphi) = 1 - E_{\theta_1}[\varphi(X)] = 1 - P_{\theta_1}\left(X > \frac{k}{2}\right) = P_{\theta_1}\left(X \leq \frac{k}{2}\right) = \int_0^{\frac{k}{2}} 2x dx = x^2 \Big|_0^{\frac{k}{2}} = \frac{1}{4}k^2$$

$\beta(\varphi)$ موقعی می‌نیم می‌شود که k کمترین مقدار خود یعنی $k = 1.8$ را بگیرد که در این صورت

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & x > 0.9 \\ 0 & x < 0.9 \end{cases} \quad \alpha(\varphi) = 0.1, \quad \beta(\varphi) = (0.9)^2 = 0.81$$

■

مثال ۳-۳: یک مشاهده X از یک توزیع پیوسته گرفته شده است که تابع چگالی آن $f_0(x) = 1, 0 < x < 1$ یا $f_1(x) = 4x^3, 0 < x < 1$ است. براساس یک مشاهده X بایستی تصمیم گرفته شود که کدامیک از f_0 یا f_1 تابع چگالی صحیح می‌باشد. فرض کنید احتمال پیشین درست بودن چگالی f_0 برابر $\frac{2}{3}$ باشد همچنین فرض کنید که

$$L(f_1, a_0) = 4 \quad \text{و} \quad L(f_0, a_1) = 1 \quad \text{و} \quad L(f_i, a_i) = 0 \quad i = 0, 1$$

اگر بخواهیم مخاطره بیزی را می‌نیمم کنیم برای چه مقادیری از X تصمیم می‌گیریم که چگالی f_0 صحیح است؟

حل:

$$c_I = L(f_0, a_1) = 1, \quad c_{II} = L(f_1, a_0) = 4, \quad \pi_0 = \frac{2}{3}, \quad \pi_1 = \frac{1}{3}$$

$$r(\pi, \varphi) = \pi_0 c_I \alpha(\varphi) + \pi_1 c_{II} \beta(\varphi) = \frac{2}{3} \alpha(\varphi) + \frac{4}{3} \beta(\varphi) \Rightarrow k = \frac{\pi_0 c_I}{\pi_1 c_{II}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین آزمون بیزی که مخاطره بیزی را می‌نیمم می‌کند عبارتست از

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{f_1(x)}{f_0(x)} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

اما

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^3 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & x > \frac{1}{2} \\ 0 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین اگر مقدار $x > \frac{1}{2}$ باشد تصمیم می‌گیریم که f_0 درست نیست و اگر $x < \frac{1}{2}$ باشد تصمیم می‌گیریم که f_0 درست است.

■

مثال ۳-۴: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $N(\mu, 4)$ باشد و بخواهیم آزمون $H_0: \mu = -1$ vs $H_1: \mu = 1$ را انجام دهیم. مقدار می‌نیم $\alpha(\varphi) + \beta(\varphi)$ را که برای اندازه نمونه‌های زیر می‌توان بدست آورد را تعیین کنید:

الف - $n = 1$ ب - $n = 4$ ج - $n = 16$ د - برای n بزرگ چه وضعیتی پیش می‌آید؟

حل: (به عهده دانشجو)

■

مثال ۳-۵: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $P(\lambda)$ باشند و بخواهیم آزمون $H_0: \lambda = \lambda_0$ vs $H_1: \lambda = \lambda_1$ که $\lambda \geq \lambda_0$ را انجام دهیم.

الف - نشان دهید که مقدار $\alpha(\varphi) + \beta(\varphi)$ به‌وسیله آزمونی که ناحیه بحرانی آن بصورت $\bar{X} > C$ است می‌نیم می‌شود و مقدار C را تعیین کنید.

ب - برای $\lambda_0 = \frac{1}{4}$ و $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ و $n \geq 30$ مقدار می‌نیم $\alpha(\varphi) + \beta(\varphi)$ را تعیین کنید.

حل: (به عهده دانشجو)

■

بخش ۴: آزمون مینیماکس

فرض کنید بخواهیم آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ را انجام دهیم. چون هر تصمیم بیزی یکتا با مخاطره ثابت یک تصمیم مینیماکس است، بنابراین طبق مطالب قسمت قبل آزمون

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \frac{f(x|\theta_1)}{f(x|\theta_0)} > k \\ 0 & \frac{f(x|\theta_1)}{f(x|\theta_0)} < k \end{cases}$$

با $k = \frac{\pi_0 c_I}{\pi_1 c_{II}}$ یک آزمون مینیماکس برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 است به شرط آنکه

$$R(\theta_0, \delta_m) = R(\theta_1, \delta_m) \text{ که در آن}$$

$$\delta_m(x) = \begin{cases} a_0 & \varphi^*(x) = 0 \\ a_1 & \varphi^*(x) = 1 \end{cases} = \begin{cases} a_0 & \frac{f(x|\theta_1)}{f(x|\theta_0)} > k \\ a_1 & \frac{f(x|\theta_1)}{f(x|\theta_0)} < k \end{cases}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned} R(\theta_0, \delta_m) = R(\theta_1, \delta_m) &\Rightarrow E[L(\theta_0, \delta_m)] = E[L(\theta_1, \delta_m)] \\ &\Rightarrow L(\theta_0, a_1)P_{\theta_0}(\delta_m(X) = a_1) = L(\theta_1, a_0)P_{\theta_1}(\delta_m(X) = a_0) \\ &\Rightarrow c_I P_{\theta_0}(X \in C) = c_{II} P_{\theta_1}(X \notin C) \\ &\Rightarrow \overline{c_I \alpha = c_{II} \beta} \end{aligned}$$

مثال ۴-۱: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, 100)$ باشند. آزمون

مینیماکس برای انجام آزمون $H_0: \mu = 75$ vs $H_1: \mu = 78$ با فرض $c_{II} = 1$ و $c_I = 3$ را بدست آورید و احتمال خطاهای آزمون را محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{f(x|\mu_1)}{f(x|\mu_0)} = \frac{e^{-\frac{1}{200} \sum_{i=1}^n (x_i - 78)^2}}{e^{-\frac{1}{200} \sum_{i=1}^n (x_i - 75)^2}} = e^{\frac{3}{100} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{200} (78^2 - 75^2)} > k \Leftrightarrow \bar{x} > c$$

$$\begin{aligned} R(\mu_0, \delta_m) = R(\mu_1, \delta_m) &\Rightarrow c_I \alpha = c_{II} \beta \Leftrightarrow 3P_{\mu=75}(\bar{X} > c) = P_{\mu=78}(\bar{X} < c) \\ &\Leftrightarrow 3[1 - \Phi(c - 75)] = \Phi(c - 78) \\ &\Rightarrow c = 76/8, \alpha = 0/036, \beta = 0/115 \end{aligned}$$

■

بخش ۵: آزمون مجاز^۱

تعریف ۵-۱: برای انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ یک آزمون φ را مجاز گویند اگر آزمون دیگر φ' وجود نداشته باشد بطوری که

$$R(\theta, \varphi') \leq R(\theta, \varphi) \quad \forall \theta \in \Theta$$

با نامساوی اکید برای حداقل یک $\theta \in \Theta$ (در اینجا $\theta_0 \cap \theta_1 = \varphi$ و $\Theta = \theta_0 \cup \theta_1$)

■

تعریف ۵-۲: خانواده C از آزمون‌ها را خانواده کامل^۲ گویند اگر برای هر آزمون φ' خارج از این کلاس آزمون $\varphi \in C$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$R(\theta, \varphi) \leq R(\theta, \varphi') \quad \forall \theta \in \Theta$$

و نامساوی اکید برای حداقل یک $\theta \in \Theta$ برقرار باشد. خانواده C را اساساً کامل^۳ گویند اگر برای هر آزمون φ' خارج از این کلاس آزمون $\varphi \in C$ وجود داشته باشد بطوری که

$$R(\theta, \varphi) \leq R(\theta, \varphi') \quad \forall \theta \in \Theta$$

■

الف- در آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ دیدیم که آزمون

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & f_{\theta_1}(x) > kf_{\theta_0}(x) \\ \gamma & f_{\theta_1}(x) = kf_{\theta_0}(x) \\ 0 & f_{\theta_1}(x) < kf_{\theta_0}(x) \end{cases}$$

پرتوان‌ترین آزمون یکتا به اندازه $\alpha = E_{\theta_0}[\varphi^*(X)]$ است. در انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ یک آزمون φ مجاز خواهد بود هرگاه آزمون φ' وجود نداشته باشد

که

$$\begin{cases} R(\theta_0, \varphi') \leq R(\theta_0, \varphi) \\ R(\theta_1, \varphi') \leq R(\theta_1, \varphi) \end{cases}$$

^۱ Admissible Test^۲ Complete^۳ Essentially Complete

با نامساوی اکید در یکی از روابط فوق.

حال اگر شرط $L(\theta_0, a_1) > L(\theta_0, a_0)$ و $L(\theta_1, a_0) > L(\theta_1, a_1)$ که معمولاً برقرار می‌باشند را بکار ببریم در این صورت شرایط فوق بصورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{cases} E_{\theta_0}[\varphi'(X)] \leq E_{\theta_0}[\varphi(X)] \\ E_{\theta_1}[1 - \varphi'(X)] \leq E_{\theta_1}[1 - \varphi(X)] \end{cases}$$

با نامساوی اکید در حداقل یکی از روابط فوق.

تذکر: اگر φ یک آزمون مجاز به اندازه α در انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ باشد آنگاه φ پرتوانترین آزمون به اندازه α می‌باشد اما اگر φ پرتوانترین آزمون به اندازه α باشد آنگاه لزوماً φ یک آزمون مجاز نیست (تمرین ۱ صفحه ۲۰۴ کتاب Ferguson را مشاهده کنید).

ب- در آزمون $H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ بر طبق قضیه کارلین رویین آزمون یک طرفه

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & T(x) > c \\ \gamma & T(x) = c \\ 0 & T(x) < c \end{cases} \quad (A)$$

پرتوانترین آزمون یکنواخت به اندازه $\alpha = E_{\theta_0}[\varphi^*(X)]$ بود. حال اگر تابع زیان در شرایط زیر صدق کند

$$\begin{cases} L(\theta, a_1) \geq L(\theta, a_0) & \forall \theta < \theta_0 \\ L(\theta, a_0) \geq L(\theta, a_1) & \forall \theta > \theta_0 \end{cases} \quad (B)$$

که معمولاً برقرار است (تابع زیان صفر و یک و تعمیم یافته آن) در این صورت:

قضیه ۵-۱: الف- اگر تابع زیان در شرایط (B) صدق کند و اگر توزیع X دارای خاصیت MLR در

آماره $T(X)$ باشد آنگاه کلاس آزمون‌های یک طرفه (A) یک کلاس اساساً کامل است.

ب- اگر بعلاوه مجموعه نقاط $\{x | f_{\theta}(x) > 0\}$ به θ بستگی نداشته باشد و نقاط $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$

وجود داشته باشند بطوری که $L(\theta_1, a_1) > L(\theta_1, a_0)$ و $L(\theta_2, a_1) < L(\theta_2, a_0)$ که $\theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2$

آنگاه هر آزمون بفرم (A) یک آزمون مجاز است.

اثبات: الف- برای هر آزمون φ تابع مخاطره بصورت زیر می‌باشد

$$R(\theta, \varphi) = L(\theta, a_1)E_\theta[\varphi(\tilde{X})] + L(\theta, a_0)E_\theta[1 - \varphi(\tilde{X})]$$

بنابراین

$$R(\theta, \varphi) - R(\theta, \varphi^*) = \{L(\theta, a_1) - L(\theta, a_0)\} \{E_\theta[\varphi(\tilde{X})] - E_\theta[\varphi^*(\tilde{X})]\} \quad (۱)$$

بر طبق نتیجه (۱) قضیه کارلین روین

$$\boxed{\begin{cases} E_\theta[\varphi^*(\tilde{X})] \leq E_\theta[\varphi(\tilde{X})] & \forall \theta \leq \theta_0 \\ E_\theta[\varphi^*(\tilde{X})] \geq E_\theta[\varphi(\tilde{X})] & \forall \theta \geq \theta_0 \end{cases}} \quad (C)$$

بنابراین با توجه به روابط (B) و (C) داریم که اگر $\theta < \theta_0$ آنگاه هر دو عبارت سمت راست رابطه (۱) غیرمنفی هستند و اگر $\theta > \theta_0$ آنگاه هر دو عبارت سمت راست رابطه (۱) غیرمثبت هستند و بنابراین طرف راست (۱) همواره غیرمنفی است یعنی $R(\theta, \varphi) - R(\theta, \varphi^*) \geq 0, \quad \forall \theta \neq \theta_0$. برای $\theta = \theta_0$ داریم که $E_{\theta_0}[\varphi(\tilde{X})] = E_{\theta_0}[\varphi^*(\tilde{X})]$ (رابطه (C)) بنابراین $R(\theta_0, \varphi) = R(\theta_0, \varphi^*)$ و در نتیجه کلاس آزمون‌های بفرم (A) اساساً کامل است.

ب- فرض کنید آزمون به‌فرم (A) مجاز نباشد، یعنی فرض کنید φ^* آزمونی به فرم (A) باشد و φ آزمونی باشد که

$$R(\theta, \varphi) \leq R(\theta, \varphi^*) \quad \forall \theta \in \Theta$$

و نامساوی اکید برای بعضی از θ ها برقرار باشد. چون

$$\begin{cases} L(\theta_1, a_1) > L(\theta_1, a_0) \\ L(\theta_2, a_1) < L(\theta_2, a_0) \end{cases} \quad \theta_1 \leq \theta_0 \leq \theta_2$$

بنابراین از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که

$$E_{\theta_1}[\varphi(\tilde{X})] \geq E_{\theta_1}[\varphi^*(\tilde{X})] \quad \text{و} \quad E_{\theta_2}[\varphi(\tilde{X})] \leq E_{\theta_2}[\varphi^*(\tilde{X})]$$

حال اگر $E_{\theta_1}[\varphi^*(\tilde{X})] > 0$ آنگاه $\varphi^*(\tilde{X})$ آزمون UMP برای انجام آزمون $H'_0: \theta \leq \theta_1$ vs $H'_1: \theta > \theta_1$ است و اگر $E_{\theta_2}[\varphi^*(\tilde{X})] = 0$ آنگاه $\varphi^*(\tilde{X})$ پرتوانترین آزمون به

اندازه صفر برای آزمون H'_0 در مقابل H'_1 است زیرا تمام آزمون‌های به اندازه صفر دارای توان صفر می‌باشند موقعی که مجموعه $\{x | f_\theta(x) > 0\}$ به θ بستگی نداشته باشد (لم نیمن پیرسون) بنابراین در هر حالت $\varphi^*(x)$ آزمون UMP است و در نتیجه

$$E_\theta[\varphi^*(X)] \geq E_\theta[\varphi(X)] \quad \forall \theta > \theta_0$$

به همین ترتیب $1 - \varphi^*(X)$ نیز آزمون UMP برای انجام آزمون $H''_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H''_1: \theta < \theta_0$ است و در نتیجه

$$E_\theta[\varphi^*(X)] \leq E_\theta[\varphi(X)] \quad \forall \theta < \theta_0 \quad (\text{رابطه (C)})$$

و در نتیجه با توجه به رابطه (B) و (۱) داریم

$$R(\theta, \varphi) - R(\theta, \varphi^*) \geq 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

که یک تناقض است پس آزمون φ^* یک آزمون مجاز است (توجه کنید که برقراری نامساوی فوق به این علت است که اگر $\theta > \theta_0$ آنگاه $\theta > \theta_0$ و در نتیجه سمت راست رابطه (۱) نامنفی است و اگر $\theta < \theta_0$ آنگاه $\theta < \theta_0$ و در نتیجه سمت راست رابطه (۱) نامنفی است).

■

فصل ۵

آزمون‌های دو طرفه

بخش ۱: تعمیم لم نیمن پیرسون

برای بحث در مورد آزمون‌های دو طرفه نیاز به تعمیمی از لم نیمن پیرسون داریم که آن را در این بخش می‌آوریم. توجه کنید که در بحث زیر توابع $\varphi(x)$ که $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ باشند را توابع بحرانی می‌نامیم.

قضیه ۱-۱: فرض کنید $f_0, f_1, \dots, f_m$ توابعی روی محور اعداد حقیقی بوده که نسبت به اندازه μ

انتگرال پذیر باشند. همچنین فرض کنید تابع بحرانی φ در شرط

$$\int \varphi f_i d\mu = c_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

صدق کند. کلاس توابع بحرانی φ را که در شرط (۱) صدق می‌کند با C نشان می‌دهیم.

الف- در بین توابع بحرانی φ که در شرط (۱) صدق می‌کنند یک تابع φ وجود دارد که $\int \varphi f_0 d\mu$ را ماکسیمم می‌کند.

ب- شرط کافی برای آنکه φ_0 از کلاس C انتگرال $\int \varphi f_0 d\mu$ را ماکسیمم کند آن است که ثابت‌های $k_1, k_2, \dots, k_m$ و مقدار $0 < \gamma(x) < 1$ موجود باشند بطوری که

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } f_0(x) > \sum_{i=1}^m k_i f_i(x) \\ \gamma(x) & \text{if } f_0(x) = \sum_{i=1}^m k_i f_i(x) \\ 0 & \text{if } f_0(x) < \sum_{i=1}^m k_i f_i(x) \end{cases} \quad (2)$$

ج- اگر φ_0 در رابطه (۲) با $k_1, \dots, k_m \geq 0$ صدق کند آنگاه φ_0 انتگرال $\int \varphi f_0 d\mu$ را در بین تمام

توابع بحرانی $\varphi(x)$ که در رابطه زیر صدق می‌کنند ماکسیمم می‌کند

$$\int \varphi f_i d\mu \leq c_i \quad i = 1, \dots, m$$

د- مجموعه $M = \{(\int \varphi f_1 d\mu, \dots, \int \varphi f_m d\mu) \mid \varphi \text{ is a critical fun.}\}$ یک مجموعه محدب و

بسته است. اگر $(C_1, \dots, C_m)$ یک نقطه درونی M باشد آنگاه تابع‌های $k_1, k_2, \dots, k_m$ و یک آزمون

φ به فرم (۲) که در شرط (۱) صدق می‌کند موجود هستند و یک شرط لازم برای اینکه یک تابع φ در C انتگرال $\int \varphi f d\mu$ را ماکسیمم کند این است که به فرم (۲) تقریباً همه جا $(a.c.\mu)$ باشد.

اثبات: الف- فرض کنید $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای از توابع بحرانی در C باشند که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi f d\mu$$

در این صورت یک زیر دنباله $\{\varphi_{n_i}\}$ و یک تابع بحرانی φ وجود دارد که (قضیه فشردگی ضعیف)

$$\int \varphi_{n_i} f_k d\mu \rightarrow \int \varphi f_k d\mu \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots, m$$

بنابراین تابع φ در C است و انتگرال $\int \varphi f d\mu$ را در بین توابع $\varphi \in C$ ماکسیمم می‌کند.

ب و ج- با توجه به اینکه

$$[\varphi_0(x) - \varphi(x)] \left[f_0(x) - \sum_{i=1}^m k_i f_i(x) \right] \geq 0$$

بنابراین

$$\int [\varphi_0 - \varphi] \left[f_0 - \sum_{i=1}^m k_i f_i \right] d\mu \geq 0$$

$$\Rightarrow \int [\varphi_0 - \varphi] f_0 d\mu \geq \sum_{i=1}^m k_i \int [\varphi_0 - \varphi] f_i d\mu = \begin{cases} = 0 & \text{در حالت (ب)} \\ \geq 0 & \text{در حالت (ج)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \varphi f_0 d\mu \geq \int \varphi f d\mu$$

د- اثبات به عهده دانشجو.

■

توجه ۱-۱: می‌توان نشان داد که در قسمت (ب) قضیه فوق، شرط مذکور شرط لازم نیز هست (اثبات

تمرین صفحه ۹۷ کتاب TSH لهن)

از قضیه فوق نتیجه زیر را که تعمیم لم نیمین پیرسون می‌باشد بدست می‌آوریم.

لم ۱-۱: (لم نیمین پیرسون تعمیم یافته): فرض کنید $f_0, f_1, \dots, f_m$ توابعی روی محور اعداد حقیقی

بوده که نسبت به اندازه μ انتگرال پذیر باشند.

الف - φ_0 در رابطه (۲) مقدار انتگرال $\int \varphi f_0 d\mu$ را در بین تمام توابع بحرانی φ که در رابطه زیر صدق می‌کنند ماکسیمم می‌کند

$$\int \varphi(x) f_i(x) d\mu(x) = \int \varphi_0(x) f_i(x) d\mu \quad i = 1, \dots, m$$

ب- اگر $k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0$ در این صورت φ_0 مقدار انتگرال $\int \varphi f_0 d\mu$ را در بین تمام توابع بحرانی φ که در رابطه زیر صدق می‌کنند ماکسیمم می‌کند

$$\int \varphi(x) f_i(x) d\mu(x) \leq \int \varphi_0(x) f_i(x) d\mu \quad i = 1, \dots, m$$

اثبات: در قضیه ۱-۱ قرار دهید $C_i = \int \varphi_0(x) f_i(x) d\mu \quad i = 1, \dots, m$

■

نتیجه ۱-۱: فرض کنید توابع چگالی احتمالی نسبت به یک اندازه μ باشند و $0 < \alpha < 1$ باشد. در این صورت یک تابع آزمون φ وجود دارد که:

$$E_{m+1}[\varphi(X)] > \alpha, \quad E_i[\varphi(X)] = \alpha \quad i = 1, 2, \dots, m$$

به جز اینکه $a.e.\mu \quad f_{m+1} = \sum_{i=1}^m k_i f_i$ (در اینجا f_{m+1} همان f_0 قضیه قبل است).

اثبات: اثبات بوسیله استقراء روی m است. برای $m=1$ نتیجه از نتیجه ۱-۱ لم نیمن پیرسون بدست می‌آید. $(\alpha < 1 - \beta)$. فرض کنید نتیجه برای m برقرار باشد و بخواهیم نتیجه را برای $m+1$ ثابت کنیم. اگر $f_1, \dots, f_m$ وابسته خطی باشند تعداد f_i ها کاهش می‌یابد و نتیجه از فرض استقراء بدست می‌آید. بنابراین فرض کنید $f_1, \dots, f_m$ مستقل خطی باشند. بنابراین از فرض استقراء توابع آزمون $\varphi_j, \varphi'_j, \quad j = 1, \dots, m$ موجود هستند به گونه‌ای که

$$E_i[\varphi_j(X)] = E_i[\varphi'_j(X)] = \alpha \quad \forall i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$$

$$E_j[\varphi_j(X)] < \alpha < E_j[\varphi'_j(X)]$$

حال می‌توان قسمت (ب) قضیه ۱-۱ و توجه ۱-۱ بعد از این قضیه را بکار برد.

از طرفی $\varphi(x) \equiv \alpha$ در شرط

$$E_i[\varphi(X)] = \alpha, \quad i = 1, \dots, m$$

صدق می‌کند. اگر این تابع φ بخواهد در بین تمام توابع φ که در شرط فوق صدق می‌کنند پرتوانترین باشد ($E_{\theta_0}[\varphi(X)]$ را ماکسیمم کند) آنگاه بایستی به فرم (۲) باشد و چون $0 < \alpha < 1$ ، پس بایستی

$$f_{\theta_0}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} k_i f_i$$

باشد که نتیجه را بدست می‌دهد.

■

بخش ۲: آزمون‌های دو طرفه^۱

در فصل چهارم دیدیم که برای خانواده‌هایی که دارای خاصیت MLR هستند می‌توان آزمون‌های UMP را برای آزمون‌های یک طرفه $H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ یا $H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$ را بدست آورد (قضیه کارلین روبین) در این قسمت می‌خواهیم در مورد آزمون فرض‌های دو طرفه زیر بحث کنیم

- (i) $H_0: \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ vs $H_1: \theta < \theta_1$ یا $\theta > \theta_2$
- (ii) $H_0: \theta = \theta_0$ vs $\theta \neq \theta_0$
- (iii) $H_0: \theta \leq \theta_1$ یا $\theta \geq \theta_2$ vs $H_1: \theta_1 < \theta < \theta_2$

برای بدست آوردن تابع آزمون در این ۳ نوع فرض خود را محدود به خانواده‌ی نمایی یک پارامتری به صورت زیر می‌کنیم

$$f_{\theta}(x) = e^{\theta x + Q(\theta)} d\mu(x) = \{e^{\theta x + Q(\theta)}\} h(x) \quad \forall \theta \in \Theta \quad (3)$$

در نظر گرفتن چنین فرمی کلیت مسئله را از بین نمی‌برد زیرا اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از

خانواده‌ی نمایی یک پارامتری با چگالی $f_{\theta}(x) = \{e^{\theta d(x) + Q(\theta)}\} h(x)$ باشند آنگاه $T = \sum_{i=1}^n d(x_i)$

یک آماره بسنده می‌نیمال برای θ است که توزیع آن نیز به یک خانواده‌ی نمایی یک پارامتری به صورت زیر متعلق است

$$f_{\theta}(t) = \{e^{\theta t + Q_{\theta}(\theta)}\} h_{\theta}(t) = \{e^{\theta t + Q_{\theta}(\theta)}\} d\nu(t)$$

برای اثبات این مطلب دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

^۱ Two Sided Tests

الف- حالت گسسته:

$$\begin{aligned}
 f_T(t) &= p_\theta(T=t) = \sum_{\{x_1, \dots, x_n: \sum_{i=1}^n d(x_i)=t\}} \sum \dots \sum e^{\theta \sum_{i=1}^n d(x_i) + nQ(\theta)} \prod_{i=1}^n h(x_i) \\
 &= \sum_{\{x_1, \dots, x_n: \sum_{i=1}^n d(x_i)=t\}} \sum \dots \sum \left(e^{\theta t + nQ(\theta)} \right) \prod_{i=1}^n h(x_i) \\
 &= e^{\theta t + nQ(\theta)} \sum_{\{x_1, \dots, x_n: \sum_{i=1}^n d(x_i)=t\}} \sum \dots \sum \left(\prod_{i=1}^n h(x_i) \right) \\
 &= e^{\theta t + Q_\circ(\theta)} h_\circ(t)
 \end{aligned}$$

ب- حالت پیوسته: اثبات مشابه قسمت فوق است و فقط مجموع‌ها به انتگرال تبدیل می‌شوند

■

برای فرض‌های نوع (i) و (ii) هیچ آزمون UMP برای خانواده‌ی نمایی یک پارامتری فوق وجود ندارد (مسئله ۳-۳۱ کتاب TSH لهن) و در قسمت‌های بعد برای این دو نوع فرض پرتوانترین آزمون‌های یکنواخت نااریب^۱ (UMPU) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

درمورد فرض نوع (iii) در خانواده‌ی نمایی یک پارامتری آزمون UMP وجود دارد که آن را در قضیه بعد خواهیم آورد. برای اثبات این قضیه به لم زیر نیاز است.

لم ۱-۲: فرض کنید φ تابعی باشد که انتگرال زیر

$$a(\theta) = \int \varphi(x) e^{\theta x} d\mu(x)$$

را که تابعی از θ در نظر گرفته می‌شود، متناهی کند. در این صورت:

الف- این تابع نسبت به θ پیوسته است.

ب- مشتق تمام مراتب این تابع نسبت به θ موجود است و می‌تواند به درون انتگرال برده شود.

اثبات: تابع $a(\theta)$ را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت.

^۱ Uniformly Most Powerful Unbiased

$$a(\theta) = \int e^{\theta x} d\nu(x)$$

حال برای یک نقطه $\theta_0 \in \Theta$ داریم که:

$$\begin{aligned} \frac{a(\theta) - a(\theta_0)}{\theta - \theta_0} &= \int \frac{e^{\theta x} - e^{\theta_0 x}}{\theta - \theta_0} d\nu(x) \\ &= \int e^{\theta_0 x} \left[\frac{e^{(\theta - \theta_0)x} - 1}{\theta - \theta_0} \right] d\nu(x) \end{aligned}$$

با توجه به این که

$$\left| \frac{e^{bx} - 1}{b} \right| \leq \frac{e^{|x|\delta} - 1}{\delta}, \quad \forall |b| \leq \delta$$

بنابراین تابع درون انتگرال به وسیله تابع زیر از بالا کراندار می‌شود

$$\frac{1}{\delta} \left| e^{\theta_0 x + |x|\delta} - 1 \right| \leq \frac{1}{\delta} \left\{ e^{(\theta_0 + \delta)x} + e^{(\theta_0 - \delta)x} \right\}$$

اگر $|\theta - \theta_0| \leq \delta$ باشد. چون سمت راست رابطه فوق انتگرال پذیراست بنابراین از قضیه همگرایی -

مغلوب لبگ^۱ نتیجه می‌شود که برای هر دنباله θ_n که به θ_0 نزدیک شود نسبت $\frac{a(\theta_n) - a(\theta_0)}{\theta_n - \theta_0}$

به $\int x e^{\theta_0 x} d\nu(x)$ نزدیک می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\theta_n) - a(\theta_0)}{\theta_n - \theta_0} = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\theta_n x} - e^{\theta_0 x}}{\theta_n - \theta_0} d\nu(x) = \int x e^{\theta_0 x} d\nu(x)$$

که این مشتق پذیری و در نتیجه پیوستگی تابع $a(\theta)$ را بدست می‌دهد. همچنین نتیجه قسمت (ب) را برای مشتق مرتبه اول نتیجه می‌دهد. مشتقات مراتب بالاتر نیز بطور مشابه است.

■

نتیجه ۱-۲: در خانواده توزیع‌های نمایی یک پارامتری $\Pi_\theta(\theta) = E_\theta[\varphi(X)]$ یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر از θ است و بعلاوه مشتق این تابع را می‌توان درون انتگرال بدست آورد.

■

قضیه ۱-۲: الف- برای آزمون

$$H_0: \theta \leq \theta_1 \quad \text{یا} \quad \theta \geq \theta_2 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta_1 < \theta < \theta_2$$

^۱ Lebesgue Dominated Convergence Theorem

در خانواده توزیع‌های نمایی یک پارامتری (۳)، یک آزمون UMP به اندازه α وجود دارد که عبارت است از

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x_1 < x < x_2 \\ \gamma_i & x = x_1 \\ 0 & x < x_1 \text{ or } x > x_2 \end{cases} \quad (4)$$

که در آن x_1, x_2 و γ_1, γ_2 چنان تعیین می‌شوند که

$$E_{\theta_1}[\varphi(X)] = E_{\theta_2}[\varphi(X)] = \alpha \quad (5)$$

ب- این آزمون $E_{\theta}[\varphi(X)]$ را نسبت به شرط (۵) برای تمام $\theta_1 < \theta < \theta_2$ می‌نیم می‌کند.

ج- برای $0 < \alpha < 1$ تابع توان این آزمون دارای یک ماکسیمم در θ_0 که، $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ است و با دور شدن θ از θ_0 ، کاهش می‌یابد بجز اینکه دو نقطه t_1 و t_2 موجود باشند که:

$$P_{\theta}(X = t_1) + P_{\theta}(X = t_2) = 1 \quad \forall \theta \in \Theta$$

اثبات: الف- فرض کنید $\theta_1 < \theta < \theta_2$ باشد و بخواهیم آزمون ϕ را چنان بیابیم که $E_{\theta}[\phi(X)]$ را نسبت به محدودیت (۵) ماکسیمم کند. اگر قرار دهیم:

$$M = \{ \varphi \mid \text{یک تابع بحرانی است} \mid (E_{\theta_1}(\varphi(X)), E_{\theta_2}(\varphi(X))) \}$$

در این صورت طبق نتیجه لم نیمین پیرسون ($\alpha < 1 - \beta$) مجموعه M شامل نقاط (α, U_1) و (α, U_2) است که $U_1 < \alpha < U_2$ (زیرا می‌توان لم نیمین پیرسون را برای آزمون‌های $H'_0: \theta = \theta_1$ vs $H'_1: \theta = \theta' > \theta_1$ با تابع φ و $H''_0: \theta = \theta_2$ vs $H''_1: \theta = \theta' < \theta_2$ با تابع $1 - \varphi$ بکار ببریم) و چون M یک مجموعه محدب است پس شامل نقاط (U, U) با $0 < U < 1$ نیز هست. بنابراین M شامل نقطه (α, α) است (یعنی توابع آزمونی که در شرط (۵) صدق می‌کنند وجود دارند) بنابراین طبق قضیه (۱-۱-د) مقادیر k_1 و k_2 و آزمون $\varphi_0(x)$ به فرم (۲) وجود دارد که در شرط (۵) صدق می‌کند. با توجه به قضیه (۱-۱-ج) این آزمون φ_0 یک آزمون UMP در بین توابعی است که در شرط $E_{\theta_i}[\varphi(X)] \leq \alpha, i = 1, 2$ صدق می‌کنند. برای اینکه نشان دهیم که آزمون φ به فرم (۴) یک آزمون UMP برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 است، کافی است نشان دهیم که اولاً به فرم φ است و ثانیاً $E_{\theta}[\varphi(X)] \leq \alpha$ برای هر $\theta \leq \theta_1$ و $\theta \geq \theta_2$. قسمت ثانیاً با

استفاده از قسمت (ب) قضیه با مقایسه آزمون φ با آزمون $\varphi'(x) \equiv \alpha$ به دست می‌آید (زیرا طبق قسمت ب، $\forall \theta \leq \theta_1, \theta \geq \theta_2, E_\theta[\varphi(X)] \leq E_\theta[\varphi'(X)] = \alpha$). برای اثبات قسمت اولاً یعنی معادل بودن φ_0 و φ به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} \varphi_0(X) = 1 &\Leftrightarrow f_\theta(x) > k f_{\theta_1}(x) + k_1 f_{\theta_2}(x) \\ &\Leftrightarrow e^{\theta x + Q(\theta)} > k_1 e^{\theta_1 x + Q(\theta_1)} + k_2 e^{\theta_2 x + Q(\theta_2)} \\ &\Leftrightarrow k_1 e^{(\theta_1 - \theta)x} e^{Q(\theta_1) - Q(\theta)} + k_2 e^{(\theta_2 - \theta)x} e^{Q(\theta_2) - Q(\theta)} < 1 \\ &\Leftrightarrow c_1 e^{b_1 x} + c_2 e^{b_2 x} < 1 \end{aligned}$$

که در آن

$$c_i = k_i e^{Q(\theta_i) - Q(\theta)} \quad i = 1, 2, \quad b_1 = \theta_1 - \theta < 0 < \theta_2 - \theta = b_2$$

قرار می‌دهیم $m(x) = c_1 e^{b_1 x} + c_2 e^{b_2 x}$. اگر $x_1 < x_2$ باشد (در رابطه ۱) آنگاه با حل دستگاه

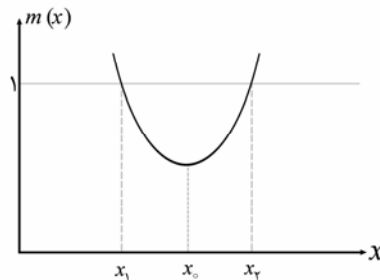
$$\begin{cases} m(x_1) = 1 \\ m(x_2) = 1 \end{cases} \quad \text{مقادیر } c_1 \text{ و } c_2 \text{ را به صورت زیر بدست می‌آوریم.}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{e^{b_2 x_2} - e^{b_2 x_1}}{e^{b_1 x_1 + b_2 x_2} - e^{b_1 x_2 + b_2 x_1}} > 0 & (\text{since } (b_2 - b_1)x_1 < (b_2 - b_1)x_2) \\ c_2 &= \frac{e^{b_1 x_1} - e^{b_1 x_2}}{e^{b_1 x_1 + b_2 x_2} - e^{b_1 x_2 + b_2 x_1}} > 0 \end{aligned}$$

همچنین

$$m'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{b_2 - b_1} \ln \left(\frac{-c_1 b_1}{c_2 b_2} \right)$$

$$m''(x) = c_1 b_1^2 e^{b_1 x} + c_2 b_2^2 e^{b_2 x} > 0 \quad \forall x$$



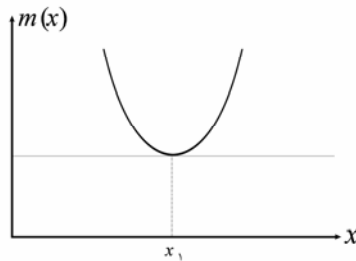
بنابراین $m(x)$ یک تابع محدب است و دارای یک نقطهٔ مینیمم در $x = x_0$ است. پس $m(x) < 1$ اگر و فقط اگر $-\infty < x_1 < x < x_2 < +\infty$ یعنی اگر و فقط اگر $\varphi_0(x) = 1$ باشد.

حال اگر $x_1 = x_2$ ، در اینصورت با انتخاب c_1, c_2 از دستگاه معادلات $\begin{cases} m(x_1) = 1 \\ m'(x_1) = 0 \end{cases}$ به دست می‌آوریم

که

$$\begin{cases} c_1 e^{b_1 x_1} + c_2 e^{b_2 x_1} = 1 \\ c_1 b_1 e^{b_1 x_1} + c_2 b_2 e^{b_2 x_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{b_2 e^{b_2 x_1}}{(b_2 - b_1) e^{b_1 x_1 + b_2 x_1}} = \frac{b_2}{b_2 - b_1} e^{-b_1 x_1} > 0 \\ c_2 = \frac{-b_1}{b_2 - b_1} e^{-b_2 x_1} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m''(x_1) = c_1 b_1^2 e^{b_1 x_1} - c_2 b_1 b_2 e^{b_1 x_1} = c_1 b_1 (b_1 - b_2) e^{b_1 x_1} > 0$$



بنابراین $m(x)$ یک تابع محدب است و دارای یک نقطهٔ می‌نیم در $x = x_1$ است پس $m(x) > 1$ اگر و فقط اگر $x < x_1$ یا $x > x_2$ که به همان فرم (۲) است. بنابراین آزمون‌های φ و φ_0 به یک فرم هستند (برای $\theta_1 < \theta < \theta_2$).

ب- فرض کنید $\theta < \theta_1$ باشد. با استدلال مشابه قسمت (الف) مقادیر k_1 و k_2 آزمون $1 - \varphi_0$ به فرم زیر

$$1 - \varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & f_\theta(x) > k_1 f_{\theta_1}(x) + k_2 f_{\theta_2}(x) \\ \gamma & f_\theta(x) = k_1 f_{\theta_1}(x) + k_2 f_{\theta_2}(x) \\ 0 & f_\theta(x) < k_1 f_{\theta_1}(x) + k_2 f_{\theta_2}(x) \end{cases} \quad (6)$$

وجود دارد که در بین تمام آزمون‌های φ که در رابطه (۵) صدق می‌کنند $E_\theta[1 - \varphi(X)]$ را ماکسیم می‌کند و یا معادلاً $E_\theta[\varphi(X)]$ را مینیمم می‌کند. حال نشان می‌دهیم که آزمون φ_0 به فرم آزمون دوطرفه (۴) است.

$$\varphi_0(x) = 0 \Leftrightarrow f_\theta(x) > kf_{\theta_1}(x) + k_{\gamma} f_{\theta_{\gamma}}(x) \Leftrightarrow c_1 e^{b_1 x} + c_{\gamma} e^{b_{\gamma} x} < 1 \Leftrightarrow m(x) < 1$$

که در آن

$$c_i = k_i e^{Q(\theta_i) - Q(\theta)} \quad i = 1, \gamma, \quad b_{\gamma} = \theta_{\gamma} - \theta > \theta_1 - \theta = b_1 > 0$$

حال فرض کنید $x_1 < x_{\gamma}$ در این صورت با انتخاب c_1 و c_{γ} از دستگاه معادلات زیر

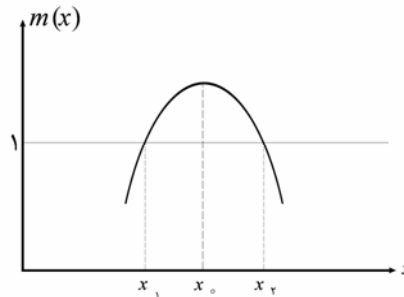
$$\begin{cases} m(x_1) = 1 \\ m(x_{\gamma}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 e^{b_1 x_1} + c_{\gamma} e^{b_{\gamma} x_1} = 1 \\ c_1 e^{b_1 x_{\gamma}} + c_{\gamma} e^{b_{\gamma} x_{\gamma}} = 1 \end{cases}$$

داریم که

$$c_1 = \frac{e^{b_{\gamma} x_{\gamma}} - e^{b_{\gamma} x_1}}{e^{b_1 x_1 + b_{\gamma} x_{\gamma}} - e^{b_{\gamma} x_{\gamma} + b_1 x_1}} > 0, \quad c_{\gamma} = \frac{e^{b_1 x_1} - e^{b_1 x_{\gamma}}}{e^{b_1 x_1 + b_{\gamma} x_{\gamma}} - e^{b_{\gamma} x_{\gamma} + b_1 x_1}} < 0$$

همچنین

$$\begin{aligned} m'(x) &= c_1 b_1 e^{b_1 x} + c_{\gamma} b_{\gamma} e^{b_{\gamma} x} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{b_{\gamma} - b_1} \ln \left(\frac{-c_1 b_1}{c_{\gamma} b_{\gamma}} \right) \\ m''(x) &= c_1 b_1^2 e^{b_1 x} + c_{\gamma} b_{\gamma}^2 e^{b_{\gamma} x} \Rightarrow m''(x_0) = c_1 b_1^2 e^{b_1 x_0} - c_{\gamma} b_{\gamma}^2 e^{b_{\gamma} x_0} \\ &= c_1 b_1 e^{b_1 x_0} (b_1 - b_{\gamma}) < 0 \quad \begin{pmatrix} c_1, b_1 > 0 \\ b_1 < b_{\gamma} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



بنابراین $m(x)$ یک تابع مقعر است و دارای یک نقطه ماکسیمم در $x = x_0$ است پس $m(x) < 1$ اگر فقط اگر $x < x_1$ یا $x > x_{\gamma}$ برای $-\infty < x_1 < x_{\gamma} < +\infty$ یعنی اگر و فقط اگر $\varphi(x) = 0$ باشد.

حال اگر $x_1 = x_{\gamma}$ در این صورت با انتخاب c_1 و c_{γ} از دستگاه معادلات زیر

$$\begin{cases} m(x_1) = 1 \\ m'(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 e^{b_1 x_1} + c_{\gamma} e^{b_{\gamma} x_1} = 1 \\ c_1 b_1 e^{b_1 x_1} + c_{\gamma} b_{\gamma} e^{b_{\gamma} x_1} = 0 \end{cases}$$

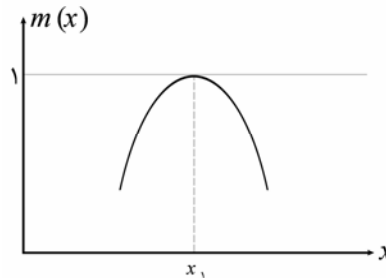
داریم که

$$c_1 = \frac{b_1 e^{b_1 x_1}}{(b_1 - b_2) e^{b_1 x_1 + b_2 x_1}} = \frac{b_1}{b_1 - b_2} e^{-b_2 x_1} > 0$$

$$c_2 = \frac{-b_2}{b_1 - b_2} e^{-b_2 x_1} < 0$$

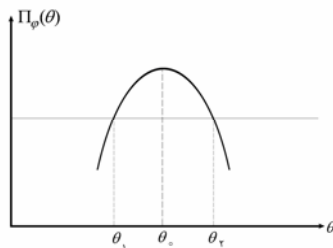
و همچنین

$$m''(x_1) = c_1 b_1^2 e^{b_1 x_1} + c_2 b_2^2 e^{b_2 x_1} = c_1 b_1^2 e^{b_1 x_1} + c_2 b_1 b_2 e^{b_2 x_1} = c_1 b_1 (b_1 - b_2) e^{b_1 x_1} < 0$$



بنابراین $m(x)$ یک تابع مقعر است و دارای یک نقطه ماکسیمم در $x = x_1$ است پس $m(x) < 1$ اگر فقط اگر $x > x_1$ یا $x < x_1$ که به همان فرم (۴) است بنابراین هر آزمون به فرم (۶) به فرم آزمون

دوطرفه (۴) است. (اثبات حالت $\theta > \theta_0$ به طور مشابه است.)



ج- با توجه به قسمت (الف) و پیوستگی تابع توان

$$\Pi_\varphi(\theta) = E_\theta[\varphi(X)]$$

شرایط قضیه صدق می‌کند (شکل روبرو)،

و یا اینکه نقاط $\theta' < \theta'' < \theta'''$ وجود دارند که $\Pi(\theta'') \leq \Pi(\theta') = \Pi(\theta''') = c$ (برهان خلف) در

این صورت بایستی $0 < c < 1$ باشد زیرا اگر $\Pi(\theta') = c = 0$ آنگاه $\varphi(x) = 0$ و اگر $\Pi(\theta') = c = 1$

آنگاه $\varphi(x) = 1$ که در شرط (۵) صدق نمی‌کند. همانگونه که در قسمت (الف) مشاهده شد آزمون φ

به فرم (۴) مقدار $E_{\theta''}[\varphi(X)] = E_{\theta'''}[\varphi(X)] = c$ را در بین توابعی که در شرط

با $\theta' < \theta'' < \theta'''$ صدق می‌کنند ماکسیمم می‌کند. اما $f_{\theta''}$ ، $f_{\theta''}$ ، $f_{\theta''}$ مستقل خطی هستند. بجز اینکه X

تنها دو مقدار را با احتمال یک بگیرد. بنابراین طبق نتیجه (۱) بایستی $\Pi(\theta'') > c$ باشد که یک تناقض

است. پس $\Pi_\varphi(\theta)$ در شرایط قضیه صدق می‌کند.



یکتابی آزمون φ به فرم (۴) توسط لم زیر بدست می‌آید.

لم ۲-۲: فرض کنید $f_\theta(x)$ در شرایط (ج) قضیه ۲-۴ مبحث به طور تصادفی صعودی بودن (فصل سوم) صدق کند.

الف- اگر φ و φ^* دو آزمون به فرم (۴) باشند که $E_{\theta_1}[\varphi^*(X)] = E_{\theta_1}[\varphi(X)]$ و φ^* در سمت راست φ واقع شده باشد آنگاه $\Pi_{\varphi}(\theta) < \Pi_{\varphi^*}(\theta)$ اگر $\theta > \theta_1$ یا $\Pi_{\varphi}(\theta) > \Pi_{\varphi^*}(\theta)$ اگر $\theta < \theta_1$ باشد.

ب- اگر φ و φ^* دو آزمون باشند که به فرم (۴) بوده و در شرط (۵) صدق کنند آنگاه با احتمال یک $\varphi = \varphi^*$.

اثبات: الف) نتیجه از قسمت (ج) قضیه ۲-۴ مبحث به طور تصادفی صعودی بودن با $\psi = \varphi^* - \varphi$ بدست می آید

ب) چون $E_{\theta_1}[\varphi(X)] = E_{\theta_1}[\varphi^*(X)]$ و φ^* در سمت راست یا سمت چپ φ قرار دارد، بنابراین نتیجه مورد نظر از قسمت (الف) حاصل می شود.

$$\Pi_{\varphi}(\theta) = \Pi_{\varphi^*}(\theta) \quad \forall \theta \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi^* \quad w.p. one$$

■

برای بدست آوردن آزمون‌های پرتوان (نا اریب) در حالت‌های (i) و (ii) یعنی

$$(i) H_0: \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad vs \quad H_1: \theta < \theta_1 \text{ or } \theta > \theta_2$$

$$(ii) H_0: \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta \neq \theta_0$$

در خانواده‌ی نمایی یک پارامتری ابتدا تعاریف و قضایای زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱-۲: فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد. تعریف می‌کنیم

$$F(x, \gamma) = P(X < x) + \gamma P(X = x)$$

که در آن $0 \leq \gamma \leq 1$ است (بنابراین $F(x, 1)$ همان تابع توزیع X است) همچنین تعریف می‌کنیم $(x, \gamma) < (x', \gamma')$ اگر و فقط اگر $x < x'$ یا $(x = x', \gamma < \gamma')$.

■

با توجه به تعریف بالا $F(x, \gamma)$ یک تابع غیر نزولی از (x, γ) است (یعنی برای γ ثابت تابعی غیر نزولی از x و برای x ثابت تابعی غیر نزولی از γ است). بعلاوه همانند اثبات شرط وجودی لم

نیمن پیرون می‌توان نشان داد که برای هر مقدار $0 \leq \alpha \leq 1$ ، مقداری از $0 \leq \gamma \leq 1$ وجود دارد به

طوری که $F(x, \gamma) = \alpha$ (با در نظر گرفتن $x = \pm\infty$)

لم ۳-۲: فرض کنید $V \sim U(0, 1)$ و X و V از یکدیگر مستقل باشند در این

صورت $W = F(X, V) \sim U(0, 1)$ (توجه کنید که اگر F تابع توزیع X بوده و تابعی پیوسته باشد

آنگاه $F(X) = F(X, 1) \sim U(0, 1)$)

اثبات: فرض کنید $0 \leq w \leq 1$ باشد و نقاط x_w و γ_w را چنان انتخاب می‌کنیم که $F(x_w, \gamma_w) = w$

در این صورت

$$\begin{aligned} P(W \leq w) &= P(F(X, V) \leq F(x_w, \gamma_w)) = P((X, V) \leq (x_w, \gamma_w)) \\ &= P((X, V) < (x_w, \gamma_w)) + \underbrace{P(X = x_w, V = \gamma_w)}_{P(X=x_w)P(V=\gamma_w)} \\ &= P(X < x_w) + P(V < \gamma_w)P(X = x_w) \\ &= P(X < x_w) + \gamma_w P(X = x_w) = F(x_w, \gamma_w) = w \\ &\Rightarrow W = F(X, V) \sim U(0, 1) \end{aligned}$$

■

حال می‌خواهیم آزمون فرض نوع (i) یعنی $H_0: \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ vs $H_1: \theta < \theta_1$ or $\theta > \theta_2$ را بررسی

کنیم. می‌خواهیم تابع آزمون φ^* را چنان پیدا کنیم که توان آن یعنی $E_\theta[\varphi^*(X)]$ موقعی

که $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ کوچک باشد و موقعی که $\theta > \theta_2$ یا $\theta < \theta_1$ بزرگ باشد.

تعریف ۲-۲: یک آزمون φ^* را دوطرفه گویند هر گاه به فرم زیر باشد:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < x_1, x > x_2 \\ \gamma_i & \text{if } x = x_i \quad i = 1, 2 \\ 0 & \text{if } x_1 < x < x_2 \end{cases} \quad (A)$$

که در آن $-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq \infty$ و $0 \leq \gamma \leq 1$.

■

اگر حالات $x_1 = -\infty$ و $x_2 = +\infty$ را در نظر بگیریم آزمون‌های یک‌طرفه حاصل می‌شوند و بنابراین

کلاس آزمون‌های یک‌طرفه زیر کلاسی از کلاس آزمون‌های دو طرفه است.

قضیه ۱-۲: فرض کنید X ، دارای تابع چگالی یا احتمال به فرم $f_{\theta}(x) = \{e^{\theta x + Q(\theta)}\}h(x)$ باشد و بخواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0: \theta \leq \theta_1 \text{ vs } H_1: \theta < \theta_1 \text{ یا } \theta > \theta_1$$

الف- برای هر آزمون ϕ یک آزمون دو طرفه ϕ_0^* به فرم (A) وجود دارد بطوری که

$$E_{\theta_i}[\phi_0^*(X)] = E_{\theta_i}[\phi(X)] \quad i = 1, 2$$

ب- بعلاوه برای هر آزمون دوطرفه که در شرط (الف) صدق کند، داریم:

$$E_{\theta}[\phi_0^*(X)] - E_{\theta}[\phi(X)] = \begin{cases} \leq 0 & \text{for } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \geq 0 & \text{for } \theta < \theta_1 \text{ or } \theta > \theta_2 \end{cases} \quad (B)$$

اثبات: الف- فرض کنید $\alpha_1 = E_{\theta_1}[\phi(X)]$ و $\alpha_2 = E_{\theta_2}[\phi(X)]$ و آزمون

$$\phi_w(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < x_w \\ \gamma_w & \text{if } x = x_w \\ 0 & \text{if } x > x_w \end{cases}$$

یک آزمون به اندازه w در θ_1 باشد یعنی

$$E_{\theta_1}[\phi_w(X)] = w \quad (*)$$

بنابراین ϕ_w یک آزمون دوطرفه به فرم (A) با $x_1 = +\infty$ است. حال برای هر $0 \leq u \leq \alpha_1$ قرار می‌دهیم:

$$\phi'_u(x) = \phi_u(x) + 1 - \phi_{1-\alpha_1+u}(x) = \begin{cases} 1 & x < x_u \text{ or } x > x_{1-\alpha_1+u} \\ \gamma_u \text{ or } 1 - \gamma_{1-\alpha_1+u} & x = x_u \text{ or } x = x_{1-\alpha_1+u} \\ 0 & x_u < x < x_{1-\alpha_1+u} \end{cases}$$

در این صورت

$$E_{\theta_1}[\phi'_u(X)] = E_{\theta_1}[\phi_u(X)] + 1 - E_{\theta_1}[\phi_{1-\alpha_1+u}(X)]$$

$$\stackrel{(*)}{=} u + 1 - (1 - \alpha_1 + u) = \alpha_1$$

یعنی ϕ'_u یک آزمون دو طرفه به فرم (A) به اندازه α در $\theta = \theta_1$ است.

حال کافیت نشان دهیم که u بین $\circ$ و α_1 ($\circ \leq u \leq \alpha_1$) وجود دارد بطوری که $E_{\theta_1}[\varphi'_u(X)] = \alpha_1$ ، تا اثبات این قسمت کامل شود.

برای این منظور توجه کنید که:

$$E_{\theta^*}[\varphi(X)] = \circ \Rightarrow \varphi(X) = \circ \text{ w.p. one} \Rightarrow E_{\theta}[\varphi(X)] = \circ \quad \forall \theta \in \Theta$$

و چون $E_{\theta_1}[\varphi_{\circ}(X)] = \circ$ پس با احتمال یک، $\varphi(X) = \circ$ و در نتیجه:

$$\varphi'_{\circ}(x) = 1 - \varphi_{1-\alpha_1}(x) \text{ w.p. one}$$

و بنابراین

$$\varphi'_{\circ}(x) = \begin{cases} \circ & \text{if } x < x_{1-\alpha_1} \\ 1 - \gamma_{1-\alpha_1} & \text{if } x = x_{1-\alpha_1} \\ 1 & \text{if } x > x_{1-\alpha_1} \end{cases}$$

که در آن $x_{1-\alpha_1}$ و $\gamma_{1-\alpha_1}$ به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $E_{\theta_1}[\varphi'_{\circ}(X)] = \alpha_1$ بنابرین $\varphi'_{\circ}$ یک آزمون

UMP به اندازه α_1 برای آزمون $H'_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$) $H'_0: \theta = \theta_0$ vs است و در نتیجه

$$\boxed{E_{\theta_1}[\varphi'_{\circ}(X)] \geq E_{\theta_1}[\varphi(X)] = \alpha_1} \quad (7)$$

و چون با توجه به (*)، $E_{\theta_1}[\varphi(X)] = 1$ است پس:

$$E_{\theta_1}[\varphi_1(X) - 1] = \circ \Rightarrow \varphi_1(X) - 1 = \circ \text{ w.p. one} \Rightarrow \varphi_1(X) = 1 \text{ w.p. one}$$

$$1 - \varphi'_{\alpha_1}(X) = 1 - \{\varphi_{\alpha_1}(X) + 1 - \varphi_1(X)\} = 1 - \varphi_{\alpha_1}(X) \text{ w.p. one}$$

و در نتیجه

$$1 - \varphi'_{\alpha_1}(x) = \begin{cases} \circ & \text{if } x < x_{\alpha_1} \\ 1 - \gamma_{\alpha_1} & \text{if } x = x_{\alpha_1} \\ 1 & \text{if } x > x_{\alpha_1} \end{cases}$$

که در آن x_{α_1} و γ_{α_1} به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$E_{\theta_1}[1 - \varphi'_{\alpha_1}(X)] = 1 - \alpha_1 = E_{\theta_1}[1 - \varphi_{\alpha_1}(X)]$$

بنابرین $1 - \varphi'_{\alpha_1}(X)$ یک آزمون UMP به اندازه $1 - \alpha_1$ برای آزمون

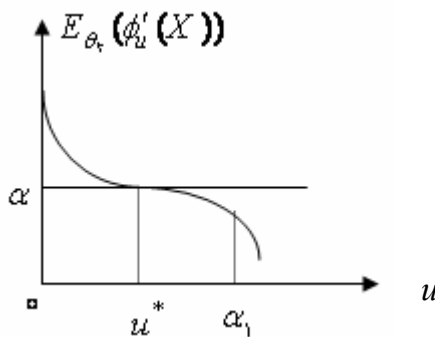
$H'_0: \theta = \theta_0$ vs $H'_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$) است و در نتیجه

$$E_{\theta_r}[\mathbf{1} - \phi'_{\alpha_1}(X)] \geq E_{\theta_r}[\mathbf{1} - \phi(X)] \Rightarrow \boxed{E_{\theta_r}[\phi'_{\alpha_1}(X)] \leq E_{\theta_r}[\phi(X)] = \alpha_r} \quad (۸)$$

بنابراین از (۷) و (۸) نتیجه می شود که

$$\boxed{E_{\theta_r}[\phi'_{\alpha_1}(X)] \leq \alpha_r \leq E_{\theta_r}[\phi'_0(X)]} \quad (۹)$$

یعنی آزمونهای ϕ'_0 و ϕ'_{α_1} به ترتیب بیشترین و کمترین توان را در θ_r در بین کلاس کلیه آزمونهای به اندازه α_1 در $\theta = \theta_1$ دارند.



حال برای اینکه اثبات را کامل کنیم کافیت نشان دهیم که $E_{\theta_r}[\phi'_u(X)]$ یک تابع پیوسته از u است.

فرض کنید $g(w) = E_{\theta_r}[\phi_w(X)]$ بنابراین

$$E_{\theta_r}[\phi'_u(X)] = g(u) + \mathbf{1} - g(\mathbf{1} - \alpha_1 + u)$$

بنابراین کافیت نشان دهیم که g یک تابع پیوسته است. فرض کنید $V \sim U(0,1)$ و از X مستقل باشد و قرار می دهیم $W = F_{\theta_r}(X, V)$ که در آن $F_{\theta_r}(x, \gamma) = P_{\theta_r}(X < x) + \gamma P_{\theta_r}(X = x)$ در این صورت طبق لم ۲-۲ موقعی که X دارای تابع چگالی f_{θ_r} است، $W \sim U(0,1)$ می باشد. همچنین چون $F(x_w, \gamma_w) = w$ و با توجه به اینکه

$$E\{I_{[0,w)}(F_{\theta_r}(X, V)) | X = x\} = P(F_{\theta_r}(X, V) < w | X = x) = \begin{cases} \mathbf{1} & x > x_w \\ \gamma & x = x_w = \phi_w(x) \\ \mathbf{0} & x < x_w \end{cases} \quad (**)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} g(w) &= E_{\theta_r}[\phi_w(X)] = \int \phi_w(x) e^{\theta_r x + Q(\theta_r)} h(x) dx \\ &= \int [\phi_w(x) e^{(\theta_r - \theta_1)x + (Q(\theta_r) - Q(\theta_1))}] e^{\theta_1 x + Q(\theta_1)} h(x) dx \\ &= E_{\theta_1}[\phi_w(X) e^{(\theta_r - \theta_1)X + (Q(\theta_r) - Q(\theta_1))}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(**)}{=} e^{Q(\theta_1) - Q(\theta_1)} E_{\theta_1} [E \{I_{[\circ, w)}(F_{\theta_1}(X, V)) | x\}] e^{(\theta_1 - \theta_1)X} \\ & = e^{Q(\theta_1) - Q(\theta_1)} E_{\theta_1} [I_{(\circ, w)} e^{(\theta_1 - \theta_1)X}] \end{aligned}$$

حال اگر $g(w)$ پیوسته نباشد آنگاه نقطه ای مانند w وجود دارد که

$$g(w_{\circ}) - g(w_{\circ}^-) > 0 \Rightarrow e^{Q(\theta_1) - Q(\theta_1)} E \{I_{\{w_{\circ}\}}(W) e^{(\theta_1 - \theta_1)X}\} > 0$$

که این یک تناقض است زیرا $E \{I_{\{w_{\circ}\}}(W)\} = P(W = w_{\circ}) = 0$ پس $g(w)$ پیوسته است و در

نتیجه $E_{\theta_1}[\varphi'_u(X)]$ پیوسته است و با توجه به رابطه (۹) مقدار $\alpha_1 \leq u^* \leq 0$ وجود دارد که $E_{\theta_1}[\varphi'_u(X)] = \alpha_1$

ب- برای اثبات این قسمت، نشان می‌دهیم که برای هر آزمون $\varphi_{\circ}^*$ به فرم (A) روابط (B) برای هر آزمون ϕ که در روابط زیر صدق کند برقرار است:

$$E_{\theta_i}[\varphi(X)] = E_{\theta_i}[\varphi_{\circ}^*(X)] \quad i = 1, 2$$

در ابتدا توجه کنید که آزمون یک طرفه $\varphi_{\circ}^*$ به فرم (A) با $x = -\infty$ بتواند آزمون یکنواخت به اندازه $E_{\theta_1}[\varphi_{\circ}^*(X)]$ برای انجام آزمون $(\theta_1 > \theta_1)$ $H_1'' : \theta = \theta_1$ vs $H_0'' : \theta = \theta_1$ است و اگر φ آزمون دیگری به اندازه $E_{\theta_1}[\varphi(X)] = E_{\theta_1}[\varphi_{\circ}^*(X)]$ باشد که $E_{\theta_1}[\varphi(X)] = E_{\theta_1}[\varphi_{\circ}^*(X)]$ ، در این صورت طبق یکتایی لم نیمن پیرسون، با احتمال یک $\varphi = \varphi_{\circ}^*$ و در نتیجه

$$E_{\theta}[\varphi(X)] = E_{\theta}[\varphi_{\circ}^*(X)] \quad \forall \theta \in \Theta$$

به طور مشابه نتیجه برای آزمون‌های یک طرفه با $x_1 = +\infty$ برقرار است.

بنابراین فرض می‌کنیم که $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$ و سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت (۱): فرض کنید $\theta < \theta_1$ باشد. با استفاده از لم نیمن پیرسون تعمیم یافته هر آزمون $\varphi_{\circ}$ به فرم

$$\varphi_{\circ}(x) = \begin{cases} 1 & f_{\theta}(x) > k f_{\theta_1}(x) + k f_{\theta_2}(x) \\ \gamma & f_{\theta}(x) = k f_{\theta_1}(x) + k f_{\theta_2}(x) \\ 0 & f_{\theta}(x) < k f_{\theta_1}(x) + k f_{\theta_2}(x) \end{cases} \quad (C)$$

برای k_1 و k_2 متناهی و $0 \leq \gamma(x) \leq 1$ مقدار $E_\theta[\varphi(X)]$ را در بین تمام آزمونهای φ که در آن $E_{\theta_i}[\varphi(X)] = E_{\theta_i}[\varphi_0(X)]$ $i = 1, 2$ ، ماکسیمم می‌کند. حال کافی است نشان دهیم که هر آزمون دو طرفه به فرم (A) با مقادیر متناهی x_1 و x_2 به فرم (C) برای $\theta_1 < \theta$ است. یعنی

$$\varphi_0(x) = 0 \Leftrightarrow f_\theta(x) < k_1 f_{\theta_1}(x) + k_2 f_{\theta_2}(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \Leftrightarrow \varphi_0^*(x) = 0$$

اثبات همانند اثبات قسمت (الف) قضیه ۱-۲ می‌باشد. (تمرین)

حالت (۲): فرض کنید $\theta > \theta_2$ باشد. اثبات این حالت نیز همانند حالت (۱) به دست می‌آید (تمرین)

حالت (۳): فرض کنید $\theta_1 < \theta < \theta_2$ باشد. با استفاده از لم نیمین پیرسون تعمیم‌یافته هر آزمون $1 - \varphi_0$

بفرم

$$1 - \varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & f_\theta(x) > k_1 f_{\theta_1}(x) + k_2 f_{\theta_2}(x) \\ \gamma & f_\theta(x) = k_1 f_{\theta_1}(x) + k_2 f_{\theta_2}(x) \\ 0 & f_\theta(x) < k_1 f_{\theta_1}(x) + k_2 f_{\theta_2}(x) \end{cases}$$

برای k_1 و k_2 متناهی در بین تمام آزمونهای φ که $E_{\theta_i}[\varphi_0(X)] = E_{\theta_i}[\varphi(X)]$ ، $i = 1, 2$ ، در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} E_\theta[1 - \varphi_0(X)] &\geq E_\theta[1 - \varphi(X)] \quad \forall \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \Leftrightarrow E_\theta[\varphi_0(X)] &\leq E_\theta[\varphi(X)] \quad \forall \theta_1 < \theta < \theta_2 \end{aligned}$$

حال کافیت نشان دهیم که آزمون φ_u به فرم (A) با مقادیر متناهی x_1 و x_2 است یعنی

$$\varphi_0(x) = 0 \Leftrightarrow f_\theta(x) < k_1 f_{\theta_1}(x) + k_2 f_{\theta_2}(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \Leftrightarrow \varphi_0^*(x) = 0$$

که اثبات آن همانند اثبات قسمت (ب) قضیه ۱-۲ می‌باشد.



حال می‌خواهیم آزمون فرض نوع (ii) یعنی $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ را بررسی کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$E_\theta[\varphi(X)] = \int \varphi(x) e^{\theta x + Q(\theta)} h(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} E_\theta[\varphi(X)] = \int \varphi(x) [x + Q'(\theta)] e^{\theta x + Q(\theta)} h(x) dx$$

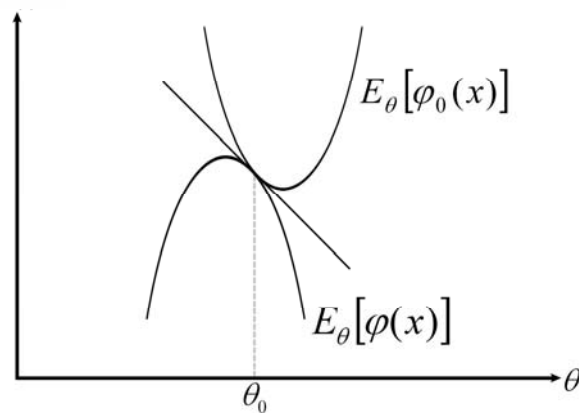
چون $E_\theta(d(X)) = -\frac{Q'(\theta)}{c'(\theta)}$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} E_{\theta}[\varphi(X)] &= \int \varphi(x)[x - E_{\theta}(X)] e^{\theta x + Q(\theta)} h(x) dx \\ &= E_{\theta}[\varphi(X)(X - E_{\theta}(X))] \\ \Rightarrow \frac{d}{d\theta} E_{\theta}[\varphi(X)] &= E_{\theta}(X \varphi(X)) - E_{\theta}(X) E_{\theta}(\varphi(X))\end{aligned}$$

همچنین توجه کنید برای این که یک آزمون دوطرفه φ_0 دارای همان اندازه آزمون φ در θ_0 باشد و همچنین رابطه

$$E_{\theta}[\varphi_0(X)] \geq E_{\theta}[\varphi(X)] \quad \forall \theta \in \Theta$$

برقرار باشد لازم است که (اگر θ_0 یک نقطه درونی Θ باشد) تابع توان آزمون φ_0 دارای همان شیب تابع توان آزمون φ در نقطه θ_0 باشد (به شکل زیر توجه کنید).



در حقیقت این شرط کافی نیز هست که اثبات آنرا در قضیه زیر می آوریم .

قضیه ۲-۲: فرض کنید X دارای تابع چگالی یا احتمال به فرم $f_{\theta}(x) = \{e^{\theta x + Q(\theta)}\} h(x)$ باشد و بخواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \neq \theta_0$$

الف- برای هر آزمون φ و $\theta_0 \in \Theta$ یک آزمون دو طرفه φ_0 به فرم (A) وجود دارد بطوری که

$$E_{\theta_0}[\varphi_0(X)] = E_{\theta_0}[\varphi(X)] \quad \& \quad \left. \frac{d}{d\theta} E_{\theta}[\varphi_0(X)] \right|_{\theta = \theta_0} = \left. \frac{d}{d\theta} E_{\theta}[\varphi(X)] \right|_{\theta = \theta_0}$$

ب- بعلاوه برای هر آزمون دو طرفه که در شرط (الف) صدق کند داریم که

$$E_{\theta}[\varphi_0(X)] \geq E_{\theta}[\varphi(X)] \quad \forall \theta \in \Theta$$

اثبات: الف- فرض کنید $\alpha = E_{\theta_0}[\varphi(X)]$ و $\eta = \frac{d}{d\theta} E_{\theta}[\varphi(X)] \Big|_{\theta=\theta_0}$ و

$$\varphi_w(x) = \begin{cases} 1 & x < x_w \\ \gamma_1 & x = x_w \\ 0 & x > x_w \end{cases}$$

یک آزمون به اندازه w باشد یعنی

$$E_{\theta_0}[\varphi_w(X)] = w \quad (*)$$

بنابراین φ_w یک آزمون دو طرفه به فرم (A) با $x_+ = +\infty$ است. حال برای هر $0 \leq u \leq \alpha$ قرار می دهیم:

$$\varphi'_u(x) = \varphi_u(x) + 1 - \varphi_{1-\alpha_1+u}(x) = \begin{cases} 1 & x < x_u \text{ or } x > x_{1-\alpha_1+u} \\ \gamma_u \text{ or } 1 - \gamma_{1-\alpha_1+u} & x = x_u \text{ or } x = x_{1-\alpha_1+u} \\ 0 & x_u < x < x_{1-\alpha_1+u} \end{cases}$$

در این صورت با توجه به رابطه (*) داریم

$$E_{\theta_0}[\varphi'_u(X)] = E_{\theta_0}[\varphi_u(X)] + 1 - E_{\theta_0}[\varphi_{1-\alpha_1+u}(X)] = u + 1 - (1 - \alpha + u) = \alpha$$

یعنی φ'_u یک آزمون دو طرفه به فرم (A) به اندازه α است. حال کفایت نشان دهیم که u بین 0 و

α ($0 \leq u \leq \alpha$) وجود دارد. به طوری که $\frac{\partial}{\partial \theta} E_{\theta}[\varphi'_u(X)] \Big|_{\theta=\theta_0} = \eta$ تا اثبات این قسمت کامل

شود.

برای این منظور توجه کنید که:

$$(*) \Rightarrow \varphi_0(x) = 0 \text{ w.p. one} \Rightarrow \varphi'_0(x) = 1 - \varphi_{1-\alpha}(x) \text{ w.p. one}$$

$$\Rightarrow \varphi'_0(x) = 1 - \varphi_{1-\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & x > x_{1-\alpha} \\ 1 - \gamma_{1-\alpha} & x = x_{1-\alpha} \\ 0 & x < x_{1-\alpha} \end{cases}$$

که در آن $x_{1-\alpha}$ و $\gamma_{1-\alpha}$ به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $E_{\theta_0}[\varphi'_0(X)] = \alpha$. حال با قرار

دادن $f_0(x) = \frac{d}{d\theta} f_{\theta}(x) \Big|_{\theta=\theta_0}$ و $f_1(x) = f_{\theta_0}(x)$ در لم‌نیمن پی‌رسون تعمیم یافته داریم که

$$f_0(x) > k f_1(x) \Leftrightarrow (x + Q'(\theta_0)) f_{\theta_0}(x) > k f_{\theta_0}(x) \Leftrightarrow x > k - Q'(\theta_0) \Leftrightarrow x > x_w$$

بنابراین طبق لم نیمن پیرسون تعمیم یافته $\phi'_\alpha(x)$ دارای بیشترین شیب در نقطه $\theta = \theta_0$ در بین تمام آزمون‌های به اندازه α در $\theta = \theta_0$ است یعنی

$$\int \phi'_\alpha(x) f_\alpha(x) dx \geq \int \phi(x) f_\alpha(x) dx$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{d\theta} E_\theta [\phi'_\alpha(x)] \right|_{\theta=\theta_0} \geq \eta = \left. \frac{d}{d\theta} E_\theta [\phi(X)] \right|_{\theta=\theta_0} \quad (10)$$

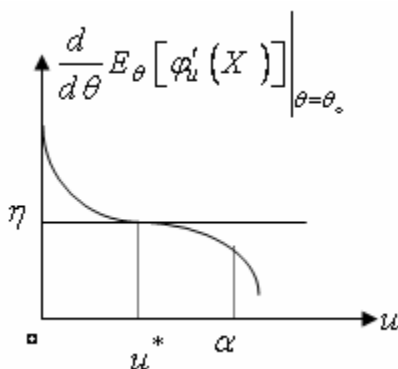
همچنین با توجه به اینکه با احتمال یک $1 - \phi'_\alpha(x) = 1 - \phi_\alpha(x)$ است بنابراین طبق لم نیمن پیرسون تعمیم یافته $\phi'_\alpha(x)$ دارای کمترین شیب در نقطه $\theta = \theta_0$ در بین تمام آزمون‌های به اندازه α در $\theta = \theta_0$ است یعنی:

$$\int (1 - \phi'_\alpha(x)) f_\alpha(x) dx \geq \int (1 - \phi(x)) f_\alpha(x) dx$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{d\theta} E_\theta [\phi'_\alpha(X)] \right|_{\theta=\theta_0} \leq \left. \frac{d}{d\theta} E_\theta [\phi(X)] \right|_{\theta=\theta_0} = \eta \quad (11)$$

بنابراین (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌دهند که u

$$\left. \frac{d}{d\theta} E_\theta [\phi'_\alpha(X)] \right|_{\theta=\theta_0} \leq \eta \leq \left. \frac{d}{d\theta} E_\theta [\phi'_\alpha(X)] \right|_{\theta=\theta_0} \quad (12)$$



حال کفایت نشان دهیم که $\left. \frac{d}{d\theta} E_\theta [\phi'_u(X)] \right|_{\theta=\theta_0}$ یک تابع پیوسته از u است. قرار می‌دهیم

$$g(w) = \left. \frac{d}{d\theta} E_\theta [\phi'_w(X)] \right|_{\theta=\theta_0}$$

در این صورت

$$\left. \frac{d}{d\theta} E_{\theta} [\varphi'_u(X)] \right|_{\theta=\theta_0} = g(u) - g(1-\alpha+u)$$

بنابراین بایستی نشان دهیم که g یک تابع پیوسته است. فرض کنیم $V \sim U(0,1)$ و از X مستقل است و فرض کنید $W = F_{\theta_0}(X, V)$ که در آن $F_{\theta_0}(x, \gamma) = P_{\theta_0}(X < x) + \gamma P_{\theta_0}(X = x)$ ، در این صورت طبق لم ۱-۲ موقعی که X دارای چگالی f_{θ_0} است آنگاه $W \sim U(0,1)$ است. همچنین

$$g(w) = \left. \frac{d}{d\theta} [E_{\theta}(\varphi_w(X))] \right|_{\theta=\theta_0} = E_{\theta_0}[\varphi_w(X)(X - E_{\theta_0}(X))]$$

و همانند قضیه ۱-۲

$$g(w) = E_{\theta_0}[I_{[\circ, w)}(W)(X - E_{\theta_0}(X))]$$

حال اگر $g(w)$ پیوسته نباشد آنگاه نقطه ای مانند w_0 وجود دارد به طوری که

$$g(w_0) - g(w_0^-) > 0 \Rightarrow E_{\theta_0}[I_{\{w_0\}}(W)(X - E_{\theta_0}(X))] > 0$$

که این یک تناقض است زیرا

$$E_{\theta_0}[I_{\{w_0\}}(W)] = P(W = w_0) = 0$$

پس $g(w)$ پیوسته است و در نتیجه $\left. \frac{d}{d\theta} E_{\theta} [\varphi'_u(X)] \right|_{\theta=\theta_0}$ پیوسته است و با توجه به رابطه (۱۲)

$$\text{مقدار } 0 \leq u^* \leq \alpha \text{ وجود دارد که } \left. \frac{d}{d\theta} E_{\theta} [\varphi'_{u^*}(X)] \right|_{\theta=\theta_0} = \eta$$

ب- برای اثبات این قسمت، نشان می‌دهیم که برای هر آزمون ϕ_0 به فرم (A) رابطه

$$E_{\theta}[\phi_0(X)] \geq E_{\theta}[\phi(X)] \quad \forall \theta \in \Theta$$

برای هر آزمون ϕ که در روابط زیر صدق کند برقرار است

$$E_{\theta_0}[\phi_0(X)] = E_{\theta_0}[\phi(X)] \quad , \quad \left. \frac{d}{d\theta} E_{\theta}[\phi_0(X)] \right|_{\theta=\theta_0} = \left. \frac{d}{d\theta} E_{\theta}[\phi(X)] \right|_{\theta=\theta_0}$$

در ابتدا همانند اثبات قضیه ۱-۲ حالت‌های $x_1 = -\infty$ و $x_2 = +\infty$ به وسیله یکتایی لم نیمین

پیرسون به راحتی به دست می‌آیند. بنابراین فرض می‌کنیم $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$ و دو حالت زیر را

در نظر می‌گیریم:

حالت (۱): فرض کنید $\theta > \theta_0$ باشد. با استفاده از لم نیمین پیرسون تعمیم یافته هر آزمون φ_0 به فرم

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } f_\theta(x) > k f_{\theta_0}(x) + k_\gamma \frac{d}{d\theta} f_\theta(x) \Big|_{\theta=\theta_0} \\ \gamma & \text{if } f_\theta(x) = k f_{\theta_0}(x) + k_\gamma \frac{d}{d\theta} f_\theta(x) \Big|_{\theta=\theta_0} \\ 0 & \text{if } f_\theta(x) < k f_{\theta_0}(x) + k_\gamma \frac{d}{d\theta} f_\theta(x) \Big|_{\theta=\theta_0} \end{cases} \quad (D)$$

برای k_1 و k_γ متناهی و $0 \leq \gamma \leq 1$ مقدار $E_\theta[\varphi(X)]$ را در بین تمام آزمون‌های φ که در روابط زیر صدق می‌کنند، ماکسیم می‌کند:

$$E_{\theta_0}[\varphi_0(X)] = E_{\theta_0}[\varphi(X)] \quad , \quad \frac{d}{d\theta} E_\theta[\varphi_0(X)] \Big|_{\theta=\theta_0} = \frac{d}{d\theta} E_\theta[\varphi(X)] \Big|_{\theta=\theta_0}$$

حال کفایت نشان دهیم که هر آزمون دو طرفه به فرم (A) با مقادیر متناهی x_1 و x_γ به فرم (D) برای $\theta > \theta_0$ است و در این صورت نشان داده‌ایم که

$$E_\theta[\varphi_0(X)] \geq E_\theta[\varphi(X)] \quad \forall \quad \theta > \theta_0.$$

اما

$$\begin{aligned} f_\theta(x) &< k f_{\theta_0}(x) + k_\gamma \frac{d}{d\theta} f_\theta(x) \Big|_{\theta=\theta_0} \\ \Leftrightarrow e^{\theta x + Q(\theta)} &< k_1 e^{\theta_0 x + Q(\theta_0)} + k_\gamma (x - Q'(\theta_0)) e^{\theta_0 x + Q(\theta_0)} \\ \Leftrightarrow [k_1 - k_\gamma Q'(\theta_0)] e^{(Q(\theta_0) - Q(\theta))} &+ k_\gamma x e^{(Q(\theta_0) - Q(\theta))} > e^{(\theta - \theta_0)x} \\ \Leftrightarrow c_1 + c_\gamma x &> e^{(\theta - \theta_0)x} \end{aligned}$$

که در آن

$$c_1 = [k_1 - k_\gamma Q'(\theta_0)] e^{Q(\theta_0) - Q(\theta)} \quad , \quad c_\gamma = k_\gamma e^{Q(\theta_0) - Q(\theta)}$$

قرار می‌دهیم $m(x) = e^{(\theta - \theta_0)x} - c_1 - c_\gamma x$. حال فرض کنید $x_1 < x_\gamma$ در این صورت با انتخاب c_1

و c_γ از دستگاه معادلات زیر

$$\begin{cases} m(x_1) = 0 \\ m(x_r) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_r x_1 = e^{(\theta - \theta_0)x_1} \\ c_1 + c_r x_r = e^{(\theta - \theta_0)x_r} \end{cases}$$

داریم که

$$c_r = \frac{e^{(\theta - \theta_0)x_r} - e^{(\theta - \theta_0)x_1}}{x_r - x_1} > 0 \quad (\theta > \theta_0, x_1 < x_r)$$

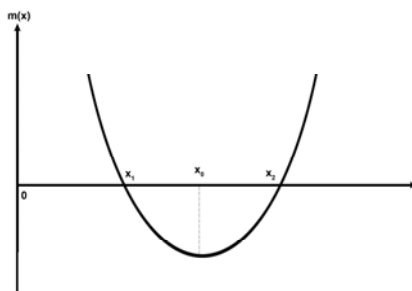
$$c_1 = \frac{x_r e^{(\theta - \theta_0)x_1} - x_1 e^{(\theta - \theta_0)x_r}}{x_r - x_1} = e^{(\theta - \theta_0)x_r} - c_r x_r$$

و همچنین

$$m'(x) = (\theta - \theta_0)e^{(\theta - \theta_0)x} - c_r = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\theta - \theta_0} \ln\left(\frac{c_r}{\theta - \theta_0}\right)$$

$$m''(x) = (\theta - \theta_0)^2 e^{(\theta - \theta_0)x} > 0$$

بنابراین $m(x)$ یک تابع محدب از x است که دارای یک نقطه می‌نیم در $x = x_0$ است (شکل زیر)



پس

$$\varphi_0(x) = 0 \Leftrightarrow m(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_r \Leftrightarrow \varphi_0^*(x) = 0$$

حال اگر $x_1 = x_r$ ، در این صورت با انتخاب c_1 و c_r از دستگاه معادلات زیر

$$\begin{cases} m(x_1) = 0 \\ m'(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_r x_1 = e^{(\theta - \theta_0)x_1} \\ c_r = (\theta - \theta_0)e^{(\theta - \theta_0)x_1} \end{cases}$$

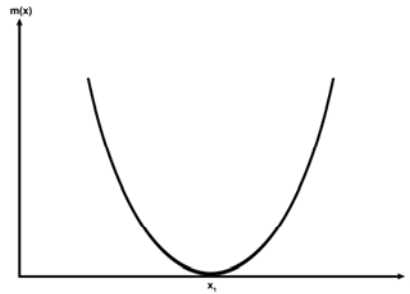
داریم که

$$\begin{cases} c_r = (\theta - \theta_0)e^{(\theta - \theta_0)x_1} > 0 \\ c_1 = e^{(\theta - \theta_0)x_1} - c_r x_1 \end{cases}$$

و همچنین

$$m''(x_1) = (\theta - \theta_0)^2 e^{(\theta - \theta_0)x_1} > 0$$

بنابراین $m(x)$ یک تابع محدب است و دارای یک نقطه می‌نیم در $x = x_1$ است (شکل زیر).



پس

$$\varphi_0^*(x) = 1 \Leftrightarrow m(x) > 1 \Leftrightarrow x < x_1 \text{ یا } x > x_1 \Leftrightarrow \varphi_0(x) = 1$$

بنابراین هر آزمون دوطرفه به فرم (A) با مقادیر متناهی x_1 و x_2 به فرم (D) برای $\theta > \theta_0$ است.

حالت (۲): حالت $\theta < \theta_0$ نیز همانند حالت (۱) به دست می‌آید (اثبات تمرین)



حال فرض کنید که تابع زیان در شرایط زیر صدق کند

$$\begin{aligned} L(\theta, a_1) - L(\theta, a_0) &\geq 0 & \text{if } \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ L(\theta, a_1) - L(\theta, a_0) &\leq 0 & \text{if } \theta < \theta_1 \text{ or } \theta > \theta_2 \end{aligned} \quad (E)$$

که در آن $\theta_1 \leq \theta_2$.

قضیه ۲-۳: اگر X دارای تابع چگالی یا احتمال به فرم $f_\theta(x) = \{e^{\theta x + Q(\theta)}\} h(x)$ باشد و تابع زیان

در شرایط (E) برای $\theta_1 \leq \theta_2$ صدق کند. در این صورت برای آزمون

$$H_0: \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \text{ vs } H_1: \theta < \theta_1 \text{ یا } \theta > \theta_2$$

کلاس آزمون‌های دو طرفه φ_0 به فرم (A) یک کلاس اساساً کامل است

اثبات: برای هر آزمون تابع مخاطره به صورت زیر است:

$$R(\theta, \varphi) = L(\theta, a_1)E_\theta[\varphi(X)] + L(\theta, a_0)E_\theta[1 - \varphi(X)]$$

بنابراین

$$R(\theta, \varphi_0) - R(\theta, \varphi) = [L(\theta, a_1) - L(\theta, a_0)][E_\theta[\varphi_0(X)] - E_\theta[\varphi(X)]]$$

اگر φ_0 آزمونی باشد که

$$E_{\theta_i}[\varphi_0(X)] = E_{\theta_i}[\varphi(X)] \quad i = 1, 2$$

(چنین آزمون φ_0 از قضیه ۲-۱ به دست می‌آید.) در این صورت طبق قضیه ۲-۱ داریم که

$$\begin{cases} E_\theta[\varphi_0(X)] \geq E_\theta[\varphi(X)] & \forall \theta < \theta_1 \text{ or } \theta > \theta_2 \\ E_\theta[\varphi_0(X)] \leq E_\theta[\varphi(X)] & \forall \theta_1 < \theta < \theta_2 \end{cases}$$

بنابراین از این روابط و شرایط (E) داریم که

$$R(\theta, \varphi_0) - R(\theta, \varphi) \leq 0 \quad \forall \theta \in \Theta$$

و در نتیجه کلاس آزمون‌های φ_0 به فرم (A) اساساً کامل می‌باشند.



فصل ۶

پرتوانترین آزمون‌های
یکنواخت ناریب

بخش ۱: پرتوانترین آزمون‌های یکنواخت ناریب^۱

تعریف ۱-۱: در انجام آزمون $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_1: \theta \in \Theta_1$ یک آزمون φ به اندازه α را ناریب گویند هرگاه

$$E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})] \geq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

یعنی یک آزمون φ یک آزمون ناریب به اندازه α است اگر

$$(۱) \quad E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})] \leq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0$$

$$(۲) \quad E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})] \geq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

■

به نظر می‌رسد که داشتن شرط ناریبی برای یک آزمون یک شرط معقولاً باشد زیرا روابط (۱) و (۲) می‌گویند که احتمال رد کردن فرض H_0 وقتی که $\theta_1 = \theta_0^{(۱)}$ نادرست است هرگز کوچکتر از احتمال رد کردن H_0 وقتی که H_0 درست است نمی‌شود یعنی

$$E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})] \leq \alpha \leq E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})] \\ \theta \in \Theta_0 \quad \theta \in \Theta_1$$

توجیه ناریبی:

$$L(\theta, \varphi) = L(\theta, a_1)\varphi(\tilde{X}) + L(\theta, a_0)[1 - \varphi(\tilde{X})]$$

$$R(\theta, \varphi) = L(\theta, a_1)E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})] + L(\theta, a_0)E_{\theta}[1 - \varphi(\tilde{X})]$$

برای به دست آوردن تصمیم مخاطره ناریب بایستی $R(\theta, \varphi)$ را به عنوان تابعی از θ می‌نیم کنیم اما

$$R(\theta, \varphi) = E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})] \quad \forall \theta \in \Theta_0$$

$$R(\theta, \varphi) = E_{\theta}[1 - \varphi(\tilde{X})] \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

پس تحت Θ_0 ، $E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})]$ بایستی می‌نیم و تحت Θ_1 ، $E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})]$ ماکزیمم شود. چون آزمون به اندازه α است پس بایستی

$$E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})] \geq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_1 \quad \text{و} \quad E_{\theta}[\varphi(\tilde{X})] \leq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0$$

^۱ Uniformly Most Powerful Unbiased Tests

تعریف ۱-۲: پرتوانترین آزمون یکنواخت ناریب (UMPU) به اندازه α آزمونی است که در بین تمام آزمون‌های ناریب به اندازه α دارای بیشترین توان در هر نقطه $\theta \in \Theta_0$ باشد.

■

در زیر برای هر یک از آزمون‌های نوع (i) و (ii) آزمون (UMPU) را به دست می‌آوریم.

آزمون نوع (i): در این قسمت می‌خواهیم برای آزمون $\theta > \theta_0$ یا $\theta < \theta_0$ vs $H_0: \theta \leq \theta_0$ یک آزمون UMPU به دست آوریم.

فرض کنید X دارای تابع چگالی یا احتمال به فرم $f_\theta(x) = \{e^{\theta x + Q(\theta)}\} h(x)$ (خانواده نمایی یک پارامتری) باشد چون تابع توان هر آزمون φ یعنی $\Pi_\varphi(\theta) = E_\theta[\varphi(X)]$ در خانواده نمایی یک تابع پیوسته از θ است (نتیجه ۱-۲ فصل پنجم) بنابراین هر آزمون ناریب به اندازه α برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 بایستی دارای تابع توان مساوی با α در نقاط θ_0 و θ_1 باشد. بر اساس قضیه ۱-۲ فصل قبل هر آزمون دو طرفه بفرم:

$$\varphi_0^*(x) = \begin{cases} 1 & x < x_1 \text{ or } x > x_2 \\ \gamma_i & x = x_i \quad i = 1, 2 \\ 0 & x_1 < x < x_2 \end{cases} \quad (A)$$

که در آن γ_1, γ_2, x_1 و x_2 به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$E_{\theta_1}[\varphi_0^*(X)] = E_{\theta_2}[\varphi_0^*(X)] = \alpha$$

یک آزمون UMPU می‌باشد (زیرا اگر $\varphi(X)$ هر آزمون ناریب به اندازه α باشد آنگاه طبق قضیه

۱-۲ فصل قبل:

ناریبی

$$E_\theta[\varphi_0^*(X)] \leq E_\theta[\varphi(X)] \leq \alpha \quad \forall \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \\ (E_\theta[\varphi_0^*(X)] \geq E_\theta[\varphi(X)] \geq \alpha \quad \forall \theta < \theta_1 \text{ or } \theta > \theta_2)$$

ناریبی

وجود چنین آزمونی نیز تضمین شده است زیرا $\phi(X) \equiv \alpha$ یک آزمون ناریب به اندازه α می‌باشد.

مثال ۱-۱: فرض کنید $X \sim N(\theta, 1)$ باشد یک آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون زیر به

$$H_0: \theta \leq \theta_l \text{ vs } H_1: \theta < \theta_l \text{ یا } \theta > \theta_r$$

دست آورید

حل: با توجه به اینکه

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} = \left[e^{\theta x - \frac{1}{2}\theta^2} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)$$

پس $\varphi_\theta^*(x)$ به فرم (A) آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 است به شرط آنکه

$$E_{\theta_l}[\varphi_\theta^*(X)] = E_{\theta_r}[\varphi_\theta^*(X)] = \alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{\theta_l}(X < x_l) + P_{\theta_l}(X > x_r) = \alpha = P_{\theta_r}(X < x_l) + P_{\theta_r}(X > x_r)$$

$$\Leftrightarrow \Phi(x_l - \theta_l) + \Phi(\theta_l - x_r) = \alpha = \Phi(x_l - \theta_r) + \Phi(\theta_r - x_r)$$

یکی از جواب‌ها برای x_l و x_r عبارت است از:

$$x_l = \frac{\theta_l + \theta_r}{2} - c, \quad x_r = \frac{\theta_l + \theta_r}{2} + c$$

که در آن c به گونه‌ای انتخاب می‌شود که

$$\Phi(x_l - \theta_l) + \Phi(\theta_l - x_r) = \Phi\left(\frac{\theta_r - \theta_l}{2} - c\right) + \Phi\left(\frac{\theta_l - \theta_r}{2} - c\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\theta_r - \theta_l}{2} - c\right) - \Phi\left(\frac{\theta_r - \theta_l}{2} + c\right) = 1 - \alpha$$

■

آزمون نوع (ii): در این قسمت می‌خواهیم برای آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ یک آزمون

UMPV به دست آوریم.

فرض کنید X دارای تابع چگالی یا احتمال به فرم $f_\theta(x) = \left\{ e^{\theta x + Q(\theta)} \right\} h(x)$ باشد. چون تابع

توان هر آزمون φ در خانواده‌نمایی یک تابع پیوسته از θ است، بنابراین هر آزمون ناریب به اندازه α

برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 بایستی دارای تابع توانی باشد که در نقطه θ_0 مقدار α را داشته

باشد و شیب آن در نقطه θ_0 مساوی صفر باشد یعنی:

$$\boxed{E_{\theta_0}[\varphi(X)] = \alpha, \quad \left. \frac{d}{d\theta} E_{\theta}[\varphi(X)] \right|_{\theta=\theta_0} = 0}$$

براساس قضیه ۲-۲ فصل قبل هر آزمون دو طرفه $\varphi_0(x)$ به فرم (A) که در آن γ_1, γ_2, x_1 و x_2 به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$E_{\theta_0}[\varphi_0(X)] = \alpha, \quad E_{\theta_0}[X \varphi_0(X)] = \alpha E_{\theta_0}(X)$$

یک آزمون UMPU است. وجود چنین آزمونی نیز تضمین شده است زیرا $\varphi(x) \equiv \alpha$ یک آزمون نااریب به اندازه α می‌باشد.

مثال ۱-۲: در مثال ۱-۱ برای انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ یک آزمون UMPU به اندازه α به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi_0}(\theta) &= E_{\theta}[\varphi_0(X)] = P_{\theta}(X < x_1) + P_{\theta}(X > x_2) \\ &= \Phi(x_1 - \theta) + \Phi(\theta - x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Pi_{\varphi_0}(\theta_0) = \alpha \\ \Pi'_{\varphi_0}(\theta_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(x_1 - \theta_0) + \Phi(\theta_0 - x_2) = \alpha \\ -\phi(x_1 - \theta_0) + \phi(\theta_0 - x_2) = 0 \end{cases}$$

یک جواب این دستگاه عبارت است از $x_1 - \theta_0 = \theta_0 - x_2 = -c$ یا

$$\begin{cases} x_1 = \theta_0 - c \\ x_2 = \theta_0 + c \end{cases}$$

که در آن c به گونه‌ای انتخاب می‌شود که

$$\Phi(x_1 - \theta_0) + \Phi(\theta_0 - x_2) = \alpha \Rightarrow 2\Phi(-c) = \alpha$$

$$\Rightarrow \Phi(-c) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c = -z_{\alpha/2} = z_{1-\alpha/2}$$

بنابراین آزمون UMPU عبارت است از:

$$\varphi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & x < \theta_0 - z_{1-\alpha/2} \text{ or } x > \theta_0 + z_{1-\alpha/2} \\ 0 & \theta_0 - z_{1-\alpha/2} < x < \theta_0 + z_{1-\alpha/2} \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & |x - \theta_0| > z_{1-\alpha/2} \\ 0 & |x - \theta_0| < z_{1-\alpha/2} \end{cases}$$

■

مثال ۳-۱: فرض کنید $X \sim P(\theta), \theta > 0$ آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta \neq \theta_0 \quad \text{دست آورید}$$

حل:

$$f_{\theta}(x) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} = \left[e^{x \ln \theta - \theta} \right] \frac{1}{x!}, \quad \theta = \theta_0 \Leftrightarrow \ln \theta = \ln \theta_0.$$

تابع توان آزمون به فرم (A) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \Pi_{\varphi_0}(\theta) &= P_{\theta}(X < x_1) + P_{\theta}(X > x_r) + \gamma_1 P_{\theta}(X = x_1) + \gamma_r P_{\theta}(X = x_r) \\ &= F(x_1 - 1; \theta) + 1 - F(x_r; \theta) + \gamma_1 f(x_1; \theta) + \gamma_r f(x_r; \theta) \end{aligned}$$

که در آن

$$F(x; \theta) = P_{\theta}(X \leq x) \text{ و } f(x; \theta) = P_{\theta}(X = x)$$

با توجه به آن که

$$\begin{cases} x f(x; \theta) = \theta f(x - 1; \theta) & \forall x = 1, 2, 3, \dots \\ \Pi'_{\varphi_0}(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow E_{\theta_0}[X \varphi_0(X)] = \alpha E_{\theta_0}(X) = \alpha \theta_0 \end{cases}$$

شرایط UMPU بودن آزمون به فرم (A) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} \Pi_{\varphi_0}(\theta_0) = \alpha \\ \Pi'_{\varphi_0}(\theta_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x_1 - 1; \theta_0) + 1 - F(x_r; \theta_0) + \sum_{i=1}^r \gamma_i f(x_i; \theta_0) = \alpha \\ F(x_1 - 2; \theta_0) + 1 - F(x_r - 1; \theta_0) + \sum_{i=1}^r \gamma_i f(x_i - 1; \theta_0) = \alpha \end{cases}$$

مقادیر γ_1, γ_r, x_1 و x_r به وسیله حل عددی دستگاه معادلات بالا با استفاده از جدولهای توزیع پواسون

به دست می‌آید. می‌توان مقادیر اولیه x_i و γ_i را از جدول پواسون با دمه‌های برابر بدست آورد این

مقادیر اولیه از دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} F(x_1; \theta_0) + \gamma f(x_1; \theta_0) = \frac{\alpha}{2} \\ 1 - F(x_r; \theta_0) + \gamma f(x_r; \theta_0) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

حال با استفاده از این مقادیر اولیه و حل عددی دستگاه معادلات بالا می‌توان مقادیر γ_1, γ_2, x_1 و x_2 را به دست آورد.

■

مثال ۱-۴: فرض کنید $0 < p < 1$ ، $X \sim B(n, p)$ ، آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون

$$H_0: p = p_0 \text{ vs } H_1: p \neq p_0$$

زیر را به دست آورید

حل:

$$f_p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \left[e^{x \ln \frac{p}{1-p} + \ln(1-p)} \right] \binom{n}{x}$$

$$p = p_0 \Leftrightarrow \ln \frac{p}{1-p} = \ln \frac{p_0}{1-p_0}$$

تابع توان آزمون به فرم (A) عبارت است از:

$$\Pi_{\phi_0}(p) = P_p(X < x_1) + P_p(X > x_r) + \gamma_1 P_p(X = x_1) + \gamma_r P_p(X = x_r)$$

$$\Pi_{\phi_0}(p_0) = \alpha \Rightarrow P_{p_0}(X < x_1) + 1 - P_{p_0}(X \leq x_r) + \gamma_1 P_{p_0}(X = x_1) + \gamma_r P_{p_0}(X = x_r) = \alpha$$

$$\Rightarrow P_{p_0}(x_1 \leq X \leq x_r) - \sum_{i=1}^r \gamma_i P_{p_0}(X = x_i) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P_{p_0}(x_1 < X < x_r) + \sum_{i=1}^r (1 - \gamma_i) P_{p_0}(X = x_i) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \sum_{j=x_1+1}^{x_r-1} \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j} + \sum_{i=1}^r (1 - \gamma_i) \binom{n}{x_i} p_0^{x_i} (1-p_0)^{n-x_i} = 1 - \alpha$$

حال با استفاده از رابطه

$$x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = np \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-1-(x-1)}$$

داریم که

$$\begin{aligned}
\Pi'_{\varphi_0}(p_0) &= 0 \\
\Rightarrow E_{p_0}(X \varphi_0(X)) &= \alpha E_{p_0}(X) = n\alpha p_0 \\
\Rightarrow \sum_{j < x_1 \text{ or } j > x_r} j f_{p_0}(j) + \sum_{i=1}^r \gamma_i x_i f_{p_0}(x_i) &= n\alpha p_0 \\
\Rightarrow n p_0 - \sum_{j=x_1+1}^{x_r-1} j f_{p_0}(j) + \sum_{i=1}^r (\gamma_i - 1) x_i f_{p_0}(x_i) &= n\alpha p_0 \\
\Rightarrow \sum_{j=x_1+1}^{x_r-1} j \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j} + \sum_{i=1}^r (1-\gamma_i) x_i \binom{n}{x_i} p_0^{x_i} (1-p_0)^{n-x_i} &= n(1-\alpha) p_0 \\
\Rightarrow n p_0 \left\{ \sum_{j=x_1+1}^{x_r-1} \binom{n-1}{j-1} p_0^{j-1} (1-p_0)^{n-j} + \sum_{i=1}^r (1-\gamma_i) \binom{n-1}{x_i-1} p_0^{x_i-1} (1-p_0)^{n-x_i} \right\} &= n p_0 (1-\alpha)
\end{aligned}$$

بنابراین آزمون UMPU به صورت φ_0 به فرم (A) است که در آن γ_1, γ_r, x_1 و x_r از جدول توزیع دو جمله‌ای با حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \Pi_{\varphi_0}(p_0) = \alpha \\ \Pi'_{\varphi_0}(p_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=x_1+1}^{x_r-1} \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j} + \sum_{i=1}^r (1-\gamma_i) \binom{n}{x_i} p_0^{x_i} (1-p_0)^{n-x_i} = 1-\alpha \\ \sum_{j=x_1+1}^{x_r-1} \binom{n-1}{j-1} p_0^{j-1} (1-p_0)^{n-j} + \sum_{i=1}^r (1-\gamma_i) \binom{n-1}{x_i-1} p_0^{x_i-1} (1-p_0)^{n-x_i} = 1-\alpha \end{cases}$$

■

مثال ۵-۱: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\sigma^2, \sigma)$ باشند.

آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به دست آورید

$$H_0: \sigma = \sigma_0 \text{ vs } H_1: \sigma \neq \sigma_0$$

حل: توجه کنید که اگر S یک آماره بسنده برای θ باشد و φ یک آزمون برای انجام آزمون $H_0: \theta \in \Theta_0 \text{ vs } H_1: \theta \in \Theta_1$ باشد آنگاه $\psi(S) = E[\varphi(\mathbf{X})|S]$ نیز یک آزمون است و $E_\theta[\psi(S)] = E_\theta[\varphi(\mathbf{X})]$ و در نتیجه آزمون‌های $\varphi(\mathbf{X})$ و $\psi(S)$ با یکدیگر معادل هستند. بنابراین می‌توان توجه خود را به آزمون‌هایی براساس آماره بسنده معطوف کرد.

در این مثال $T(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ یک آماره بسنده برای σ^2 است و $T(\underline{X}) \sim \sigma^2 \chi_{(n)}^2$ بنابراین

$$f_T(t) = \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2\sigma^2}} = \left[e^{-\frac{1}{2\sigma^2}t + \frac{n}{2} \ln\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)} \right] \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma_0^2}$$

تابع توان آزمون به فرم (A) براساس آماره T عبارت است از:

$$\Pi_{\varphi_0}(\sigma^2) = P_{\sigma^2}(T < t_1) + P_{\sigma^2}(T > t_2) = 1 - P_{\sigma^2}(t_1 < T < t_2)$$

بنابراین

$$\Pi_{\varphi_0}(\sigma_0^2) = \alpha \Rightarrow P_{\sigma_0^2}(t_1 < T < t_2) = 1 - \alpha \Rightarrow \int_{t_1/\sigma_0^2}^{t_2/\sigma_0^2} h_n(t) dt = 1 - \alpha \quad (1)$$

که در آن $h_n(t)$ تابع چگالی توزیع $\chi_{(n)}^2$ است.

$$\begin{aligned} \Pi'_{\varphi_0}(\sigma_0^2) = 0 &\Rightarrow E_{\sigma_0^2}(T \varphi_0(T)) = \alpha E_{\sigma_0^2}(T) = n\alpha\sigma_0^2 \\ &\Rightarrow E_{\sigma_0^2}(T) - E_{\sigma_0^2}[T(1 - \varphi_0(T))] = n\alpha\sigma_0^2 \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \frac{t}{\sigma_0^2}} \Rightarrow n\sigma_0^2 - \int_{t_1}^{t_2} t f_T(t) dt = n\alpha\sigma_0^2 \Rightarrow n\sigma_0^2 - \sigma_0^2 \int_{t_1/\sigma_0^2}^{t_2/\sigma_0^2} t h_n(t) dt = n\alpha\sigma_0^2 \\ &\Rightarrow \int_{t_1/\sigma_0^2}^{t_2/\sigma_0^2} t h_n(t) dt = n(1 - \alpha) \Rightarrow \int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2} dt = n(1 - \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xLeftrightarrow[u = \frac{t}{\sigma_0^2}]{dv = e^{-t/2} dt} \frac{-2}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2} \Big|_{c_1}^{c_2} + n \underbrace{\int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2} dt}_{(1) \rightarrow 1-\alpha} = n(1 - \alpha) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c_1^{\frac{n}{2}} e^{-c_1/2} = c_2^{\frac{n}{2}} e^{-c_2/2} \Leftrightarrow c_1^{\frac{n}{2}-1} e^{-c_1/2} = c_2^{\frac{n}{2}-1} e^{-c_2/2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c_1 h_n(c_1) = c_2 h_n(c_2)} \quad (2)$$

بنابراین آزمون UMPU به اندازه α عبارت است از :

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & t < c_1\sigma_0^2 \text{ or } t > c_2\sigma_0^2 \\ 0 & c_1\sigma_0^2 < t < c_2\sigma_0^2 \end{cases}$$

که در آن c_1 و c_2 از حل دستگاه

$$\begin{cases} \int_{c_1}^{c_2} h_n(t) dt = 1 - \alpha \\ c_1 h_n(c_1) = c_2 h_n(c_2) \end{cases}$$

حاصل می شود که حل عددی این معادلات توسط محققین انجام گرفته و برای آنها جدول‌هایی ارائه شده است. ■

بخش ۲: آزمون‌های UMPU برای خانوادهٔ نمایی k پارامتری^۱

در این بخش می خواهیم بحث آزمون‌های یک طرفه و دو طرفه را برای حالت k پارامتری تعمیم دهیم. یعنی حالتی که فضای پارامتری Θ یک فضای k بُعدی می‌باشد. در این قسمت فرض می‌کنیم X دارای تابع احتمال یا چگالی به فرم

$$f_{\theta}(x) = \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i T_i(x) + Q(\theta_1, \dots, \theta_k)} \right\} h(x)$$

باشد. در این صورت $T = (T_1, T_2, \dots, T_k)$ آمارهٔ بسندهٔ می‌نیمال توأم برای $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ است. علاقمند به انجام آزمون روی یکی از پارامترها مثلاً θ_1 هستیم موقعی که پارامترهای $\theta_2, \dots, \theta_k$ به عنوان پارامترهای مزاحم^۲ در نظر گرفته شوند.

در ابتدا نظریه عمومی انجام این گونه آزمون‌ها را بررسی می‌کنیم و سپس این نظریه را برای خانوادهٔ نمایی از توزیع‌ها بکار خواهیم برد.

^۱ UMPU Tests for k-Parameter Exponential Familie

^۲ Nuisance Parameters

آزمون $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_1: \theta \in \Theta_1$ را در نظر بگیرید که در آن $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ و $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$. فرض کنید $\bar{\Theta}_0$ و $\bar{\Theta}_1$ به ترتیب مجموعه‌های بستار^۱ Θ_0 و Θ_1 باشند. (اگر E یک مجموعه و E' مجموعه نقاط حدی یا انباشتگی^۲ مجموعه E باشد آنگاه $\bar{E} = E \cup E'$ را مجموعه بستار E گویند $\underbrace{(a,b)}_E \cup \underbrace{\{a,b\}}_{E'} = \underbrace{[a,b]}_{\bar{E}}$) اگر تابع توان هر آزمون یک تابع پیوسته باشد (که در خانواده توزیعهای نمایی بر طبق نتیجه ۱-۲ فصل پنجم برقرار می باشد) در این صورت هر آزمون

ناریب به اندازه α دارای تابع توان مساوی با α روی مرز $\Theta_B = \bar{\Theta}_0 \cap \bar{\Theta}_1$ خواهد بود زیرا

$$\left. \begin{aligned} E_\theta[\varphi(X)] &\leq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0 \\ E_\theta[\varphi(X)] &\geq \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_\theta[\varphi(X)] = \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_B$$

چنین آزمونی را α -شبه (α -Similar) روی مجموعه $\Theta_B = \bar{\Theta}_0 \cap \bar{\Theta}_1$ گویند.

تعریف ۱-۲: الف- یک آزمون φ را α -شبه روی یک مجموعه Θ_B گویند اگر

$$E_\theta[\varphi(X)] = \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_B$$

ب- یک آزمون را روی Θ_B شبه ($\text{Similar on } \Theta_B$) گویند اگر برای مقداری از α این آزمون

روی Θ_B α -شبه باشد. ■

بنابراین اگر تابع توان هر آزمون پیوسته باشد آنگاه هر آزمون ناریب به اندازه α یک آزمون α -شبه روی مرز $\Theta_B = \bar{\Theta}_0 \cap \bar{\Theta}_1$ خواهد بود.

تعریف ۲-۲: یک آزمون φ_0 را پرتوانترین آزمون یکنواخت α -شبه ($UMP \alpha$ -Similar) برای

آزمون $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_1: \theta \in \Theta_1$ گویند، اگر در بین تمام آزمون‌های φ که روی مرز Θ_B

α -شبه هستند، داشته باشیم که

$$E_\theta[\varphi_0(X)] \geq E_\theta[\varphi(X)] \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

■

^۱ Closure

^۲ Limit Point

همانگونه که بعداً خواهیم دید یافتن آزمون‌های α -UMP شبیه راحت تر از یافتن آزمون‌های UMPU است. در زیر نشان می‌دهیم که اغلب آزمون‌های α -UMP شبیه روی مرز Θ_B ، آزمون-های UMPU هستند.

قضیه ۱-۲: اگر در آزمون $H_1: \theta \in \Theta_1$ vs $H_0: \theta \in \Theta_0$ شرایط زیر برقرار باشند:

الف- برای هر آزمون ϕ در آزمون H_0 در مقابل H_1 ، تابع توان یک تابع پیوسته برحسب θ باشد.

ب- در آزمون H_0 در مقابل H_1 ، آزمون ϕ_0 یک آزمون α -UMP (روی مرز Θ_B) باشد.

ج- ϕ_0 یک آزمون به اندازه α در انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 باشد.

آنگاه ϕ_0 یک آزمون UMPU به اندازه α است.

اثبات: آزمون $\phi^*(x) \equiv \alpha$ یک آزمون به اندازه α در انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 است و همچنین یک آزمون α -شبه روی Θ_B است بنابراین:

$$(ب) \Rightarrow E_\theta[\phi_0(X)] \geq E_\theta[\phi^*(X)] = \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

$$(ج) \Rightarrow E_\theta[\phi_0(x)] \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

و در نتیجه ϕ_0 یک آزمون نارایب است.

حال اگر ϕ یک آزمون نارایب به اندازه α در آزمون H_0 در مقابل H_1 باشد، چون طبق شرط (الف) تابع توان آن برحسب θ پیوسته است پس بایستی

$$E_\theta[\phi(X)] = \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_B$$

یعنی ϕ یک آزمون α -شبه است و بر طبق شرط (ب) بایستی

$$E_\theta[\phi_0(X)] \geq E_\theta[\phi(X)] \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

یعنی ϕ_0 یک آزمون UMPU است (زیرا نشان دادیم که ϕ_0 نارایب نیز هست).

■

بنابراین طبق قضیه بالا توجه خود را به یافتن آزمون‌های α -UMP شبیه معطوف می‌کنیم.

حال فرض کنید T یک آماره بسنده برای $\theta \in \Theta_B$ (روی مرز) باشد و φ آزمونی باشد که در شرط زیر صدق کند.

$$E[\varphi(x)|T=t] = \alpha \quad \text{for almost all } t$$

در این صورت

$$E_\theta[\varphi(X)] = E_\theta[E[\varphi(X)|T=t]] = E_\theta(\alpha) \quad \forall \theta \in \Theta_B$$

یعنی φ یک آزمون $-\alpha$ شبیه روی مرز Θ_B است. چنین آزمونی را آزمون با ساختار نیمین گویند.

تعریف (۳): فرض کنید T یک آماره بسنده برای $\theta \in \Theta_B$ باشد گوئیم یک آزمون φ دارای ساختار نیمین نسبت به T است هرگاه:

$$E[\varphi(X)|T=t] = \alpha \quad \text{for almost all } t$$

(منظور از almost all t یعنی برای تمام t ها بجز t هایی که درون مجموعه های با احتمال صفر تحت تمام توزیع های $\{f_\theta : \theta \in \Theta_B\}$ قرار دارند.)

■

نکات:

(۱) با توجه به مطلب قبل از تعریف بالا، اگر آزمونی دارای ساختار نیمین به اندازه α باشد آنگاه آن

آزمون $-\alpha$ شبیه روی مرز Θ_B است. (عکس این مطلب نیز گاهی اوقات برقرار است)

(۲) ساختن آزمون های دارای ساختار نیمین راحت می باشد. کفایت $\varphi(x)$ را برای نقاط x که درون

مجموعه $\{x | T(x) = t\}$ قرار دارند چنان تعریف کنیم که

$$E[\varphi(X)|T=t] = \alpha$$

در این صورت اگر چنین کاری برای هر t انجام گیرد و تابع φ به دست آمده یک آزمون باشد

(Measurable) آنگاه φ یک آزمون $-\alpha$ شبیه با ساختار نیمین خواهد بود.

(۳) اگر آزمونی دارای ساختار نیمین به اندازه α باشد آنگاه احتمال شرطی روی هر سطح $T=t$ برابر α

است. چون T یک آماره بسنده برای $\theta \in \Theta_B$ است بنابراین توزیع شرطی $\varphi(X)|T=t$ به

^۱ Neyman Structure w.r. to T

پارامتر $\theta \in \Theta_B$ بستگی ندارد و در نتیجه خاصیت ساختار نیمین مسئله آزمون فرضها در حالت چند پارامتری را به حالت یک پارامتری برای هر مقدار t کاهش می دهد. در این حالات اغلب راحت تر است که آزمون‌های پرتوان را در بین آزمون‌های دارای ساختار نیمین در هریک از سطوح $T = t$ به طور جداگانه به دست آوریم. (قسمت های بعد را مشاهده کنید).

در بعضی موارد به راحتی می توان یک آزمون UMP در کلاس آزمون های α - شبیه با ساختار نیمین به دست آورد. در زیر نشان می دهیم که چنین آزمونهایی آزمون UMP در کلاس تمام آزمون های α - شبیه هستند.

قضیه ۲-۲: فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع $P \in \mathcal{P}$ باشد و T یک آماره بسنده برای خانواده $\mathcal{P}$ باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای اینکه هر آزمون α - شبیه دارای ساختار نیمین نسبت به T باشد آن است که خانواده توزیع های تولید شده توسط T یعنی $\mathcal{P}^T$ کامل کراندار باشند.

اثبات: فرض کنید $\mathcal{P}^T$ کامل کراندار باشد و ϕ یک آزمون α - شبیه نسبت به $\mathcal{P}$ باشد در این صورت:

$$E_{\theta}[\phi(X)] = \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_B \Rightarrow E_{\theta} \left[\underbrace{E[\phi(X)|T]}_{h(T)} \right] = E_{\theta}[\phi(X)] = \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_B$$

از آنجایی که T کامل کراندار و h یک تابع کراندار است، نتیجه می شود که

$$E[\phi(X)|T=t] = \alpha \quad \text{for almost all } t$$

پس $\phi(X)$ دارای ساختار نیمین است.

برعکس فرض کنید $\mathcal{P}^T$ کامل کراندار نباشد. در این صورت یک تابع کراندار f با $|f(t)| \leq M$ وجود دارد که $E(f(T)) = 0$ اما $f(T) \neq 0$. قرار می دهیم $\phi(t) = cf(t) + \alpha$ که $c = \min(\alpha, 1-\alpha)/M$. در این صورت ϕ یک تابع بحرانی است (زیرا $0 \leq \phi(t) \leq 1$) و

چون

$$E_{\theta}[\varphi(T)] = \alpha \quad \forall P^T \in \mathcal{P}^T$$

پس φ یک آزمون α -شبيه است. اما φ دارای ساختار نیم نیست زیرا

$$E[\varphi(T)|T=t] = E[cf(T) + \alpha|T=t] = cf(t) + \alpha \neq \alpha \quad (\mathcal{P}^T \text{ در توزیع در})$$

بنابراین به یک تناقض رسیدیم پس $\mathcal{P}^T$ کامل کراندار است. ■

حال استفاده این تعاریف و قضایا را روی خانواده نمایی k پارامتری بررسی می‌کنیم. فرض کنید

$X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از خانواده‌های توزیعهای نمایی k پارامتری زیر باشند

$$f_{\theta}(x) = \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i d_i(x) + Q(\theta_1, \dots, \theta_k)} \right\} h(x) \quad (1)$$

بنابراین

$$f_{\theta}(x) = \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i \left(\sum_{j=1}^n d_i(x_j) \right) + nQ(\theta_1, \dots, \theta_k)} \right\} \left(\prod_{i=1}^n h(x_i) \right) \quad (2)$$

و در نتیجه $T_{\sim} = (T_1, \dots, T_k) = \left(\sum_{j=1}^n d_1(X_j), \dots, \sum_{j=1}^n d_k(X_j) \right)$ آماره بسنده می‌نیمال برای

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ است. در زیر توزیع احتمال توام $T_{\sim} = (T_1, \dots, T_k)$ را به دست می‌آوریم.

لم ۱-۲: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از خانواده نمایی k پارامتری (۱) با $n \geq k$

باشند. اگر توزیع احتمال توام (۱) یک تابع احتمال باشد آنگاه تابع احتمال توام آماره بسنده می‌نیمال

$T_{\sim} = (T_1, \dots, T_k)$ در این خانواده عبارتست از

$$f_{\theta}(t) = \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i t_i + Q_{\circ}(\theta)} \right\} h_{\circ}(t) \quad (3)$$

اگر توزیع احتمال توام (۱) یک تابع چگالی باشد و تابع چگالی توام $T_{\sim}$ موجود باشد آنگاه تابع

چگالی توام $T_{\sim}$ بفرم (۳) می‌باشد.

اثبات: اولاً توجه کنید که

$$f_{\underline{\theta}}(\underline{x}) = \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i \left(\sum_{j=1}^n d_i(x_j) \right) + nQ(\theta)} \right\} \left(\prod_{j=1}^n h(x_j) \right)$$

حالت گسسته:

$$\begin{aligned} f_{\underline{T}}(\underline{t}) &= P_{\theta}(T_1 = t_1, \dots, T_k = t_k) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n): \sum_{j=1}^n d_1(x_j) = t_1, \dots, \sum_{j=1}^n d_k(x_j) = t_k} \sum \dots \sum \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i t_i + nQ(\theta)} \right\} \left(\prod_{j=1}^n h(x_j) \right) \\ &= \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i t_i + nQ(\theta)} \right\} \left[\sum \dots \sum_{(x_1, \dots, x_n): \sum_{j=1}^n d_1(x_j) = t_1, \dots, \sum_{j=1}^n d_k(x_j) = t_k} \left(\prod_{j=1}^n h(x_j) \right) \right] \\ &= \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i t_i + Q_{\circ}(\theta)} \right\} h_{\circ}(\underline{t}) \end{aligned}$$

حالت پیوسته:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \sum_{j=1}^n d_1(X_j) \\ T_r = \sum_{j=1}^n d_r(X_j) \\ \vdots \\ T_k = \sum_{j=1}^n d_k(X_j) \\ U_{k+1} = f_{k+1}(\underline{X}) \\ \vdots \\ U_n = f_n(\underline{X}) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_1 = g_1(\underline{T}, \underline{U}) \\ X_r = g_r(\underline{T}, \underline{U}) \\ \vdots \\ X_n = g_n(\underline{T}, \underline{U}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \underline{T} = (T_1, \dots, T_k) \\ \underline{U} = (U_{k+1}, \dots, U_n) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f_{T, U}(t, u) &= |J| f_X(g_1(t, u), \dots, g_n(t, u)) = |J| \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i t_i + nQ(\theta)} \right\} \prod_{j=1}^n h(g_j(t, u)) \\
 f_{T, U}(t, u) &= \iint \dots \int f_{T, U}(t, u) du_{k+1} \dots du_n \\
 &= \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i t_i + nQ(\theta)} \right\} \left[\iint \dots \int |J| \prod_{j=1}^n h(g_j(t, u)) du_{k+1} \dots du_n \right] \\
 &= \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i t_i + nQ(\theta_0)} \right\} h_0(t)
 \end{aligned}$$

■

لم ۱-۲ می‌گویید که اگر در توزیع احتمال توام $X_1, \dots, X_n$ بجای $d_i(x_j)$ معادل آن یعنی t_i را قرار دهیم آنگاه توزیع احتمال توام $T = (T_1, \dots, T_k)$ به صورت ضربی از $e^{\sum_{i=1}^k \theta_i t_i}$ خواهد بود.

فرض کنید بخواهیم آزمون‌هایی روی θ انجام دهیم. برای هر مقدار ثابت θ_1 ، $(T_1, \dots, T_k)$ یک آماره بسنده می‌نیمال برای $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ است که دارای توزیع احتمال توام زیر می‌باشد

$$f_{T_1, \dots, T_k}(t_1, \dots, t_k | \theta) = \left[\int h_0(t) e^{\theta t_1} dt_1 \right] \left[e^{\sum_{i=2}^k \theta_i t_i + Q_0(\theta)} \right]$$

در نتیجه توزیع شرطی T_1 به شرط $T_2, \dots, T_k$ عبارتست از

$$f_{T_1 | T_2, \dots, T_k}(t_1 | \theta_1) = \underbrace{\left[\int h_0(t) e^{\theta t_1} dt_1 \right]^{-1}}_{C(\theta_1)} h_0(t) e^{\theta t_1} = C(\theta_1) h_0(t) e^{\theta t_1} \quad (*)$$

یعنی توزیع شرطی T_1 به شرط $T_2, \dots, T_k$ به یک خانواده نمایی یک پارامتری متعلق است و به $\theta_1, \dots, \theta_k$ بستگی ندارد. این مطلب پیشنهاد می‌کند برای انجام آزمون روی θ_1 موقعی که $\theta_2, \dots, \theta_k$ بعنوان پارامترهای مزاحم می‌باشند از توزیع شرطی $(*)$ که تنها به θ_1 بستگی دارد استفاده کنیم و همان

مطالب فصل‌های قبل و بخش قبل را بکار ببریم. در زیر آزمون‌های مختلف روی θ_1 موقعیکه $\theta_2, \dots, \theta_k$ پارامترهای مزاحم می‌باشند را به تفکیک مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف- آزمون فرض $H_0: \theta_1 \leq \theta_{10}$ vs $H_1: \theta_1 > \theta_{10}$

فرض کنید بخواهیم آزمون $H_0: \theta_1 \leq \theta_{10}$ vs $H_1: \theta_1 > \theta_{10}$ را انجام دهیم. براساس توزیع شرطی T_1 به شرط $T_2, \dots, T_k$ (فرمول $(*)$) که تنها به پارامتر θ_1 بستگی دارد و با توجه به مطالب خواننده شده قبلی یک آزمون UMP به اندازه α برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 به شرط $T_2, \dots, T_k$ عبارتست از

$$\varphi_0(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1 & t_1 > c(t_2, \dots, t_k) \\ \gamma(t_2, \dots, t_k) & t_1 = c(t_2, \dots, t_k) \\ 0 & t_1 < c(t_2, \dots, t_k) \end{cases} \quad (A)$$

که در آن γ و c توابعی از $t_2, \dots, t_k$ هستند بگونه‌ای که

$$E_{\theta_0}[\varphi_0(T_1, \dots, T_k) | T_i = t_i \quad i = 2, \dots, k] = \alpha \quad (B)$$

با شرط اینکه $\varphi_0(t_1, \dots, t_k)$ یک آزمون در مسئله غیرشرطی است (measurable)، در زیر نشان می‌دهیم که φ_0 در مسئله غیرشرطی یک آزمون UMPU به اندازه α در آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

می‌دانیم که تابع توان هر آزمون (در خانواده نمایی) یک تابع پیوسته است بنابراین طبق قضیه (۱) کفایت نشان دهیم که φ_0 یک آزمون به اندازه α و UMP $1-\alpha$ شبیه روی مرز $\Theta_B = \{\theta | \theta_1 = \theta_{10}\}$ است.

اولاً طبق رابطه (B)، φ_0 دارای ساختار نیمین و در نتیجه یک آزمون $1-\alpha$ شبیه روی مرز Θ_B است. ثانیاً فرض کنید که φ هر آزمون $1-\alpha$ شبیه روی مرز Θ_B باشد. حال چون $(T_2, \dots, T_k)$ یک آماره کامل و در نتیجه کامل کراندار برای $\theta \in \Theta_B$ است بنابراین طبق قضیه ۲-۲، φ دارای ساختار نیمین است. بنابراین

$$E_{\theta_0}[\varphi(T) | T_i = t_i \quad i = 2, \dots, k] = \alpha \quad \text{for almost all } t_i$$

همچنین در بین تمام آزمونهای φ که

$$E_{\theta_0}[\varphi(\underline{T}) | T_i = t_i \quad i = 1, \dots, k] = \alpha$$

آزمون φ_0 در (A) دارای بیشترین توان شرطی برای $\theta_1 > \theta_0$ و دارای کمترین توان شرطی برای $\theta_1 \leq \theta_0$ است.

بنابراین برای $\theta_1 > \theta_0$ داریم که

$$\begin{aligned} E_{\theta}[\varphi_0(\underline{T})] &= E_{\theta} \left\{ E_{\theta_1}[\varphi_0(\underline{T}) | T_i = t_i \quad i = 1, \dots, k] \right\} \\ &\geq E_{\theta} \left\{ E_{\theta_1}[\varphi(\underline{T}) | T_i = t_i \quad i = 1, \dots, k] \right\} \\ &= E_{\theta}[\varphi(\underline{T})] \quad \forall \theta \in \Theta_1 \end{aligned}$$

که این نشان می‌دهد که φ_0 یک آزمون $1-\alpha$ UMP شبیه است. همچنین برای هر $\theta_1 \leq \theta_0$ داریم که

$$E_{\theta}[\varphi_0(\underline{T})] = E_{\theta} \left\{ E_{\theta_1}[\varphi_0(\underline{T}) | T_i = t_i \quad i = 1, \dots, k] \right\} \leq E_{\theta} \left\{ \alpha \right\} = \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

و در نتیجه

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_{\theta}[\varphi_0(\underline{T})] = \alpha$$

یعنی $\varphi_0(\underline{T})$ یک آزمون به اندازه α است. بنابراین طبق قضیه ۱-۲، φ_0 یک آزمون UMPU به اندازه α در آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

■

مثال ۱-۲: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد که $\mu \in R$ و $\sigma > 0$ هر دو نامعلوم هستند. آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به دست آورید.

$$H_0: \mu \leq 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > 0$$

حل:

$$\begin{aligned} f_{\mu, \sigma^2}(\underline{x}) &= \left(\sqrt{\pi} \sigma^2 \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \\ &= e^{\frac{\mu}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2 + \frac{n\mu}{2\sigma^2} - \frac{n}{2} \ln(\sqrt{\pi} \sigma^2)} \end{aligned}$$

بنابراین $f_{\mu, \sigma^2}(x)$ به یک خانواده نمایی دو پارامتری پرتبه متعلق است و $(T_1, T_2) = (\sum X_i, \sum X_i^2)$ آماره بسنده می‌نیمال برای (μ, σ^2) است که طبق لم ۱-۲ توزیع احتمال توام آن عبارتست از

$$f_{\theta_1, \theta_2}(t_1, t_2) = \{e^{\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2 + Q_0(\theta)}\} h_0(t_2)$$

که در آن $\theta_1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$ و $\theta_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$ یعنی توزیع (T_1, T_2) به یک خانواده نمایی دو پارامتری پرتبه متعلق است. توجه کنید که آزمون فرض $H_0: \mu \leq 0$ vs $H_1: \mu > 0$ معادل آزمون فرض $H_0: \theta_1 \leq 0$ vs $H_1: \theta_1 > 0$ می‌باشد.

همچنین روی مرز $\Theta_B = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 = 0, \theta_2 < 0\}$ آماره $T_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ یک آماره بسنده کامل است. با شرط روی $T_2 = t_2$ آزمون UMPU به اندازه α عبارتست از

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & t_1 > c(t_2) \\ 0 & t_1 < c(t_2) \end{cases}$$

که در آن $c(t_2)$ بگونه‌ای انتخاب می‌شود که

$$E_{\theta_1=0}[\varphi_0(T_1, T_2) | T_2 = t_2] = P_{\theta_1=0}[T_1 > c(t_2) | T_2 = t_2] = \alpha$$

از طرفی روی مرز $\mu = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = 0$ آماره T_2 برای σ^2 بسنده کامل است و آماره

$$\frac{T_1}{\sqrt{T_2}} = \frac{T_1/\sigma}{\sqrt{T_2/\sigma^2}}$$

یک آماره فرعی است و بنابراین طبق قضیه باسو تحت $\theta_1 = 0$ آماره‌های T_2 و

از یکدیگر مستقل هستند و در نتیجه آزمون UMPU عبارتست از

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \frac{t_1}{\sqrt{t_2}} > c \\ 0 & \frac{t_1}{\sqrt{t_2}} < c \end{cases}$$

که در آن c بگونه‌ای انتخاب می‌شود که $P_{\theta_1=0} \left(\frac{T_1}{\sqrt{T_2}} > c \right) = \alpha$ اما اگر

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\frac{T_1}{\sqrt{T_2}} = \frac{T_1}{\sqrt{\frac{1}{n} T_1^2 + (n-1) S^2}} = \frac{\frac{T_1}{\sqrt{nS}}}{\sqrt{\frac{T_1^2}{n^2 S^2} + \frac{n-1}{n}}} = \frac{Y}{\sqrt{\frac{1}{n} Y^2 + \frac{n-1}{n}}}$$

که در آن $Y = \frac{T_1}{\sqrt{nS}}$. این نسبت یک تابع صعودی از Y است زیرا اگر قرار دهیم

$$g(y) = \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{n} y^2 + \frac{n-1}{n}}} \Rightarrow g'(y) = \frac{\frac{n-1}{n}}{\left(\frac{1}{n} y^2 + \frac{n-1}{n} \right)^{3/2}} > 0$$

$$\frac{T_1}{\sqrt{T_2}} > c \Leftrightarrow Y > k \Leftrightarrow \frac{T_1}{\sqrt{nS}} > k$$

بنابراین

اما تحت $\theta_1 = 0$ داریم که

$$\frac{T_1}{\sqrt{nS}} = \frac{\frac{T_1}{\sqrt{n}\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} \stackrel{D}{=} \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_{(n-1)}^2 / (n-1)}} \sim t_{(n-1)}$$

و در نتیجه

$$\alpha = P_{\theta_1=0} \left(\frac{T_1}{\sqrt{T_2}} > c \right) = P_{\theta_1=0} \left(\frac{T_1}{\sqrt{nS}} > k \right) = P(t_{(n-1)} > k) \Rightarrow k = t_{1-\alpha}(n-1)$$

بنابراین آزمون UMPU به اندازه α عبارتست از

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \frac{T_1}{\sqrt{nS}} > t_{1-\alpha}(n-1) \\ 0 & \frac{T_1}{\sqrt{nS}} < t_{1-\alpha}(n-1) \end{cases}$$



مثال ۲-۲: فرض کنید $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ یک نمونه تصادفی از توزیع

$$N_2\left(\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

باشند که در آن ρ ، σ_1 و σ_2 نامعلوم هستند. آزمون UMPU به اندازه α در انجام آزمون زیر را

$$H_0: \rho \leq 0 \text{ vs } H_1: \rho > 0 \quad \text{به دست آورید}$$

حل:

$$f_{\sigma_1, \sigma_2, \rho}(x, y) \propto e^{-\frac{1}{2(1-\rho)^2} \left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} \right)}$$

$$\Rightarrow f_{\sigma_1, \sigma_2, \rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) \propto e^{-\frac{1}{2(1-\rho)^2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} \sum x_i^2 - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2} \sum x_i y_i + \frac{1}{\sigma_2^2} \sum y_i^2 \right)}$$

بنابراین $f_{\sigma_1, \sigma_2, \rho}(\tilde{x}, \tilde{y})$ متعلق به یک خانواده نمایی سه پارامتری پررتبه است و

$$T_{\tilde{}} = (T_1, T_2, T_3) = (\sum X_i^2, \sum X_i Y_i, \sum Y_i^2)$$

آماره‌ی بسنده‌ی می‌نیمال برای $(\sigma_1, \sigma_2, \rho)$ است که طبق لم ۲-۱ توزیع احتمال توام آن عبارتست از

$$f_{\theta_1, \theta_2, \theta_3}(t_1, t_2, t_3) = \left\{ e^{\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2 + \theta_3 t_3 + Q_0(\theta)} \right\} h_0(t_{\tilde{}})$$

که در آن

$$\theta_3 = \frac{-1}{2(1-\rho)^2 \sigma_2^2} \text{ و } \theta_2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2 \sigma_1 \sigma_2} \text{ و } \theta_1 = \frac{-1}{2(1-\rho)^2 \sigma_1^2}$$

یعنی توزیع $T_{\tilde{}} = (T_1, T_2, T_3)$ به یک خانواده نمایی سه پارامتری پررتبه متعلق است. توجه کنید که آزمون فرض

$$H_0: \rho \leq 0 \text{ vs } H_1: \rho > 0$$

معادل آزمون فرض

$$H_0: \theta_3 \leq 0 \text{ vs } H_1: \theta_3 > 0$$

می‌باشد. همچنین روی مرز $\Theta_B = \{\theta_{\tilde{}} | \theta_1 < 0, \theta_2 < 0, \theta_3 = 0\}$ آماره (T_1, T_3) یک آماره بسنده

کامل است. با شرط روی (T_1, T_3) آزمون UMPU به اندازه α عبارتست از

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 & t_r > c(t_1, t_r) \\ 0 & t_r < c(t_1, t_r) \end{cases}$$

که در آن $c(t_1, t_r)$ بگونه‌ای انتخاب می‌شود که

$$P_{\theta_r=0}(T_r > c(t_1, t_r) | T_1 = t_1, T_r = t_r) = \alpha$$

از طرفی روی مرز $\rho = 0 \Leftrightarrow \theta_r = 0$ آماره (T_1, T_r) بسنده و کامل برای (σ_1, σ_r) است و آماره

$$\frac{T_r}{\sqrt{T_1 T_r}} = \frac{\sum \frac{X_i Y_i}{\sigma_1 \sigma_r}}{\sqrt{\sum \frac{X_i^2}{\sigma_1^2}, \sum \frac{Y_i^2}{\sigma_r^2}}}$$

یک آماره فرعی است (توزیع آن به (σ_1, σ_r) بستگی ندارد). پس طبق قضیه باسو تحت $\theta_r = 0$

آماره‌های (T_1, T_r) و $\frac{T_r}{\sqrt{T_1 T_r}}$ از یکدیگر مستقل هستند. بنابراین اگر $r = \frac{T_r}{\sqrt{T_1 T_r}}$ آنگاه آزمون

UMPU عبارتست از

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 & r > c \\ 0 & r < c \end{cases}$$

که در آن $\alpha = P_{\theta_r=0}(r > c)$. اما از مطالب چند متغیره‌ی پیوسته داریم که تحت $\theta_r = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$

$$Y = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t_{(n-2)}$$

و همچنین $\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ یک تابع صعودی از Γ است پس

$$\begin{aligned} r > c &\Leftrightarrow \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} > k, \alpha = P_{\theta_r=0}(r > c) = P_{\theta_r=0}\left(\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} > k\right) \\ &= P\left(t_{(n-2)} > k\right) \Rightarrow k = t_{1-\alpha}(n-2) \end{aligned}$$

بنابراین آزمون UMPU به اندازه α برابر است با

$$\varphi_{\circ}(t_{\circ}) = \begin{cases} 1 & \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} > t_{1-\alpha}(n-2) \\ 0 & \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} < t_{1-\alpha}(n-2) \end{cases}$$

■

مثال ۳-۲: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $X \sim P(\lambda)$ و $Y \sim P(\mu)$

آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به دست آورید

$$H_{\circ} : \lambda \geq \mu \text{ vs } H_1 : \lambda < \mu$$

حل:

$$\begin{aligned} f_{\lambda,\mu}(x,y) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = [e^{x \ln \lambda + y \ln \mu - (\lambda + \mu)}] \frac{1}{x! y!} \\ &= [e^{y \ln \frac{\mu}{\lambda} + (x+y) \ln \lambda - (\lambda + \mu)}] \frac{1}{x! y!} \end{aligned}$$

بنابراین $f_{\lambda,\mu}(x,y)$ به یک خانواده نمایی دو پارامتری پرتبه متعلق است و $T_{\circ} = (T_1, T_2) = (Y, X + Y)$ آماره بسنده‌ی می‌نیمال برای (μ, λ) است که طبق لم ۱-۲ توزیع احتمال توام آن عبارتست از

$$f_{\theta_1, \theta_2}(t_1, t_2) = \left\{ e^{\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2 + Q_{\circ}(\theta)} \right\} h_{\circ}(t_{\circ})$$

که در آن $\theta_1 = \ln \frac{\mu}{\lambda}$ و $\theta_2 = \ln \lambda$ یعنی توزیع $T_{\circ}$ به یک خانواده نمایی دو پارامتری پرتبه متعلق است.

$$H_{\circ} : \lambda \geq \mu \text{ vs } H_1 : \lambda < \mu$$

توجه کنید که آزمون فرض

$$H_{\circ} : \theta_1 \leq 0 \text{ vs } H_1 : \theta_1 > 0$$

معادل آزمون فرض

است. همچنین روی مرز $\Theta_B = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 = 0, \theta_2 \in R\}$ (یا $\lambda = \mu$) آماره $T_2 = X + Y$ یک

آماره بسنده‌ی کامل است. با شرط روی T_2 آزمون UMPU به اندازه α عبارتست از

$$\varphi_{\circ}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & t_1 > c(t_2) \\ \gamma(t_2) & t_1 = c(t_2) \\ 0 & t_1 < c(t_2) \end{cases}$$

که در آن $c(t_2)$ و $\gamma(t_2)$ بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$E_{\theta=\circ}[\varphi_{\circ}(T_1, T_2) | T_2 = t_2] = P_{\theta=\circ}(T_1 > c(t_2) | T_2 = t_2) + \gamma(t_2)P(T_1 = c(t_2) | T_2 = t_2) = \alpha$$

از طرفی

$$P(T_1 = y | T_2 = t_2) = P(Y = y | X + Y = t_2) = \binom{t_2}{y} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^y \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{t_2 - y}$$

و بنابراین روی مرز $\lambda = \mu \Leftrightarrow \theta_1 = \circ$ داریم که

$$P_{\theta=\circ}(T_1 = y | T_2 = t_2) = \binom{t_2}{y} \left(\frac{1}{2} \right)^{t_2} \quad y = 0, \dots, t_2$$

بنابراین $\gamma(t_2)$ و $c(t_2)$ بایستی بگونه‌ای انتخاب شوند که

$$\gamma(t_2) \binom{t_2}{c(t_2)} \left(\frac{1}{2} \right)^{t_2} + \sum_{y=c(t_2)+1}^{t_2} \binom{t_2}{y} \left(\frac{1}{2} \right)^{t_2} = \alpha$$

■

مثال ۲-۴: فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند و $X \sim B(m, p_1)$ و

$Y \sim B(n, p_2)$ آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به دست آورید

$$H_{\circ} : p_1 \leq p_2 \text{ vs } H_1 : p_1 > p_2$$

حل:

$$\begin{aligned} f_{p_1, p_2}(x, y) &= \binom{m}{x} p_1^x q_1^{m-x} \binom{n}{y} p_2^y q_2^{n-y} \\ &= \binom{m}{x} \binom{n}{y} \left(\frac{p_1}{q_1} \right)^x \left(\frac{p_2}{q_2} \right)^y q_1^m q_2^n \\ &\propto e^{x \ln \frac{p_1}{q_1} + y \ln \frac{p_2}{q_2} + m \ln q_1 + n \ln q_2} \\ &= e^{x \ln \frac{p_1}{q_1} + y \ln \frac{p_2}{q_2} + y \ln \frac{p_1}{q_1} - y \ln \frac{p_1}{q_1} + m \ln q_1 + n \ln q_2} \end{aligned}$$

$$= e^{y \ln \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2} + (x+y) \ln \frac{p_1}{q_1} + (m \ln q_1 + n \ln q_2)}$$

بنابراین $f_{p_1, p_2}(x, y)$ به یک خانواده نمایی دو پارامتری پرتبه متعلق است و $T = (T_1, T_2) = (Y, X + Y)$ آماره‌ی بسنده‌ی می‌نیمال برای (p_1, p_2) است که طبق لم ۱-۲ توزیع احتمال آن عبارتست از

$$f_{\theta_1, \theta_2}(t_1, t_2) = \left[e^{\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2 + Q_0(\theta)} \right] h_0(t)$$

که در آن

$$\theta_2 = \ln \frac{p_1}{q_1} \text{ و } \theta_1 = \ln \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}$$

یعنی توزیع T به یک خانواده نمایی دو پارامتری پرتبه متعلق است.

توجه کنید که آزمون فرض $H_1: p_1 > p_2$ vs $H_0: p_1 \leq p_2$ معادل آزمون فرض $H_1: \theta_1 < 0$ vs $H_0: \theta_1 \geq 0$ است.

$$\left(p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow q_1 \geq q_2 \Leftrightarrow p_2 q_1 \geq p_1 q_2 \Leftrightarrow \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2} \geq 1 \Leftrightarrow \ln \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2} \geq 0 \right)$$

همچنین روی مرز $\Theta_B = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 = 0, \theta_2 \in R\}$ (یا $p_1 = p_2$) آماره $T_2 = X + Y$ یک آماره بسنده‌ی کامل است.

با شرط روی T_2 آزمون UMPU به اندازه α عبارتست از

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & t_1 < c(t_2) \\ \gamma(t_2) & t_1 = c(t_2) \\ 0 & t_1 > c(t_2) \end{cases}$$

که در آن $c(t_2)$ و $\gamma(t_2)$ بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$\begin{aligned} E_{\theta_1=0} &= [\varphi_0(T_1, T_2) | T_2 = t_2] \\ &= P_{\theta_1=0}(T_1 < c(t_2) | T_2 = t_2) + \gamma(t_2) P_{\theta_1=0}(T_1 = c(t_2) | T_2 = t_2) = \alpha \end{aligned}$$

از طرفی روی مرز $\theta_1 = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$ داریم که

$$P_{\theta_1=0}(T_1 = y | T_r = t_r) = P_{p_1=p_r}(Y = y | X + Y = t_r) = \frac{\binom{n}{y} \binom{m}{t_r - y}}{\binom{n+m}{t_r}} \quad y = 0, \dots, t_r$$

بنابراین $\gamma(t_r)$ و $c(t_r)$ بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$\gamma(t_r) \frac{\binom{n}{c(t_r)} \binom{m}{t_r - c(t_r)}}{\binom{n+m}{t_r}} + \sum_{y=0}^{c(t_r)-1} \frac{\binom{n}{y} \binom{m}{t_r - y}}{\binom{n+m}{t_r}} = \alpha$$

■

ب- آزمون فرض $H_0: \theta_1^{(1)} \leq \theta_1 \leq \theta_1^{(r)}$ vs $H_1: \theta_1 < \theta_1^{(1)}$ or $\theta_1 > \theta_1^{(r)}$

فرض کنید بخواهیم آزمون $H_0: \theta_1^{(1)} \leq \theta_1 \leq \theta_1^{(r)}$ vs $H_1: \theta_1 < \theta_1^{(1)}$ or $\theta_1 > \theta_1^{(r)}$ را انجام دهیم.

براساس توزیع شرطی T_1 به شرط $T_2, \dots, T_k$ (فرمول (*)) که تنها به پارامتر θ_1 بستگی دارد و با توجه به مطالب خوانده شده قبلی یک آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون H_0 در مقابل

H_1 به شرط $T_2, \dots, T_k$ عبارتست از

$$\varphi_0(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1 & t_1 < c_1(t_2, \dots, t_k) \text{ or } t_1 > c_r(t_2, \dots, t_k) \\ \gamma_i(t_2, \dots, t_k) & t_1 < c_i(t_2, \dots, t_k) \quad i = 1, 2 \\ 0 & c_1(t_2, \dots, t_k) < t_1 < c_r(t_2, \dots, t_k) \end{cases} \quad (C)$$

که در آن c_1, c_2, c_r و γ_1, γ_2 بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$\begin{aligned} E_{\theta_1^{(1)}}[\varphi_0(T_1, \dots, T_k) | T_i = t_i \quad i = 2, \dots, k] \\ = E_{\theta_1^{(r)}}[\varphi_0(T_1, \dots, T_k) | T_i = t_i \quad i = 2, \dots, k] = \alpha \end{aligned} \quad (D)$$

در زیر نشان می‌دهیم که φ_0 در مسئله غیرشرطی یک آزمون UMPU به اندازه α در آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

می‌دانیم که تابع توان هر آزمون (در خانواده نمایی) یک تابع پیوسته است. بنابراین طبق قضیه ۱-۲ کافیت نشان دهیم که φ_0 یک آزمون به اندازه α و $1-\alpha$ شبیه روی مرز $\Theta_B = \{\theta \mid \theta_1 = \theta_1^{(1)} \text{ or } \theta_1^{(2)}\}$ است.

اولاً طبق رابطه (D)، φ_0 دارای ساختار نیمین و در نتیجه یک آزمون $1-\alpha$ شبیه روی مرز Θ_B است. ثانیاً فرض کنید φ هر آزمون نا اریب به اندازه α برای آزمون H_0 در مقابل H_1 باشد بنابراین φ یک آزمون $1-\alpha$ شبیه روی مرز Θ_B است. حال چون $(T_1, \dots, T_k)$ یک آماره‌ی کامل و در نتیجه کامل کراندار برای $\theta \in \Theta_B$ است بنابراین طبق قضیه ۲-۲ φ دارای ساختار نیمین است و در نتیجه

$$\begin{aligned} E_{\theta_1^{(1)}}[\varphi(T)] &= [\varphi(T) \mid T_i = t_i \quad i = 1, \dots, k] \\ &= E_{\theta_1^{(2)}}[\varphi(T) \mid T_i = t_i \quad i = 1, \dots, k] = \alpha \quad \text{for almost all } t_1, t_2, \dots, t_k \quad (4) \end{aligned}$$

همچنین در بین تمام آزمونهای φ که در رابطه (۴) صدق می‌کنند آزمون φ_0 در (C) دارای بیشترین توان شرطی برای $\theta_1 > \theta_1^{(2)}$ یا $\theta_1 < \theta_1^{(1)}$ و دارای کمترین توان شرطی برای $\theta_1^{(1)} < \theta_1 < \theta_1^{(2)}$ است. بنابراین برای $\theta_1 > \theta_1^{(2)}$ یا $\theta_1 < \theta_1^{(1)}$ داریم که

$$\begin{aligned} E_{\theta}[\varphi_0(T)] &= E_{\theta} \{ E_{\theta_1}[\varphi_0(T) \mid T_i = t_i \quad i = 1, \dots, k] \} \\ &\geq E_{\theta} \{ E_{\theta_1}[\varphi(T) \mid T_i = t_i \quad i = 1, \dots, k] \} \\ &= E_{\theta}[\varphi(T)] \quad \forall \theta \in \Theta_1 \end{aligned}$$

که این نشان می‌دهد که φ_0 یک آزمون $1-\alpha$ شبیه است. همچنین برای هر $\theta_1^{(1)} \leq \theta_1 \leq \theta_1^{(2)}$ داریم که

$$E_{\theta}[\varphi_0(T)] = E_{\theta} \{ E_{\theta_1}[\varphi_0(T) \mid T_i = t_i \quad i = 1, \dots, k] \} \leq E_{\theta} \{ \alpha \} = \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

و در نتیجه $\sup_{\theta \in \Theta_0} E_{\theta}[\varphi_0(T)] = \alpha$ یعنی $\varphi_0(T)$ یک آزمون به اندازه α است. بنابراین طبق قضیه

۱-۲، φ_0 یک آزمون UMPU به اندازه α در آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

مثال ۲-۵: فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $X \sim P(\lambda)$ و $Y \sim P(\mu)$

آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به دست آورید

$$H_0: \mu \leq \lambda \leq 2\mu \text{ vs } H_1: \lambda < \mu \text{ or } \lambda > 2\mu$$

حل: در مثال ۲-۳ دیدیم که

$$f_{\lambda, \mu}(x, y) = [e^{\frac{y \ln \mu}{\lambda} + (x+y) \ln \lambda - (\lambda + \mu)}] \frac{1}{x! y!}$$

و در نتیجه $(T_1, T_2) = (Y, X + Y)$ آماره‌ی بسنده‌ی می‌نیمال با توزیع احتمال توام زیر بود

$$f_{\theta_1, \theta_2}(t_1, t_2) = [e^{\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2 + Q_0(\theta)}] h_0(t)$$

که در آن $\theta_1 = \ln \frac{\mu}{\lambda}$ و $\theta_2 = \ln \lambda$

بنابراین آزمون فرض $H_0: \mu \leq \lambda \leq 2\mu \text{ vs } H_1: \lambda < \mu \text{ or } \lambda > 2\mu$

معادل آزمون فرض $H_0: -\ln 2 \leq \theta_1 \leq 0 \text{ vs } H_1: \theta_1 < -\ln 2 \text{ or } \theta_1 > 0$

است. همچنین روی مرز $\Theta_B = \{(\theta_1, \theta_2) | \theta_1 = 0 \text{ or } -\ln 2, \theta_2 \in R\}$ (یا $\lambda = \mu$ یا $\lambda = 2\mu$) آماره

$$T_2 = X + Y$$
 یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل است.

با شرط روی T_2 آزمون UMPU به اندازه α عبارتست از

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & t_1 < c_1(t_2) \text{ or } t_1 > c_2(t_2) \\ \gamma_i(t_2) & \gamma_i = c_i(t_2) \quad i = 1, 2 \\ 0 & c_1(t_2) < t_1 < c_2(t_2) \end{cases}$$

که در آن c_1, c_2, γ_1 و γ_2 بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$E_{\theta_1 = -\ln 2}[\varphi_0(T) | T_2 = t_2] = E_{\theta_1 = 0}[\varphi_0(T) | T_2 = t_2] = \alpha$$

با توجه به مثال ۲-۳ داریم که (چون $(T_1 | T_2 = t_2) \sim B\left(t_2, \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)$)

$$\text{if } \theta_1 = 0 \Rightarrow \mu = \lambda \Rightarrow P_{\theta_1 = 0}(T_1 = y | T_2 = t_2) = \binom{t_2}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{t_2} \quad y = 0, \dots, t_2$$

$$\text{if } \theta_1 = -\ln 2 \Rightarrow \lambda = 2\mu \Rightarrow P_{\theta_1 = -\ln 2}(T_1 = y | T_2 = t_2) = \binom{t_1}{y} \left(\frac{1}{3}\right)^y \left(\frac{2}{3}\right)^{t_2 - y} \quad y = 0, \dots, t_2$$

بنابراین c_1, c_2, γ_1 و γ_2 بگونه‌ای انتخاب شوند که در دستگاه معادلات زیر صدق کنند:

$$\left[\sum_{y=0}^{c_1-1} \binom{t_r}{y} \left(\frac{1}{r}\right)^{t_r} + \sum_{y=c_r+1}^{t_r} \binom{t_r}{y} \left(\frac{1}{r}\right)^{t_r} + \gamma_1 \binom{t_r}{c_1} \left(\frac{1}{r}\right)^{t_r} + \gamma_r \binom{t_r}{c_r} \left(\frac{1}{r}\right)^{t_r} = \alpha \right. \\ \left. \sum_{y=0}^{c_1-1} \binom{t_r}{y} \left(\frac{1}{r}\right)^y \left(\frac{r}{3}\right)^{t_r-y} + \sum_{y=c_r+1}^{t_r} \binom{t_r}{y} \left(\frac{1}{r}\right)^y \left(\frac{r}{3}\right)^{t_r-y} + \gamma_1 \binom{t_r}{c_1} \left(\frac{1}{r}\right)^{c_1} \left(\frac{r}{3}\right)^{t_r-c_1} \right. \\ \left. + \gamma_r \binom{t_r}{c_r} \left(\frac{1}{r}\right)^{c_r} \left(\frac{r}{3}\right)^{t_r-c_r} = \alpha \right]$$

■

ج- آزمون فرض $H_0: \theta_1 = \theta_0$ vs $H_1: \theta_1 \neq \theta_0$

فرض کنید بخواهیم آزمون $H_0: \theta_1 = \theta_0$ vs $H_1: \theta_1 \neq \theta_0$ را انجام دهیم. همانند قبل آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون H_0 در مقابل H_1 براساس توزیع شرطی T_1 به شرط $T_2, \dots, T_k$ عبارت از ϕ_0 بفرم آزمون دوطرفه (C) می‌باشد که در آن c_1, c_r, γ_1 و γ_r بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$E_{\theta_0}[\phi_0(T_1) | T_i = t_i, i = 2, \dots, k] = \alpha, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_1} E_{\theta}[\phi_0(T_1) | T_i = t_i, i = 2, \dots, k] \Big|_{\theta_1 = \theta_0} = 0$$

اما به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} E_{\theta}[\phi_0(T_1)] \Big|_{\theta_1 = \theta_0} = 0 \Leftrightarrow E_{\theta}[(\phi_0(T_1) - \alpha)T_1] \Big|_{\theta_1 = \theta_0} = 0$$

بنابراین شرایط بالا به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$E_{\theta_0}[\phi_0(T_1) | T_i = t_i, i = 2, \dots, k] = \alpha, \quad E_{\theta}[(\alpha - \phi_0(T_1))T_1 | T_i = t_i, i = 2, \dots, k] = 0 \quad (E)$$

در زیر نشان می‌دهیم که ϕ_0 در مسئله غیرشرطی یک آزمون UMPU به اندازه α در آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

طبق رابطه (E)، ϕ_0 دارای ساختار نیمین و در نتیجه یک آزمون $1-\alpha$ شبیه روی مرز $\Theta_B = \{\theta \mid \theta_1 = \theta_0\}$ است. حال اگر ϕ هر آزمون ناریب به اندازه α باشد آنگاه ϕ یک آزمون $1-\alpha$ شبیه روی مرز Θ_B است و چون $(T_2, \dots, T_k)$ یک آماره کامل کراندار برای $\theta \in \Theta_B$ است

بنابراین طبق قضیه ۳-۲، φ دارای ساختار نیمین است و در نتیجه چون φ نااریب است پس φ در روابط (E) صدق می‌کند. آزمون φ_0 در (C) دارای بیشترین توان شرطی برای هر $\theta \in \Theta$ است و بنابراین

$$\begin{aligned} E_{\theta}[\varphi_0(T)] &= E_{\theta} \left\{ E_{\theta}[\varphi_0(T) | T_i = t_i, i = 1, \dots, k] \right\} \\ &\geq E_{\theta} \left\{ E_{\theta}[\varphi_0(T) | T_i = t_i, i = 1, \dots, k] \right\} = E_{\theta}[\varphi(T)] \quad \forall \theta \in \Theta \end{aligned}$$

$$E_{\theta_0}[\varphi_0(T)] = E_{\theta} \left\{ E_{\theta_0}[\varphi_0(T) | T_i = t_i, i = 1, \dots, k] \right\} = E_{\theta}[\alpha] = \alpha$$

بنابراین φ_0 یک آزمون $1-\alpha$ UMP شبیه به اندازه α برای H_0 در مقابل H_1 است و در نتیجه طبق قضیه (۱)، φ_0 یک آزمون UMPU به اندازه α برای آزمون H_0 در مقابل H_1 است.

مثال ۲-۶: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ باشد که $\mu \in R$ و $\sigma > 0$ هر دو نامعلوم هستند. آزمون UMPU برای انجام آزمون زیر را به دست آورید

$$H_0: \mu = 0 \text{ vs } H_1: \mu \neq 0$$

حل: در مثال ۲-۱ دیدیم که $(T_1, T_2) = (\sum X_i, \sum X_i^2)$ آماره بسنده می‌نیمال برای (μ, σ^2) با چگالی توأم زیر بود

$$f_{\theta_1, \theta_2}(t_1, t_2) = \left[e^{\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2 + Q_0(\theta)} \right] h_0(t)$$

که در آن $\theta_1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$ و $\theta_2 = \frac{-1}{2\sigma^2}$. بنابراین آزمون فرض $H_0: \mu = 0 \text{ vs } H_1: \mu \neq 0$ معادل آزمون

فرض $H_0: \theta_1 = 0 \text{ vs } H_1: \theta_1 \neq 0$ است. با شرط روی $T_2 = t_2$ (که یک آماره بسنده کامل روی

مرز $\Theta_B = \{\theta | \theta_1 = 0\}$ است) آزمون UMPU به اندازه α عبارت است از

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & t_1 < c_1(t_2) \text{ or } t_1 > c_2(t_2) \\ 0 & c_1(t_2) < t_1 < c_2(t_2) \end{cases}$$

که در آن c_1 و c_2 بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که

$$E_{\theta=0}[\varphi_0(T) | T_2 = t_2] = \alpha, \quad E_{\theta=0}[(\alpha - \varphi_0(T))T_1 | T_2 = t_2] = 0$$

از طرفی روی مرز $\mu = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = 0$ آماره T_1 برای σ^2 بسنده و کامل است و آماره $W = \frac{T_1}{\sqrt{T_2}}$

یک آماره فرعی است که توزیع آن نسبت به صفر متقارن است. پس T_2 و W از یکدیگر مستقل

هستند و در نتیجه آزمون UMPU عبارتست از

$$\phi_0(w) = \begin{cases} 1 & w < c_1 \text{ or } w > c_2 \\ 0 & c_1 < w < c_2 \end{cases}$$

که در آن

$$E_{\theta_1=0}[\phi_0(W)] = \alpha, \quad E_{\theta_1=0}[W \phi_0(W)] = \alpha E_{\theta_1=0}(W) = 0$$

متقارن نسبت به صفر

$$\Leftrightarrow P_{\theta_1=0}(c_1 < W < c_2) = 1 - \alpha, \quad E_{\theta_1=0}[W(1 - \phi_0(W))] = 0 - E_{\theta_1=0}[W \phi_0(W)] = 0$$

$$\Leftrightarrow P_{\theta_1=0}(c_1 < W < c_2) = 1 - \alpha, \quad \int_{c_1}^{c_2} w f_W(w) dw = 0$$

(چون f نسبت به صفر متقارن است و $wf(w)$ یک تابع فرد است)

$$\Leftrightarrow P_{\theta_1=0}(c_1 < W < c_2) = 1 - \alpha, \quad c_1 = -c_2$$

$$\Leftrightarrow P_{\theta_1=0}(|W| < c) = 1 - \alpha$$

پس آزمون فوق معادل آزمون زیر است

$$\phi_0(w) = \begin{cases} 1 & |w| > c \\ 0 & |w| < c \end{cases}$$

که در آن $P_{\theta_1=0}(|W| > c) = \alpha$. اگر قرار دهیم

$$T = \frac{\sqrt{n} \bar{X}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2}} = \frac{\sqrt{(n-1)n} W}{\sqrt{(1-n) |W|^2}} \sim t_{(n-1)} \quad (H_0 \text{ تحت فرض})$$

پس $|T| = \frac{\sqrt{(n-1)n} |W|}{\sqrt{(1-n) |W|^2}}$ چون $|T|$ یک تابع صعودی از $|W|$ است پس آزمون فوق به

صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1 & |T| > c^* \\ 0 & |T| < c^* \end{cases}$$

$$c^* = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad \text{و} \quad T = \frac{\sqrt{n} \bar{X}}{S}$$

که در آن



بخش ۳: روش تبدیل آزمونهای شرطی به غیرشرطی در حالت چند پارامتری

در بخش قبل مشاهده کردید که در حالت چند پارامتری، برای انجام آزمونهای مختلف یک و دو طرفه روی θ_1 ، می‌توان آزمون UMPU را که به صورت شرطی است بوسیله قضیه باسو به یک آزمون غیرشرطی تبدیل کرد و تابع آزمون را به صورت غیرشرطی به دست آورد. حالت کلی این روش برای انواع آزمونها در قضیه زیر آورده شده است.

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از خانواده توزیعهای نمایی k پارامتری زیر باشد

$$f(\underline{x}) = \left\{ e^{\sum_{i=1}^k \theta_i \left(\sum_{j=1}^n d_i(x_j) \right) + Q(\theta)} \right\} \prod_{j=1}^n h(x_j)$$

که در آن

$$(T_1, T_2, \dots, T_k) = \left(\sum_{j=1}^n d_1(X_j), \dots, \sum_{j=1}^n d_k(X_j) \right)$$

یک آماره‌ی بسنده‌ی توام برای $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ است که دارای توزیعی از خانواده نمایی به صورت زیر است

$$f_{T_1, \dots, T_k}(t_1, \dots, t_k) = e^{\theta_1 t_1 + \sum_{i=2}^k \theta_i t_i + Q_0(\underline{\theta})} h_0(t_1, \underline{t}) \quad (1)$$

که در آن $\underline{t} = (t_2, \dots, t_k)$

قضیه ۳-۱: در خانواده توزیعهای (۱) فرض کنید $V = h(T_1, T_2)$ باشد.

الف- در آزمون $H_1^{(1)}: \theta_1 > \theta_0$ vs $H_0^{(1)}: \theta_1 \leq \theta_0$ فرض کنید برای $\theta_1 = \theta_0$ ، V از T_2 مستقل باشد و V یک تابع صعودی از t_1 برای هر T_2 باشد. در این صورت آزمون UMPU به اندازه α برای انجام این آزمون عبارتست از

$$\varphi_1(v) = \begin{cases} 1 & v > c_0 \\ \gamma_0 & v = c_0 \\ 0 & v < c_0 \end{cases}$$

که در آن c_0 و γ_0 به t_2 بستگی ندارند و بگونه‌ای تعیین می‌شوند که $E_{\theta_0}[\varphi_1(V)] = \alpha$.

ب- در آزمون $H_1^{(2)}: \theta < \theta_1^{(1)}$ or $\theta > \theta_1^{(2)}$ vs $H_0^{(2)}: \theta_1^{(1)} < \theta_1 \leq \theta_1^{(2)}$ فرض کنید برای $\theta_1 = \theta_1^{(1)}$ و $\theta_1 = \theta_1^{(2)}$ ، V از T_2 مستقل باشد و V یک تابع صعودی از t_1 برای هر T_2 باشد. در این صورت آزمون UMPU به اندازه α برای انجام این آزمون عبارت است از

$$\varphi_2(v) = \begin{cases} 1 & v < c_1 \text{ or } v > c_2 \\ \gamma_i & v = c_i \quad i = 1, 2 \\ 0 & c_1 < v < c_2 \end{cases}$$

که در آن $c_i, \gamma_i, i = 1, 2$ به t_2 بستگی ندارند و بگونه‌ای تعیین می‌شوند که

$$E_{\theta_1^{(1)}}[\varphi_2(V)] = E_{\theta_1^{(2)}}[\varphi_2(V)] = \alpha$$

ج- در آزمون $H_1^{(3)}: \theta_1 \neq \theta_0$ vs $H_0^{(3)}: \theta_1 = \theta_0$ فرض کنید برای $\theta_1 = \theta_0$ ، V از T_2 مستقل باشد و $v = h(t_1, t_2) = a(t_2)t_1 + b(t_2)$ که $a(t_2) > 0$ (تابعی خطی صعودی از t_1 باشد) در این صورت آزمون UMPU به اندازه α برای انجام این آزمون عبارت است از $\varphi_3(v) = \varphi_2(v)$ که در آن $C_i, \gamma_i, i = 1, 2$ به t_2 بستگی ندارند و بگونه‌ای تعیین می‌شوند که

$$E_{\theta_0}[\varphi_3(V)] = \alpha, \quad E_{\theta_0}[V \varphi_3(V)] = \alpha E_{\theta_0}(V)$$

اثبات: الف- آزمون UMPU برای انجام آزمون فوق برابر است با

$$\varphi_{\theta_0}(t_1, \underline{t}) = \begin{cases} 1 & t_1 > c_{\circ}^*(\underline{t}) \\ \gamma_{\circ}^*(\underline{t}) & t_1 = c_{\circ}^*(\underline{t}) \\ 0 & t_1 < c_{\circ}^*(\underline{t}) \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\theta_0}(T_1 > c_{\circ}^*(\underline{t}) | \underline{t}) + \gamma_{\circ}^*(\underline{t}) P_{\theta_0}(T_1 = c_{\circ}^*(\underline{t}) | \underline{t}) \\ &= P_{\theta_0}\left(\underbrace{h(T_1, \underline{t})}_{V} > c_{\circ}(\underline{t}) | \underline{t}\right) + \gamma_{\circ}^*(\underline{t}) P_{\theta_0}(h(T_1, \underline{t}) = c_{\circ}(\underline{t}) | \underline{t}) \\ &= P_{\theta_0}(V > c_{\circ}) + \gamma_{\circ} P_{\theta_0}(V = c_{\circ}) \end{aligned}$$

چون برای $\theta_1 = \theta_0$ ، V از T_1 مستقل است پس آزمون فوق با آزمون $\varphi_1(V)$ معادل است.

ب- اثبات مشابه (الف) است (تمرین)

ج- آزمون UMPU برای انجام آزمون فوق برابر است با

$$\varphi_{\theta_0}(t_1, \underline{t}) = \begin{cases} 1 & t_1 < c_1^*(\underline{t}) \text{ or } t_1 > c_r^*(\underline{t}) \\ \gamma_i^*(\underline{t}) & t_1 = c_i^*(\underline{t}) \quad i = 1, r \\ 0 & c_1^*(\underline{t}) < t_1 < c_r^*(\underline{t}) \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \alpha &= E_{\theta_0}[\varphi_{\theta_0}(T_1, \underline{t}) | \underline{t}] \quad , \quad E_{\theta_0}[\varphi_{\theta_0}(T_1, \underline{t}) T_1 | \underline{t}] = \alpha E_{\theta_0}[T_1 | \underline{t}] \\ \Leftrightarrow \alpha &= E_{\theta_0}[\varphi_{\theta_0}(V, \underline{t}) | \underline{t}] \quad , \quad E_{\theta_0}[\varphi_{\theta_0}(V, \underline{t}) T_1 | \underline{t}] = \alpha E_{\theta_0}[T_1 | \underline{t}] \\ \Leftrightarrow \alpha &= E_{\theta_0}[\varphi_r(V)] \quad , \quad E_{\theta_0}\left[\varphi_{\theta_0}(V, \underline{t}) \frac{V - b(\underline{t})}{a(\underline{t})} \middle| \underline{t}\right] = \alpha E_{\theta_0}\left[\frac{V - b(\underline{t})}{a(\underline{t})} \middle| \underline{t}\right] \\ \Leftrightarrow \alpha &= E_{\theta_0}[\varphi_r(V)] \quad , \quad E_{\theta_0}[\varphi_{\theta_0}(V, \underline{t}) V | \underline{t}] = \alpha E_{\theta_0}[V | \underline{t}] \\ \Leftrightarrow \alpha &= E_{\theta_0}[\varphi_r(V)] \quad , \quad E_{\theta_0}[\varphi_r(V) V] = \alpha E_{\theta_0}[V] \end{aligned}$$

چون برای $\theta_1 = \theta_0$ ، V از T_1 مستقل است بنابراین آزمونهای φ_r و φ_{θ_0} با یکدیگر معادلند.



مثال ۳-۱: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشند. آزمون UMPU به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به دست آورید.

$$H_0: \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \text{ vs } H_1: \sigma < \sigma_1 \text{ or } \sigma > \sigma_2$$

حل:

$$\begin{aligned} f_{\mu, \sigma^2}(x) &= \left(\sqrt{\pi} \sigma \right)^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2} \sum x_i + \frac{n\mu^2}{\sigma^2} - \frac{n}{2} \ln(\pi \sigma^2)} \end{aligned}$$

بنابراین $f_{\mu, \sigma^2}(x)$ به یک خانواده نمایی دو پارامتری پرتبه متعلق است و $(T_1, T_2) = (\sum X_i^2, \sum X_i)$ آماره‌ی بسنده‌ی می‌نیمال برای (μ, σ^2) است که طبق لم ۲-۱ توزیع احتمال توام آن عبارت است از

$$f_{\theta_1, \theta_2}(t_1, t_2) = \left\{ e^{\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2 + Q_0(\theta)} \right\} h_0(t)$$

که در آن $\theta_1 = \frac{-1}{2\sigma^2}$ و $\theta_2 = \frac{\mu}{\sigma^2}$. یعنی توزیع (T_1, T_2) به یک خانواده نمایی دو پارامتری پرتبه

متعلق است. توجه کنید که آزمون فرض $H_0: \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \text{ vs } H_1: \sigma < \sigma_1 \text{ or } \sigma > \sigma_2$

معادل آزمون فرض $H_0: \theta_1^{(1)} \leq \theta_1 \leq \theta_1^{(2)} \text{ vs } H_1: \theta < \theta_1^{(1)} \text{ or } \theta > \theta_1^{(2)}$

$$\theta_1^{(1)} = -\frac{1}{2\sigma_1^2} \quad \text{و} \quad \theta_1^{(2)} = -\frac{1}{2\sigma_2^2} \quad \text{است که}$$

همچنین روی مرز $\Theta_B = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \mid \theta_1 = \theta_1^{(1)} \text{ or } \theta_1^{(2)}, \theta_2 \in R \right\}$ آماره $T_2 = \sum_{i=1}^n X_i$ یک آماره

بسنده کامل است. با شرط روی $T_2 = t_2$ آزمون UMPU به اندازه α عبارت است از

$$\varphi_0(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & t_1 < c_1(t_2) \text{ or } t_1 > c_2(t_2) \\ 0 & c_1(t_2) < t_1 < c_2(t_2) \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $V = T_1 - \frac{T_2^2}{n} = \sum (X_i - \bar{X})^2$ در این صورت روی مرز، V یک آماره فرعی است که از آماره‌ی بسنده و کامل T_2 مستقل است و همچنین برای هر t_2 ، V یک تابع صعودی از T_1 است. بنابراین آزمون UMPU فوق معادل آزمون زیر است

$$\varphi_0(v) = \begin{cases} 1 & v < c_1 \text{ or } v > c_2 \\ 0 & c_1 < v < c_2 \end{cases}$$

که در آن c_1 و c_2 بگونه‌ای تعیین می‌شوند که

$$E_{\theta^{(1)}}[\varphi_0(V)] = E_{\theta^{(2)}}[\varphi_0(V)] = \alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{\sigma_1}(c_1 < V < c_2) = 1 - \alpha = P_{\sigma_2}(c_1 < V < c_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{c_1/\sigma_1^2}^{c_2/\sigma_1^2} h_{n-1}(t) dt = 1 - \alpha \\ \int_{c_1/\sigma_2^2}^{c_2/\sigma_2^2} h_{n-1}(t) dt = 1 - \alpha \end{cases}$$

■

مثال ۲-۳: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_m$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ و $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ یک نمونه تصادفی از $N(\eta, \tau^2)$ باشند و این دو نمونه از یکدیگر مستقل باشند. آزمون UMPU به اندازه α را برای انجام آزمون زیر به دست آورید.

$$H_0: \frac{\tau^2}{\sigma^2} = \Delta_0 \text{ vs } H_1: \frac{\tau^2}{\sigma^2} \neq \Delta_0$$

که Δ_0 مقداری ثابت است.

حل:

$$\begin{aligned} f_{\mu, \eta, \sigma^2, \tau^2}(x, y) &= (\pi \sigma^2)^{-m/2} (\pi \tau^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2 - \frac{1}{2\tau^2} \sum y_i^2 + \frac{m\mu}{\sigma^2} \bar{x} + \frac{n\eta}{\tau^2} \bar{y} + \frac{m\mu^2}{\sigma^2} + \frac{n\eta^2}{\tau^2}} \\ &= e^{\left(-\frac{1}{2\tau^2} + \frac{1}{2\Delta_0\sigma^2} \right) \sum y_i^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum x_i^2 + \frac{1}{\Delta_0} \sum y_i^2 \right] + \frac{m\mu}{\sigma^2} \bar{x} + \frac{n\eta}{\tau^2} \bar{y} + Q(\mu, \eta, \sigma^2, \tau^2)} \end{aligned}$$

بنابراین $f_{\mu, \eta, \sigma^2, \tau^2}(x, y)$ به یک خانواده نمایی چهار پارامتری پر رتبه متعلق است و

$$T_{\sim} = (T_1, T_2, T_3, T_4) = \left(\sum Y_i^2, \sum X_i^2 + \frac{1}{\Delta_0} \sum Y_i^2, \bar{X}, \bar{Y} \right)$$

یک آماره‌ی بسنده‌ی می‌نیمال برای $(\mu, \eta, \sigma^2, \tau^2)$ است که طبق لم ۲-۱ توزیع احتمال توام آن عبارت است از

$$f_{\theta}(t) = \left\{ e^{\theta t_1 + \theta_2 t_2 + \theta_3 t_3 + \theta_4 t_4 + Q_{\theta}(t)} \right\} h_{\theta}(t)$$

که در آن

$$\theta_1 = -\frac{1}{2\tau^2} + \frac{1}{2\Delta_0\sigma^2}, \quad \theta_2 = \frac{-1}{2\sigma^2}, \quad \theta_3 = \frac{m\mu}{\sigma^2}, \quad \theta_4 = \frac{n\eta}{\tau^2}$$

یعنی توزیع T_{θ} به یک خانواده‌ی نمایی چهار پارامتری پر رتبه متعلق است. توجه کنید که آزمون

$$H_0: \frac{\tau^2}{\sigma^2} = \Delta_0 \text{ vs } H_1: \frac{\tau^2}{\sigma^2} \neq \Delta_0 \quad \text{فرض}$$

$$H_0: \theta_1 = 0 \text{ vs } H_1: \theta_1 \neq 0 \quad \text{معادل آزمون فرض}$$

است. همچنین روی مرز $\Theta_B = \{(\theta_1, \dots, \theta_4) \mid \theta_1 = 0, \theta_2 < 0, \theta_3 \in R, \theta_4 \in R\}$ آماره

$$T_{\theta} = (T_1, T_2, T_3) = \left(\sum X_i^2 + \frac{1}{\Delta_0} \sum Y_i^2, \bar{X}, \bar{Y} \right)$$

یک آماره‌ی بسنده‌ی کامل است. با شرط روی $T_{\theta} = t$ آزمون UMPU به اندازه α عبارت است از

$$\varphi_{\theta}(t_1, t) = \begin{cases} 1 & t_1 < c_1(t) \text{ or } t_1 > c_2(t) \\ 0 & c_1(t) < t_1 < c_2(t) \end{cases}$$

قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2 / \Delta_0}{\sum (X_i - \bar{X})^2 + \frac{1}{\Delta_0} \sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\frac{1}{\Delta_0} \sum Y_i^2 - \frac{n}{\Delta_0} \bar{Y}^2}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2 + \frac{1}{\Delta_0} \sum Y_i^2 - \frac{n}{\Delta_0} \bar{Y}^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\Delta_0} T_1 - \frac{n}{\Delta_0} T_4}{T_2 - nT_3 - \frac{n}{\Delta_0} T_4} \end{aligned}$$

در این صورت V به صورت یک تابع خطی صعودی از T_1 برای هر T_{θ} است. همچنین روی مرز داریم که

$$V = \frac{\frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma^2} \Delta_0}{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{\Delta_0 \sigma^2}} = \frac{W_1}{W_1 + W_2}$$

که در آن $W_1 \sim \chi^2_{(n-1)}$ و $W_2 \sim \chi^2_{(m-1)}$. بنابراین

$$V = \frac{W_1}{W_1 + W_2} \sim Be\left(\frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right)$$

یعنی V یک آماره فرعی است و از آماره بسنده و کامل T مستقل است. بنابراین آزمون UMPU فوق معادل آزمون زیر است

$$\varphi_0(v) = \begin{cases} 1 & v < c_1^* \text{ or } v > c_2^* \\ 0 & c_1^* < v < c_2^* \end{cases}$$

که در آن c_1 و c_2 بگونه‌ای تعیین می‌شوند که

$$E_{\theta_1=0}[\varphi_0(V)] = \alpha, \quad E_{\theta_1=0}[V \varphi_0(V)] = \alpha E_{\theta_1=0}[V] = \alpha \left(\frac{n-1}{m+n-2} \right)$$

اگر $h_{k,\ell}(t)$ تابع چگالی توزیع $Be(k, \ell)$ باشد، با توجه به آنکه

$$t h_{\frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}}(t) = \frac{n-1}{m+n-2} h_{\frac{n+1}{2}, \frac{m-1}{2}}(t)$$

بنابراین شرایط فوق معادل هستند با

$$\int_{c_1}^{c_2} h_{\frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}}(t) dt = 1 - \alpha \quad (1)$$

$$\frac{n-1}{m+n-2} - \int_{c_1}^{c_2} h_{\frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}}(t) dt = \alpha \left(\frac{n-1}{m+n-2} \right) \Leftrightarrow \int_{c_1}^{c_2} h_{\frac{n+1}{2}, \frac{m-1}{2}}(t) dt = 1 - \alpha \quad (2)$$

و c_1 و c_2 از حل دستگاه معادلات (۱) و (۲) حاصل می‌شوند.



$$V^* = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2 / \Delta_0 (n-1)}{\sum (X_i - \bar{X})^2 / (m-1)}$$

توجه: توجه کنید در آزمون فرض فوق نمی‌توان از آماره معمول

که دارای توزیع $F_{(n-1, m-1)}$ روی مرز Θ_B است استفاده کرد زیرا

$$V^* = \frac{(\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2) / \Delta_0 (n-1)}{\left(\left(\sum X_i^2 + \frac{1}{\Delta_0} \sum Y_i^2 \right) - n\bar{X}^2 - \frac{1}{\Delta_0} \sum Y_i^2 \right) / (m-1)} = \frac{(T_1 - nT_2^2) / \Delta_0 (n-1)}{\left(T_2 - nT_2^2 - \frac{T_1}{\Delta_0} \right) / (m-1)}$$

بنابراین V یک تابع خطی از T_1 است. اما V^* یک تابع صعودی از T_1 است و می‌توان از آن در

آزمونهای دیگر به غیر از آزمون $H_1: \theta_1 \neq 0$ vs $H_0: \theta_1 = 0$ استفاده کرد.



فصل ۷

رابطه آزمون فرض

و فاصله اطمینان

بخش ۱: رابطه آزمون فرض و فاصله اطمینان

در مبحث فاصله اطمینان دیدیم که $S(X) = (L(X), U(X))$ و $S(X) = (L(X), b)$ و $S(X) = (a, U(X))$ را به ترتیب یک خانواده از فواصل اطمینان دو طرفه و یک طرفه سطح $1-\alpha$ برای θ گویند هرگاه

$$P(\theta \in S(X)) = 1-\alpha$$

در این بخش نشان می‌دهیم که فاصله اطمینان سطح $1-\alpha$ برای θ برابر ناحیه پذیرش یک آزمون فرض به اندازه α است و در مورد خواص بهینگی فواصل اطمینان حاصله از یک آزمون فرض بهینه بحث خواهیم کرد.

قضیه ۱-۱: برای هر $\theta_0 \in \Theta$ فرض کنید که $A(\theta_0)$ ناحیه پذیرش یک آزمون به اندازه α برای آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ باشد یعنی

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \notin A(\theta_0) \\ 0 & x \in A(\theta_0) \end{cases}$$

برای هر $x \in \mathcal{X}$ مجموعه $S(x)$ در فضای پارامتری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S(x) = \{\theta_0 : x \in A(\theta_0)\}$$

در اینصورت فاصله تصادفی $S(X)$ یک خانواده از فواصل اطمینان $1-\alpha$ برای θ است. برعکس فرض کنید $S(X)$ یک خانواده از فواصل اطمینان $1-\alpha$ برای θ باشد. برای هر $\theta_0 \in \Theta$ تعریف می‌کنیم

$$A(\theta_0) = \{x : \theta_0 \in S(x)\}$$

در این صورت $A(\theta_0)$ ناحیه پذیرش یک آزمون به اندازه α برای انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ است. **اثبات:** ابتدا توجه کنید که

$$\theta \in S(x) \Leftrightarrow x \in A(\theta) \quad (۱)$$

حال اگر $A(\theta_0)$ ناحیه پذیرش یک آزمون به اندازه α برای $H_0: \theta = \theta_0$ باشد آنگاه

$$1-\alpha = P_{\theta_0}(X \in A(\theta_0)) \stackrel{(۱)}{=} P_{\theta_0}(\theta_0 \in S(X)) = P_{\theta_0}(\theta_0 \in S(X))$$

θ_0 دلخواه

پس $S(X)$ یک خانواده از فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ برای θ است. برعکس فرض کنید $S(X)$ یک خانواده از فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ برای θ باشد در این صورت

$$1-\alpha = P_{\theta_0}(\theta_0 \in S(X)) \stackrel{(1)}{=} P_{\theta_0}(\theta_0 \in A(\theta_0))$$

یعنی $A(\theta_0)$ ناحیه پذیرش یک آزمون به اندازه α در آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ است.

■

مثال ۱-۱: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U(0, \theta)$ باشند. به راحتی می‌توان نشان داد که برای انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ آزمون UMP به اندازه α عبارتست از

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} > \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \\ 0 & x_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \end{cases}$$

بنابراین

$$H_0 \Leftrightarrow x_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha} \Leftrightarrow \theta_0 > \frac{x_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}} \Leftrightarrow \theta_0 \in \left(\frac{x_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}, +\infty \right)$$

و در فصل فواصل اطمینان دیدیم که فاصله

$$\left(\frac{x_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}, +\infty \right)$$

یک فاصله اطمینان یک طرفه سمت راست برای θ است. همچنین در آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ در مبحث آزمونهای UMP دیدیم که

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} \geq \theta_0 \text{ or } x_{(n)} \leq \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

یک آزمون UMP به اندازه α است بنابراین

$$H_0 \Leftrightarrow \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} < x_{(n)} \leq \theta_0 \Leftrightarrow x_{(n)} < \theta_0 < \frac{x_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}} \Leftrightarrow \theta_0 \in \left(x_{(n)}, \frac{x_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}} \right)$$

که در مبحث فواصل اطمینان دیدیم که فاصله $\left(x_{(n)}, \frac{x_{(n)}}{\sqrt{n}\alpha}\right)$ یک خانواده از فواصل اطمینان نااریب سطح $1-\alpha$ برای θ است.



بخش ۲: فواصل اطمینان بطور یکنواخت صحیح‌ترین

با توجه به مثال ۱-۱ منطقی به نظر می‌رسد که آزمون‌های دارای خواص بهینه، فواصل اطمینانی را به دست دهند که خواص بهینه دارند. در زیر یک خاصیت بهینگی فواصل اطمینان را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱-۲: الف- احتمال پوشش فاصله اطمینان $S(x)$ که تابعی از θ است بصورت $P_{\theta}(\theta \in S(X))$ تعریف می‌شود و احتمال پوشش غلط^۱ $S(x)$ که تابعی از θ و θ' است بصورت $P_{\theta'}(\theta \in S(X))$ تعریف می‌شود.

ب- یک خانواده $S(X)$ از فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ برای θ را بطور یکنواخت صحیح‌ترین^۲ (UMA) خانواده از فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ گویند هرگاه در کلاس فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ احتمال پوشش غلط را می‌نیمم کند. به عبارت دیگر اگر برای هر خانواده $S'(X)$ از فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ و برای هر θ و θ' داشته باشیم که

$$P_{\theta'}(\theta \in S(X)) \leq P_{\theta'}(\theta \in S'(X))$$



در زیر رابطه آزمونهای UMP و فواصل اطمینان UMA را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱-۲: برای هر $\theta_0 \in \Theta$ فرض کنید $A(\theta_0)$ ناحیه پذیرش یک آزمون UMP به اندازه α در انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \in \overline{H_0(\theta_0)}$ باشد که در آن $\overline{H_0(\theta_0)}$ یک مجموعه معین از مقابلها باشد (مثلاً $\theta < \theta_0$ یا $\theta > \theta_0$ یا $\theta \neq \theta_0$) در این صورت $S(x) = \{\theta_0: x \in A(\theta_0)\}$ احتمال $P_{\theta'}(\theta \in S(X))$ را برای هر $\theta' \in \overline{H_0(\theta_0)}$ در بین تمام خانواده‌های فواصل اطمینان سطح

^۱ False Coverage

^۲ Uniformly Most Accurate

$1-\alpha$ می‌نیم می‌کند (یعنی $S(x)$ یک خانواده از فواصل اطمینان سطح $(1-\alpha)$ ی UMA برای θ است).

اثبات: فرض کنید $S'(X)$ یک خانواده از فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ برای θ باشد یعنی $P_\theta(\theta \in S'(X)) = 1-\alpha$. حال قرار می‌دهیم $A'(\theta) = \{x \mid \theta \in S'(x)\}$ در این صورت

$$\theta \in S'(x) \Leftrightarrow x \in A'(\theta)$$

بنابراین طبق قضیه ۱-۱، $A'(\theta_0)$ ناحیه پذیرش یک آزمون به اندازه α برای انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ است. حال چون $A(\theta_0)$ ناحیه پذیرش آزمون UMP به اندازه α برای انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ است پس برای هر $\theta' \in \overline{H_0(\theta_0)}$ داریم که احتمال خطای نوع دوم آزمون UMP در θ' احتمال خطای نوع دوم آزمون UMP در θ' است

$$P_{\theta'}(\theta \in S(X)) = P_{\theta'}(X \in A(\theta)) \quad (\theta' \text{ در UMP})$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{UMP}{\leq} P_{\theta'}(X \in A'(\theta)) \quad (\theta' \text{ در آزمون عادی در } \theta') \\ & = P_{\theta'}(\theta \in S'(X)) \end{aligned}$$

■

مثال ۱-۲: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته از خانواده $\{f_\theta: \theta \in \Theta \subset R\}$ باشد که این خانواده دارای خاصیت MLR در $T(X) = X$ است. در آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ ناحیه پذیرش آزمون UMP به اندازه α عبارتست از $X < u(\theta_0)$ که در زیر ثابت می‌کنیم تابع $u(\theta)$ یک تابع صعودی است. فرض کنید $\theta_r > \theta_l > \theta_0$ در این صورت

$$\alpha = P_{\theta_0}(X > u(\theta_0))$$

$$P_{\theta_r}(X > u(\theta_r)) = \alpha = P_{\theta_l}(X > u(\theta_l)) < P_{\theta_r}(X > u(\theta_l))$$

(نامساوی به دلیل اینست که در آزمون $H'_0: \theta = \theta_l$ vs $H'_1: \theta = \theta_r$ طبق نتیجه لم نیمن پیرسون $\alpha < 1-\beta$ است) بنابراین

$$P_{\theta_r}(X > u(\theta_r)) < P_{\theta_l}(X > u(\theta_l)) \Rightarrow u(\theta_r) > u(\theta_l)$$

با توجه به اینکه ناحیه پذیرش آزمون UMP بصورت $A(\theta_0) = (-\infty, u(\theta_0))$ است اگر u یک تابع پیوسته از θ باشد آنگاه فاصله اطمینان UMA طبق قضیه ۱-۲ به صورت زیر به دست می‌آید

$$S(X) = \{\theta : X \in A(\theta)\} = \{\theta : X < u(\theta)\} = \{\theta : \theta > u^{-1}(X)\} = (u^{-1}(X), +\infty)$$

مثلاً در مثال ۱-۱ در آزمون UMP ناحیه پذیرش عبارت بود از

$$A(\theta_0) = \{X : X_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}\} = (\circ, \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}) = (\circ, u(\theta_0))$$

و بنابراین فاصله اطمینان UMA عبارتست از

$$S(X) = \left\{ \theta \mid \theta > \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}} \right\} = \left(\frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}, +\infty \right) = (u^{-1}(X), +\infty)$$

■

حالت کلی تر این مثال در نتیجه زیر آمده است.

نتیجه ۱-۲: فرض کنید خانواده توزیعهای $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ دارای خاصیت MLR در آماره $T(X)$ باشد و T دارای تابع توزیع $F_\theta(t)$ باشد که تابعی پیوسته از t و θ است موقعی که یکی از آنها ثابت باشد.

الف- یک خانواده از فواصل اطمینان UMA یک طرفه به فرم $(\underline{\theta}(x), +\infty)$ در سطح $1-\alpha$ برای θ وجود دارد.

ب- اگر x هر مقدار مشاهده شده X و $t = T(x)$ باشد و معادله $F_\theta(t) = 1-\alpha$ دارای جواب $\theta = \hat{\theta}$ باشد آنگاه این جواب یکتا است و $\underline{\theta}(x) = \hat{\theta}$.

اثبات: الف- چون تابع توزیع T یک تابع پیوسته از t است پس برای هر θ_0 ثابت $c(\theta_0)$ وجود دارد که

$$P_{\theta_0}(X > c(\theta_0)) = \alpha \quad (2)$$

بنابراین در آزمون فرض $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ ناحیه بحرانی آزمون UMP به صورت $T > c(\theta_0)$ می باشد. بنابراین طبق نتیجه لم نیمن پیرسون توان این آزمون برای هر $\theta_1 > \theta_0$ از α بیشتر می شود $(\alpha < 1-\beta)$ و بنابراین

$$\underbrace{P_{\theta_1}(T > c(\theta_0))}_{\text{توان}} > \alpha = P_{\theta_1}(T > c(\theta_1)) \Rightarrow c(\theta_0) < c(\theta_1)$$

توان

یعنی C یک تابع اکیداً صعودی و همچنین پیوسته است. فرض کنید $A(\theta_0)$ ناحیه پذیرش این آزمون
یعنی $T \leq c(\theta_0)$ باشد و $S(x)$ در رابطه

$$\theta \in S(x) \Leftrightarrow X \in A(\theta)$$

صدق کند. با توجه به اکیداً صعودی بودن C نتیجه می‌شود که $S(x)$ شامل مقادیری از $\theta \in \Theta$ است
که در رابطه $\theta \geq \theta(x)$ صدق می‌کند که $\theta(x) = \inf \{ \theta | T(x) \leq c(\theta) \}$. بنابراین طبق قضیه ۱-۲
خانواده فواصل اطمینان یک طرفه $(\theta(x), +\infty)$ یک خانواده از فواصل اطمینان سطح $(1-\alpha)$ ی
UMA برای θ است.

ب- چون خانواده دارای خاصیت MLR در T است پس تابع توزیع $F_\theta(t)$ یک تابع اکیداً نزولی از
 θ است (خاصیت SI) و بنابراین معادله $F_\theta(t) = 1-\alpha$ حداکثر دارای یک ریشه است. فرض کنید
که جواب این معادله $\hat{\theta} \in \Theta$ باشد بنابراین $F_{\hat{\theta}}(t) = 1-\alpha$ و یا $P_{\hat{\theta}}(T > t) = \alpha$ که با مقایسه با
رابطه (*) (تعریف تابع C) نتیجه می‌شود که $c(\hat{\theta}) = t$ است. حال اگر ناحیه اطمینان $t \leq c(\theta)$ را
در نظر بگیریم آنگاه

$$t \leq c(\theta) \Leftrightarrow c(\hat{\theta}) \leq c(\theta) \Leftrightarrow \hat{\theta} \leq \theta$$

بنابراین طبق قسمت (الف) ناحیه اطمینان سطح $(1-\alpha)$ ی UMA برای θ عبارتست از

$$(\theta(x), +\infty) = (\hat{\theta}, +\infty)$$

■

مثال ۲-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد به راحتی دیده
می‌شود که آزمون

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x} > \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \\ 0 & \bar{x} < \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \end{cases}$$

یک آزمون UMP به اندازه α در آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ است. بنابراین فاصله
اطمینان UMA سطح $1-\alpha$ بصورت زیر به دست می‌آید

$$H_0: \bar{x} < \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \Leftrightarrow \theta_0 > \bar{x} - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \Rightarrow S(X) = \left\{ \theta \mid \theta > \bar{x} - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} \right\}$$

■

همانگونه که در فصل‌های قبل دیدیم برای آزمون‌های دو طرفه معمولاً آزمون UMP وجود نداشت و توجه خود را معطوف به آزمون‌های UMPU کردیم. در زیر رابطه آزمون‌های UMPU و فواصل اطمینان نارایب UMA را بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که یک خانواده از فواصل اطمینان $S(X)$ سطح $1-\alpha$ برای θ را نارایب گویند هرگاه

$$P_\theta(\theta \in S(X)) = 1-\alpha \quad \forall \theta$$

$$P_{\theta'}(\theta \in S(X)) < 1-\alpha \quad \forall \theta' \neq \theta$$

قضیه ۲-۲: برای هر $\theta_0 \in \Theta$ اگر $A(\theta_0)$ ناحیه پذیرش یک آزمون UMPU به اندازه α در انجام آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ باشد در این صورت $S(X) = \{\theta: X \in A(\theta)\}$ یک خانواده از فواصل اطمینان نارایب UMA در سطح $1-\alpha$ برای θ است. به این معنی که $S(X)$ نارایب است و $P_{\theta'}(\theta \in S(X)) < 1-\alpha$ را در بین تمام خانواده فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ نارایب $S(X)$ می‌نیم می‌کند.

اثبات: اولاً ثابت می‌کنیم $S(X)$ نارایب است.

$$(i) \quad P_\theta(\theta \in S(X)) = P_\theta(X \in A(\theta)) = 1-\alpha \quad (\text{آزمون UMP به اندازه } \alpha)$$

$$P_\theta(X \in \overline{A(\theta)}) = \alpha < P_{\theta'}(X \in \overline{A(\theta)}) \quad (\text{نتیجه لم نیمین پیرسون: } \alpha < 1-\beta \text{ برای } \theta' \neq \theta)$$

$$(ii) \quad P_{\theta'}(\theta \in S(X)) = P_{\theta'}(X \in A(\theta)) = 1 - P_{\theta'}(X \in \overline{A(\theta)}) < 1-\alpha \quad \forall \theta' \neq \theta$$

ثانیاً ثابت می‌کنیم $S(X)$ نارایب UMA است. فرض کنید $S'(X)$ یک خانواده دیگر از فواصل اطمینان نارایب سطح $1-\alpha$ برای θ باشد یعنی $P_\theta(\theta \in S'(X)) = 1-\alpha$. قرار می‌دهیم

$$A'(\theta) = \{X: \theta \in S'(X)\}$$

$$P_{\theta'}(X \in A'(\theta)) = P_{\theta'}(\theta \in S'(X)) < 1-\alpha \quad \forall \theta' \neq \theta$$

S' نارایب

یعنی $A'(\theta)$ ناحیه پذیرش یک آزمون نارایب به اندازه α است بنابراین

$$\begin{aligned}
 P_{\theta'}(\theta \in S(X)) &= P_{\theta'}(X \in A(\theta)) && \text{احتمال خطای نوع دوم در } \theta' \text{ آزمون UMPU} \\
 &\leq P_{\theta'}(X \in A'(\theta)) && \text{احتمال خطای نوع دوم در } \theta' \text{ آزمون نااریب} \\
 &= P_{\theta'}(\theta \in S'(X))
 \end{aligned}$$



مثال ۳-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ باشند برای آزمون

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1: \mu \neq \mu_0$$

در مثال‌های فصل قبل نشان دادیم که آزمون UMPU به اندازه α عبارتست از

$$\varphi(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{S} \right| > t_{1-\alpha/2}(n-1) \\ 0 & \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{S} \right| < t_{1-\alpha/2}(n-1) \end{cases}$$

بنابراین فاصله اطمینان نااریب UMA در سطح $1-\alpha$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$H_0 \text{ پذیرفته شود} \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \right| < t_{1-\alpha/2}(n-1) \Leftrightarrow \mu_0 \in \left(\bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

پس فاصله $\mu \in \bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$ یک خانواده از فواصل اطمینان سطح $(1-\alpha)$ ی نااریب

UMA برای θ است.



برای فواصل اطمینان نااریب UMA نتیجه‌ای مشابه با نتیجه (۱) در زیر آمده است.

نتیجه ۲-۲: فرض کنید X یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار با تابع چگالی $f_\theta(x)$ باشد که دارای

خاصیت MLR در x است. فرض کنید آزمون UMPU برای انجام آزمون فرض $H_0: \theta = \theta_0$

موجود باشد و دارای ناحیه پذیرش زیر باشد

$$c_1(\theta_0) \leq x \leq c_2(\theta_0)$$

و اکیداً ناریب باشد $(E_{\theta}[\varphi(X)] > \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_1)$. در این صورت توابع $c_i(\theta)$ اکیداً صعودی در θ هستند و فواصل اطمینان ناریب UMA برای θ عبارت است از

$$c_r^{-1}(x) \leq \theta \leq c_l^{-1}(x)$$

اثبات: فرض کنید $\theta_0 < \theta$ و $\beta_0(\theta)$ و $\beta_1(\theta)$ توابع توان آزمونهای ϕ_0 و ϕ_1 در انجام آزمونهای $H_0: \theta = \theta_0$ و $H_0: \theta = \theta_1$ به ترتیب باشند. از اکیداً ناریب بودن این آزمونها نتیجه می شود که

$$E_{\theta_0}[\varphi_1(X) - \varphi_0(X)] = \beta_1(\theta_0) - \alpha > 0 > \alpha - \beta_0(\theta_1) = E_{\theta_1}[\varphi_1(X) - \varphi_0(X)]$$

یعنی

$$P_{\theta_0}(\{c_l(\theta_0) \leq X \leq c_r(\theta_0)\}) - P_{\theta_1}(\{c_l(\theta_1) \leq X \leq c_r(\theta_1)\}) > 0$$

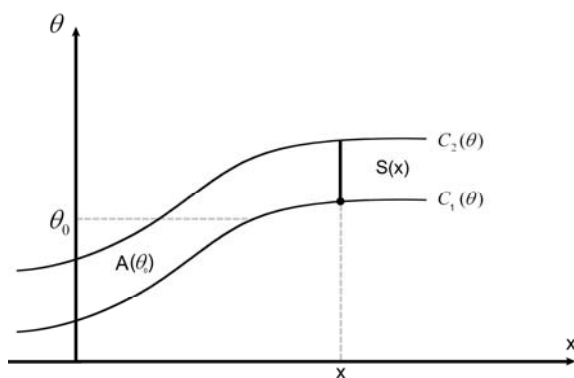
$$> P_{\theta_1}(\{c_l(\theta_0) \leq X \leq c_r(\theta_0)\}) - P_{\theta_1}(\{c_l(\theta_1) \leq X \leq c_r(\theta_1)\})$$

بنابراین هیچکدام از فواصل $[c_l(\theta_0), c_r(\theta_0)]$ و $[c_l(\theta_1), c_r(\theta_1)]$ دیگری را دربر ندارد (زیرمجموعه دیگری نیست زیرا در غیر این صورت با مثبت و منفی بودن دو طرف رابطه فوق در

تناقض است). در نتیجه طبق قضیه ۴-۳ ج مبحث SI (فصل سوم)

$$c_r(\theta_0) < c_r(\theta_1) \quad \text{و} \quad c_l(\theta_0) < c_l(\theta_1)$$

یعنی توابع c_i توابع اکیداً صعودی و وارون پذیر هستند پس نامساوی $c_l(\theta) \leq x \leq c_r(\theta)$ (ناحیه پذیرش) معادل نامساوی $c_r^{-1}(x) \leq \theta \leq c_l^{-1}(x)$ (فاصله اطمینان) موردنظر می باشد. به شکل زیر توجه کنید.



فصل ۸

پرتوانترین آزمون‌های
یکنواخت پایا

در این فصل آزمون‌های پایا و پرتوانترین آزمون‌های پایا را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدا یادآوری از مباحث پایایی را در زیر می‌آوریم.

بخش ۱: خلاصه‌ای از مطالب پایایی

فرض کنید $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ دارای توزیعی از خانواده توزیع‌های $F = \{f_\theta(x) : \theta \in \Theta\}$ باشد که دارای فضای نمونه (مجموعه مقادیر) $\mathcal{X}$ باشد و گروه تبدیلات G روی $\mathcal{X}$ را در نظر بگیرید. خانواده F را تحت گروه G پایا گویند اگر برای هر $\theta \in \Theta$ و $g \in G$ یک $\bar{g}(\theta) = \theta' \in \Theta$ بگیریم. وجود داشته باشد به طوریکه $Y = g(X)$ دارای تابع چگالی $f_{\bar{g}(\theta)}(y) \in F$ باشد. بنابراین گروه تبدیلات G روی $\mathcal{X}$ گروه تبدیلات $\bar{G} = \{\bar{g} | g \in G\}$ را بوجود می‌آورد و خواص زیر را برای این تبدیلات می‌توان بیان کرد

$$P_\theta(g(X) \in A) = P_{\bar{g}(\theta)}(X \in A) \quad (۱)$$

$$E_\theta[h(g(X))] = E_{\bar{g}(\theta)}[h(X)] \quad (۲)$$

اگر در رابطه (۱)، A را با $g(A)$ عوض کنیم خواهیم داشت که

$$P_\theta(X \in A) = P_{\bar{g}(\theta)}(X \in g(A)) \quad (۳)$$

- تابع زیان $L(\theta, \delta)$ را تحت گروه تبدیلات G پایا گویند اگر برای هر $g \in G$ و هر $\delta \in D$ (کلاس برآوردگرها یا کلاس توابع آزمون) یک $\tilde{g}(\delta) = \delta^* \in D$ یکتا وجود داشته باشد به طوری که

$$L(\theta, \delta) = L(\tilde{g}(\theta), \tilde{g}(\delta)) \quad \forall \theta \in \Theta$$

تبدیلات $\tilde{G} = \{\tilde{g} | g \in G\}$ را گروه تبدیلات ایجاد شده روی D توسط G گویند. اگر در مسئله‌ای خانواده توزیع‌های F و تابع زیان L پایا باشند آنگاه گوییم آن مسئله تحت تبدیلات G پایا است. در این حالت تصمیم‌های هم پایا در شرط زیر صدق می‌کنند

$$\delta(g(X)) = \tilde{g}(\delta(X))$$

تعریف ۱-۱: دو نقطه θ_1 و θ_2 در Θ را معادل گویند و با نماد $\theta_1 \sim \theta_2$ نمایش می‌دهند اگر $\bar{g} \in G^-$ موجود باشد که $\theta_2 = \bar{g}(\theta_1)$. یک مدار^۱ در Θ عبارت از یک کلاس (مجموعه) از نقاط معادل در Θ است. بنابراین مدار θ_0 در Θ عبارت است از

$$\Theta_{\theta_0} = \{\bar{g}(\theta_0) \mid \bar{g} \in G^-\}$$

■

تعریف ۱-۲: یک گروه G^- از تبدیلات روی Θ را انتقالی یا گذرا^۲ گویند، هرگاه Θ دارای تنها یک مدار باشد و یا معادلاً اگر برای هر دو نقطه $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ یک $\bar{g} \in G^-$ موجود باشد بطوری که $\theta_2 \in \bar{g}(\theta_1)$.

■

مطالب مربوط به معادل بودن و مدارها را می‌توان برای گروههای G و G^- نیز به طور معادل گسترش داد.

تعریف ۳-۱: فرض کنید G گروهی از تبدیلات روی فضای $\mathcal{X}$ باشد. تابع $T(x)$ را روی $\mathcal{X}$ نسبت به G پایا گویند هرگاه برای هر $x \in \mathcal{X}$ و $g \in G$ داشته باشیم که

$$T(g(x)) = T(x)$$

و تابع $T(x)$ را پایای ماکزیمال نسبت به G گویند هرگاه T پایا باشد و در شرط زیر صدق کند

$$T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = g(x_2) \text{ for some } g \in G$$

■

یک تابع پایا تابعی است که روی هر مدار $\mathcal{X}$ مقداری ثابت دارد و یک تابع پایای ماکزیمال تابعی است که روی هر مدار $\mathcal{X}$ مقداری ثابت دارد و مقادیر متفاوتی را به هر یک از مدارهای متفاوت می‌دهد. مفهوم پایا و پایای ماکزیمال را می‌توان به طور مشابه روی Θ گسترش داد.

در زیر بعضی از قضایای مورد نیاز پایایی را بدون اثبات می‌آوریم (اثبات در استنباط آماری (۱))

قضیه ۱-۱: فرض کنید G گروهی از تبدیلات روی فضای $\mathcal{X}$ باشد و $T(x)$ یک پایای ماکزیمال باشد. در این صورت تابع $\varphi(X)$ نسبت به G پایا است اگر و فقط اگر φ تابعی از T باشد.

^۱ Orbit

^۲ Transitive

قضیه ۱-۲: فرض کنید یک مسئله تحت تبدیلات G پایا باشد و $\nu(\theta)$ یک تابع پایای ماکزیمال روی Θ نسبت به G^- باشد. اگر $\varphi(X)$ یک تابع پایا تحت G باشد آنگاه توزیع $\varphi(X)$ تنها به $\nu(\theta)$ بستگی دارد. ■

قضیه ۱-۳: اگر φ یک آماره پایا باشد آنگاه توزیع آن روی هر مدار Θ مقداری ثابت است. بنابراین اگر Θ تنها یک مدار باشد و φ یک آماره پایا باشد آنگاه توزیع φ به پارامتر θ بستگی ندارد. ■

بخش ۲: پرتوانترین آزمونهای یکنواخت پایا^۱ (UMPI)

در مسئله آزمون فرض فضای کارها^۲ به صورت $A = \{a_0, a_1\}$ است و می‌خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \text{ vs } H_1: \theta \in \Theta_1$$

که در آن

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \text{ و } \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$$

تابع زیان در این حالت به فرم زیر است

$$L(\theta, a_1) = \begin{cases} C_{10} & \text{if } \theta \in \Theta_0 \\ C_{11} & \text{if } \theta \in \Theta_1 \end{cases} \quad L(\theta, a_0) = \begin{cases} C_{00} & \text{if } \theta \in \Theta_0 \\ C_{01} & \text{if } \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

که در آن $C_{00} < C_{10}$ و $C_{01} < C_{11}$. اگر تمامی C_{ij} ها متفاوت از یکدیگر باشند آنگاه این توابع زیان تحت یک گروه از تبدیلات G پایا هستند $(L(\theta, a) = L(\bar{g}(\theta), \tilde{g}(a)))$ اگر و فقط اگر

$$(i) \quad \tilde{g}(a) = a$$

$$(ii) \quad \bar{g}(\Theta_0) = \Theta_0, \quad \bar{g}(\Theta_1) = \Theta_1 \quad \forall g \in G$$

در این حالت گروه تبدیلات G خانواده توزیعهای $F_0 = \{f_\theta: \theta \in \Theta_0\}$ و $F_1 = \{f_\theta: \theta \in \Theta_1\}$ را پایا نگه می‌دارد.

^۱ Uniformly Most Powerful Invariant Tests

^۲ Action Space

تعریف ۱-۲: مسئله آزمون فرض $H_0: \theta = \Theta_0$ vs $H_1: \theta = \Theta_1$ را تحت گروه تبدیلات G پایا گویند اگر گروه تبدیلات G^- بوجود آمده توسط G به صورت $\bar{g}(\Theta_0) = \Theta_0$ و $\bar{g}(\Theta_1) = \Theta_1$ باشد.

با توجه به شرط $\tilde{g}(a) = a$ نتیجه می‌شود که یک تصمیم (تابع آزمون) هم پایا است اگر

$$\varphi(g(x)) = \varphi(x)$$

یعنی اینکه φ پایا باشد.

تعریف ۲-۲: در آزمون $H_0: \theta \in \Theta_0$ vs $H_1: \theta \in \Theta_1$ آزمون φ^* را تحت گروه G ، UMPI گویند هرگاه اولاً این آزمون پایا باشد $(\varphi^*(g(x)) = \varphi^*(x))$ و ثانیاً برای هر آزمون پایای دیگر φ ، داشته باشیم که

$$E_\theta[\varphi^*(X)] \geq E_\theta[\varphi(X)] \quad \forall \theta \in \Theta_1$$



بنابراین برای یافتن آزمون‌های UMPI بایستی در بین آزمون‌های پایای φ آن آزمونی را پیدا کنیم که در فرض H_1 دارای بیشترین توان باشد. با توجه به اینکه طبقه قضیه ۱-۱ آزمون φ پایا است اگر و فقط اگر تابعی از پایای ماکزیمال T باشد و طبق قضیه ۲-۱ توزیع φ تنها به θ از طریق آماره پایای ماکزیمال $v(\theta)$ به θ بستگی دارد (و یا در حالت تک مدار به θ بستگی ندارد) بنابراین برای یافتن آزمون‌های UMPI آزمون‌های پرتوان φ را مورد بررسی قرار می‌دهیم که تابعی از پایای ماکزیمال T باشند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱-۲: فرض کنید $X = (X_1, \dots, X_n)$ و $\theta \in R$ و بخواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0: X \sim f_0(x_1 - \theta, \dots, x_n - \theta) \text{ vs } H_1: X \sim f_1(x_1 - \theta, \dots, x_n - \theta) \quad \theta \in R$$

اگر گروه تبدیلات مکانی $G = \{g_c: g_c(x) = x + c\}$ را در نظر بگیریم آنگاه مسئله آزمون H_0 در مقابل H_1 تحت G پایا می‌باشد (توزیع‌ها تحت فرض H_0 و H_1 تغییر نمی‌کنند) و گروه G^- تولید شده توسط G به صورت $G^- = \{\bar{g}_c: \bar{g}_c(\theta) = \theta + c\}$ در این مسئله آماره $Y = (X_1 - X_n, \dots, X_{n-1} - X_n)$ یک تابع پایای ماکزیمال است که توزیع آن تحت H_0 در مقابل H_1 به θ بستگی ندارد و تحت H_i دارای تابع چگالی زیر است

$$g_i(\underline{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(y_1 + z, \dots, y_{n-1} + z, z) dz \quad i = 1, 2$$

با قرار دادن $y_i = x_i - x_n$ و $u = z - x_n$ خواهیم داشت

$$g_i(\underline{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x_1 + u, \dots, x_n + u) du \quad i = 1, 2$$

چون هر آزمون پایای φ تابعی از آماره پایای ماکزیمال $Y_{\sim}$ است و توزیع $Y_{\sim}$ تحت H_0 و H_1 به θ بستگی ندارد. بنابراین مسئله آزمون H_0 در مقابل H_1 به مسئله آزمون فرض ساده در مقابل ساده دیگر تبدیل می‌شود. بنابراین آزمون UMPI همان آزمون MP خواهد بود که دارای ناحیه بحرانی زیر است

$$H_0 \text{ رد شود} \Leftrightarrow \frac{g_1(\underline{y})}{g_0(\underline{y})} > c \Leftrightarrow \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1 + u, \dots, x_n + u) du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x_1 + u, \dots, x_n + u) du} > c$$

■

مثال ۲-۲: فرض کنید X_1 و X_2 از یکدیگر مستقل و دارای توزیع یکسان باشند و بخواهیم آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0: X_1, X_2 \sim N(\theta, 1) \text{ vs } H_1: X_1, X_2 \sim C(\theta, 1)$$

آزمون UMPI برای انجام این آزمون را به دست آورید.

$$\text{حل:} \quad H_0 \text{ رد شود} \Leftrightarrow \frac{g_1(\underline{y})}{g_0(\underline{y})} > c$$

$$\begin{aligned} g_0(\underline{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x_1 + u, x_2 + u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[(x_1 + u)^2 + (x_2 + u)^2]} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{u^2 + u(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u + \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1 + u, x_2 + u) dU = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 \{1 + (x_1 + u)^2\} \{1 + (x_2 + u)^2\}} du \\
&\stackrel{\text{تقسیم به کسرها}}{=} \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{rc(x_1 + u) + b}{1 + (x_1 + u)^2} + \frac{rc(x_2 + u) + d}{1 + (x_2 + u)^2} \right\} du \\
&\stackrel{a=-c}{=} \frac{1}{\pi^2} \left\{ a \ln[1 + (x_1 + u)^2] + b \operatorname{arctg}(x_1 + u) - a \ln[1 + (x_2 + u)^2] \right. \\
&\quad \left. + d \operatorname{arctg}(x_2 + u) \right\} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left\{ a \ln \frac{1 + (x_1 - u)^2}{1 + (x_2 - u)^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (b + d)\pi \right\} = \frac{b + d}{\pi} \\
\therefore \frac{g_1(y)}{g_0(y)} > c &\Leftrightarrow \frac{\frac{b + d}{\pi}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2}} > c \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > c^* \Leftrightarrow |x_1 - x_2| > k
\end{aligned}$$

تحت فرض H_0 داریم

$$\begin{aligned}
X_1 - X_2 &\sim N(0, 2) \Rightarrow \alpha = P_{H_0}(|X_1 - X_2| > k) = P_{H_0}\left(|Z| > \frac{k}{\sqrt{2}}\right) \\
&\Rightarrow k = \sqrt{2} z_{1-\alpha/2}
\end{aligned}$$

بنابراین آزمون UMPI به اندازه α عبارتست از

$$\therefore \varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & |x_1 - x_2| > \sqrt{2} z_{1-\alpha/2} \\ 0 & |x_1 - x_2| < \sqrt{2} z_{1-\alpha/2} \end{cases}$$

■

توجه: با توجه به قضیه ۲-۲، در حل مسائل اگر آماره پایای ماکزیمال $T(x)$ و $\delta = v(\theta)$ حقیقی مقدار باشند و خانواده توزیعهای $f_\delta(t)$ مربوط به آماره T دارای خاصیت MLR باشد آنگاه برای آزمون $H_0: \delta \leq \delta_0$ vs $H_1: \delta > \delta_0$ طبق قضیه کارلین روبین یک آزمون UMP بر اساس T وجود دارد که این آزمون UMPI می‌باشد (زیرا توزیع $T(x)$ تنها به θ از طریق $\delta = v(\theta)$ حقیقی مقدار بستگی دارد). ■

مثال ۳-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشند. آزمون UMPI به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به دست آورید

$$H_0: \sigma \geq \sigma_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma < \sigma_0$$

حل: اگر گروه تبدیلات مکانی $G = \{g_c | g_c(x) = x + c\}$ را در نظر بگیریم آنگاه مسئله آزمون H_0 در مقابل H_1 پایا باقی می‌ماند (زیرا توزیع‌ها تحت H_0 و H_1 تغییر نمی‌کنند، $Var(X + c) = Var(X)$ حال اگر آماره بسنده

$$\left(\bar{X}, S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)$$

را در نظر بگیریم آنگاه تحت این تبدیل این آماره به $(\bar{X} + c, S^2)$ تبدیل می‌شود و S^2 یک آماره‌ی پایای ماکزیمال است. بنابراین کلاس آزمونهای پایا آزمونهایی است که به S^2 بستگی دارند و توزیع S^2 به μ بستگی ندارد و تنها به σ^2 بستگی دارد. بنابراین مسئله یافتن آزمون UMPI منجر به یافتن آزمون UMP بر اساس S^2 می‌شود. با توجه به اینکه

$$f_{S^2}(y) = \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})} y^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y}$$

و این خانواده دارای خاصیت MLR در $Y = S^2$ است پس آزمون UMPI (UMPI) بر اساس S^2 عبارت است از

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & S^2 \leq \sigma_0^2 \chi_{\alpha}^2(n-1) \\ 0 & S^2 > \sigma_0^2 \chi_{\alpha}^2(n-1) \end{cases}$$

■

مثال ۴-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ باشند که μ و σ^2 هر دو نامعلوم هستند آزمون UMPI به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به دست آورید

$$H_0: \mu \leq 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu > 0$$

حل: اگر گروه تبدیلات مقیاسی $G = \{g_c | g_c(x) = cx, c > 0\}$ را در نظر بگیریم آنگاه مسئله آزمون H_0 در مقابل H_1 پایا باقی می‌ماند (زیرا $\bar{g}(\Theta_1) = \Theta_1$, $\bar{g}(\Theta_0) = \Theta_0$). حال اگر آماره بسنده

$$(U, V) = \left(\sqrt{n}\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)$$

را در نظر بگیریم آنگاه تحت این تبدیل آماری (U, V) به (cU, c^2V) تبدیل می‌شود و $T = \frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}$ یک آماری پایای ماکزیمال است. بنابراین کلاس آزمونهای پایا آزمونهایی است که به T بستگی دارند و توزیع T عبارت است از

$$T = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{X}}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} \stackrel{D}{=} \frac{N\left(\frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}, 1\right)}{\sqrt{\chi_{(n-1)}^2 / (n-1)}} \sim t'_{(n-1), \delta}$$

یعنی آماری پایای ماکزیمال T دارای توزیع t نامرکزی با پارامتر نامرکزی $\delta = \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$ است. پس

توزیع T بستگی به μ و σ^2 تنها از طریق $\delta = v(\mu, \sigma^2) = \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$ بستگی دارد. بر اساس T آزمون فوق به آزمون $H_0: \delta \leq 0$ vs $H_1: \delta > 0$ تبدیل می‌شود.

بنابراین یافتن آزمون UMPI منجر به یافتن آزمون UMP بر اساس T برای انجام آزمون $H_0: \delta \leq 0$ vs $H_1: \delta > 0$ می‌شود. برای انجام آزمون فوق ابتدا نشان می‌دهیم که توزیع آماری T دارای خاصیت MLR در T است.

$$f_{\delta}(t) = \frac{1}{\frac{n-2}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi(n-1)}} \int_0^{\infty} y^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} e^{-\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{y}{n-1}} - \delta\right)^2} dy$$

$$\delta_0 < \delta_1 \Rightarrow r(t) = \frac{f_{\delta_1}(t)}{f_{\delta_0}(t)} = \frac{\int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} e^{-\frac{1}{2}(t\sqrt{\frac{y}{n-1}} - \delta_1)^2} dy}{\int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} e^{-\frac{1}{2}(t\sqrt{\frac{y}{n-1}} - \delta_0)^2} dy}$$

حال فرض کنید $t > 0$ باشد در این صورت

$$\begin{aligned} f_{\delta}(t) &= c \int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} e^{-\frac{1}{2}(t\sqrt{\frac{y}{n-1}} - \delta)^2} dy \\ &= c \int_0^{v=t\sqrt{\frac{y}{n-1}}} e^{-\frac{1}{2}(v+\delta)^2} \left[-\frac{(n-1)v}{t} \right]^{n-1} e^{-\frac{(n-1)v^2}{t^2}} \frac{2(n-1)v}{t^2} dv \\ &= c^* e^{-\frac{1}{2}\delta^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} e^{-\delta v} v^{n-1} e^{-\frac{(n-1)v^2}{2t^2}} dv \\ &= c^* e^{-\frac{1}{2}\delta^2} \int_0^{+\infty} \left\{ e^{-\delta_0 v} v^{n-1} e^{-v^2/2} \right\} e^{-(\delta-\delta_0)v - \frac{(n-1)v^2}{2t^2}} dv \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $f(v) = e^{-\delta_0 v} v^{n-1} e^{-v^2/2}$ پس

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{f_{\delta_1}(t)}{f_{\delta_0}(t)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\delta_1^2} \int_0^{+\infty} f(v) e^{-(\delta_1-\delta_0)v - \frac{(n-1)v^2}{2t^2}} dv}{e^{-\frac{1}{2}\delta_0^2} \int_0^{+\infty} f(v) e^{-\frac{(n-1)v^2}{2t^2}} dv} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\delta_1^2 - \delta_0^2)} \int_0^{+\infty} e^{-(\delta_1-\delta_0)v} g_{t^2}(v) dv \end{aligned}$$

که در آن

$$g_{t^2}(v) = \frac{f(v) e^{-\frac{(n-1)v^2}{2t^2}}}{\int_0^{+\infty} f(z) e^{-\frac{(n-1)z^2}{2t^2}} dz}$$

توجه کنید که $g_{t^2}(v)$ یک تابع چگالی است و خانواده‌ای است که دارای خاصیت MLR است

(به یک خانواده‌ی نمایی تبدیل می‌شود) بنابراین با استفاده از مسئله ۱۴ فصل سوم $f(v) e^{-\frac{(n-1)v^2}{2t^2}}$

کتاب لهنم $\int_0^{+\infty} e^{-(\delta_1 - \delta_0)v} g_{t^2}(v) dv$ یک تابع نزولی از t^2 و بنابراین یک تابع صعودی از t برای $t < 0$ است. پس $r(t)$ یک تابع صعودی از t برای $t < 0$ است. به طور مشابه با تغییر متغیر $v = t \sqrt{\frac{y}{n-1}}$ در $f_\delta(t)$ برای $t > 0$ می‌توان نشان داد که $r(t)$ یک تابع صعودی از t است و در نتیجه با استفاده از پیوستگی $r(t)$ نتیجه می‌شود که $r(t)$ یک تابع صعودی از t است.

حال چون $f_\delta(t)$ دارای خاصیت MLR در $T = \frac{\sqrt{n} \bar{X}}{S}$ است پس در آزمون $H_0: \delta \leq 0$ vs $H_1: \delta > 0$ آزمون UMP (یا UMPI بر اساس T) عبارت است از

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & T > c \\ 0 & T < c \end{cases}$$

که در آن

$$\alpha = E_{\delta=0}[\varphi(\underline{X})] = P_{\delta=0}(T > c) \Rightarrow c = t_{1-\alpha}(n-1)$$

پس آزمون UMPI به اندازه α عبارت است از

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{\sqrt{n} \bar{x}}{S} > t_{1-\alpha}(n-1) \\ 0 & \frac{\sqrt{n} \bar{x}}{S} < t_{1-\alpha}(n-1) \end{cases}$$

که همان آزمون UMPU به دست آمده در مبحث آزمونهای UMPU است.

■

مثال ۵-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ باشند که μ و σ^2 هر دو نامعلوم هستند. آزمون UMPI به اندازه α برای انجام آزمون

$$H_0: \mu = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu \neq 0$$

را به دست آورید.

حل: اگر گروه تبدیلات $G = \{g_c | g_c(\underline{x}) = c\underline{x}, c \neq 0\}$ را در نظر بگیریم آنگاه مسئله آزمون H_0 در مقابل H_1 پایا باقی می‌ماند (زیرا $\bar{g}(\Theta_1) = \Theta_1$, $\bar{g}(\Theta_0) = \Theta_0$) حال اگر آماره بسنده‌ی

$(U, V) = \left(\sqrt{n} \bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)$ را در نظر بگیریم آنگاه تحت این تبدیل آماره‌ی (U, V) به

(cU, c^2V) تبدیل می‌شود و $|T| = \frac{|U|}{\sqrt{V/(n-1)}}$ یک آماره‌ی پایای ماکزیمال است. بنابراین کلاس

آزمون‌های پایا آزمون‌هایی است که به $|T|$ بستگی دارند و $|T|$ دارای توزیعی است که تنها از طریق $\delta = \frac{\sqrt{n} \mu}{\sigma}$ به (μ, σ^2) بستگی دارد. بر اساس $|T|$ آزمون فوق به آزمون

$$H_0: \delta = 0 \text{ vs } H_1: |\delta| > 0 \text{ تبدیل می‌شود.}$$

بنابراین یافتن آزمون UMPI منجر به یافتن آزمون UMP بر اساس $|T|$ برای انجام آزمون

$$H_0: \delta = 0 \text{ vs } H_1: |\delta| > 0 \text{ می‌شود از طرفی برای } t > 0 \text{ داریم که}$$

$$\begin{aligned} f_{|T|}(t|\delta) &= f_T(t|\delta) + f_T(-t|\delta) \\ &= c \int_0^{+\infty} y^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} \left[e^{-\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{y}{n-1}} - |\delta|\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{y}{n-1}} + |\delta|\right)^2} \right] dy \end{aligned}$$

بطور مشابه با مثال قبل می‌توان نشان داد که $\frac{f_{|T|}(t|\delta)}{f_{|T|}(t|0)}$ یک تابع صعودی از t است (مسئله ۵ صفحه

۲۴۸ کتاب فرگوسن) بنابراین این خانواده دارای خاصیت MLR در $|T|$ است و در نتیجه آزمون

UMP (یا UMPI بر اساس $|T|$) عبارت است از

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |T| > c \\ 0 & |T| < c \end{cases}$$

که در آن

$$\alpha = E_{\delta=0}[\varphi(X)] = P_{\delta=0}(|T| > c) \Rightarrow c = t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

پس آزمون UMPI به اندازه α عبارت است از

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \left| \frac{\sqrt{n} \bar{x}}{S} \right| > t_{1-\alpha/2}(n-1) \\ 0 & \left| \frac{\sqrt{n} \bar{x}}{S} \right| < t_{1-\alpha/2}(n-1) \end{cases}$$

که همان آزمون UMPU به دست آمده در مبحث آزمونهای UMPU است.

■

مثال ۶-۲: فرض کنید $X_1, \dots, X_m$ و $Y_1, \dots, Y_n$ نمونه‌های تصادفی از $N(\mu, \sigma^2)$ و $N(\eta, \tau^2)$ باشند. آزمون UMPI به اندازه α برای انجام آزمون زیر را به دست آورید

$$H_0: \frac{\tau^2}{\sigma^2} \leq \Delta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \frac{\tau^2}{\sigma^2} > \Delta_0.$$

حل: اگر گروه تبدیلات

$$G = \left\{ g \mid g(\underline{x}, \underline{y}) = (c\underline{x} + a, c\underline{y} + b), c > 0, a, b \in R \right\}$$

را در نظر بگیریم آنگاه مسئله آزمون H_0 در مقابل H_1 پایا باقی می‌ماند. زیرا

$$\frac{V(cY + a)}{V(cX + a)} = \frac{V(Y)}{V(X)} = \frac{\tau^2}{\sigma^2}$$

حال اگر آماره بسنده‌ی

$$T = (T_1, T_2, T_3, T_4) = (\bar{X}, \bar{Y}, \sum (X_i - \bar{X})^2, \sum (Y_i - \bar{Y})^2)$$

را در نظر بگیریم آنگاه تحت این تبدیل آماری T به $(cT_1 + a, cT_2 + b, c^2T_3, c^2T_4)$ تبدیل

می‌شود و $U = \frac{T_4 / (n-1)}{T_3 / (m-1)}$ یک آماری پایای ماکزیمال است. بنابراین کلاس آزمونهای پایا

آزمونهایی است که به U بستگی دارد و $U \sim \Delta F_{(n-1, m-1)}$ که $\Delta = \frac{\tau^2}{\sigma^2}$. یعنی توزیع آماری پایای

ماکزیمال T بستگی به $(\mu, \eta, \sigma^2, \tau^2)$ تنها از طریق $\delta = \nu(\mu, \eta, \sigma^2, \tau^2) = \frac{\tau^2}{\sigma^2}$ بستگی دارد. بر

اساس U آزمون فوق به آزمون

$$H_0: \Delta \leq \Delta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \Delta > \Delta_0.$$

تبدیل می‌شود.

بنابراین یافتن آزمون UMPI منجر به یافتن آزمون UMP بر اساس U برای انجام آزمون

$H_0: \Delta \leq \Delta_0$ vs $H_1: \Delta > \Delta_0$ می‌شود. از طرفی داریم که

$$f_U(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{n-1}{m-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \times \frac{\Delta u^{\frac{n-1}{2}-1}}{\left(\Delta + \frac{n-1}{m-1}u\right)^{\frac{m+n-2}{2}}}$$

بنابراین

$$\Delta_0 < \Delta_1 \Rightarrow \frac{f_U(u|\Delta_1)}{f_U(u|\Delta_0)} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \left(\frac{\Delta_0 + \frac{n-1}{m-1}u}{\Delta_1 + \frac{n-1}{m-1}u} \right)^{\frac{m+n-2}{2}}$$

که یک تابع صعودی از u است. بنابراین این خانواده دارای خاصیت MLR در U است و در نتیجه

آزمون UMP (یا UMPI بر اساس U) عبارت است از

$$\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} 1 & U > c \\ 0 & U < c \end{cases}$$

که در آن

$$\alpha = E_{\Delta=\Delta_0}[\varphi(\tilde{X})] = P_{\Delta=\Delta_0}(U > c) = P_{\Delta=\Delta_0}\left(F_{(n-1, m-1)} > \frac{c}{\Delta_0}\right) \Rightarrow c = \Delta_0 F_{\alpha}(n-1, m-1)$$

پس آزمون UMPI به اندازه α عبارت است از

$$\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} 1 & U > \Delta_0 F_{\alpha}(n-1, m-1) \\ 0 & U < \Delta_0 F_{\alpha}(n-1, m-1) \end{cases}$$

■

بخش ۳: فواصل اطمینان پایا

فرض کنید G گروهی از تبدیلات روی $\mathcal{X}$ باشد که خانواده توزیعهای $\{f_{\theta,\mu} | (\theta,\mu) \in \Omega\}$ را پایا نگه می‌دارد. فرض کنید G^- گروه ایجاد شده توسط G روی Ω باشد. اگر $\{f_{\theta,\mu} | (\theta,\mu) \in \Omega\}$ می‌باشد فرض خواهیم کرد که θ' بستگی به $\bar{g}$ و θ دارد و به μ' بستگی ندارد و بنابراین $\bar{g}$ یک تبدیل روی فضای $\Theta \ni \theta$ ایجاد می‌کند. به همین دلیل برای راحتی از نمایش $\theta' = \bar{g}(\theta)$ استفاده می‌کنیم. حال فرض کنید $S(x)$ یک فاصله اطمینان باشد. برای هر $g \in G$ یک تبدیل g^* روی S در فضای Θ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\overline{g^*}(S) = \{\bar{g}(\theta) | \theta \in S\}$$

یعنی $\overline{g^*}(S)$ عبارت از مجموعه‌ای از نقاط است که به وسیله بکار بردن $\bar{g}$ روی هر $\theta \in S$ به دست می‌آید. با توجه به اصول پایایی بایستی فواصل اطمینانی را مورد نظر قرار دهیم که در رابطه زیر صدق کنند

$$\overline{g^*}(S(x)) = S(g(x)) \quad \forall x \in \mathcal{X}, g \in G \quad (1)$$

اگر خانواده‌ای از فواصل اطمینان $S(x)$ در شرط (۱) صدق کند آنگاه آن را یک فاصله اطمینان پایا (هم پایا) گویند. اگر تبدیل g را به عنوان تغییر در مختصات تعبیر کنیم آنگاه رابطه (۱) به این معنی است که فاصله اطمینان بستگی به دستگاه مختصاتی که داده‌ها از آن به دست آمده‌اند، ندارد. توجه کنید که از رابطه (۱) به دست می‌آید

$$\bar{g}(\theta) \in S(g(x)) \Leftrightarrow \theta \in \overline{g^*}^{-1}(S(g(x))) \Leftrightarrow \theta \in S(x) \quad (2)$$

مثال ۳-۱: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از $N(\theta, \sigma^2)$ باشند.

الف- در برآورد μ تبدیل $G = \{g_{a,b} | g_{a,b}(x) = a + bx \quad a \in R, b > 0\}$ را در نظر بگیرید در این صورت خانواده فواصل اطمینان

$$\theta \in S(x) = \bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

تحت این تبدیل پایا است زیرا

$$\begin{aligned}
 S(g(\tilde{x})) &= (a + b\bar{x}) \pm t_{1-\alpha/\gamma}(n-1) \frac{bS}{\sqrt{n}} = a + b \left(\bar{x} \pm t_{1-\alpha/\gamma}(n-1) \frac{S}{\sqrt{\gamma}} \right) \\
 \theta \in \bar{x} \pm t_{1-\alpha/\gamma}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} &\Rightarrow a + b\theta \in a + b \left(\bar{x} \pm t_{1-\alpha/\gamma}(n-1) \frac{S}{\sqrt{\gamma}} \right) \\
 &\Rightarrow \bar{g}(\theta) \in a + b \left(\bar{x} \pm t_{1-\alpha/\gamma}(n-1) \frac{S}{\sqrt{\gamma}} \right) \\
 &\Rightarrow \bar{g}^*(S(x)) = a + b \left(\bar{x} \pm t_{1-\alpha/\gamma}(n-1) \frac{S}{\sqrt{\gamma}} \right) \\
 &\Rightarrow S(g(\tilde{x})) = \bar{g}^*(S(x))
 \end{aligned}$$

ب- در برآورد σ^2 تبدیل $G = \{g_c \mid g_c(\tilde{x}) = c\tilde{x}\}$ را در نظر بگیرید در این صورت خانواده

$$\sigma^2 \in S(\tilde{x}) = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/\gamma}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/\gamma}^2(n-1)} \right) \quad \text{فواصل اطمینان}$$

تحت این تبدیل پایا است زیرا

$$\begin{aligned}
 S(g(\tilde{x})) &= \left(\frac{c^2(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/\gamma}^2(n-1)}, \frac{c^2(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/\gamma}^2(n-1)} \right) = c^2 S(\tilde{x}) \\
 \sigma^2 \in S(\tilde{x}) &\Rightarrow c^2 \sigma^2 \in c^2 S(\tilde{x}) \Rightarrow \bar{g}^*(S(\tilde{x})) = c^2 S(\tilde{x}) \\
 &\Rightarrow S(g(\tilde{x})) = c^2 S(\tilde{x})
 \end{aligned}$$

■

رابطه فواصل اطمینان پایا و آزمون فرضهای پایا

تعریف ۳-۱: یک خانواده از فواصل اطمینان سطح $(1-\alpha)$ ی $S(X)$ را به طور یکنواخت

صحیح‌ترین پایا (UMAI) گویند هرگاه اولاً $S(X)$ پایا باشد و ثانیاً در بین تمام فواصل اطمینان

سطح $(1-\alpha)$ ی پایا دارای کمترین احتمال پوشش خطای

$$P_{\theta, \mu}(\theta' \in S(X)) \quad \forall \theta' \neq \theta$$

باشد.

■

برای به دست آوردن رابطه بین فواصل اطمینان پایا و آزمونهای پایا، فرض کنید برای هر $\theta_0 \in \Theta$ یک گروه از تبدیلات G_{θ_0} موجود باشد که مسئله آزمون فرض $H(\theta_0): \theta = \theta_0$ را پایا نگه دارد و G را برابر اجتماع تمام گروه‌های G_{θ} در نظر بگیرید، یعنی $G = \bigcup_{\theta} G_{\theta}$.

قضیه ۳-۱: الف- فرض کنید $S(x)$ یک خانواده از فواصل اطمینان پایا تحت G باشد و فرض کنید $A(\theta) = \{x \mid \theta \in S(x)\}$ در این صورت ناحیه پذیرش $A(\theta)$ تحت G_{θ} برای هر θ پایا است.
ب- اگر به علاوه، برای هر θ_0 ناحیه پذیرش $A(\theta_0)$ یک ناحیه پذیرش برای یک آزمون UMPI در $H(\theta_0)$ به اندازه α باشد آنگاه خانواده فواصل اطمینان $S(x) = \{\theta \mid x \in A(\theta)\}$ یک خانواده از فواصل اطمینان پایای UMA در سطح $1-\alpha$ است.

الف- $\theta \in \Theta$ ثابت و $g \in G_{\theta}$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\begin{aligned} g(A(\theta)) &= \{g(x) \mid \theta \in S(x)\} = \left\{x : \theta \in S(g^{-1}(x))\right\} \stackrel{(۱)}{=} \left\{x \mid \theta \in \overline{g}^{*-1}(S(x))\right\} \\ &\stackrel{(۲)}{=} \left\{x \mid \bar{g}(\theta) \in S(x)\right\} \stackrel{(۳)}{=} \{x \mid \theta \in S(x)\} = A(\theta) \\ g \in G_{\theta} &\Rightarrow \bar{g}(\theta) = \theta \end{aligned}$$

پس ناحیه فرض $A(\theta)$ تحت g_{θ} برای هر θ پایا است.

ب- فرض کنید $S'(X)$ هر خانواده از فواصل اطمینان سطح $1-\alpha$ پایا برای θ باشد بنابراین طبق قسمت الف، $A'(\theta) = \{x \mid \theta \in S'(x)\}$ ناحیه پذیرش یک آزمون پایا برای آزمون $H(\theta)$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} P_{\theta', \mu}(\theta \in S'(X)) &= P_{\theta', \mu}(X \in A'(\theta)) && (\text{خطای نوع دوم آزمون پایا در } \theta') \\ &\geq P_{\theta', \mu}(X \in A(\theta)) && (\text{خطای نوع دوم آزمون UMPI در } \theta') \\ &= P_{\theta', \mu}(\theta \in S(X)) \end{aligned}$$

پس $S(X)$ یک فاصله اطمینان سطح $(1-\alpha)$ ی UMPI است.



توجه (۱): با توجه به قضیه قبل ناحیه پذیرش یک آزمون UMPI یک فاصله اطمینان را به دست می‌دهد که اگر پایا باشد (در شرط (۱) صدق کند) آنگاه این فاصله UMAI است.

(۲): با توجه به رابطه بین فواصل اطمینان و آزمون فرض $x \in A(\theta) \Leftrightarrow \theta \in S(x)$ ، رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\left\{ \theta \mid g(x) \in A\left(\overline{g^*}(\theta)\right) \right\} = \left\{ \theta \mid x \in A(\theta) \right\} \quad \forall \theta \text{ and } \forall g \in G_\theta \quad (3)$$

زیرا از رابطه (۱) داریم که $\overline{g^*}^{-1}(S(g(x))) = S(x)$ پس

$$\begin{aligned} \overline{g^*}^{-1}(S(g(x))) &= \overline{g^*}^{-1} \left\{ \theta \mid g(x) \in A(\theta) \right\} \\ &= \left\{ \overline{g^*}^{-1}(\theta) \mid g(x) \in A(\theta) \right\} \\ &= \left\{ \theta \mid g(x) \in A\left(\overline{g^*}(\theta)\right) \right\} \end{aligned}$$

■

مثال ۳-۲: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, \sigma^2)$ باشند. یک فاصله اطمینان UMAI برای θ به دست آورید.

حل: در مبحث آزمون فرض‌های UMPI مشاهده کردیم که در آزمون

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta \neq \theta_0 \quad \text{آزمون UMPI به اندازه } \alpha \text{ عبارت بود از (مثال ۲-۵)}$$

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \left| \frac{\sqrt{n} \bar{x}}{S} \right| > t_{1-\alpha/2}(n-1) \\ 0 & \left| \frac{\sqrt{n} \bar{x}}{S} \right| < t_{1-\alpha/2}(n-1) \end{cases}$$

حال اگر گروه تبدیلات $G_{\theta_0} = \left\{ g \mid g(\underline{x}) = a(\underline{x} - \theta_0) + \theta_0, a \neq 0 \right\}$ را در نظر بگیریم آنگاه

آزمون فرض $H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1: \theta \neq \theta_0$ تحت این تبدیل پایا می‌ماند و $(X_1, \dots, X_n)$ به $(a(X_1 - \theta_0) + \theta_0, \dots, a(X_n - \theta_0) + \theta_0)$ تبدیل می‌شوند و بنابراین آزمون UMPI بر اساس این

تبدیل جدید به صورت زیر به دست می‌آید (ثابت کنید)

$$\varphi(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{|\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)|}{S} > c \\ 0 & \frac{|\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)|}{S} < c \end{cases}$$

حال اگر قرار دهیم $\{\bar{g} \mid \bar{g}(\theta) = a(\theta - \theta_0) + \theta_0, a \neq 0\}$ آنگاه

$$\bar{g}(\theta, \sigma^2) = (a(\theta - \theta_0) + \theta_0, a^2 \sigma^2) = (\bar{g}(\theta), a^2 \sigma^2)$$

یعنی $\bar{g}$ یک تبدیل روی $\theta \in \Theta$ ایجاد می‌کند. اگر قرار دهیم

$$A(\theta) = \left\{ \tilde{X} \mid \frac{|\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0)|}{S} < c \right\}$$

آنگاه

$$S(\tilde{X}) = \{\theta \mid \tilde{X} \in A(\theta)\} = \left\{ \theta \mid |\bar{x} - \theta| < c \frac{S}{\sqrt{n}} \right\}$$

یک خانواده از فواصل اطمینان UMAI است به شرط آنکه نشان دهیم این خانواده تحت گروه کلی

$$G = \bigcup_{\theta} G_{\theta} = \left\{ g_{a,b} \mid g_{a,b}(\tilde{x}) = a + b\tilde{x} \quad a, b \in R \right\}$$

پایا است که این مطلب در مثال ۳-۱ نشان داده شده است.

روش دیگر نشان دادن پایایی با استفاده از رابطه (۳) به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \left\{ \theta \mid g_{a,b}(\tilde{x}) = A(\bar{g}^*(\theta)) \right\} &= \left\{ \theta \mid |a + b\bar{x} - a - b\theta| < \frac{c|b|S}{\sqrt{n}} \right\} \\ &= \left\{ \theta \mid |\bar{x} - \theta| < \frac{cS}{\sqrt{n}} \right\} \\ &= \{\theta \mid \tilde{x} \in A(\theta)\} \end{aligned}$$

■

- 1- Ferguson, T. S. (1967). Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach, Academic Press, New York.
- 2- Lehman E. L. (2005). Testing Statistical Hypotheses, Third Edition, Springer, New York.