باسمه تعالی

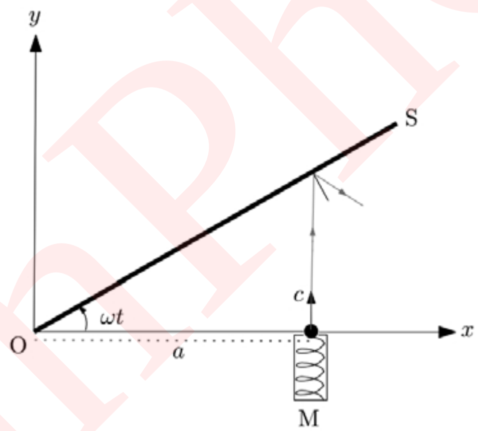
آزمون اول دوره تابستان ۱۴۰۰

مدت آزمون: ۳ ساعت

توجه: تعداد سوال‌ها ۵ تاست.

(1

در شکل زیر نیم‌خط OS مقطع یک سطح بازتابنده را در لحظه دلخواه t نشان می‌دهد. در لحظه $t=0$ نیم‌خط OS بر محور $+x$ منطبق است. سطح بازتابنده حول محوری که عمود بر صفحه شکل است و از نقطه O می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. تفنگ M (در صفحه شکل) گلوله کوچکی را در لحظه $t = t_0$ از نقطه $x=a$ بر روی محور x به موازات محور y شلیک می‌کند. سرعت گلوله ثابت و برابر c است. در این مسئله به‌طور کلی از گرانش چشم‌پوشی کنید.



آ) معادله‌ای را بیابید که از حل آن t_1، زمان برخورد گلوله با سطح بازتابنده، به دست آید.

ب) یک روش ترسیمی برای به دست آوردن t_1، ارائه دهید. بر روی نموداری که می‌کشید کلیه کمیت‌های معلوم و کمیت مطلوب، t_1، را مشخص کنید.

پ) کمینه c چه باشد تا امکان برخورد گلوله با سطح بازتابنده وجود داشته باشد؟

ت) با فرض آن که c از کمینه مذکور در بند (پ) بیشتر باشد زمان T_0، را طوری بیابید که به ازای $t_0 > T_0$ گلوله به سطح بازتابنده برخورد نکند. برای این کار کافی است T_0 را روی نمودار بند (ب) مشخص کنید.

ث) بیشینه مقدار ممکن برای t_1 را به دست آورید.

ج) جواب معادله بند (آ) را با فرض $a\omega >> c$ می‌توان به صورت $t_1 = t_0 + \epsilon$، نوشت. مقدار ϵ را در اولین تقریب به دست آورید.

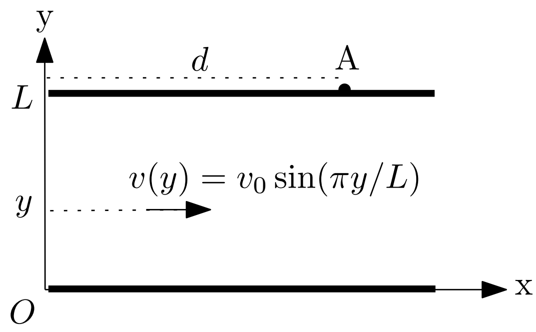
در دستگاهی که سطح بازتابنده ساکن است، این سطح مثل یک آینه عمل می‌کند؛ یعنی زاویه امتدادهای تابش و بازتابش با خط عمود با هم برابرند. در این مسئله برای سهولت فرض می‌کنیم سرعت گلوله در مقایسه با سرعت حرکت نقاط سطح بازتابنده بسیار بزرگتر است. در این صورت می‌توان در لحظه برخورد توپ، سطح بازتابنده را تقریبا ساکن فرض کرد. به این ترتیب اندازه سرعت توپ بعد از برخورد نیز تقریبا همان c است. در ادامه مسئله جواب قسمت (آ) یعنی t_1 را معلوم فرض کنید. مسیرهای تابش و بازتاب گلوله در صفحه شکل قرار دارند.

چ) معادله مسیر گلوله پس از بازتاب از روی سطح و نیز معادلات پارامتری آن یعنی $x(t)$ و $y(t)$ را به دست آورید.

ح) زمان t_{0m} را چنان پیدا کنید که برای $t_0 < t_{0m}$ گلوله پس از برخورد از محور x عبور کند.

خ) در صورت عبور گلوله بازتابیده از محور x این اتفاق در چه لحظه‌ای و در چه نقطه‌ای از محور x رخ می‌دهد؟

2)



مطابق شکل رودخانه‌ای به عرض L در نظر بگیرید. بردار سرعت آب همه جا موازی محور x است ولی اندازهٔ سرعت آب در قسمت‌های مختلف عرض رودخانه متفاوت است و در دستگاه مختصات نشان داده شده روی شکل با رابطهٔ $v(y) = v_0 \sin(\pi y/L)$ داده شده است.

قایقی که آن را مانند یک نقطه در نظر می‌گیریم می‌خواهد از مبدأ مختصات به نقطهٔ A برود که مطابق شکل به فاصلهٔ d از محور y واقع است. اندازهٔ سرعت قایق نسبت به آب رودخانه همواره برابر مقدار ثابت U است. زاویهٔ بردار سرعت قایق نسبت به آب، با جهت حرکت آب (محور x) نیز همواره ثابت است. این زاویه را θ بنامید.

آ) برای این که قایق از O به A برسد $\sin\theta$ را بر حسب کمیت‌های معلوم L، d، v_0 و U به دست آورید.

ب) آیا به ازای هر مقدار دلخواهی برای کمیت‌های معلوم، امکان طی مسیر بین O و A وجود دارد؟ اگر نه چه شرطی بین آن‌ها باید برقرار باشد؟

پ) زمان رسیدن قایق از O به A را بر حسب کمیت‌های معلوم L، d، v_0 و U به دست آورید.

ت) معادلهٔ مسیر حرکت قایق را در دستگاه مختصات x-y به دست آورید. اشکالی ندارد جواب این قسمت بر حسب θ باشد.

ث) به ازای مقادیر عددی $L = 200\ \mathrm{m}$، $d = 600\ \mathrm{m}$، $v_0 = 1\ \mathrm{m/s}$ و $U = 0.5\ \mathrm{m/s}$ زاویهٔ θ و زمان رسیدن قایق از O به A چقدر است؟

فرمول‌های زیر ممکن است مفید باشند:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin a = \frac{2\tan(a/2)}{1+\tan^2(a/2)}$$

$$\cos a = \frac{1-\tan^2(a/2)}{1+\tan^2(a/2)}$$

$$\frac{d}{dx}\sin ax = a\cos ax, \qquad \frac{d}{dx}\cos ax = -a\sin ax$$

3)

الف) میله بارداری به طول L دارای چگالی بار یکنواخت خطی λ است. میدان الکتریکی را روی عمود منصف میله و در فاصله z از مرکز میله به دست آورید.

حال دو میله به طول‌های $L_۱ = L_۲ = ۲D$ که به ترتیب دارای چگالی‌های بار یکنواخت خطی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ می باشند را در نظر بگیرید. میله اول بر روی محور x ها و در فاصله $x = -D$ تا $x = D$ قرار گرفته است. میله دوم در صفحه $z = D$ و در راستای محور y ها در فاصله $y = -D$ تا $y = D$ قرار گرفته است.

ب) میدان الکتریکی این مجموعه را در نقطه $\vec{r} = z\hat{k}$ به دست آورید.

پ) اگر میدان الکتریکی در نقطه $z = ۲D$ صفر باشد، نسبت $\frac{\lambda_۱}{\lambda_۲}$ را به دست آورید.

ت) حال فرض کنید که $z \gg D$ باشد، عبارت مربوط به میدان الکتریکی را تا مرتبه $(\frac{1}{z})^۴$ به دست آورید و جمله متناظر با دو قطبی الکتریکی را مشخص کنید.

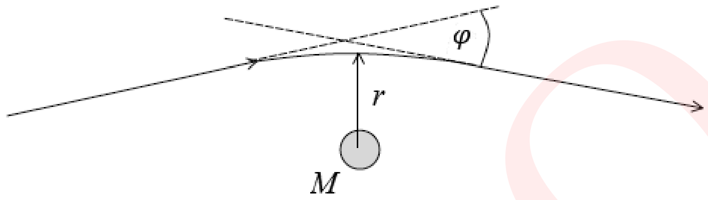
راهنمایی:

$$(۱ + x)^{\alpha} = ۱ + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha + ۱)}{۲} x^۲ + \cdots.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}}$$

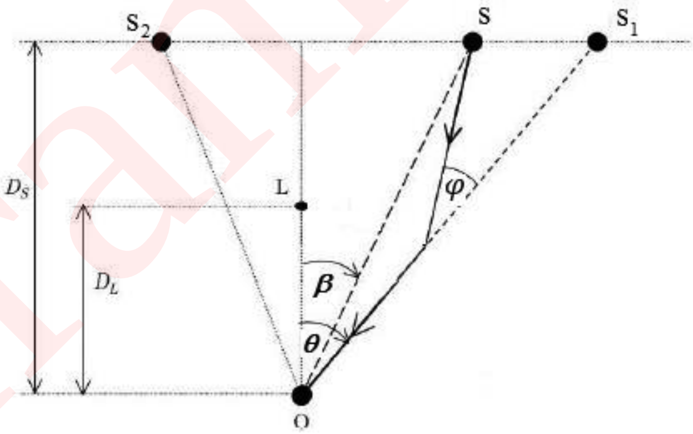
4)

نظریه نسبیت عام پیش‌بینی می‌کند وقتی پرتو نوری از کنار یک ستاره متقارن کروی با جرم M عبور می‌کند، به اندازه φ منحرف می‌شود. برای انحراف‌های کوچک، اندازه φ به جرم M، کمترین فاصله پرتو تا ستاره، r، ثابت گرانش، G، و سرعت نور، c، بستگی دارد. توجه کنید که ثابت گرانش در رابطه $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$ ظاهر می شود که F نیروی بین دو جرم m_1 و m_2 است که در فاصله d از هم هستند.



آ) با تحلیل ابعادی زاویه φ را برحسب کمیت‌های مذکور به دست آورید.

حال مطابق شکل فرض کنید جسم بزرگ L که مانند یک عدسی گرانشی عمل می‌کند پرتوهای نوری که از یک منبع S تابش می‌شود منحرف می‌کند و تصویرهای S1 و S2 تشکیل می‌شود. در اینجا φ ، β ، و θ زوایای بسیار کوچک هستند. D_L و D_S به ترتیب فاصله ناظر O تا جسم بزرگ L و فاصله ناظر O تا امتداد SS1 است. توجه کنید که مسئله را دو بعدی در نظر بگیرید.



ب) با توجه به رابطه‌ای که در قسمت آ) برای φ به دست آوردید، نشان دهید زاویه θ از معادله

$$\theta^2 - \beta\theta = F(G, M, c, D_L, D_S)$$

به دست می‌آید. تابع F را مشخص کنید.

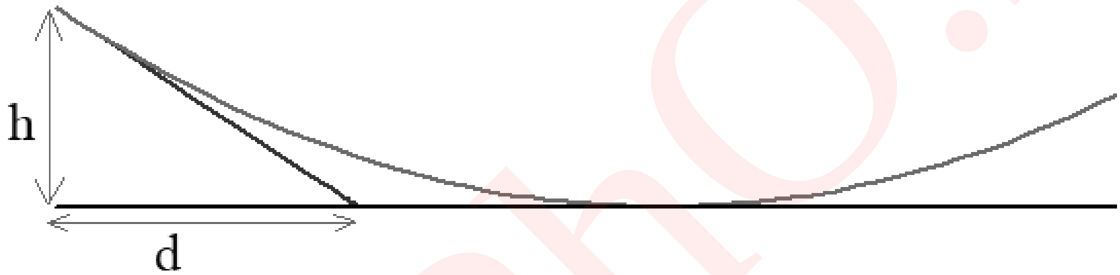
ج) اگر $\beta = 0$ باشد، مقدار θ را به دست آورید. تصویر منبع S در این حالت در آسمان چه طور دیده می‌شود؟

د) در حالت $\beta \neq 0$ مقادیر θ را به دست آورید.

5)

سراب:

به عنوان یک مدل، می‌توان فرض کرد که دمای هوا، به صورت تابعی از فاصله از سطح زمین است. در این مدل برای ضریب شکست هوا داریم، $n = 1 + \frac{A}{T}$ که n، ضریب شکست هوا، T دمای هوا در مقیاس کلوین و A ضریبی ثابت است. یعنی هر چه دما بالاتر رود، ضریب شکست کاهش می‌یابد. از آنجا که تحت تابش خورشید،



دمای هوا در سطح زمین بالاتر است، در نتیجه ضریب شکست هوا کمتر است و این باعث انحراف نور در نزدیکی سطح زمین می‌شود و برای ما تصویر آسمان از روی سطح زمین به صورت آب (خیسی) جلوه می‌کند که به آن «سراب» می‌گویند.

حال فرض کنید، چشم ما در ارتفاع h از یک زمین مسطح قرار گرفته و در فاصله‌ی d و دورتر از آن، سراب را مشاهده می‌کند.

الف) اگر دمای مکان قرارگیری چشم (یعنی ارتفاع h از سطح زمین) در مقیاس کلوین، برابر T_0 باشد، دمای سطح زمین در مقیاس کلوین چقدر است؟ جواب را بر حسب A، T_0، h و d بنویسید.

ب) با فرض اینکه $h = 1.80\text{m}$، $d = 300.0\text{m}$، $T_0 = 300.0\text{K}$ و ضریب شکست هوا در دمای T_0 برابر 1.00029 است، دمای سطح زمین را پیدا کنید.