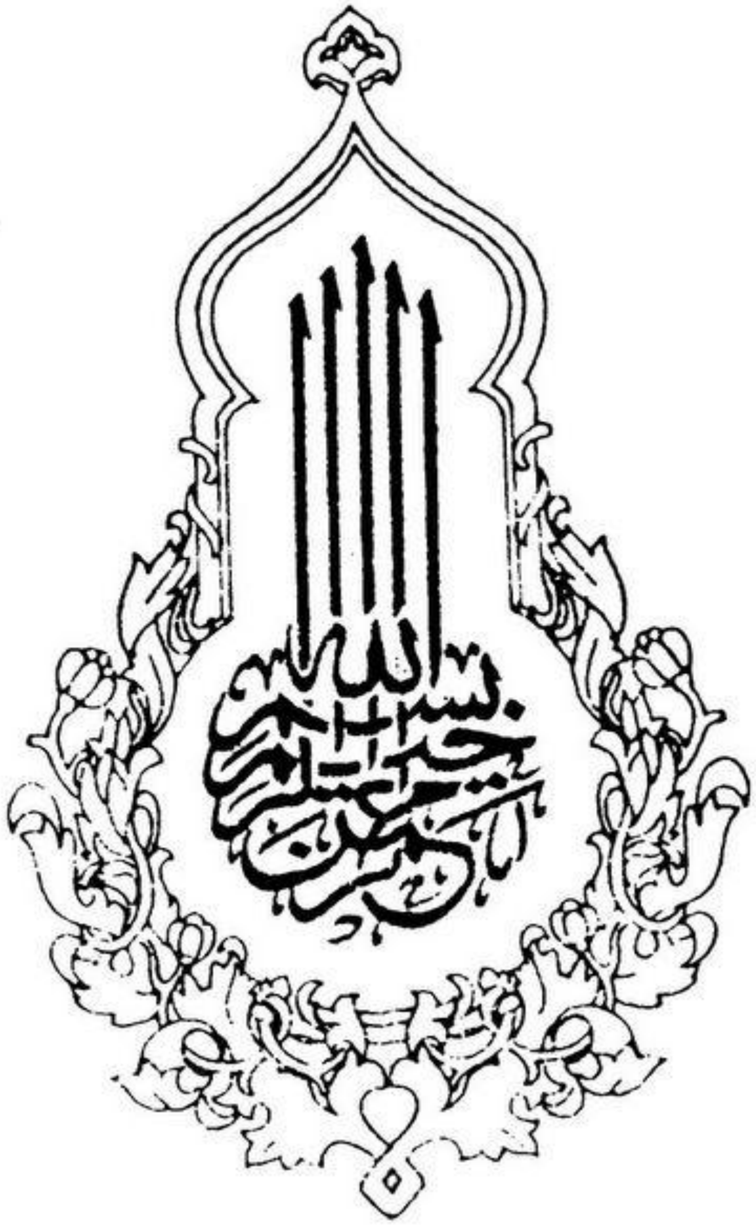


این مجموعه ی ناچیز تقدیم به پیشگاه امام زمان(عج)

سوالات دوره تابستانه المپیاد فیزیک
سال ۸۵

تهیه شده توسط طه رجب زاده

یک فاتحه وصلوات نصار گذشتگان این بنده حقیر بفرمایید

برای تمامی استفاده کنندگان از این مجموعه آرزوی سرافرازی وسربلندی دارم

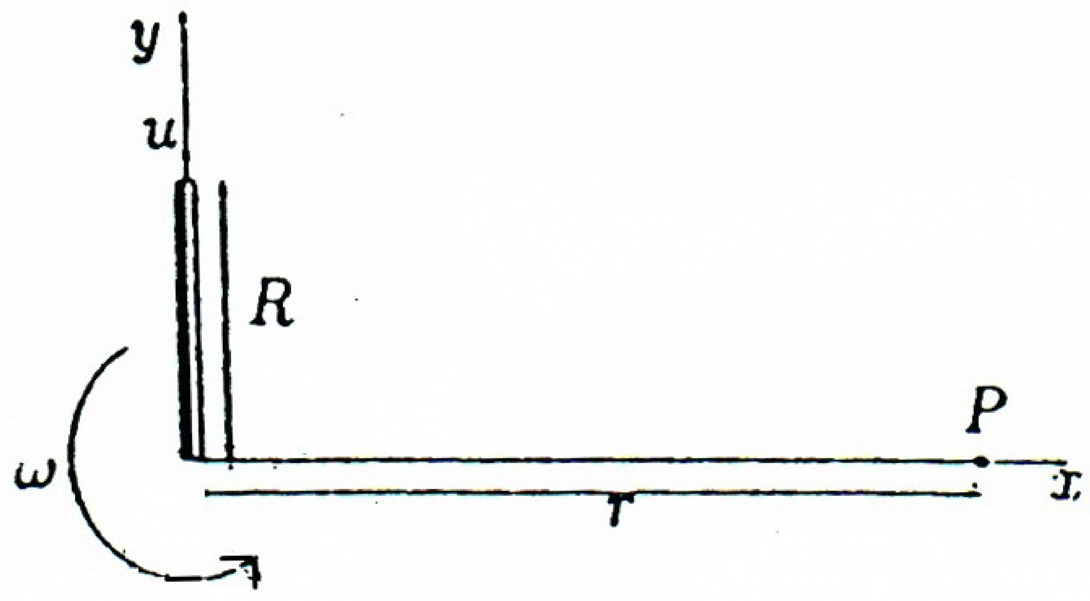
۸۵/۵/۴

وقت: ۴ ساعت

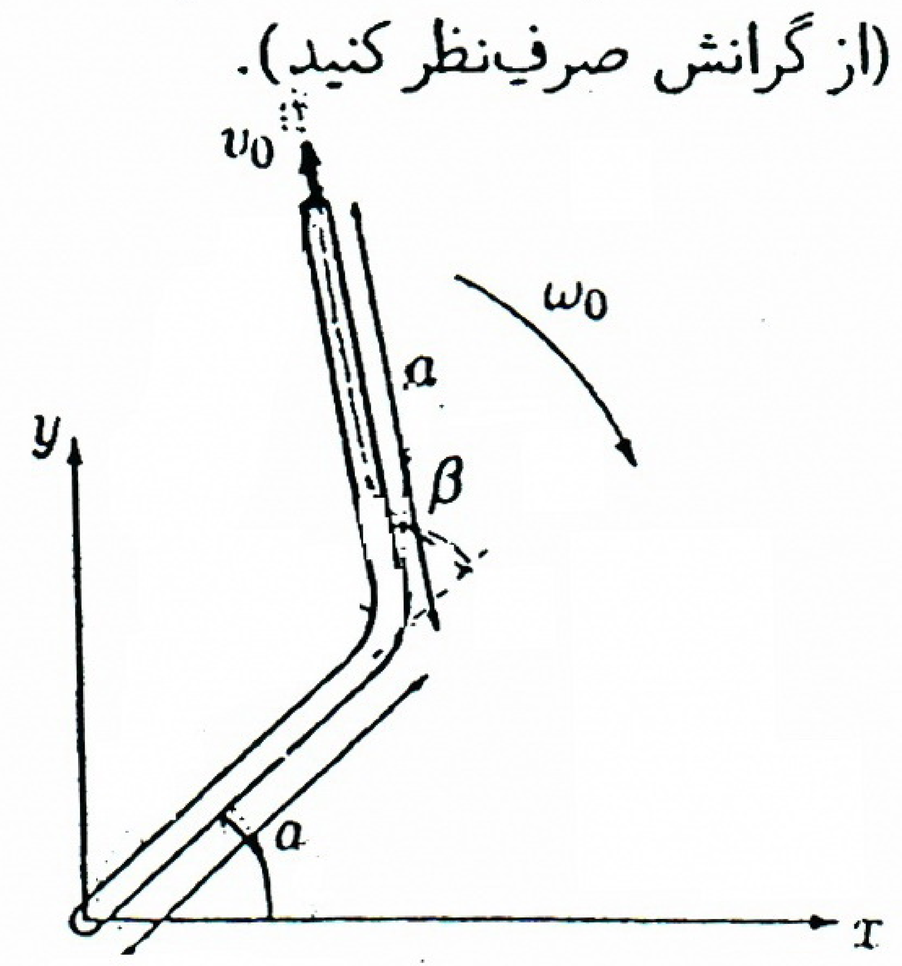
باسمه تعالی

امتحان اول المپیاد فیزیک (تابستان ۸۵)

مسئله‌ی 1) یک انتهایِ لوله‌ای به طولِ R در مبدأِ مختصات قرار دارد. آب با سرعتِ u نسبت به لوله از سرِ دیگر خارج می‌شود. لوله در لحظه‌ی $t = 0$ در جهتِ $\hat{y}$ است و با سرعتِ زاویه‌ایِ ω شروع به دوران حولِ محورِ z می‌کند (راستایِ z عمود بر صفحه‌ی کاغذ و به سمتِ بیرون است). زمانی که اولین قطره‌ی آب به نقطه‌ی P با مختصاتِ $(r, 0)$ می‌رسد را به دست آورید. این زمان را در حالتِ حدّیِ $R\omega \ll u$ تا مرتبه‌ی یک و در حالتِ $R\omega \gg u$ تا مرتبه‌ی صفر حساب کنید (از گرانش صرف‌نظر کنید).



مسئله‌ی 2) مطابقِ شکل فواره‌ای از دو لوله‌ی متصل به هم به طولِ a ساخته شده است. زاویه‌ی بینِ دو لوله β است. آب از لوله‌ای که در مبدأ است وارد و از سرِ دیگر با سرعتِ اُفقیِ v_0 نسبت به فواره از آن خارج می‌شود. فواره هم با سرعتِ زاویه‌ایِ $\omega_0 = v_0 \tan(\beta/2)/(2a)$ حولِ محورِ قائم z می‌چرخد. فرض کنید در ابتدا سرِ فواره که آب از آن خارج می‌شود رویِ محورِ x باشد (از گرانش صرف‌نظر کنید).



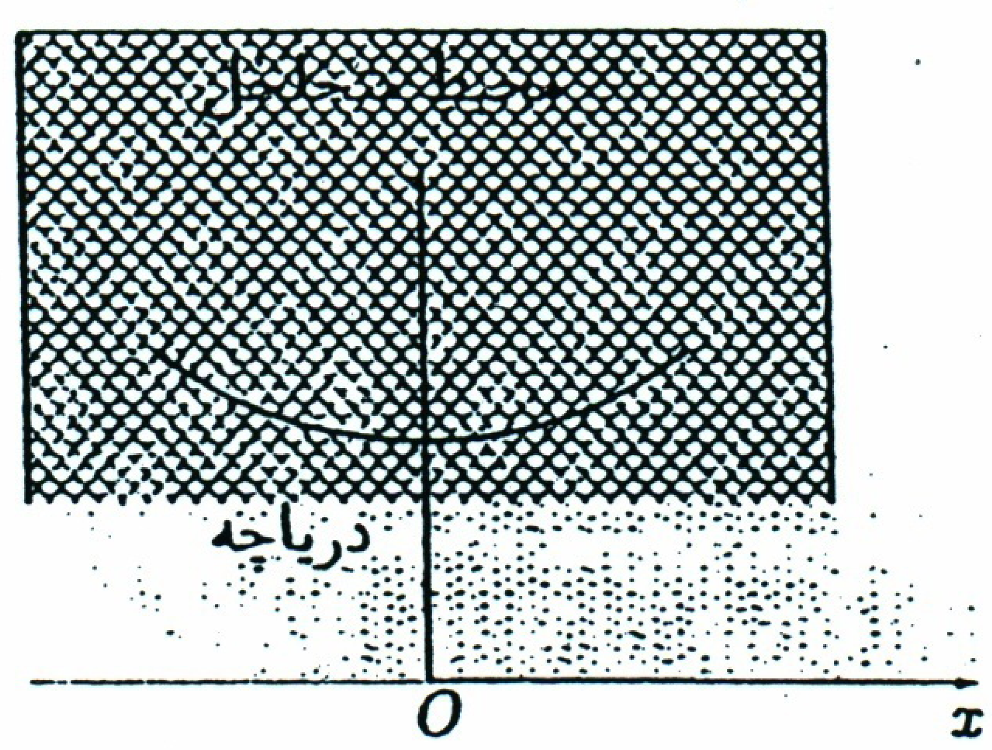
الف) معادله‌ی y بر حسبِ x قطره آبی که در زمانِ T از فواره خارج شده چیست؟

ب) جریانِ آبی که رنگی شده را به فواره وصل می‌کنیم. آبی که از فواره خارج می‌شود یک ردِّ رنگی برجا می‌گذارد. این ردِّ رنگی خمی در صفحه‌ی اِفقِ xy است. معادله‌ی این خم در زمانِ T را در دستگاهِ قطبی به دست آورید.

مسئله‌ی 3) می‌دانیم آب در یک لوله‌ی مویین به شعاعِ r تا ارتفاعِ h بالا می‌آید به طوری‌که $h = C/r$، و C مقداری ثابت است. ضریبِ تخلخل در یک ماده، Φ، به صورتِ نسبتِ حجمِ فضایِ خالی به حجمِ کلِّ ماده تعریف می‌شود:

$$\Phi := \frac{V_{\text{خالی}}}{V_{\text{کل}}}$$

مطابقِ شکلِ یک محیطِ متخلخلِ بزرگ که یک دریاچه‌ی بی‌نهایت‌بزرگ در زیرِ آن است را در نظر بگیرید.



تخلخلِ محیط را ثابت و برابر با Φ بگیرید. با تقریبِ خوبی می‌توان این محیطِ متخلخل را اجتماعِ یک‌سری لوله‌ی مویین دانست. فرض کنید شکلِ آبِ بالارفته در محیطِ متخلخل به شکلِ یک سهمی‌گون با معادله‌ی $h = h_0 + \alpha x^2$ باشد، که h ارتفاعِ سطحِ آب و x مختصه‌ی شعاعیِ استوانه‌ای است و در شکل نشان داده شده. شعاعِ یک لوله‌ی مویین در فاصله‌ی x از مبدأ، $r(x)$، تابعِ x است. تعدادِ لوله‌ها بر واحدِ سطح تابعِ x است که آن را با $f(x)$ نشان می‌دهیم. $n(x)$ تعدادِ لوله‌هایی است که فاصله‌شان از مرکز کوچک‌تر یا مساویِ x است.

الف) $r(x)$ را به دست آورید.

ب) $f(x)$ را به دست آورید.

ج) $n(x)$ را به دست آورید.

مسئله‌ی ۴)

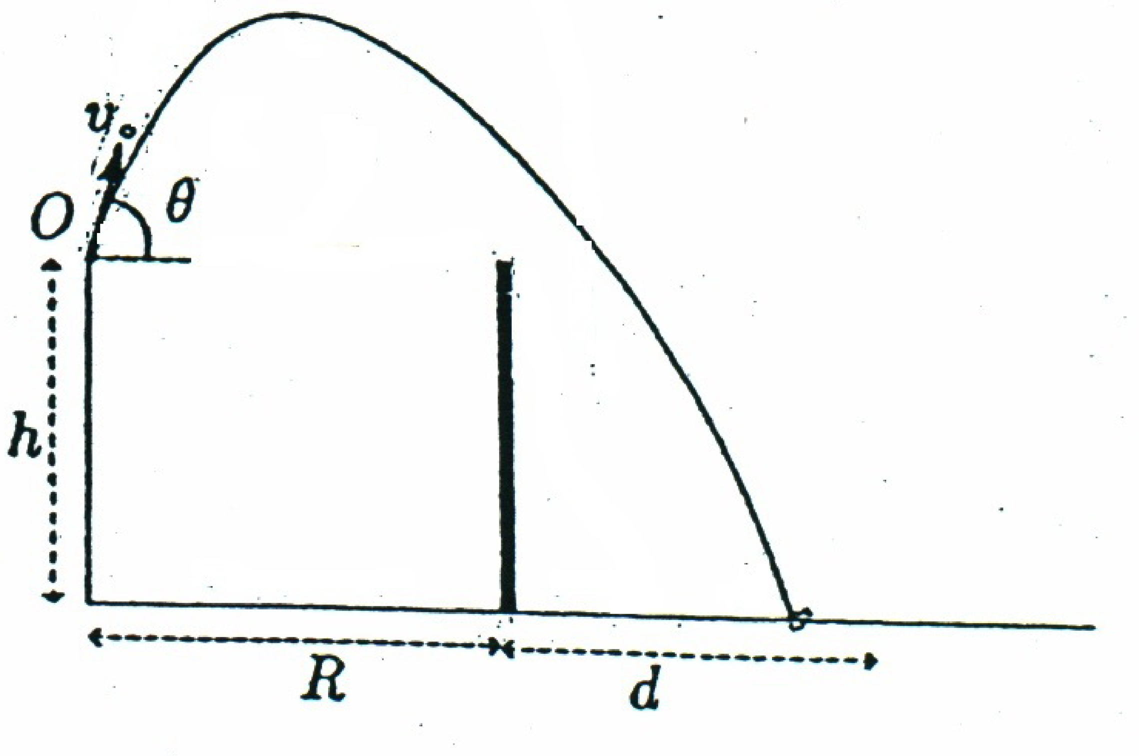
چهار نقطه‌ی A، B، C و D را که مختصات (دکارتی) آن‌ها به صورت

$$A(-۱۶,۶,۴) \qquad B(-۱,۲,-۳) \qquad C(۱,-۱,۳) \qquad D(۴,۹,۷)$$

است در نظر بگیرید. کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین خطی که از A و B می‌گذرد و خطی که از C و D می‌گذرد به دست آورید.

مسئله‌ی ۵)

یک توپ تنیس از نقطه‌ی O به ارتفاع h از سطح زمین و به فاصله‌ی افقی R از توری که ارتفاع آن نیز h است، پرتاب می‌شود. زاویه‌ی پرتاب نسبت به افق θ و پرتاب در صفحه‌ای عمود بر تور انجام می‌گیرد. اگر قرار باشد توپ در محدوده‌ی d از طرف دیگر تور به زمین بخورد، به ازای یک θی معین محدوده‌ی مجاز سرعت پرتاب (یعنی v_0) چقدر است؟ و برای اینکه چنین محدوده‌ای وجود داشته باشد چه رابطه‌ای بین d، h، R و θ باید باشد؟ از مقاومت هوا صرفنظر کنید.



مسئله ی ٦)

یک هواپیما در عرض ـ جغرافیایی ي ثابت ـ λ با سرعت ـ ثابت ـ 900 km/h نسبت به زمین حرکت می‌کند. بر حسب ـ مختصات ـ کروی یی که مرکز ـ آن مرکز ـ زمین و محور ـ z محور ـ قطبی ي زمین (به سو ي قطب ـ شمال) است، عرض ـ جغرافیایی متمم ـ مختصه ي θ و طول ـ جغرافیایی مختصه ي ϕ است. پارامتر ـ s را چنان تعریف می‌کنیم که $s = +1$ اگر هواپیما به شرق حرکت کند، و $s = -1$ اگر هواپیما به غرب حرکت کند. محیط ـ زمین 40 000 km است و یک روز را با d نشان می‌دهیم. هواپیما سر ـ ظهر شروع به حرکت می‌کند. طول ـ جغرافیایی ي مقصد منها ي طول ـ جغرافیایی ي مبدئ را با α، مدت ـ پرواز ـ هواپیما را با T، و زمان ـ محلی در مقصد در انتها ي پرواز منها ي زمان ـ محلی در مبدئ در ابتدا ي پرواز را با τ نشان می‌دهیم. (یعنی اگر مثلاً هواپیما پس از 4 ساعت پرواز به مقصد رسید و زمان ـ رسیدن ساعت 2 ي بعدازظهر ـ همان روز به وقت ـ مقصد بود، $T = 4$ h و $\tau = 2$ h است.)

توجه: حتماً همه ي جواب‌ها را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید، وگرنه ....

a) (τ/d) را بر حسب ـ (T/d)، s، و λ به دست آورید.

b) (τ/d) را بر حسب ـ $[\alpha/(2\pi)]$، s، و λ به دست آورید.

c) یک مسافر در هواپیما ساعت ـ ش را به وقت ـ مبدئ نگه داشته. کم‌ترین زمان ـ پرواز (جز صفر) را حساب کنید که وقت ی هواپیما به مقصد رسید زمان ی که ساعت ـ این مسافر نشان می‌دهد با زمان ـ مقصد یکی باشد. (یعنی مثلاً هردو 2 ي بعدازظهر را نشان دهند. 2 ي بعدازظهر و 2 ي بامداد یکی به حساب نمی‌آیند.)

d) λ و s را برا ي حالت ی حساب کنید که از هر جا هواپیما می‌گذرد در آن‌جا ظهر باشد.

e) فرض کنید هواپیما در همان عرض‌ِجغرافیایی ي بخش ـ d) حرکت می‌کند، اما در جهت ـ مخالف. کم‌ترین زمان ـ پرواز (جز صفر) برا ي این که هواپیما ظهر (به وقت ـ مقصد) به مقصد برسد را حساب کنید.

بسمه تعالی

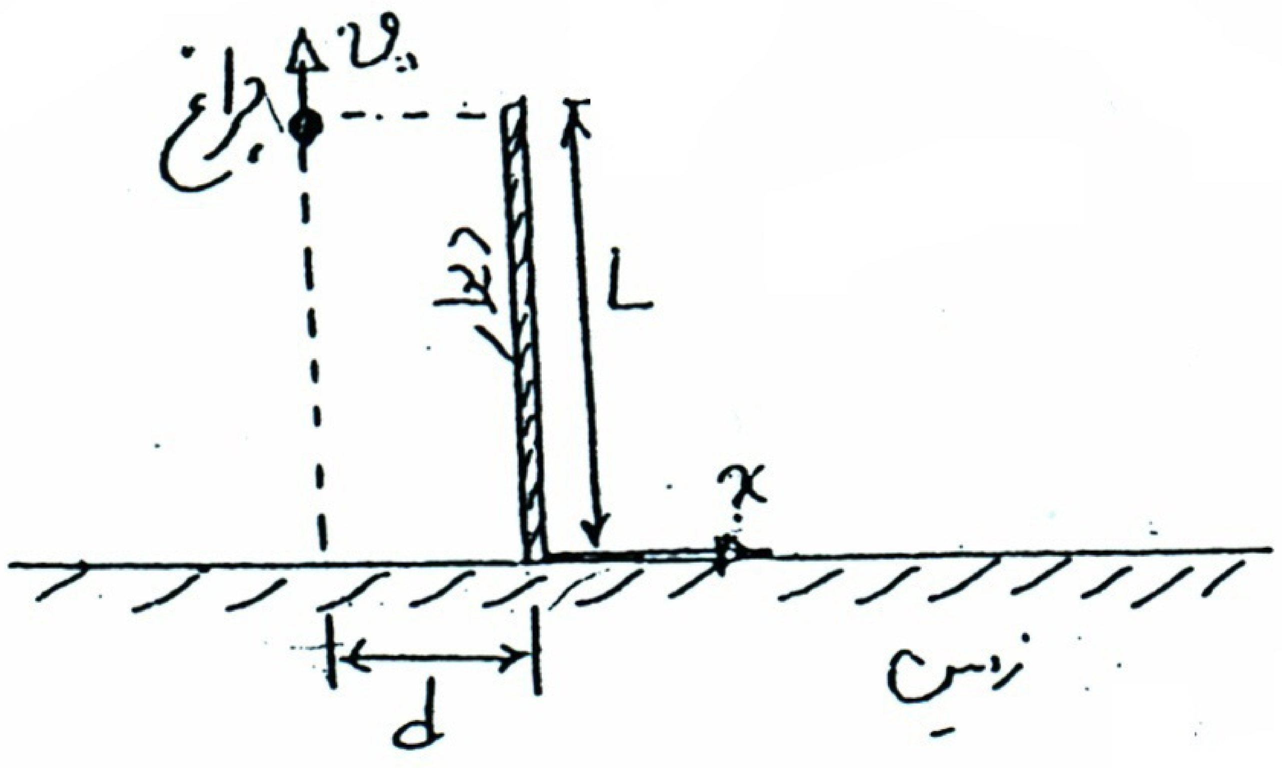
امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۵)

۸۵/۵/۱۸

وقت : ۴ ساعت

مسئله‌ی ۱

دیواری به طول L داریم. چراغی روشن در فاصله‌ی d از دیوار و در فاصله‌ی L از سطح زمین قرار دارد.



در لحظه‌ی $t=0$ چراغ با سرعت v_0 شروع به حرکت به سمت بالا می‌کند. از آنجایی که سرعت نور بی‌نهایت نیست نقطه‌ای در بی‌نهایت روشن نمی‌شود. اولین نقطه‌ای از سطح زمین که روشن می‌شود در فاصله‌ی x از پای دیوار در نظر بگیرید.

الف - T زمان روشن شدن نقطه‌ای که در فاصله‌ی x از دیوار وجود دارد را به دست آورید.

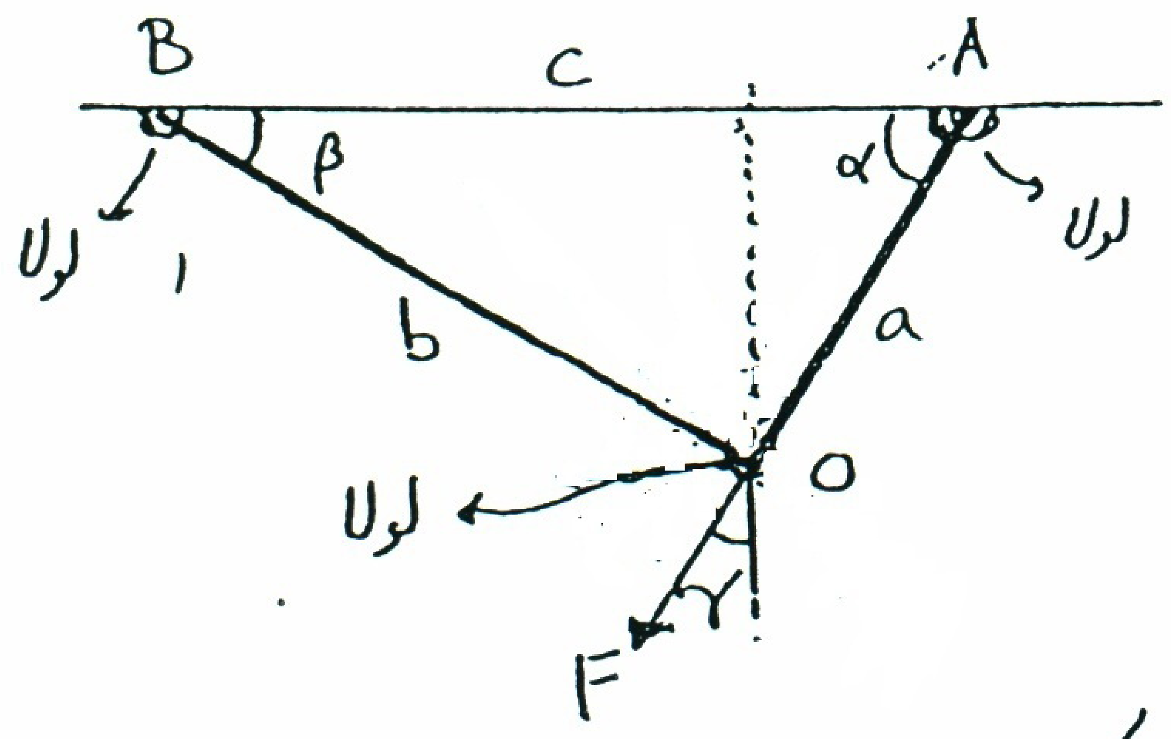
ب - نمودار T برحسب x را بکشید. (با کشیدن مجانب‌های احتمالی)

ج - نحوه‌ی روشن شدن سطح زمین را بگوئید و نمودار سرعت انتشار لکه‌ی روشن روی سطح زمین را برحسب x رسم کنید. (با مجانب‌های احتمالی)

د - معادله‌ای بنویسید که از روی آن بتوان x را به دست آورد.

هـ - معادله‌ی قسمت (د) را با فرض $\left(\frac{L}{d} \simeq 1\right)$ و $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ حل کنید و x را برحسب L ، d ، v_0 و c به دست آورید.

مسئله‌ی ۲



میله‌های OA و OB در نقطه‌های A و B به سقف و در نقطه‌ی O به یکدیگر لولا شده‌اند. هر یک از میله‌ها را می‌توان فنری با سختی K که خیلی زیاد است در نظر گرفت. نیروی F مطابق شکل با زاویه‌ی γ نسبت به قائم به نقطه‌ی O وارد می‌شود. از شتاب جاذبه صرف‌نظر کنید.

الف- زوایای α و β را برحسب a، b و c وقتی نیروی $F=0$ است بیابید.

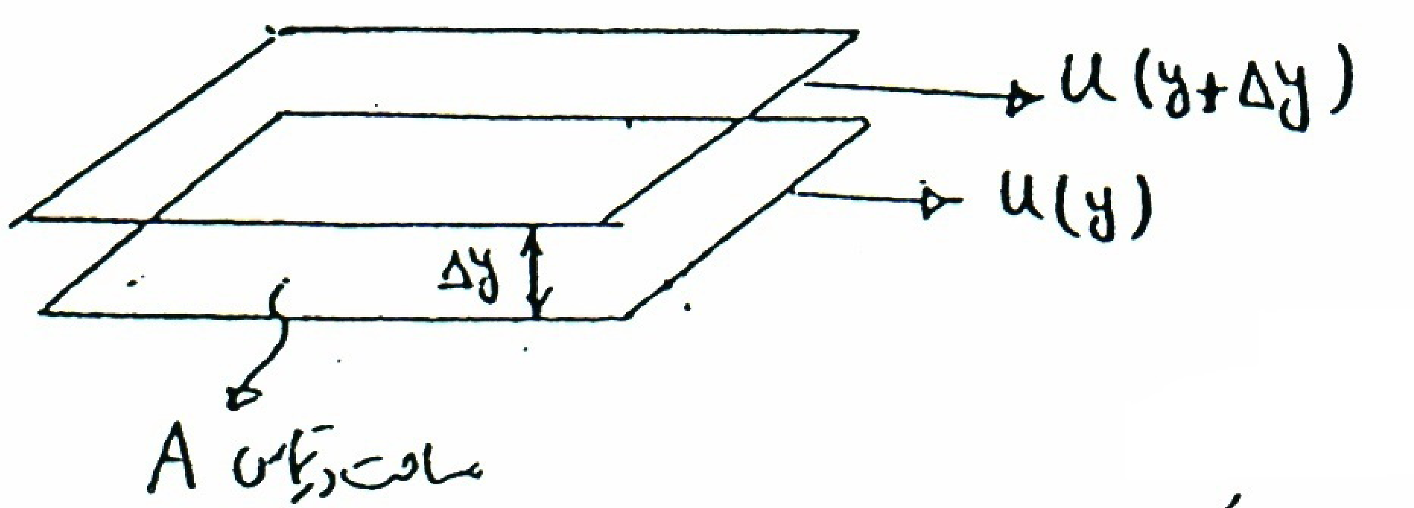
ب- درصورتی که میله‌ها صلب باشند مقدار نیروی وارد به هر میله (با وجود F) را بیابید. (نیروی وارد شده به هر میله در راستای خود آن میله است.)

ج- مقدار جابه‌جایی در هر میله را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{1}{K}$ پیدا کنید.

د- مقدار جابه‌جایی نقطه‌ی O را بیابید.

مسئله‌ی ۳

در این مسئله می‌خواهیم با استفاده از تحلیل ابعادی انتشار امواج صوتی را در یک مایع لزج بررسی کنیم. برای این کار ابتدا به تعریف ضریب گران‌روی می‌پردازیم. در یک مایع لزج هرگاه سرعت مایع در راستای عمود بر حرکت جریان سیال متغیر باشد بین هر دو لایه از مایع نیروی بازدارنده‌ای به‌وجود می‌آید که متناسب با مساحت مشترک دو لایه و مشتق سرعت افقی لایه‌ها نسبت به ارتفاع است. ضریب تناسب این رابطه را، ضریب گران‌روی می‌گویند و آن را با η نشان می‌دهند. همچنین از تقسیم این ضریب بر چگالی جرمی سیال ضریب گران‌روی سینماتیک به‌دست می‌آید که آن را با ν نشان می‌دهند.



$$F = -\eta A \frac{du}{dy}$$

حال یک جسم کروی به شعاع R را در داخل یک سیال با ضریب گران‌روی سینماتیک ν و چگالی ρ قرار می‌دهیم. این جسم با فرکانس زاویه‌ای ω در داخل سیال حرکت می‌کند و باعث می‌شود که در داخل سیال امواج صوت با سرعت c منتشر شوند. می‌خواهیم با فرض این‌که سرعت مشخصه‌ی جسم برابر با u باشد رابطه‌ای بین توان گرفته شده از جسم (P) و سایر کمیات بالا یعنی R، ν، ρ، ω، c و u به‌دست آوریم.

توجه کنید که توان (P)، انرژی بر واحد زمان است. بُعد انرژی هم از حاصل‌ضرب ابعاد نیرو و طول به‌دست می‌آید.

- ابتدا ابعاد هر یک از کمیت‌های بالا را به‌دست آورده و با استفاده از تحلیل ابعادی رابطه‌ای بین این کمیت‌ها به‌دست آورید.
- فرض کنید رابطه‌ی بالا توانی باشد. با توجه به این‌که P با $\frac{u^2}{c^3}$ متناسب است رابطه‌ی بالا را ساده کنید.
- هدف اصلی در این سؤال بررسی رابطه‌ی توانی بین P و ω است که با استفاده از ادعاهای بالا همچنان نامشخص باقی مانده است. حال با استفاده از بعضی ملاحظات فیزیکی راجع به رابطه‌ی بین P و لزجت و همچنین شعاع کره سعی کنید بازه‌ای برای توان ω تعیین کنید. (آیا P با لزجت و شعاع زیاد می‌شود؟)

مسئله‌ی ۴

در هر رأس مکعبی به ضلع a یک بار $+q$ هست. مرکز مکعب را مبداء مختصه‌ها بگیرید.

الف) پتانسیل در مرکز مکعب را حساب کنید ــ پتانسیل ∞ را صفر بگیرید.

ب) نقطه‌ی (x, y, z) خیلی به مرکز مکعب نزدیک است. تابع پتانسیل را در این نقطه تا مرتبه‌ی 2 (یعنی شامل جمله‌هایی از درجه‌ی دوم در x و y و z) به دست آورید.

ج) با استفاده از پتانسیل بالا، میدان الکتریکی را در نقطه‌ی (x, y, z) تا تقریب مرتبه‌ی 1 به دست آورید.

مسئله‌ی ۵

سطحِ مقطعِ مایعی که از یک لوله با سطحِ مقطعِ دایره‌ای خارج می‌شود، دایره می‌ماند. اگر سطحِ مقطعِ لوله کمی با دایره فرق داشته باشد سطحِ مقطعِ مایعِ خارج‌شده نوسان می‌کند: یعنی در یک جهت پهن و سپس نازک می‌شود.

الف– بسامدِ نوسانِ مایع ν (با بُعدِ T^{-1}) تابعی است از چگالیِ مایع ρ (با بُعدِ ML^{-3})، کششِ سطحیِ آن σ (با بُعدِ MT^{-2}) و سطحِ مقطعِ لوله A. با استفاده از تحلیلِ ابعادی رابطه‌ی بین این کمیت‌ها را به دست آورید. اگر ضریبِ ثابتی به دست آوردید، مقدارش را یک بگیرید.

ب– طولِ موجِ این نوسان برابر است با سرعتِ مایعِ خارج‌شده تقسیم بر بسامدی که از بندِ قبل به دست آورده‌اید. فرض کنید از یک قوری چای می‌ریزید. یک تخمین برایِ سرعتِ شاره‌ی خارج شده، و سطحِ مقطعِ لوله‌ی قوری بزنید. طولِ موجِ نوسانِ چایی که از قوری می‌ریزد به دست آورید. کششِ سطحیِ آب $\sigma \approx 0.7$ N/m است.

یک بره ی ماده ناحیه ی بین ـ صفحه‌ها ی $z = 0$ و $z = d$ را پر کرده است. این لایه بی‌بار است، و در زمان ـ صفر، چگالی ی بار (سطحی و حجمی) در آن هم صفر است. در زمان ـ صفر یک میدان ـ الکتریکی ی $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{z}}$ روشن می‌شود. در اثر ـ این میدان در صفحه‌ها ی $z = 0$ و $z = d$ بار جمع می‌شود. فرض می‌کنیم پس از زمان ـ صفر،

- بیرون ـ بره $E = E_0$ که E_0 مستقل از زمان و مکان است.
- درون ـ بره چگالی ی حجمی ی بار نداریم. فقط در صفحه‌ها ی $z = 0$ و $z = d$ است که بار داریم. چگالی ی سطحی ی بار در $z = d$ را با σ نشان می‌دهیم.
- بار ـ الکتریکی ی هر یک از بارها ی متحرک ـ درون ـ بره q است. به هر یک از این بارها علاوه بر نیرو ی ناشی از میدان ـ $\mathbf{E}$ یک نیرو ی میکروسکپی هم وارد می‌شود که به طور ـ مئثر برابر با $-(2m/\tau)\,\mathbf{v}$ است. m جرم ـ ذره؛ $\mathbf{v}$ سرعت ـ آن ($\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{z}}$)، و τ یک پارامتر ـ ثابت است.

تعداد ـ بارها ی متحرک بر حجم را با n نشان می‌دهیم. هدف محاسبه ی v و σ بر حسب ـ زمان (t) برا ی $t > 0$ است. هر جا در این محاسبه n ظاهر شد، آن را بر حسب ـ پارامتر ـ ω_p با

$$\omega_\mathrm{p} := \left(\frac{n\,q^2}{\epsilon_0\,m}\right)^{1/2}$$

بیان کنید. فرض کنید $\omega_\mathrm{p}\,\tau < 1$.

توجه: حتماً همه ی جواب‌ها ی نهایی را در مستطیل‌ها ی مشخص‌شده بنویسید، وگرنه ....

a) $(d\sigma/dt)$ را بر حسب ـ v و ثابت‌ها ی مسئله حساب کنید.

b) E درون ـ بره را بر حسب ـ σ و ثابت‌ها ی مسئله حساب کنید.

c) یک معادله ی دیفرانسیل برا ی v بر حسب ـ E (ی درون ـ بره) و ثابت‌ها ی مسئله بنویسید. (معادله ی دیفرانسیل یعنی یک رابطه بین ـ متغیر و مشتق‌ها ی آن.)

d) یک معادله ی دیفرانسیل به دست آورید که تنهامتغیر ـ آن v باشد.

e) برا ی معادله ی بالا جواب ی به شکل ـ $v(t) = A\,\exp(s\,t)$ بگیرید، که $(A \neq 0)$ و s ثابت اند. s را حساب کنید.

f) جواب ـ کلی ی معادله ی بخش ـ d) به شکل ـ $\sum_i A_i\,\exp(s_i\,t)$ است، که s_i ها جواب‌ها ی بخش ـ e)، و A_i ها ثابت اند. $v(t)$ را حساب کنید.

g) $\sigma(t)$ را حساب کنید.

بسمه تعالی

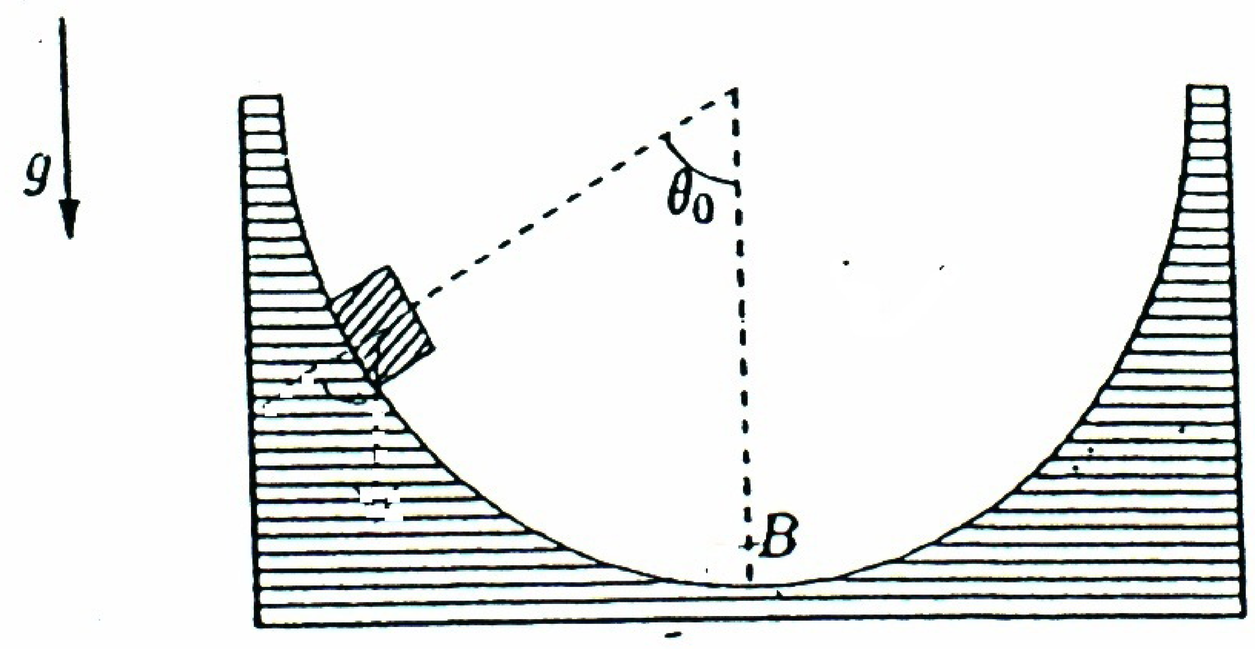
امتحان ترم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۵)

۸۵/۵/۲۵

وقت : ۴ ساعت

مسئله‌ی ۱

جسمی به جرم m درونِ نیم‌کره‌ي ثابتی به شعاع R از زاویه‌ي θ_0 رها می‌شود. ضریبِ اصطکاکِ ایستاییِ و جنبشیِ بینِ m و سطحِ داخلیِ نیم‌کره μ است.



جواب‌هاي خود را حتماً در جعبه‌هاي مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) قوانینِ نیوتن را براي جسمِ m بنویسید و از آن‌جا معادله‌ای بینِ $\ddot{\theta}$، $\dot{\theta}$، θ و پارامترهاي داده‌شده‌ي مسئله به دست آورید. نتیجه را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

b) با استفاده از

$$\ddot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}=\frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta},$$

و معادله‌ای که در بندِ قبل به دست آورده‌اید، معادله‌ای به صورتِ زیر براي v سرعتِ ذره به دست آورید.

$$\frac{dv^2}{d\theta}+C_0v^2=C_1\cos\theta+C_2\sin\theta.$$

ثابت‌هاي C_0، C_1، و C_2 را بر حسبِ μ، R، g به دست آورید.

c) جوابِ معادله‌ي بالا به شکلِ

$$v^2=A_0e^{-C_0\theta}+A_1\cos\theta+A_2\sin\theta$$

است. ثابت‌هاي A_0، A_1، و A_2 را بر حسبِ μ، R، g و θ_0 به دست آورید.

d) جوابی که در بندِ قبل به دست آورده‌اید را به شکلِ

$$v^2=e^{-C_0\theta}\left[f(\theta)-f(\theta_0)\right]$$

درآورید. $f(\theta)$ چیست؟

e) اگر $\theta_0=\pi/2$ باشد، به ازاي چه مقادیری از μ، ذره حتماً تا B پایین‌ترین نقطه‌ي نیم‌کره می‌رسد. کافی است معادله‌ای براي μ بیابید. لازم نیست این معادله را حل کنید.

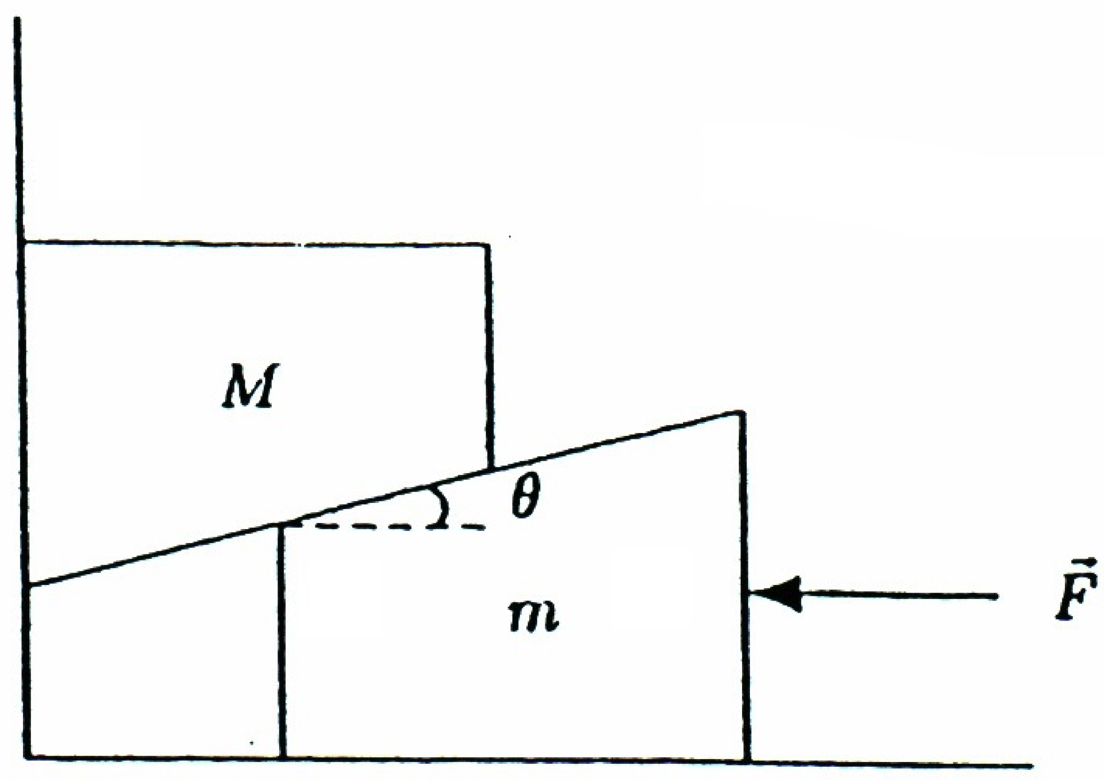
f) براي μ معین به ازاي چه مقادیری از θ_0 ذره در همان نقطه‌ي اولیه باقی می‌ماند.

g) براي μ معین به ازاي چه مقادیری از θ_0 ذره حتماً به B می‌رسد. کافی است معادله‌ای براي مقادیرِ مجازِ θ_0 بیابید

h) براي μ معین به ازاي چه مقادیری از θ_0 ذره حتماً حرکت می‌کند ولی قبل از این‌که به B برسد می‌ایستد. کافی است معادله‌ای براي مقادیرِ مجازِ θ_0 بیابید.

مسئله‌ی ۲

جسم M مطابق شکل، روی جسم m قرار دارد. علاوه بر این که دو جسم با هم تماس دارند، جسم m با سطح زمین و جسم M با دیوار در تماس است. ضریب اصطکاک ایستایی بین همه‌ی سطوح μ_s و شیب سطوح مایل دو جسم θ است. نیروی $\vec{F}$ (از لحاظ مقدار و جهت) حداکثر در چه محدوده‌ای می‌تواند متغیر باشد، تا اجسام ساکن بمانند؟



تعریف ِ کشش ِ سطحی به این شکل است. رو ی یک سطح یک پاره‌خط ِ فرضی ی کوچک در نظر بگیرید. بخش ی از سطح که در یک طرف ِ این پاره‌خط است، به بخش ِ دیگر نیرو یی وارد می‌کند که بر سطح مماس و بر پاره‌خط عمود است، و می‌خواهد آن بخش از سطح را به طرف ِ پاره‌خط بکشد. مقدار ِ این نیرو متناسب با طول ِ پاره‌خط است. به ضریب ِ تناسب کشش ِ سطحی (τ) می‌گویند:

$$f = \tau l$$

که l طول ِ پاره‌خط و f اندازه ی نیرو است.

یک سطح ِ کروی ی باردار را در نظر بگیرید. جرم ِ این سطح M و کشش ِ سطحی ی آن مقدار ِ ثابت ِ τ است. برا ی همه ی نیروها ی خواسته‌شده در مسئله، کافی است مئلفه ی شعاعی را به دست آورید.

توجه: حتماً همه ی جواب‌ها ی نهایی را در مستطیل‌ها ی مشخص‌شده بنویسید، وگرنه ....

a) عرق‌چین ی با نیم‌زاویه ی θ را در نظر بگیرید. (عرق‌چین ناحیه ای از سطح ِ کره است که درون ِ مخروط ی است که رئس ِ آن مرکز ِ کره و نیم‌زاویه ی رئس ‌ش θ است.) شعاع ِ کره را r بگیرید. به ازا ی θ ی کوچک، نیرو ی ناشی از کشش ِ سطحی وارد بر این عرق‌چین (F_τ) را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ به دست آورید.

b) فرض کنید بار ِ الکتریکی ی ثابت ِ Q به طور ِ یک‌نواخت رو ی این سطح پخش شده است. نیرو ی الکتریکی ی وارد بر همین عرق‌چین (F_e) را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ به دست آورید.

c) r_0 (شعاع ِ تعادل ِ این کره) را حساب کنید.

d) نیرو ی وارد بر عرق‌چین تقسیم بر جرم ِ آن را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ و تا مرتبه ی یک نسبت به $(r - r_0)$ حساب کنید و در این محاسبه Q را حذف کنید.

e) فرض کنید مقدار ی بار ِ الکتریکی به طور ِ یک‌نواخت رو ی این سطح پخش شده، چنان که پتانسیل ِ الکتریکی ی این سطح (نسبت به بی‌نهایت) مقدار ِ ثابت ِ V است. نیرو ی الکتریکی ی وارد بر عرق‌چین (F'_e) را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ به دست آورید.

f) r'_0 (شعاع ِ تعادل در حالت ِ پتانسیل‌ثابت) را حساب کنید.

g) نیرو ی وارد بر عرق‌چین تقسیم بر جرم ِ آن را تا کم‌ترین مرتبه نسبت به θ و تا مرتبه ی یک نسبت به $(r - r'_0)$ حساب کنید و در این محاسبه V را حذف کنید.

مسئله‌ی ۴

در داخل یک حلقه به شعاع R یک حباب با جرم ناچیز وجود دارد. کشش سطحی این حباب برابر τ است.

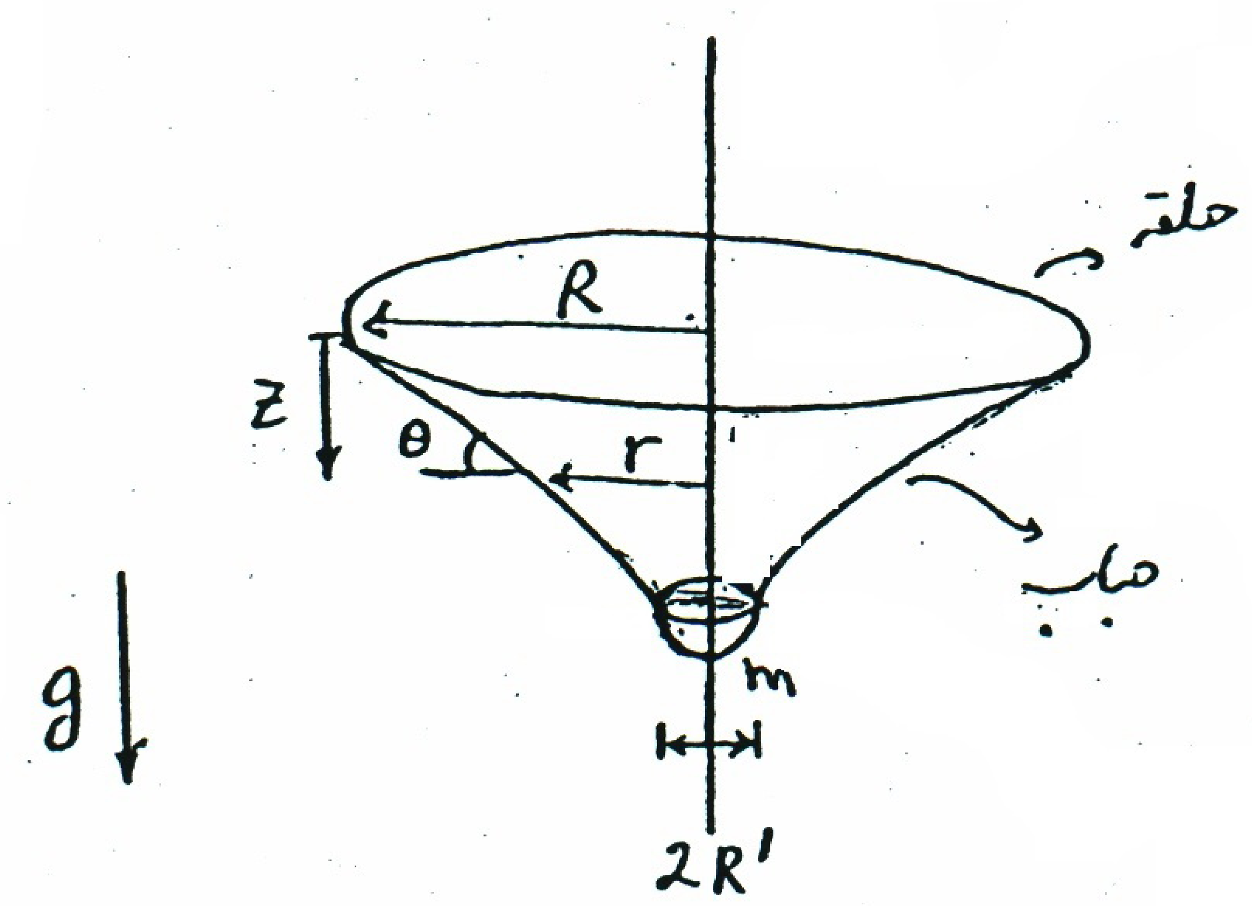
در داخل این حباب قطره‌ای به شکل نیم‌کره با شعاع R' وجود دارد. جرم این قطره را m فرض کنید.

می‌خواهیم شکل حباب را در حالت تعادل بیابیم.

الف - رابطه‌ای بین زاویه‌ی θ و r و سایر کمیت‌های مسئله بیابید.

ب - فرض کنید $\frac{mg}{R'\tau}$ کوچک است به طوری‌که قطره زیاد از مرکز حلقه پایین نیاید.

در این صورت Z را برحسب r بیابید.



بسمه تعالی

امتحان چهارم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۵)

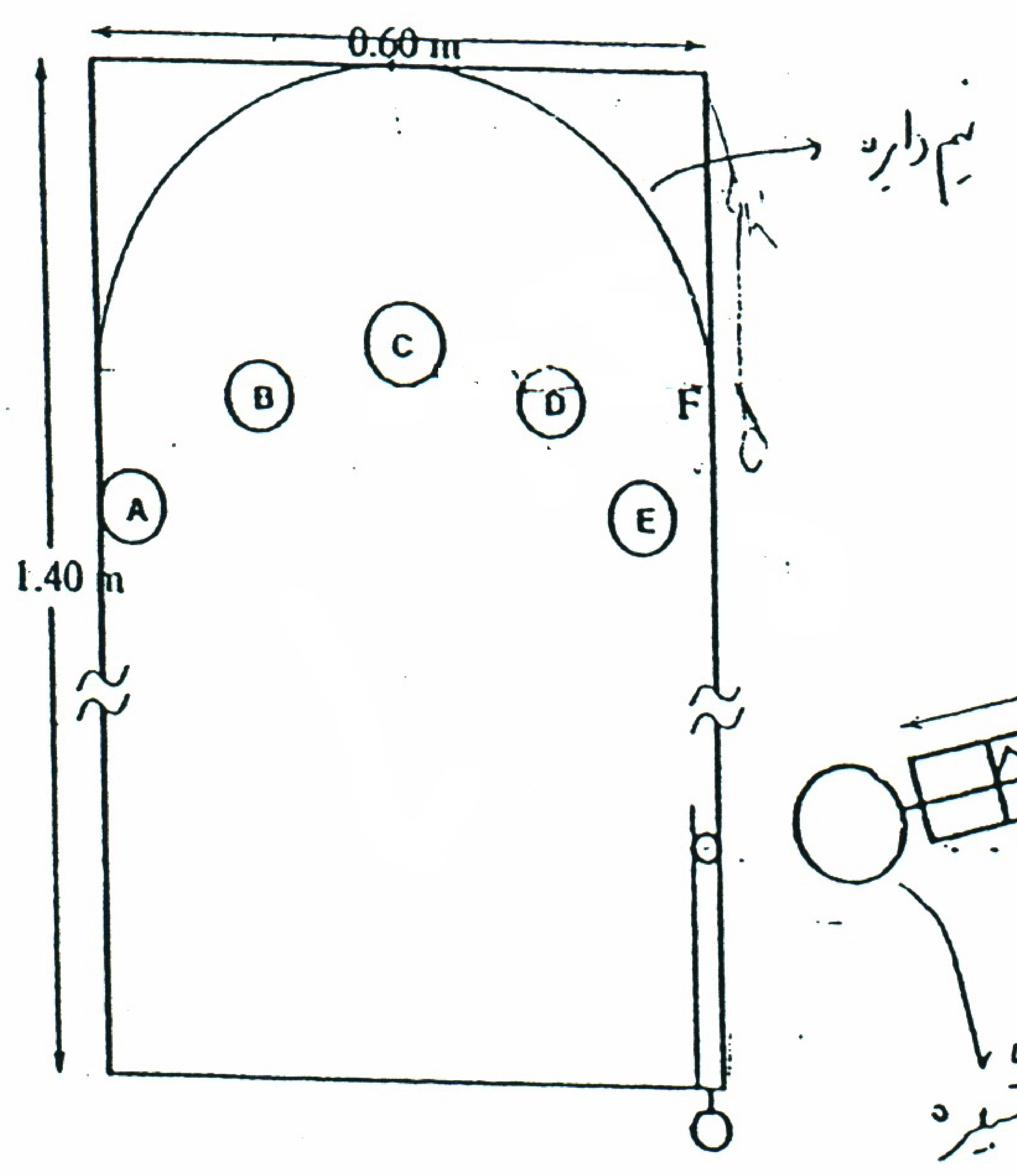
۱/۶/۸۵

وقت: ۵ ساعت

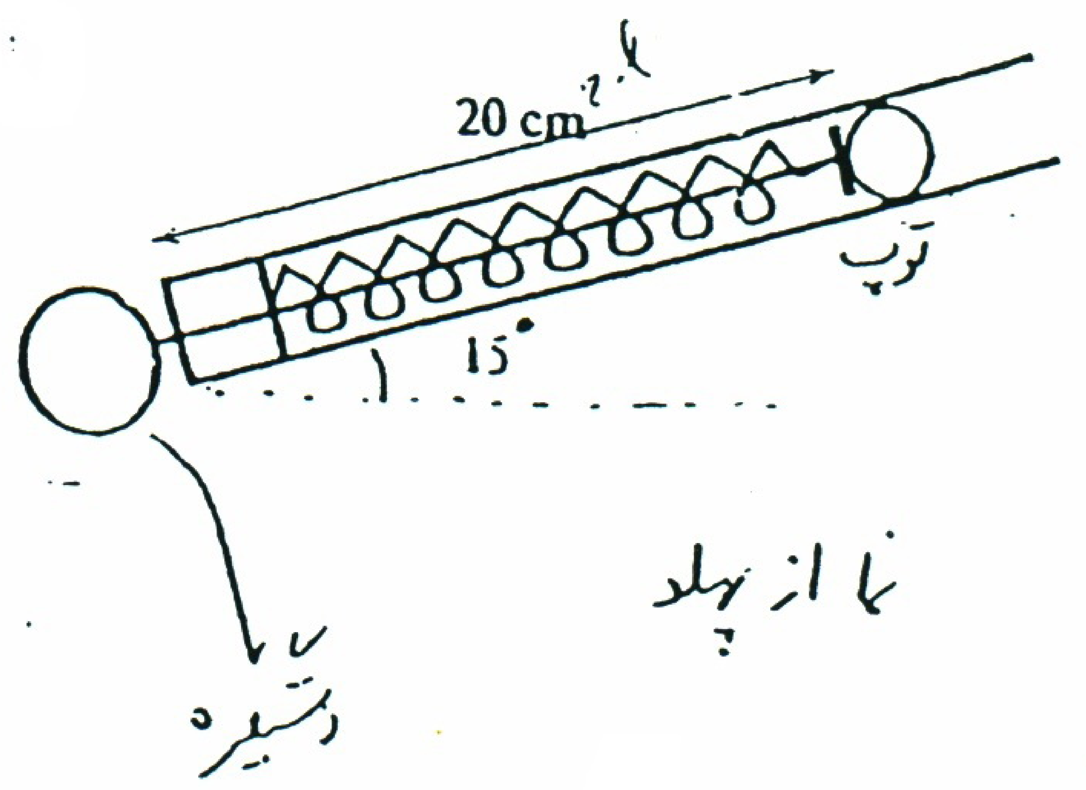
مسئله ی ۱

شکل زیر ماشین پین بال را نشان می دهد. در این بازی، یک بازیکن با کشیدن یک دستگیره فنری را فشرده می کند و هنگام آزاد کردن فنر، توپی که در تماس با آن است شوت می شود تا به یکی از اهداف مورد نظر برسد. صفحه ی میز یک پین بال نسبت به افق زاویه ی 15° می سازد و توپ آن ۱۰۰ گرم است و ثابت فنر آن $200 \frac{N}{m}$ است. فرض کنید توپ نمی غلتد و فقط سر می خورد و با میز هم اصطکاک ندارد.

از طول آزاد فنر حداقل چه قدر فنر را فشرده کنیم تا توپ بتواند به بالای نیم دایره برسد؟



نما از بالا



نما از پهلو

مسئله‌ی ۲

نیرویی که دوقطبی $\vec{P}_1$ به $\vec{P}_2$ وارد می‌کند از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\vec{P}_1\cdot\vec{r})\vec{P}_2 + 3(\vec{P}_2\cdot\vec{r})\vec{P}_1 + 3(\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2)\vec{r}}{r^5} - \frac{15(\vec{P}_1\cdot\vec{r})(\vec{P}_2\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^7}\right]$$

که $\vec{r}$ بردار واصل از دوقطبی $\vec{P}_1$ به دوقطبی $\vec{P}_2$ است.

فرض کنید جهت دوقطبی $\vec{P}_1$ و جهت دوقطبی $\vec{P}_2$ در راستای محور z است (جهت ثابت است) و در صفحه‌ی yz باشند (مطابق شکل).

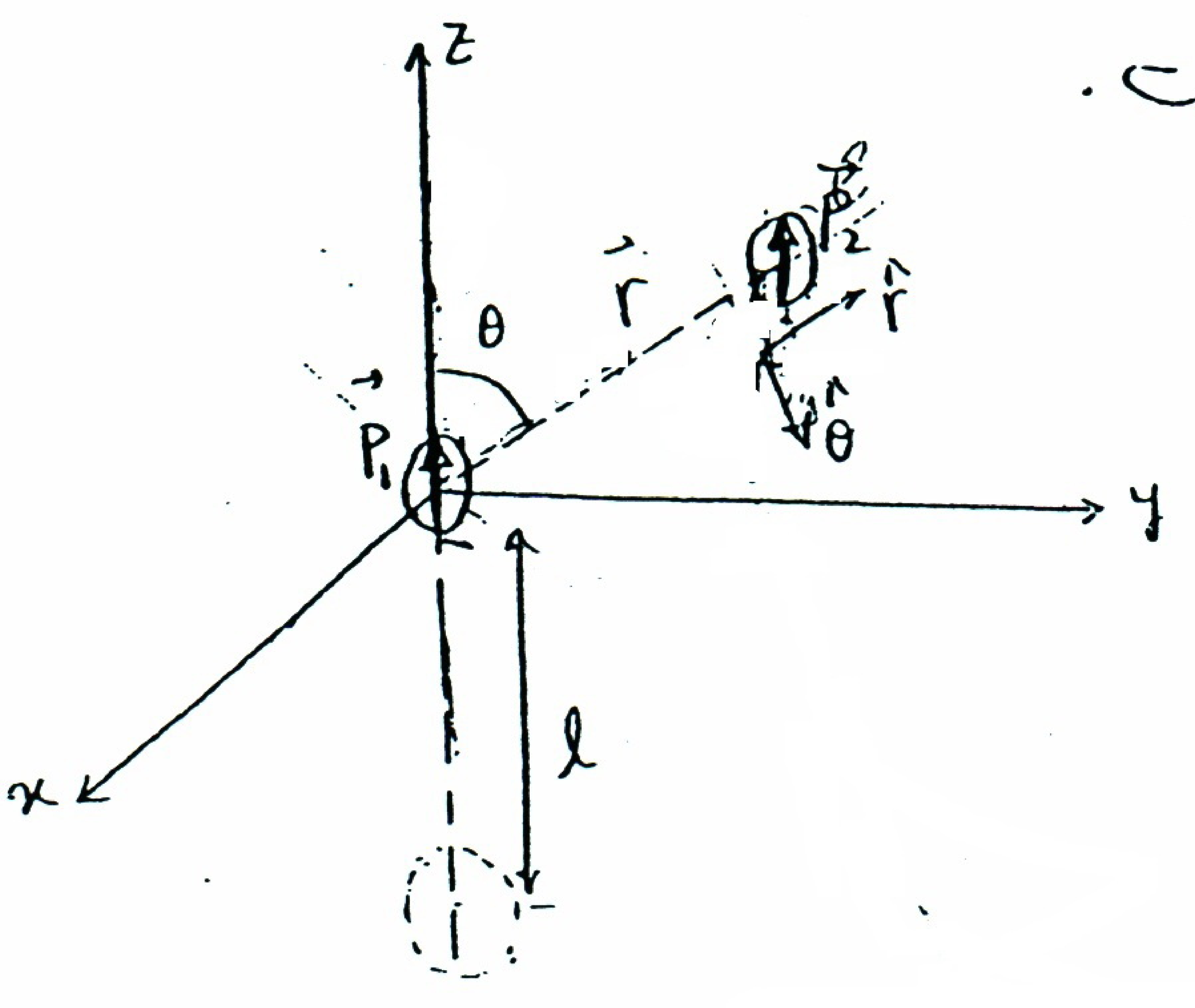
دوقطبی $\vec{P}_1$ در مبداء مختصات ثابت می‌باشد.

الف- نیروی الکتریکی وارد بر $\vec{P}_2$ را برحسب r، θ، P_1، P_2، $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ در چارچوب کروی به دست آورید.

ب- فرض کنید جرم دوقطبی $\vec{P}_2$، m است و در شتاب جاذبه‌ی $g(-\hat{z})$ قرار دارد. نقاط تعادل P_2 (r و θی تعادل) را به دست آورید.

ج- برای نقطه‌ی تعادل روی محور z $(x=0, y=0)$، فرض کنید دوقطبی مقید است در راستای محور y نوسان کند ($x=0$ و $z=$ ثابت). بسامد نوسانات کوچک $\vec{P}_2$ را برحسب g و l و ثابت‌های مسئله به دست آورید.

l فاصله‌ی دوقطبی از مبدأ مختصات است.



یک صفحه‌ی بزرگ رسانا که دارای برآمدگی به شکل نیم‌کره به شعاع a است در نظر بگیرید. ناحیه‌ای نیم‌کره‌ای روی همین برآمدگی است به شعاع r. این ناحیه صرفاً یک ناحیه‌ی جدا شده است و تأثیر الکتریکی در مسئله ندارد. حال بار q به جرم m را در بالای نیم‌کره‌ی بزرگ قرار می‌دهیم و آن را رها می‌کنیم تا سُر بخورد. می‌خواهیم زاویه‌ی جدایی بار از سطح نیم‌کره را به دست آوریم. فرض کنید $a \ll r$.

توجه: مسئله الکترواستاتیک است. از اثرات مغناطیسی و جریان چشم بپوشید. در ضمن دستگاه در میدان گرانش یکنواخت $-g\hat{y}$ است.

الف- f_r و f_θ (نیروهای الکتریکی وارد به بار q) به ترتیب در راستای $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ (راستاهای قطبی) را تا مرتبه‌ی سوم $\frac{a}{r}$ برحسب θ بیابید.

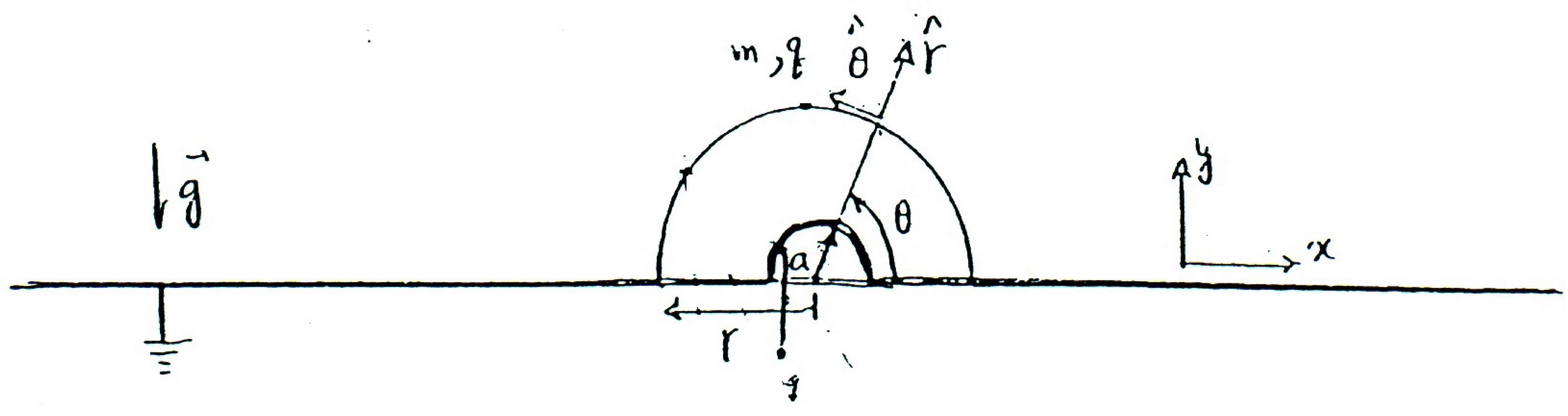
ب- معادلات حرکت را بنویسید. (N را نیروی عمود بر سطح وارد بر بار q بگیرید.)

ج- یکی از معادلات به شکل

$$\ddot{\theta} = f(\theta) \qquad (1)$$

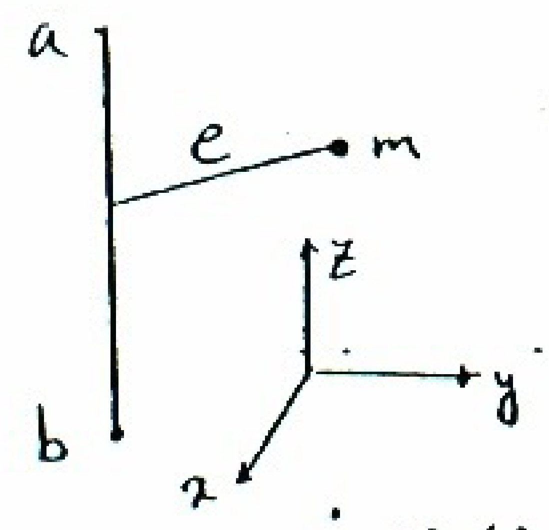
است. از این معادله $\dot{\theta}^2$ را پیدا کنید و در معادله‌ی دیگر جایگذاری کنید. (راهنمایی: یک $\dot{\theta}$ در معادله‌ی (1) ضرب کنید.) سپس N را برحسب θ بیابید.

د- با توجه به معادله‌ی به دست آمده برای N ابتدا زاویه‌ی جدایی را تا مرتبه‌ی صفرم ($\theta^{(0)}$) بیابید و نشان دهید که جواب برای θ تا اولین مرتبه‌ی غیرصفر به صورت: $\theta_{\text{جدایی}} = \theta^{(0)} + \frac{a^3}{r^3}\frac{A}{\cos\theta^{(0)}}$ است. مقدار A چه قدر است؟ A را برحسب $\sin\theta^{(0)}$ و $\eta = \frac{kq^2}{mgr^2}$ بیان کنید.



مسئلهٔ ۴

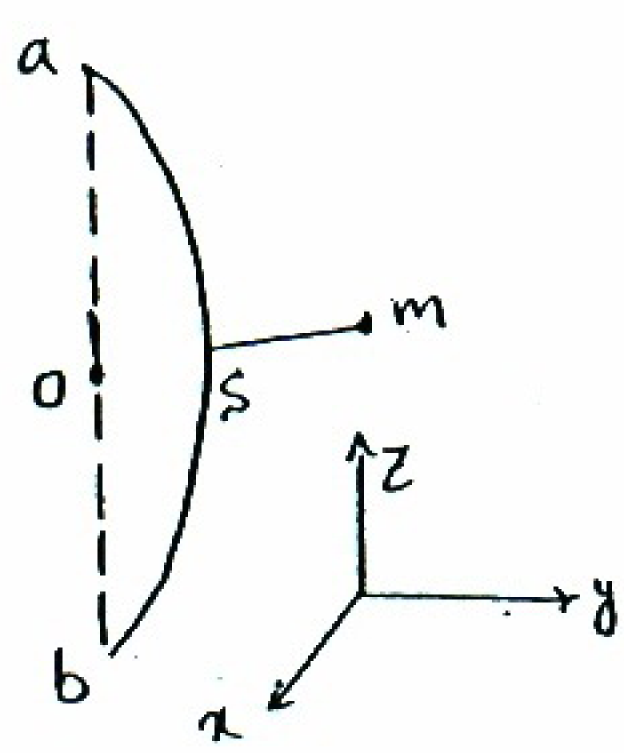
میله‌ای بدون جرم به طول e را درنظر بگیرید که از یک طرف به محور جوش شده و از طرف دیگر به جرم نقطه‌ای m وصل شده. (از جرم محور صرف‌نظر کنید)



محور از بیرون به یک موتور الکتریکی وصل است که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_0 می‌چرخد. (سرعت زاویه‌ای موتور همیشه ثابت است.)

حرکت میله همیشه در صفحهٔ xy است (خط ab هم در راستای z است). نیروی $\vec{F}=-k\vec{r}$ که در آن $\vec{r}$ بردار واصل از o به s است (شکل زیر)، از طرف نقاط a و b (یا تاقان‌های a و b) به محور وارد می‌شود. (موتور نیرویی به محور وارد نمی‌کند و از اثر شتاب جاذبه هم صرف‌نظر می‌شود.)

خط مستقیم ab صفحهٔ حرکت میله را در نقطهٔ o قطع می‌کند و مرکز محور به اندازهٔ $r=os$ خم شده است در واقع چون $e\neq 0$ است ایجاد لنگی می‌شود. (منظور از لنگی خروج محور ab از حالت مستقیم و خم شدن و چرخش آن است.) در لحظهٔ صفر میلهٔ sm در راستای محور y است، m، s و o همه در صفحهٔ xy اند.



الف - شتاب m را نسبت به نقطهٔ s بیابید.

ب - معادلات حرکت را در دستگاه مختصات قطبی بنویسید. مبدأ مختصات را نقطهٔ o بگیرید و در مختصات (r,θ)، r را فاصلهٔ o از s و θ را زاویهٔ os نسبت به محور y درنظر بگیرید.

ج - فرض کنید محور خم شده دارای یک لنگی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_0 باشد (یعنی سرعت زاویه‌ای خط os، ω_0 باشد). در این حالت r فاصلهٔ نقطهٔ s از o را بیابید.

مسئله‌ی ۵

شخصی می‌خواهد بر روی یک صفحه‌ی افقی که می‌تواند حول یک محور قائم بچرخد، بر روی یک دایره به شعاع r که هم مرکز با همان محوری است که صفحه حول آن می‌چرخد با تندی ثابت نسبت به صفحه راه برود. ضریب اصطکاک ایستایی بین کف پای شخص و صفحه μ_s است.

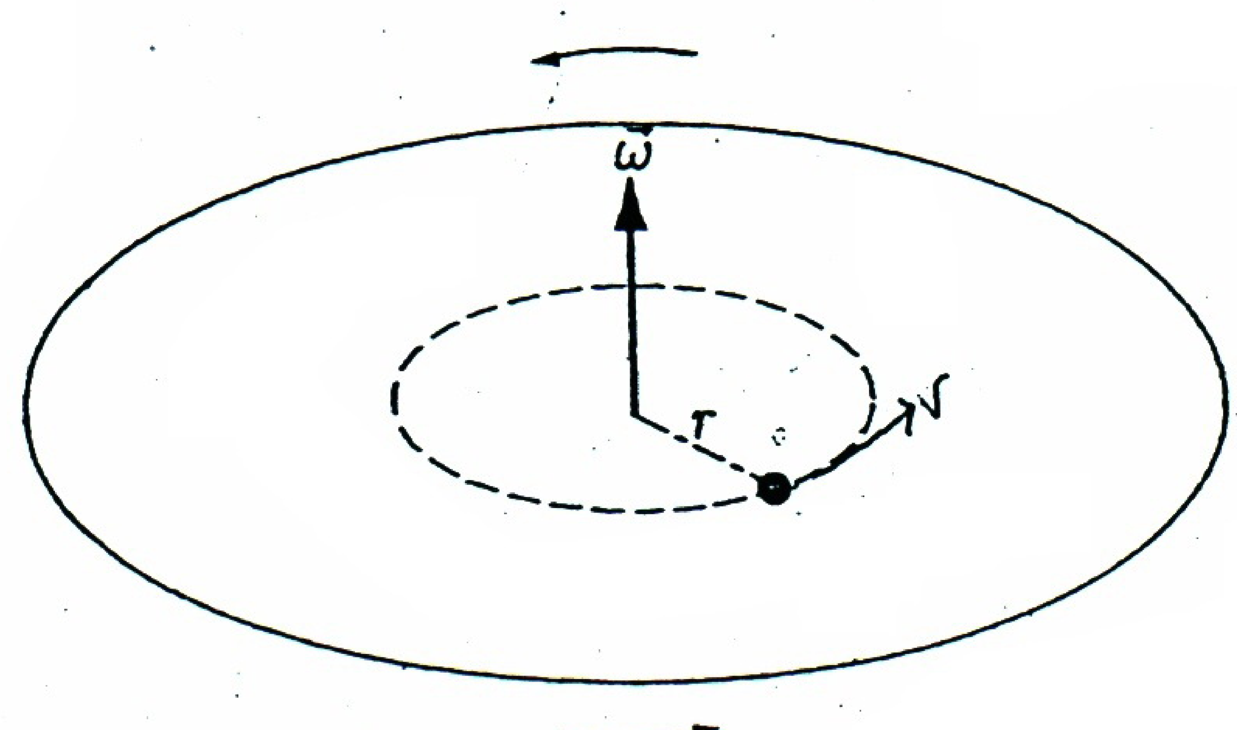
جواب‌ها را در مستطیل‌های مشخص شده بنویسید.

آ) اگر سرعت زاویه‌ای دوران صفحه چرخان برابر مقدار ثابت ω باشد، تندی بیشینه شخص در جهت دوران و بر روی دایره‌ی به شعاع r چقدر می‌تواند باشد؟

ب) جواب قسمت قبل اگر شخص خلاف جهت دوران صفحه، روی آن راه برود چه خواهد بود؟

پ) فرض کنید شخص با تندی ثابت v نسبت به صفحه که ابتدا ساکن است بر روی دایره‌ی r راه می‌رود. در لحظه‌ی $t = 0$ صفحه در جهت راه رفتن شخص شروع به دوران می‌کند ولی این بار به صورت $\omega(t) = \alpha t$ که t زمان است. از این پس، شخص چه مدت برای راه رفتن با تندی ثابت v فرصت دارد؟

ت) در هر یک از موارد بالا، برای وجود جواب اگر لازم است شرطی بین پارامترهای مسأله موجود باشد، بنویسید.



مسئله ۶

یک سر ِ یک میله ي کم‌جرم به طول ِ ℓ به نقطه ي ثابت ِ O لولا شده است. سر ِ دیگر ِ این میله (نقطه ي L) به یک سر ِ میله ي کم‌جرم ِ دیگر ی به طول ِ b وصل است. به سر ِ دوم ِ میله ي اخیر (نقطه ي B) جسم ی به جرم ِ m وصل شده است. فرض می‌کنیم حرکت ِ نقطه‌ها ي L و B در یک صفحه ي ثابت شامل ِ نقطه ي O است، و گرانش بر این حرکت‌ها اثر ی ندارد. تنها در نقطه‌ها ي O و L ممکن است به سیستم نیرو ي خارجی وارد شود، و میله‌ها هم فقط نیروها ي در راستا ي خود ِشان را تحمل می‌کنند. مبدئ ِ مختصات ِ دِکَرتی در این صفحه را نقطه ي O می‌گیریم. زاویه ي بردار ِ OL (با ابتدا ي O و انتها ي L) با جهت ِ مثبت ِ محور ِ x را با α، و زاویه ي بردار ِ LB با جهت ِ مثبت ِ محور ِ x را با β نشان می‌دهیم.

لابد عادت کرده اید که حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید. پس دیگر تذکر لازم نیست.

a) مئلفه‌ها ي دِکَرتی ي سرعت ِ جسم (v_x و v_y) را بر حسب ِ α و β و مشتق‌ها ي‌شان بنویسید.

b) مئلفه‌ها ي دِکَرتی ي شتاب ِ جسم (a_x و a_y) را بر حسب ِ α و β و مشتق‌ها ي‌شان بنویسید.

c) بین ِ مئلفه‌ها ي شتاب ِ جسم یک قید هست. با استفاده از آن یک قید بین ِ α و β و مشتق‌ها ي‌شان به دست آورید.

d) فرض کنید به نقطه ي L نیرو یی با اندازه ي F وارد می‌شود، که هم‌واره بر OL عمود است و جهت ‌ش چنان است که می‌خواهد α را زیاد کند. یک رابطه بین ِ α و β و مشتق‌ها ي‌شان و F به دست آورید (مستقل از رابطه ي بخش ِ c)).

e) به جا ي فرض ِ d)، فرض کنید $\dot{\alpha}$ مقدار ِ ثابت ِ ω است. یک معادله ي دیفرانسیل برا ي $\gamma := \beta - \alpha$ به دست آورید.

f) با همان فرض‌ها ي بخش ِ e)، هم‌راه با این فرض ِ اضافی که $\gamma \ll 1$، معادله ي بخش ِ e) را تا مرتبه ي یک نسبت به γ ساده کنید و Ω (بس‌آمد ِ زاویه‌ای ي نوسان‌ها ي کوچک ِ γ حول ِ صفر) را بیابید.

بسمه تعالی

۸۵/۶/۸

امتحان پنجم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۵)

وقت: ۴٫۵ ساعت

مسئله‌ی ۱

دو رسانا با شکل دلبخواه داریم. (جواب نهایی هر قسمت را داخل مستطیل مشخص شده بنویسید.)

آ) فرض کنید روی رسانای اول بار q_1 و رسانای دوم بدون بار است. در این وضعیت میدان الکتریکی در فضا، $\vec{E}_1$ است. نیروی وارد بر هر رسانا، $\vec{F}_1$، را برحسب انتگرال $\vec{E}_1$ بنویسید.

ب) فرض کنید رسانای اول بدون بار و روی رسانای دوم بار q_2 است. در این حالت میدان الکتریکی در فضا $\vec{E}_2$ است. نیروی وارد بر هر رسانا، $\vec{F}_2$، را برحسب انتگرال $\vec{E}_2$ بنویسید.

پ) اگر رسانای اول بار Q_1 و رسانای دوم بار Q_2 داشته باشند، نیروی وارد بر هر رسانا، $\vec{F}_3$، را برحسب انتگرال‌های $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ به دست آورید.

ت) حالا فرض کنید روی رسانای اول بار Q'_1 و روی رسانای دوم بار Q'_2 است. نیروی وارد بر هر رسانا، $\vec{F}$، را برحسب q_1، q_2، Q_1، Q_2، Q'_1، Q'_2، $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$، و $\vec{F}_3$ به دست آورید.

مسئله‌ی ۲

سیمی به شکل یک قلب که معادله‌ی آن در دستگاه مختصات قطبی $r = a(1 + \cos\theta)$ است در نظر بگیرید. این سیم که ساکن است و به صورت قائم در میدان گرانشی زمین قرار دارد، از داخل مهره‌ای به جرم m می‌گذرد که به وسیله‌ی کِشی به طول عادی a و ثابت کشسانی $k = \frac{4mg}{a}$، به نقطه‌ی O وصل است. از اصطکاک مهره با سیم در حین حرکت صرفنظر کنید.

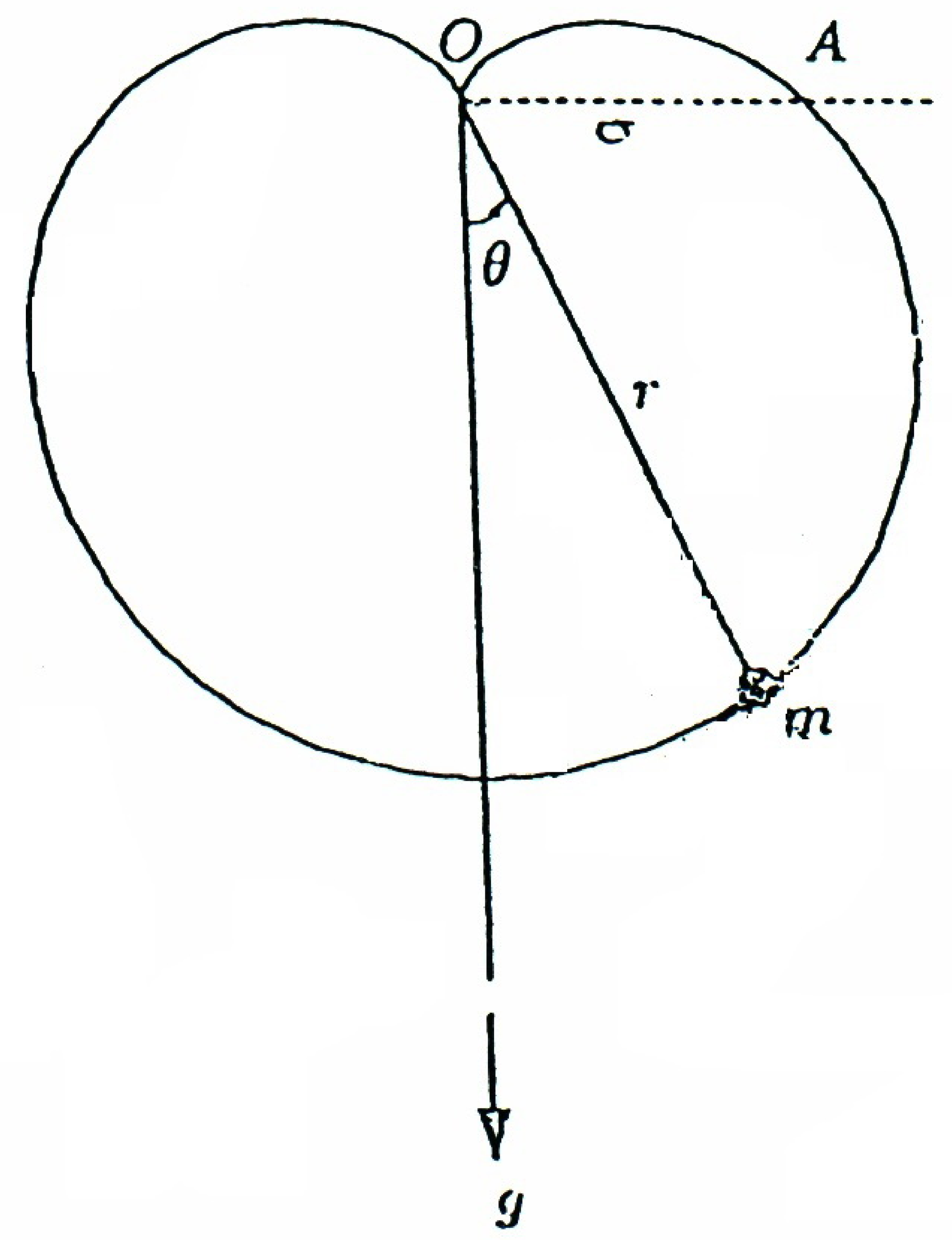
جواب‌ها را در مستطیل‌های مشخص شده بنویسید.

آ) نقاط تعادل مهره (بر حسب زاویه‌ی θ) و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

ب) سرعت زاویه‌ای نوسان‌های کوچک حول نقطه(ها)ی تعادل پایدار را به دست آورید.

پ) زاویه‌ی بین راستای کِش و خط عمود بر سیم (در محل مهره) را در یک وضعیت دلخواه مهره، بر حسب زاویه θ به دست آورید.

ت) مهره از نقطه‌ی A بدون سرعت اولیه رها می‌شود. نیروی وارد بر مهره از طرف سیم را در یک وضعیت دلخواه مهره، بر حسب زاویه θ به دست آورید.



مسئله ۳

یک جسم در میدان ـ گرانشی ی زمین و با مقاومت ـ هوا حرکت می‌کند. نیرو ی مقاومت ـ هوا $-m\alpha\mathbf{v}$ است، که m جرم ـ جسم، $\mathbf{v}$ سرعت ـ آن، و α یک ثابت ـ مثبت است. می‌خواهیم حرکت ـ این جسم را در چارچوب ـ دوار ی که به زمین چسبیده است بررسی کنیم. شتاب ـ گرانشی ی زمین به اضافه ی شتاب ـ مرکزگریز را با $\mathbf{g}$ نشان می‌دهیم و آن را در ناحیه‌ای که پرتابه حرکت می‌کند ثابت می‌گیریم. این بردار در واقع ـ شتاب ـ سقوط ـ اجسام ـ بدون ـ سرعت ـ اولیه، در چارچوب ـ زمین است. بردار ـ سرعت ـ زاویه‌ای ی چرخش ـ زمین را با ω نشان می‌دهیم، و آن را هم ثابت می‌گیریم. سرانجام، در ناحیه ای که جسم حرکت می‌کند از کروی‌بودن ـ زمین چشم می‌پوشیم.

هم‌چنان قرار است حتماً همه ی جواب‌ها ی نهایی را در مستطیل‌ها ی مشخص‌شده بنویسید.

a) مشتق ـ زمانی ی بردار ـ سرعت ـ جسم را بر حسب ـ سرعت و داده‌ها ی مسئله حساب کنید.

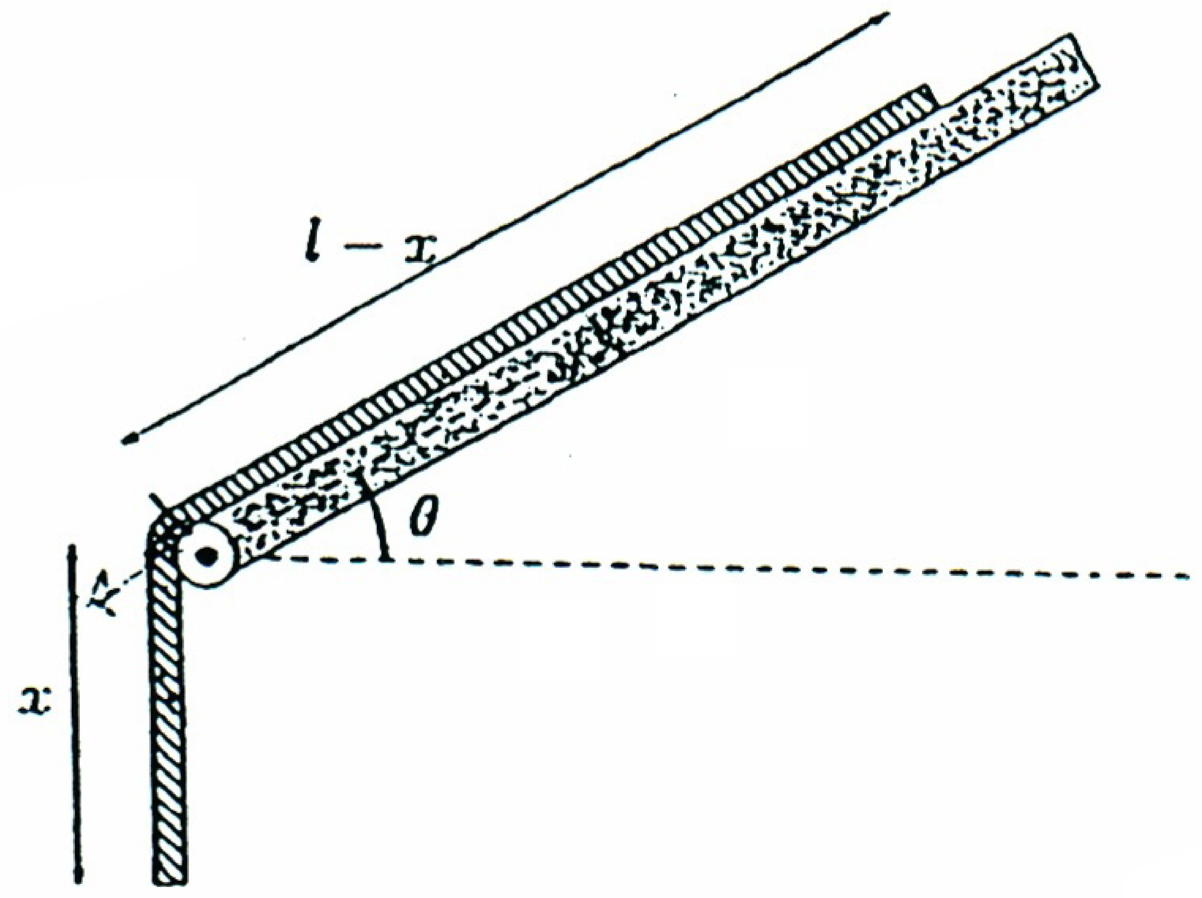
b) یک جواب ـ معادله ی بالا این است که سرعت ـ ثابت است. می‌خواهیم سرعت ـ ثابت ی که جواب ـ معادله ی بالا است (سرعت ـ حد) را حساب کنیم. این بردار را با $\mathbf{v}_0$ نشان می‌دهیم و آن را به شکل ـ $\mathbf{v}_0 = a\,\mathbf{g} + b\,\omega + c\,\mathbf{g}\times\omega$ می‌نویسیم. ثابت‌ها ی a ، b ، c را حساب کنید.

c) $\mathbf{v}'$ را با $\mathbf{v} =: \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'\,e^{-\alpha t}$ تعریف می‌کنیم. مشتق ـ زمانی ی $\mathbf{v}'$ را بر حسب ـ این بردار، و داده‌ها ی مسئله حساب کنید.

d) بگیرید $\mathbf{v}' =: \hat{\mathbf{x}}\,v'_1 + \hat{\mathbf{y}}\,v'_2 + \hat{\mathbf{z}}\,v'_3$، که (x, y, z) مختصات ـ دکرتی‌اند، چنان که محور ـ z در جهت ـ ω است. v'_1 و v'_2 و v'_3 را بر حسب ـ زمان حساب کنید. (لازم نیست ثابت‌ها ی انتگرال‌گیری را بر حسب ـ شرایط ـ اولیه حساب کنید.)

مسئله‌ی ۴

طنابی به جرمِ m و طولِ l را رویِ سطحِ شیب‌داری قرار می‌دهیم. انتهایِ سطحِ شیب‌دار لولایی قرار دارد که با آن می‌توان شیبِ سطحِ شیب‌دار θ را بینِ $\theta = 0$ و $\theta = \pi/2$ تغییر داد. ضریبِ اصطکاکِ ایستایی و جنبشیِ طناب با سطحِ شیب‌دار μ است. بخشی از طناب رویِ سطحِ شیب‌دار و بخشی دیگر پس از گذشتن از رویِ قرقره‌یِ بسیار سبکی که انتهایِ سطحِ شیب‌دار است، آویزان شده است.



جواب‌هایِ خود را حتماً در جعبه‌هایِ مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) نسبتِ بخشِ آویزان به بخشی که رویِ سطحِ شیب‌دار است را α بگیرید. کم‌ترین مقدارِ μ (آن را μ_0 بگیرید) چه‌قدر باشد تا با تغییرِ شیبِ سطحِ شیب‌دار حالتی بتوان پیدا کرد که طناب لیز نخورد.

b) فرض کنید $\mu > \mu_0$. حداکثر شیبِ سطحِ شیب‌دار θ (آن را θ_1 بگیرید) چه‌قدر باشد تا طناب لیز نخورد.

c) فرض کنید $\mu > \mu_0$ و $\theta > \theta_1$. شتابِ طناب را بر حسبِ x طولِ بخشی از طناب که آویزان است به دست آورید. نتیجه‌یِ خود را به صورتِ

$$\ddot{x} = Ax + B$$

بنویسید. A و B را به دست آورید.

d) جوابِ معادله‌یِ بالا را به صورتِ

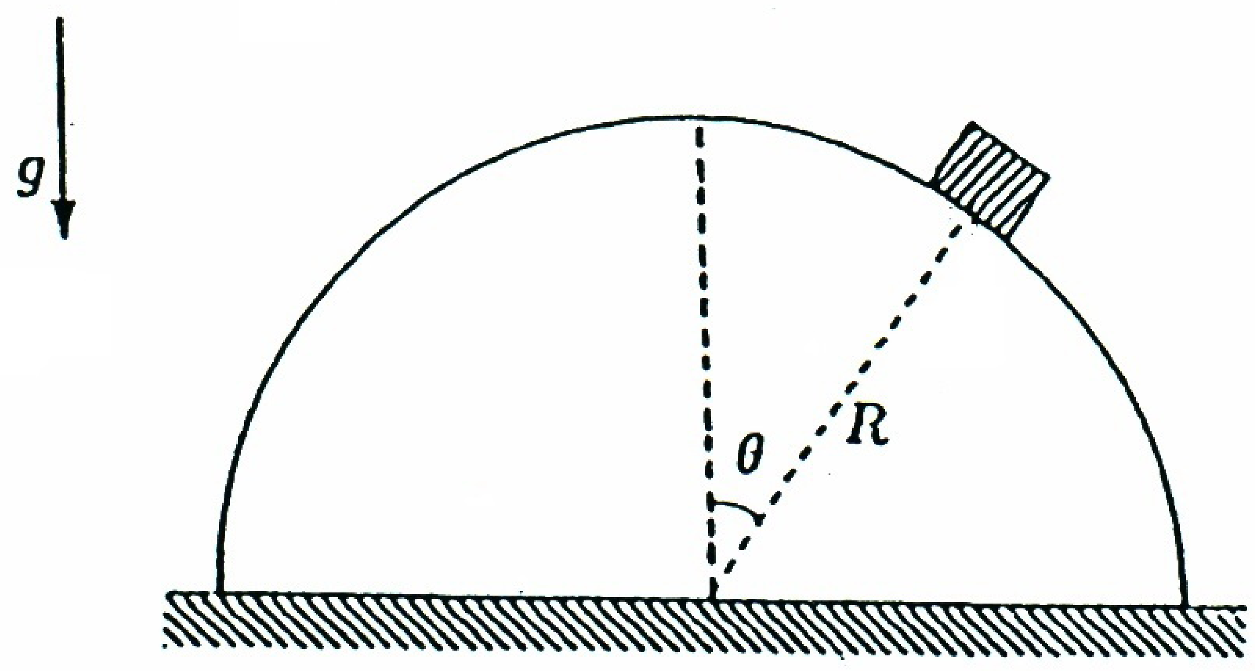
$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{A}t} + C_2 e^{-\sqrt{A}t} + C_0$$

بگیرید. طناب در ابتدا ساکن و طولِ بخشِ آویزانِ آن x_0 بوده. ثابت‌هایِ C_0، C_1، و C_2 را بر حسبِ g، l، θ، μ، و x_0 به دست آورید.

e) سرعتِ طناب درست در لحظه‌ای که از سطحِ شیب‌دار جدا می‌شود چه‌قدر است؟

مسئلهٔ ۵

می‌خواهیم حرکتِ ذره‌ای به جرمِ m رویِ نیم‌کره‌یِ ثابتی به شعاعِ R را بررسی کنیم. ضریبِ اصطکاکِ ایستایی و جنبشی‌یِ بینِ m و سطحِ خارجی‌یِ نیم‌کره μ است.



جواب‌هایِ خود را حتماً در جعبه‌هایِ مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) θ_0 زاویه‌یِ اولیه‌یِ جسم چه مقادیری می‌تواند داشته باشد به طوری‌که جسم سرِجایش ثابت بماند؟ نتیجه را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

b) فرض کنید جسم از زاویه‌یِ θ_0، بیشینه مقداری که در بندِ قبل به دست آورده‌اید، رها می‌شود. با یک اختلالِ کوچک جسم شروع به حرکت می‌کند. سرعتِ جسم $v(\theta)$ تا قبل از جدا شدنِ جسم از نیم‌کره را به دست آوردید. جوابِ خود را به شکلِ

$$v^2 = A_0 e^{2\mu\theta} + A_1 \cos\theta + A_2 \sin\theta$$

بگیرید. ثابت‌هایِ A_0، A_1، و A_2 را بر حسبِ μ، R، g و θ_0 در پاسخ‌نامه بنویسید.

c) نیرویِ عمودی‌یِ سطح $N(\theta)$ را به دست آورید.

d) فرض کنید μ خیلی کوچک باشد. در چه زاویه‌ای ذره از نیم‌کره جدا می‌شود؟ جواب را تا رتبه‌یِ اولِ μ به دست آورید.

بسمه تعالی

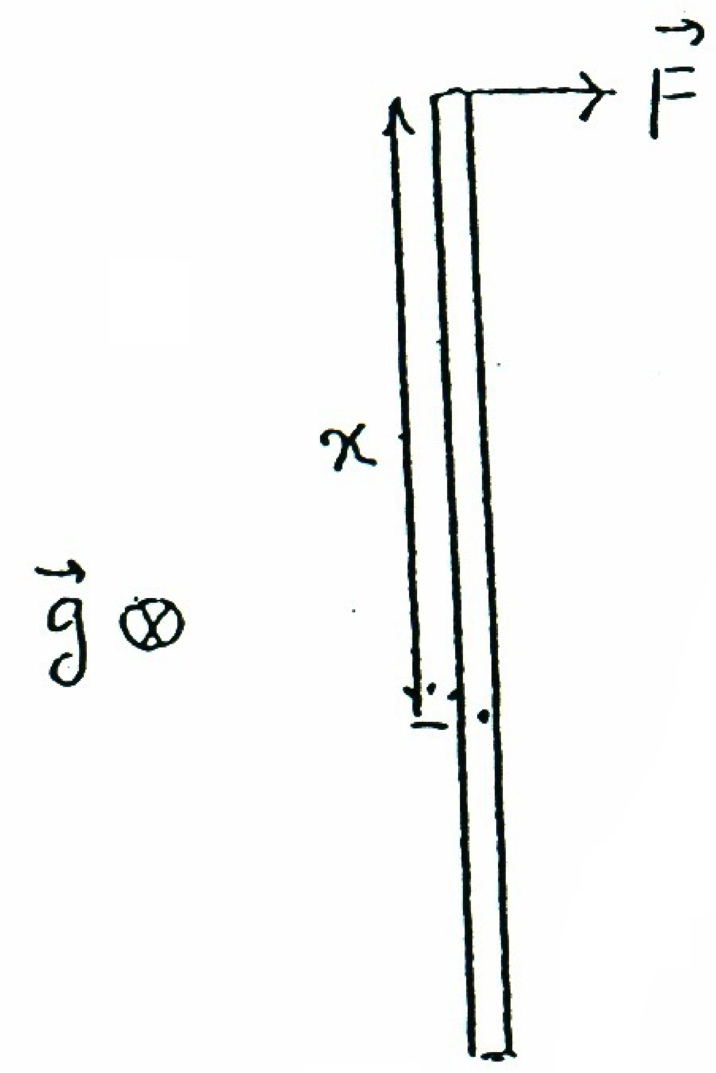
۸۵/۶/۱۲
دقت: ۵ ساعت

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۵)

مسئله ۱

میله‌ای به طول l و جرم m روی سطحی با ضریب اصطکاک μ قرار دارد. میله حول محوری که به فاصله‌ی x از یک انتهای آن است می‌تواند بچرخد. می‌خواهیم با نیروی عمود بر امتداد میله و به انتهای سر میله که به فاصله‌ی x از محور دوران است آن را با سرعت ثابت به حرکت درآوریم.

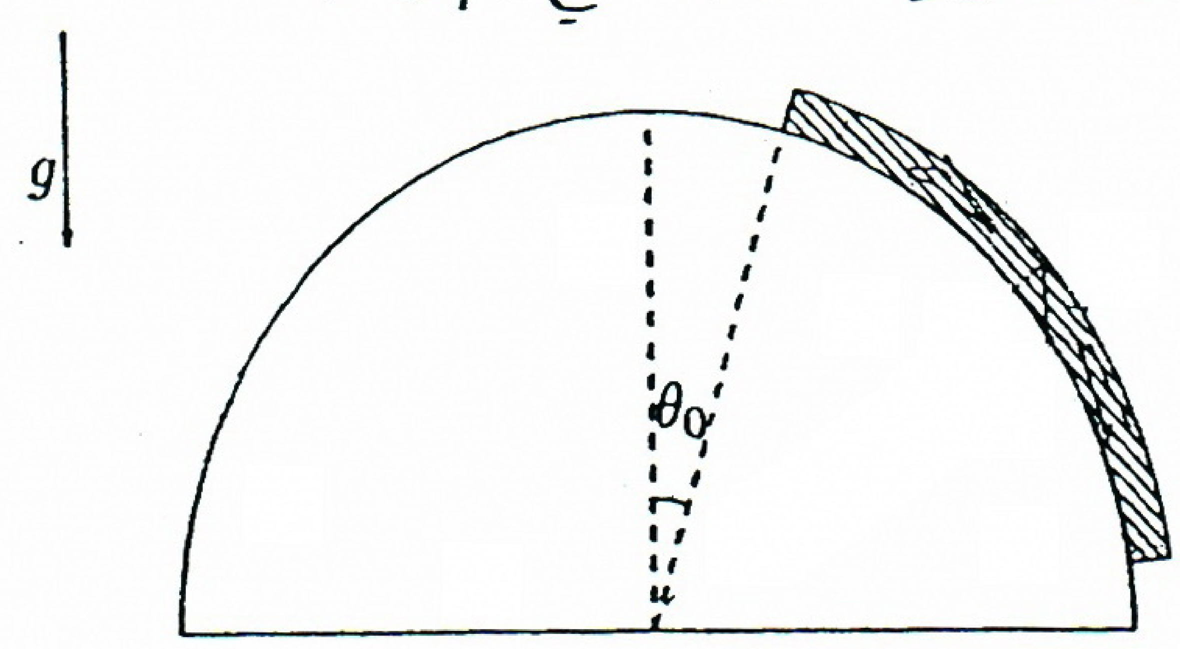
(جواب‌های نهایی را در مستطیل‌های مربوطه بنویسید.)



الف- انتهایی که نیروی F به آن وارد می‌شود را به اندازه‌ی a می‌چرخانیم. مقدار x چه قدر باشد تا کار انجام شده مینیمم باشد. در این حالت F_{min} چه قدر است؟

ب- حال فرض کنید میله را به اندازه‌ی زاویه‌ی ثابت θ بچرخانیم. x چه قدر باشد تا کار انجام شده مینیمم شود. در این حالت F_{min} چه قدر است؟

مسئله‌ي ۲) طنابی به جرم m و جرم بر واحدِ طولِ λ را رويِ نیم‌کره‌ای به شعاعِ R قرار می‌دهیم. ضریبِ اصطکاکِ ایستایی و جنبشیِ طناب با سطحِ نیم‌کره μ است.



جواب‌هاي خود را حتماً در جعبه‌هاي مربوطه‌ي پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) مطابقِ شکل ابتداي طناب در زاویه‌ي θ_0 قرار دارد. فرض کنید طناب در آستانه‌ي لغزیدن است. معادله‌ای براي $T(\theta)$ کششِ نخ در زاویه‌ي θ به دست آورید. این معادله را به صورتِ زیر بنویسید

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + C_0 T(\theta) = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta$$

ثابت‌هاي C_0، C_1، و C_2 را بر حسبِ g، R، λ، و μ به دست آورید.

b) جوابِ معادله‌ي بالا را به صورتِ

$$T(\theta) = A_0 e^{-C_0\theta} + A_1 \cos\theta + A_2 \sin\theta$$

بگیرید. ثابت‌هاي A_0، A_1، و A_2 را بر حسبِ g، R، λ، μ، و θ_0 به دست آورید.

c) جوابی که در بندِ قبل به دست آورده‌اید را به شکلِ

$$T(\theta) = e^{-C_0\theta}[f(\theta) - f(\theta_0)]$$

در آورید. $f(\theta)$ چیست؟

d) بیشینه‌ي $f(\theta)$ در چه زاویه‌ای است؟ این زاویه را α بنامید.

e) به ازاي چه شرطی رويِ θ_0، براي هیچ مقداری از طولِ طناب، l، طناب رويِ نیم‌کره ساکن نمی‌ماند؟

f) از این پس فرض کنید $\theta_0 = 0$. به ازاي چه مقادیری از ضریبِ اصطکاک μ، طنابی که انتهایش در $\theta = \pi/2$ است می‌تواند ساکن بماند؟ کافی است معادله‌ای براي μ به دست آورید.

g) فرض کنید شرطِ بندِ قبل برقرار است. طنابِ بلندتری را در نظر می‌گیریم که بخشی از آن آویزان است. بیشینه طولِ بخشِ آویزان h بر حسبِ g، R، λ، μ، و θ_0 چه‌قدر باشد که طناب ساکن بماند؟

مسئله‌ی ۳

پرتابه‌ای در نقطه‌ی P_0 از سطحی به شیب α قرار دارد. در لحظه‌ی $t = 0$ زاویه‌ی پرتاب نسبت به سطح β و سرعت اولیه پرتاب v_0 است. ضریب برگشتِ برخوردِ پرتابه با سطح e است.

جواب‌ها را در مستطیل‌های مشخص شده بنویسید.

آ) زمان طی مسیر بین نقطه‌ی P_k و P_{k+1}، t_{k+1} را بر حسب مؤلفه‌ی عمود بر سطحِ بردار سرعت پرتابه در نقطه‌ی P_k درست بعد از جدا شدن از سطح، $(v_k^f)_y$، بنویسید.

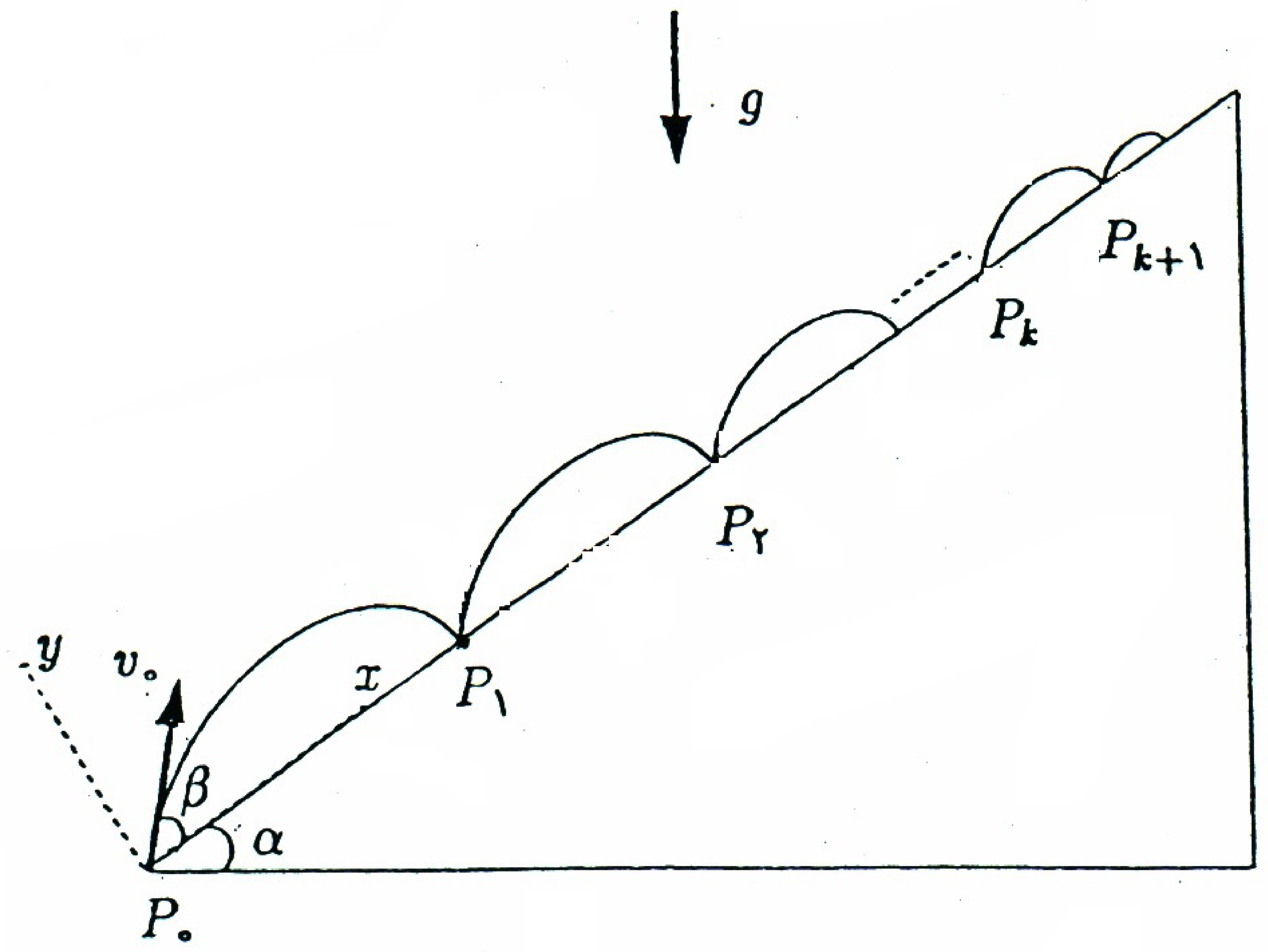
ب) بردار سرعت پرتابه در نقطه‌ی P_k درست قبلِ از برخوردِ به سطح، $\vec{v}_k^i$ و بردار سرعت پرتابه در نقطه‌ی P_k درست بعد از جدا شدن از سطح، $\vec{v}_k^f$، را بر حسب پارامترهای معلوم بنویسید.

پ) زمان طی مسیر پرتابه از شروع حرکت تا برخورد n ام به سطح، T_n، چقدر است؟

ت) برد پرتابه از ابتدا تا برخورد n ام، R_n، چقدر است؟

ث) چه رابطه‌ای بین α، β و e باشد تا پرتابه در r امین برخورد دوباره به مبدأ پرتاب، P_0، برگشته باشد.

ج) چه رابطه‌ای بین α، β و e باشد تا r امین برخورد بر سطح عمود باشد.



مسئله‌ی ۴

مکعبی به اضلاع $a \times b \times c$ از ماده‌ای ساخته شده که ماتریس رسانندگی اش به شکل زیر است.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

محورهای x و y و z موازی طول‌های a و b و c اند. وجه‌های $x = 0$ و $x = a$ را به صفحه‌هایی فلزی می‌چسبانیم و آن‌ها را در پتانسیل‌های 0 و V قرار می‌دهیم.

الف) وارون ماتریس σ را بنویسید.

ب) در حالت پایا جریان فقط در امتداد محور x است (با اغماض از اثر لبه‌ها). در این حالت E_x و E_y و E_z را بر حسب J_x و α و β و $\mathscr{V}$ به دست آورید.

ج) مقاومت این قطعه، بین وجه‌های $x = 0$ و $x = a$ را به دست آورید ــ آن را R بنامید.

د) اختلاف پتانسیل وجه‌های $y = b$ و $y = 0$ را به دست آورید ــ آن را V' بنامید.

مسئله‌ی ۵

یک کره ی رسانا ی باردار به شعاع ـ a، درون ـ محیط ی است که مقاومت ـ الکتریکی ی آن ثابت نیست. این محیط دو حالت دارد: حالت ـ قطع با مقاومت ـ R، و حالت ـ وصل با مقاومت ـ r، که $r < R$. وقت ی این محیط در حالت ـ قطع است، اگر اندازه ی میدان ـ الکتریکی در سطح ـ کره از E_2 بیش‌تر شود محیط به حالت ـ وصل می‌رود. وقت ی این محیط در حالت ـ وصل است، اگر اندازه ی میدان ـ الکتریکی در سطح ـ کره از E_1 کم‌تر شود محیط به حالت ـ قطع می‌رود. داریم $0 < E_1 < E_2$. در هر حالت، این محیط مثل ـ یک مقاومت رفتار می‌کند که بین ـ کره و نقطه ای با پتانسیل ـ الکتریکی ی صفر (پتانسیل ـ نقاط ـ بسیار دور) بسته شده است. این کره ضمناً از طریق ـ یک منبع ـ تغذیه باردار می‌شود. این منبع هم بین ـ کره و پتانسیل ـ صفر بسته شده، و توان ـ آن مقدار ـ ثابت ـ P است. در کل ـ مسئله فرض می‌کنیم پتانسیل ـ کره نامنفی است.

تکراری است: حتماً همه ی جواب‌ها ی نهایی را در مستطیل‌ها ی مشخص‌شده بنویسید.

a) Q (بار ـ الکتریکی ی این کره) را بر حسب ـ V (پتانسیل ـ این کره) به دست آورید.

b) E (اندازه ی میدان ـ الکتریکی در سطح ـ این کره) را بر حسب ـ V به دست آورید.

c) مشتق ـ Q نسبت به t (زمان) را بر حسب ـ V و Z (مقاومت ـ محیط در آن زمان) بنویسید.

d) مشتق ـ V نسبت به t را بر حسب ـ V و Z بنویسید.

فرض کنید در زمان ـ صفر پتانسیل ـ کره صفر است.

e) شرط ی به دست آورید که محیط هرگز به حالت ـ وصل نرود.

f) با فرض ـ این که شرط ـ e) برقرار است، V_∞ (پتانسیل ـ کره در $t \to \infty$) را به دست آورید.

g) با فرض ـ این که شرط ـ e) برقرار نیست، شرط ی به دست آورید که محیط پس از آن که به حالت ـ وصل رفت، دیگر به حالت ـ قطع نرود.

h) با فرض ـ این که شرط ـ e) برقرار نیست ولی شرط ـ g) برقرار است، V_∞ را به دست آورید.

i) با فرض ـ این که نه شرط ـ e) برقرار است و نه شرط ـ g)، پس از زمان ـ معین ی بسته‌گی ی پتانسیل ـ کره به زمان دوره‌ای می‌شود. V_1 (کمینه ی V پس از این زمان) و V_2 (بیشینه ی V پس از این زمان) را به دست آورید.

مسئله ۶

یک حلقه ي دایره‌ای به شعاع ـ a بار ـ Q دارد، که به طور ـ یک‌نواخت بر حلقه توزیع شده است. محور ـ z را محور ـ این حلقه (عمود بر صفحه ي این حلقه و گذرنده از مرکز ـ آن) می‌گیریم. یک بار ـ نقطه‌ای ي q در نقطه ای با مختصات ـ استوانه‌ای ي (ρ, ϕ, z) است. مبدی ـ مختصات را مرکز ـ حلقه گرفته ایم. $(Q\,q)$ مثبت است.

تکراری است: حتماً همه ي جواب‌ها ي نهایی را در مستطیل‌ها ي مشخص‌شده بنویسید. جاها یی که قرار است بین ـ چند گزینه انتخاب کنید، دور ـ گزینه ي درست دایره بکشید.

a) $V(\rho, z)$ (انرژی ي پتانسیل ـ الکتریکی ي این مجموعه) را به شکل ـ یک انتگرال رو ي θ بنویسید، که θ زاویه ي مشخص‌کننده ي مکان رو ي حلقه است. (لازم نیست این انتگرال را حساب کنید.)

b) به ازا ي یک ρ ي معین، z_0 را چنان بیابید که $V(\rho, z_0)$ بیشینه شود.

c) در $\rho > a$، $V(\rho, z_0)$ نسبت به ρ صعودی است (A)، نزولی (B)، یا هیچ‌کدام (C)؟

d) فرض کنید در $\rho = \rho_0$، مشتق ـ $V(\rho, z_0)$ نسبت به ρ صفر می‌شود. در این نقطه مشتق ـ دوم ـ $V(\rho, z_0)$ نسبت به ρ مثبت است (A)، منفی است (B)، یا صفر (C)؟

راه‌نمایی: شکل ـ عمل‌گر ـ لاپلاسی در مختصات ـ استوانه‌ای چنین است.

e) در $\rho < a$، $V(\rho, z_0)$ نسبت به ρ صعودی است (A)، نزولی (B)، یا هیچ‌کدام (C)؟

راه‌نمایی: نتیجه ي d و رفتار ـ $V(\rho, z_0)$ برا ي $\rho \to a^-$ را به کار ببرید.

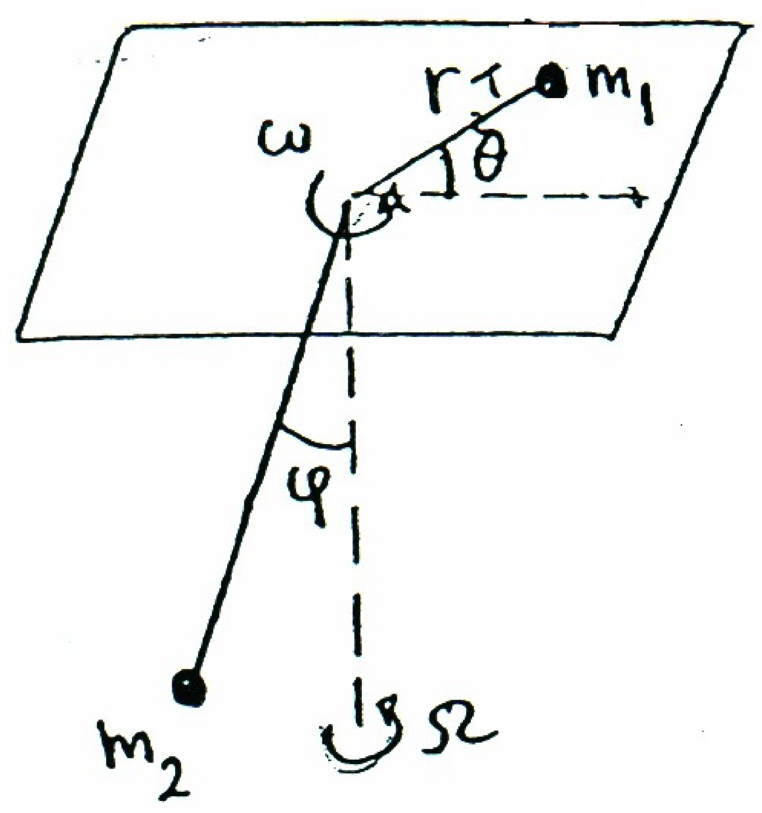
حلقه مقید است بدون ـ چرخش چنان حرکت کند که محور ـ ش هم‌واره محور ـ z بماند. بار هم مقید است رو ي خط ی موازی با محور ـ z و به فاصله ي ρ از آن حرکت کند. جرم ـ حلقه M، و جرم ـ بار m است. ابتدا حلقه ساکن است و بار از فاصله ي دور با سرعت ـ v_0 به آن نزدیک می‌شود.

f) این ـ v_0 و ρ شرط ی به دست آورید که برخورد انجام شود، یعنی در زمان‌ها ي دور سرعت ـ ذره v_0 نباشد. این شرط را بر حسب ـ $V(\rho, z_0)$ بنویسید.

g) در $a \ll \rho$، شرط ـ e) را ساده کنید و تا اولین جمله ي شامل ـ ρ را در آن نگه دارید.

h) در $a \gg \rho$، شرط ـ e) را ساده کنید و تا اولین جمله ي شامل ـ ρ را در آن نگه دارید.

مسئله‌ی ۷



مطابق شکل یک میز افقی داریم که سوراخی روی آن تعبیه شده است. از سوراخ آن نخی به طول l_0 می‌گذرد. به دو سر نخ دو جرم m_1 و m_2 را وصل می‌کنیم. زاویه‌ی جرم m_2 با خط عمود بر میز در محل سوراخ را φ می‌نامیم. T کشش نخ است.

الف- فرض کنید میز بدون اصطکاک است و m_1 و m_2 حول خط قائم به ترتیب با سرعت زاویه‌ای ω_0 و Ω_0 دوران می‌کنند. T_0، ω_0 و Ω_0 را برحسب m_1، m_2، l_0، r_0، φ_0 و g به دست آورید.

ب- حال فرض کنید میز ضریب اصطکاک μ دارد. معادلات حاکم بر سیستم را مشخص کنید.

ج- معادلات قسمت ب را تا مرتبه‌ی اول μ ساده کنید.

توجه: معادلات می‌توانند برحسب ω_0، Ω_0 و T باشند.

د- از معادلات قسمت ج دو معادله دیفرانسیل برحسب r و φ به دست آورید.

هـ- قسمت خطی تغییرات r و φ را به دست آورید. (توجه: راه‌نمایی زیر را بخوانید.)

و- شرطی برحسب m_1، m_2، l_0، r_0، φ_0 و g به دست آورید که $\dot\theta$ (ω)، تا مرتبه‌ی اول μ ثابت بماند.

راه‌نمایی ۱: جواب معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} \ddot x + a_1\ddot y + a_2 x + a_3 y + a_4 t = 0 \\ \ddot x + a_1'\ddot y + a_2' x + a_3' y + a_4' t = 0 \end{cases}$$

به صورت زیر است.

$$x = At + A'\cos\gamma t + A''\sin\gamma t$$

$$y = Bt + B'\cos\gamma t + B''\sin\gamma t$$

قسمت خطی x و y به ترتیب At و Bt است. A، A'، A''، B، B' و B'' ضرایب ثابت هستند.

راه‌نمایی ۲: $r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta)$