دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

به نام خدا

امتحان پایانی معادلات دیفرانسیل

تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۴/۶ زمان: ۱۲۰ دقیقه

....

۱- اگر

$$F(s) = L\left[\frac{\cos t - e^t}{t}\right],$$

مقدار $F(۲)$ را بیابید. (۲۰ نمره)

۲- تبدیل وارون لاپلاس تابع

$$F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{(s-۱)^۴ - ۱۶}$$

را به دست آورید. (۲۰ نمره)

۳- مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y'(t) - e^t \int_۰^t e^{-\theta} y''(\theta) d\theta = y(t) + u_۱(t) \qquad y(۰) = y'(۰) = ۰$$

را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

۴- دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} x' - y' + ۸x + ۳y = ۱ \\ x' - y' - y = ۰ \end{cases} \qquad x(۰) = x'(۰) = y(۰) = y'(۰) = ۰$$

را حل کنید. (۲۰ نمره)

۵- ابتدا نشان دهید $a = ۰$ یک نقطه‌ی غیرعادی منظم معادله‌ی دیفرانسیل $xy'' + y' + y = ۰$ است و سپس یکی از جواب‌های معادله را به روش سری‌های توانی حول صفر به دست آورید. (۲۰ نمره)

۶- معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + (۱ - \frac{۷}{۴x^۲})y = ۰$ را با استفاده از تغییر متغیر $y = ux^{\frac{۱}{۲}}$ به معادله‌ی دیفرانسیل بسل تبدیل و حل کنید. (۲۰ نمره)

موفق باشید

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پاسخنامه پایانی «معادلات دیفرانسیل» (۶ تیر ۹۷) «دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی»

1) $F(s) = L\left(\dfrac{\cos t - e^t}{t}\right) \qquad F(2) = ?$

$$\mathcal{L}(\cos t - e^t) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}$$

$$\xrightarrow{\text{تکنیک ۴}} \mathcal{L}\left(\frac{\cos t - e^t}{t}\right) = \int_s^\infty \left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}\right) ds = \frac{1}{2}\ln(s^2+1) - \ln(s-1)$$

$$= \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}\Bigg|_s^\infty = \cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1} = \ln\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\rightarrow F(s) = \boxed{\ln\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}} \xrightarrow{s=2} \boxed{F(2) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - تیر ۹۷

۲) $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{(s-1)^4 - 16}$

طبق تکنیک ۲ عه لاپلاس معکوس :

اول لاپلاس معکوس $\dfrac{1}{(s-1)^4-16}$ رو حساب می‌کنیم :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^4-16}\right) \overset{\text{تجزیه کسری}}{=} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{[(s-1)^2-4][(s-1)^2+4]}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1-2)(s-1+2)[(s-1)^2+4]}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)(s+1)[(s-1)^2+4]}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{(s-1)^2+4}\right)$$

یادآوری ریاضی :

A یافتن $\xrightarrow[s=3]{\times(s-3)}$ $A = \frac{1}{32}$ B یافتن $\xrightarrow[s=-1]{\times(s+1)}$ $B = \frac{-1}{32}$

C یافتن $\xrightarrow[s\to\infty]{\times s}$ $A+B+C=0 \to \frac{1}{32} - \frac{1}{32} + C = 0 \to C=0$

D یافتن $\xrightarrow[\text{دلخواه}]{s=0}$ $-\frac{A}{3} + B + \frac{D}{5} = -\frac{1}{15} \longrightarrow D = -1/8$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/32}{s-3} + \frac{-1/32}{s+1} + \underbrace{\frac{-1/8}{(s-1)^2+4}}_{(I)}\right) = \boxed{\frac{1}{32}e^{3t} - \frac{1}{32}e^{-t} - \frac{1}{16}e^{t}\sin(2t)}$$

$\xrightarrow[\text{تکنیک ۱}]{\text{حل (I)}}$ $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2+4}\right) = e^{t}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = e^{t}\frac{1}{2}\sin(2t)$

ابراهیم شاه ابراهیمی تیر ۹۷

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s-1)^4-16}\right) = \boxed{u_{\pi}(t)\left[\frac{1}{32}e^{3(t-\pi)} - \frac{1}{32}e^{-(t-\pi)} - \frac{1}{16}e^{t-\pi}\sin 2(t-\pi)\right]}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پاسخنامه پایان ترم «معادلات دیفرانسیل» (۹۷/۴/۶) «دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی»

۳) $y'(t) - e^{t}\int_0^t e^{-\theta} y''(\theta)\,d\theta = y(t) + u_1(t) \qquad y(0) = y'(0) = 0$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس گیری}} \mathcal{L}(y') - \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{t-\theta} y''(\theta)\,d\theta\right) = \mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(u_1(t))$

$\rightarrow sF(s) - \underbrace{\cancel{f(0)}}_{0} - \frac{1}{s-1}\left(s^2F(s) - s\underbrace{\cancel{f(0)}}_{0} - \underbrace{\cancel{f'(0)}}_{0}\right) = F(s) + \frac{e^{-s}}{s}$

$\rightarrow F(s)\left(s - \frac{s^2}{s-1} - 1\right) = \frac{e^{-s}}{s} \rightarrow F(s)\left(\frac{-2s+1}{s-1}\right) = \frac{e^{-s}}{s}$

$\rightarrow F(s) = e^{-s}\cdot\left(\frac{s-1}{s(-2s+1)}\right) = e^{-s}\left(\frac{1}{-2s+1} - \frac{1}{-2s^2+s}\right)$

$\xrightarrow[e^{-s}\text{ را در نظر نمی گیریم}]{\text{تکنیک ۲ عکس لاپلاس معکوس}} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{-2s+1} - \frac{1}{-2s^2+s}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{s^2-\frac{1}{2}s}}\right)$

$\xrightarrow{\text{مربع کامل}} \frac{1}{(s-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}}$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}t} - 4\sinh(\tfrac{1}{4}t)\cdot e^{\frac{1}{4}t}\right)}$$

$\rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{1}{-2s+1} - \frac{1}{-2s^2+s}\right)\right) = \boxed{u_1(t)\left[-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}(t-1)} - 4\sinh(\tfrac{1}{4}(t-1))\cdot e^{\frac{1}{4}(t-1)}\right)\right]}$

۹۷/۴/۶ ابراهیم شاه ابراهیمی

مدرس تخصصی دانشگاه
ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی
استاتیک ، فیزیک ۱و۲

کادر تخصصی تدریس خصوصی دروس فنی مهندسی
(عمران،صنایع،مکانیک،مواد)
شماره تماس جهت هماهنگی : ۰۹۱۹۵۴۱۴۸۶۲

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۴) $\begin{cases} x' - y' + 8x + 3y = 1 \\ x' - y' - y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس گیری}} \begin{cases} \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(y') + 8\mathcal{L}(x) + 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1) \\ \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(y') - \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(0) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} s\mathcal{L}(x) - \cancel{x(0)} - s\mathcal{L}(y) + \cancel{y(0)} + 8\mathcal{L}(x) + 3\mathcal{L}(y) = 1/s \\ s\mathcal{L}(x) - \cancel{x(0)} - s\mathcal{L}(y) + \cancel{y(0)} - \mathcal{L}(y) = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} (s+8)\mathcal{L}(x) + (3-s)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} \\ (s)\,\mathcal{L}(x) + (-s-1)\,\mathcal{L}(y) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کرامر}} \mathcal{L}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} & 3-s \\ 0 & -s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+8 & 3-s \\ s & -s-1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{s}(-s-1) - 0}{(s+8)(-s-1) - s(3-s)} = \frac{-1-\frac{1}{s}}{-12s-8}$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{s+1}{s(s+\frac{2}{3})} = \frac{1}{12}\cdot\frac{s+1}{s^2+\frac{2}{3}s} = \frac{1}{12}\cdot\frac{s+1/3+2/3}{(s+\frac{1}{3})^2-1/9} \xrightarrow{\text{تفکیک}}$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{s+1/3}{(s+\frac{1}{3})^2-1/9} + \frac{2/3}{(s+\frac{1}{3})^2-1/9}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{x = \frac{1}{12}\left(e^{-\frac{1}{3}t}\cosh(\tfrac{1}{3}t) + 2e^{-\frac{1}{3}t}\sinh(\tfrac{1}{3}t)\right)}$$

$$\xrightarrow{\text{کرامر}} \mathcal{L}(y) = \frac{\begin{vmatrix} s+8 & \frac{1}{s} \\ s & 0 \end{vmatrix}}{-12s-8} = \frac{0-1}{-12s-8} = \frac{1}{12(s+\frac{2}{3})}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y = \frac{1}{12}e^{-\frac{2}{3}t}}$$

۶/۴/۹۷ ابراهیم شاه ابراهیمی

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه
ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی
استاتیک ، فیزیک ۱و۲

۵) $xy'' + y' + y = 0 \qquad a = 0$

$$\xrightarrow[\text{استانداردسازی}]{\div x} y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0 \rightarrow \text{ریشه مخرج} \xrightarrow{\text{بالقوه}} x = 0 \rightarrow \text{غیرعادی}$$

$$P_0 = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \rightarrow \text{منظم} \leftarrow P_0, q_0 \text{ هر دو عدد}$$

$$\xrightarrow{\text{تشکیل معادله مشخصه}} m(m-1) + 1m + 0 = 0 \rightarrow m^2 - m + m = 0 \rightarrow m^2 = 0 \rightarrow m = 0, 0$$

$$\xrightarrow{\text{یکی از جوابها}} y = x^0\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله اصلی}]{\text{جایگذاری}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

(فاکتور (ساده‌سازی)) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1}$

$$\xrightarrow[\text{اندیس}]{\text{یکی کردن توانها}} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{شروع}]{\text{یکی کردن پایه}} 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = 0$$

جمله اول سری صفر بود.

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\left[n^2 a_n + a_{n-1}\right] = 0 \rightarrow n^2 a_n + a_{n-1} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-1}} \qquad n \geqslant 1$$

ابراهیم شاه ابراهیمی $\frac{4}{4}$ ۹۷

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه
ریاضی ۱ و ۲ ، معادلات دیفرانسیل
ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی
استاتیک ، فیزیک ۱ و ۲

پاسخنامه پایان ترم «معادلات دیفرانسیل» (۶ تیر ۹۷) «دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی»

4) $y'' + \left(1 - \frac{7}{4x^2}\right)y = 0$ $\qquad y = ux^{1/2}$

$$y = ux^{1/2} \to y' = u'x^{1/2} + \frac{1}{2}ux^{-1/2} \to y'' = u''x^{1/2} + \underbrace{\frac{1}{2}u'x^{-1/2} + \frac{1}{2}u'x^{-1/2}}_{u'x^{-1/2}} - \frac{1}{4}ux^{-3/2}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} u''x^{1/2} + u'x^{-1/2} - \frac{1}{4}ux^{-3/2} + ux^{1/2} - \frac{7}{4}ux^{-3/2} = 0$$

$$\to u''x^{1/2} + u'x^{-1/2} + u\left(x^{1/2} - 2x^{-3/2}\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\times x^{3/2}} x^2u'' + xu' + (x^2 - 2)u = 0$$ (معادله بسل مرتبه $\sqrt{2}$)

$$\to \boxed{u = c_1 J_{\sqrt{2}}(x) + c_2 J_{-\sqrt{2}}(x)} \xrightarrow{y = ux^{1/2}} \boxed{y = \sqrt{x}\left(c_1 J_{\sqrt{2}}(x) + c_2 J_{-\sqrt{2}}(x)\right)}$$

۶/۴/۹۷ ابراهیم شاه ابراهیمی

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه
ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی
استاتیک ، فیزیک ۱و۲

کادر تخصصی تدریس خصوصی دروس فنی مهندسی
(عمران،صنایع،مکانیک،مواد)
شماره تماس جهت هماهنگی : ۰۹۱۹۵۴۱۴۸۶۲

math-teacher.blog.ir