فصل ۳

روابط بین تنش و کرنش:

برای یک جسم الاستیک وقتی در محدوده الاستیک خطی قرار دارد بین تنش و کرنش رابطه برقرار است.

برای بارگذاری تک محوره این رابطه بصورت زیر است:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

که E مدول الاستیسیته است.

در حالت چند محوره بین تنش و کرنش رابطه زیر برقرار است:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right)$$

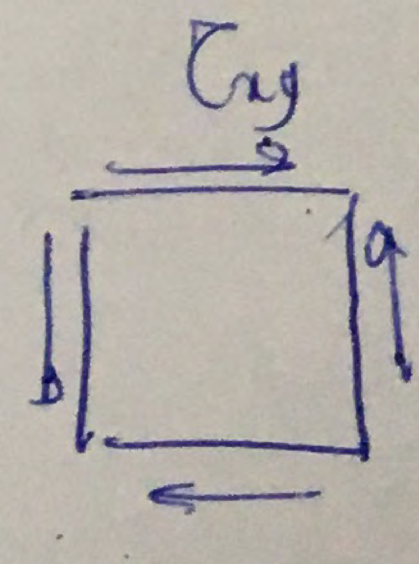
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

که G را مدول برشی گویند. و ν را ضریب پواسون گویند.

رابطه بین G و E و ν:

یک المان تحت برش خالص بصورت زیر در نظر بگیرید:



برای این المان طبق دایره مور تنش‌های اصلی در راستای x' و y' (با زاویه ۴۵ درجه نسبت به صفحات برشی) دارد که عبارتند از:

$\sigma_{x'} = \tau_{xy}$ و $\sigma_{y'} = -\tau_{xy}$

پس با استفاده از قانون هوک داریم :

$$\varepsilon_x' = \frac{\sigma_x'}{E} - \nu\frac{\sigma_y'}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E} + \nu\frac{\tau_{xy}}{E} = \frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

از طرفی در برش خالص $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ است پس بنابراین طبق روابط تبدیل کرنش داریم : (برای $\theta = 45^\circ$)

$$\varepsilon_x' = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

بنابراین :

$$\cancel{\frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}} \qquad \varepsilon_x' = \frac{\tau_{xy}}{2G}$$

بنابراین :

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\tau_{xy}(1+\nu)}{E} \Rightarrow \boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

رابطه بین تنش و کرنش :

بین تنش و کرنش رابطه زیر برقرار است :

$$\sigma = \lambda e I + 2\mu\varepsilon$$

که در حالت اندیسی :

$$\sigma_{ij} = \lambda e\,\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda e \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda e \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda e \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{cases}$$

که μ و λ را ثوابت لامه گویند و برابر اند با :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

همچنین e حاصل جمع کرنش ها است یا تغییرات کرنش حجمی

$$e = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

رابطه بین کرنش و تنش:

بین کرنش و تنش نیز رابطه زیر برقرار است:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu}\sigma - \frac{\lambda}{2\mu} e I$$

که در حالت اندیسی عبارت است از:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu} e\, \delta_{ij}$$

مدول حجمی:

وقتی جسمی تحت تاثیر تنش های نرمال یکسان قرار گیرد می توان نوشت:

$$\sigma = \sigma^* I$$

که σ^* تنش های یکسانی است که از ۳ طرف به جسم اعمال می شود

در حالت اندیسی:

$$\sigma_{ij} = \sigma^* \delta_{ij} \quad (1)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\sigma_{ij} = \lambda e\, \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \sigma^* \delta_{ij} = \lambda e\, \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}$$

پس رابطه بالا برای $i = j$ برقرار است پس:

$$\sigma^* \delta_{ii} = \lambda e\, \delta_{ii} + 2\mu\, \varepsilon_{ii}$$

می‌دانیم $\delta_{ii} = 3$ و $\varepsilon_{ii} = e$ پس:

$$3\sigma^* = 3\lambda e + 2\mu e \Rightarrow e = \frac{3\sigma^*}{3\lambda + 2\mu}$$

که e را کرنش حجمی گویند. بنابراین تعریف می‌کنیم:

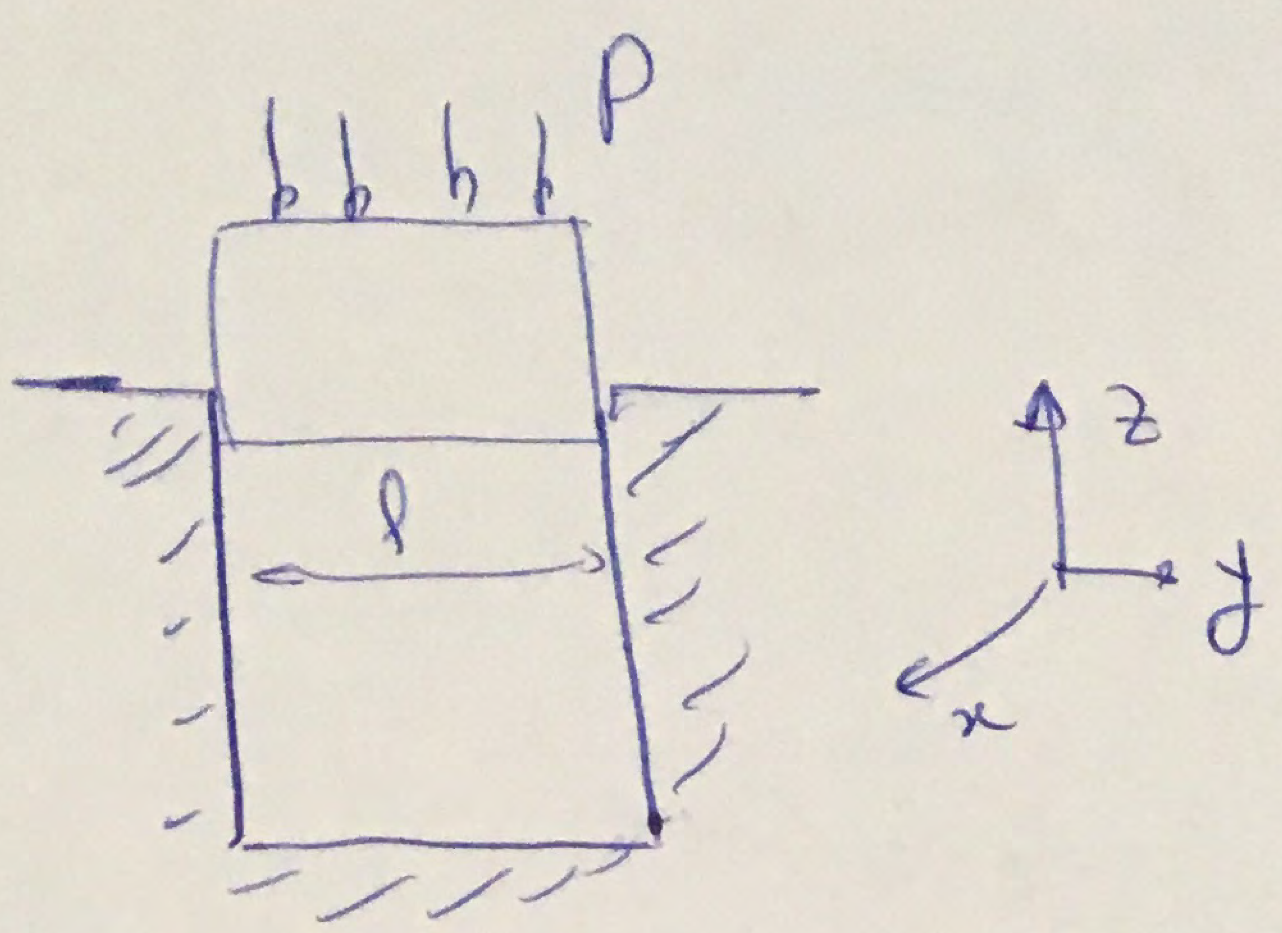
$$k = \frac{\sigma^*}{e} = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} = \lambda + \frac{2\mu}{3}$$

که k را مدول حجمی bulk modulus گویند.

روابط بین ثوابت:

	λ, μ	E, ν	μ, ν	E, μ	k, ν
λ	λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$\frac{3k\nu}{1+\nu}$
μ	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	μ	μ	$\frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$
k	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$	k
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	$2\mu(1+\nu)$	E	$3k(1-2\nu)$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	ν	$\frac{E}{2\mu}-1$	ν

مثال: یک لاستیک مکعب شکل به داخل شکافی با همان شکل و اندازه توسط یک قطعه فولادی با فشار p جا زده می‌شود. ورق فولادی مطلقاً سخت بوده و هیچگونه اصطکاکی بین فولاد و لاستیک موجود نیست. مطلوبست ۱- فشار لاستیک به جداره‌ها ۲- تنش برشی ماکزیمم در لاستیک.



حل: مکعب در راستای x و y تغییرات ندارد بنابراین $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ و $\sigma_z = -P$

بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right) = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \frac{-\nu P}{1-\nu}$$

اگر ضریب پواسون لاستیک را $\nu = 0.5$ در نظر بگیریم پس:

$$\sigma_x = \sigma_y = -P = \sigma_z$$

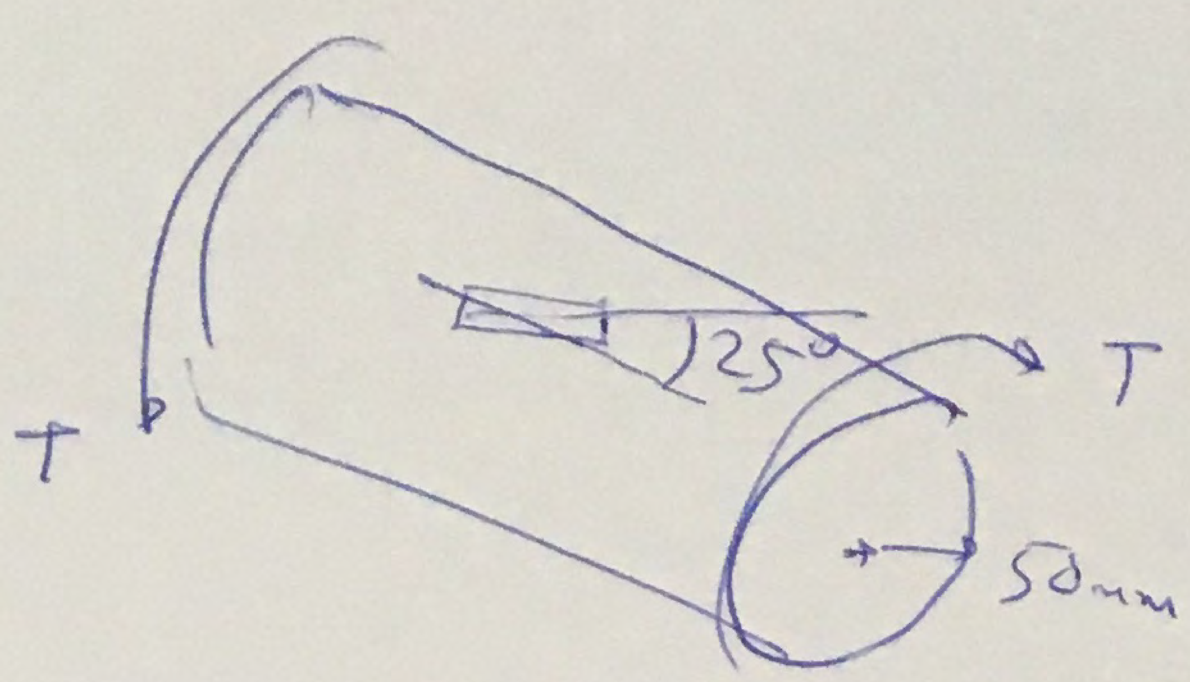
تنش های برشی ماکزیمم عبارتند از:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad , \quad \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad , \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{12} = 0 \quad , \quad \tau_{23} = P\left(1 - \frac{\nu}{1-\nu}\right) \quad , \quad \tau_{13} = \frac{(1-2\nu)}{1-\nu} P$$

اگر $\nu = 0.5$ باشد تنش های برشی صفر می شوند

مثال: اگر کرنش سنجی که به دور یک محور فولادی توپر به قطر 100mm که تحت زاویه 25° نسبت به محور استوانه نصب شده عدد 300μ را نشان می دهد. کوپل پیچشی T را که باعث این کرنش می شود را بیابید.



$G = 80\,GPa$

حل:

$$\varepsilon'_x = \cancel{\varepsilon_x}\cos^2\theta + \cancel{\varepsilon_y}\sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

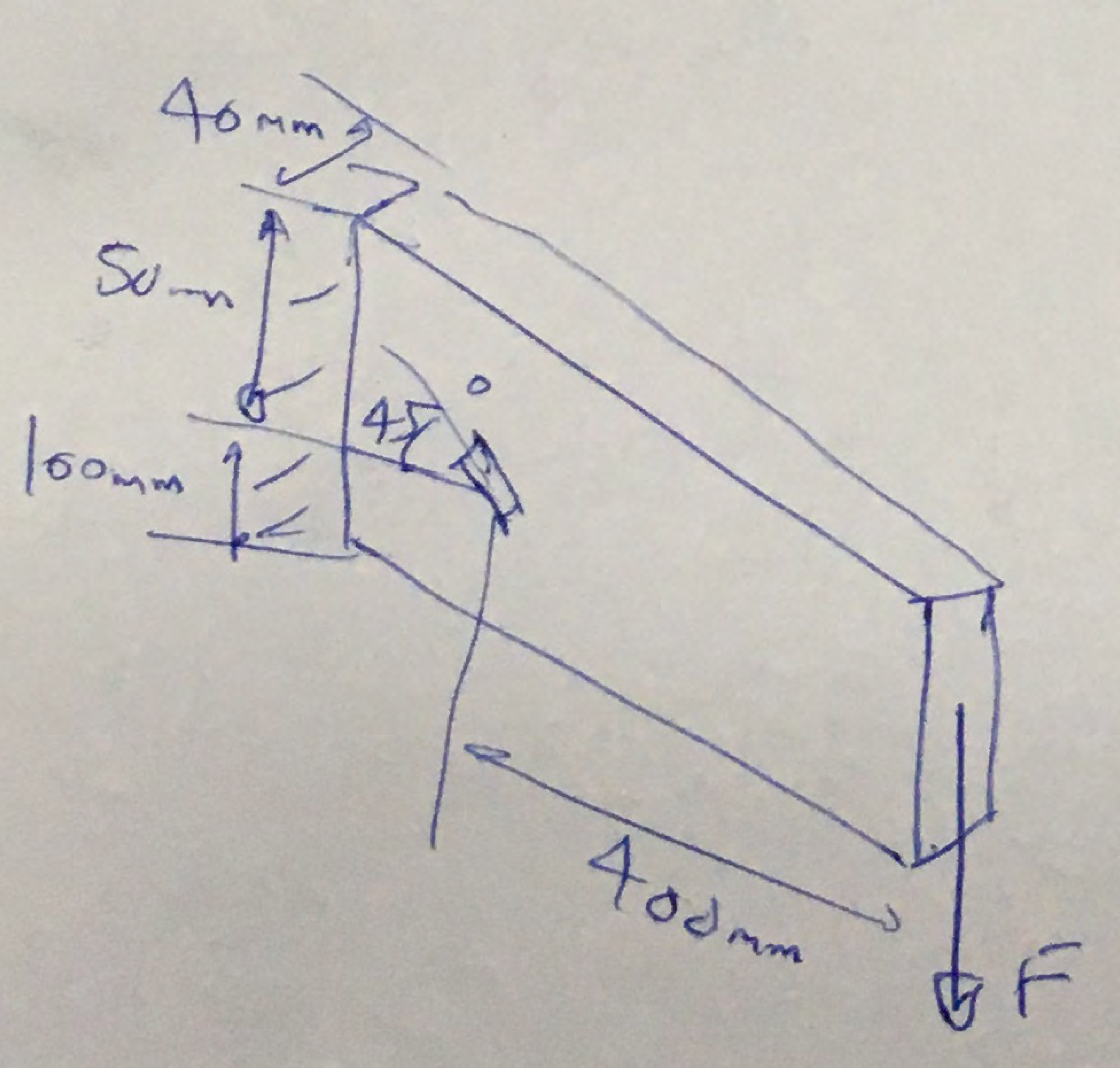
$$\Rightarrow \varepsilon'_x = \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\varepsilon'_x}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{300\mu}{\sin 25^\circ\cos 25^\circ}$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{Tr}{GJ} \Rightarrow T = \frac{GJ\gamma_{xy}}{r} \checkmark \Rightarrow T = 12.3\,kN.m$$

تمرین
شکل:

تیر یکسر گیردار AB با سطح مقطع 40mm×150mm تحت تأثیر نیروی قائم F در انتهای آزاد B قرار دارد. یک کرنش سنج که با افق زاویه 45° می‌سازد به فاصله 400mm از انتهای B عدد 240μ را نشان می‌دهد. نیروی F را بدست آورید.

$\nu = 0.3$ و $E = 200\,GPa$



جواب: $F = 80\,kN$

معادلات تعادل برحسب مولفه‌های تغییر مکان

برای نوشتن معادلات حرکت برحسب مولفه‌های تغییر مکان باید معادلات زیر را ترکیب کرد:

۱- معادلات تعادل ۲- مدل تنش - کرنش ۳- روابط کرنش - جابجایی

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu \varepsilon_x \quad , \quad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy} \quad , \quad \tau_{xz} = \mu \gamma_{xz}$$

پس با قرار دادن در معادله بالا داریم:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \left(2 \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} \right) = 0$$

با قرار دادن مولفه‌های تغییر مکان به جای مولفه‌های کرنش داریم:

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = 0$$

یا

$$\lambda \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

با در نظر گرفتن $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ رابطه بالا عبارت است از:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

بنابراین:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \dfrac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0 \\ (\lambda + \mu) \dfrac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = 0 \\ (\lambda + \mu) \dfrac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 w = 0 \end{cases}$$

معادلات بالا به معادلات لاکس معروفند.

فصل چهارم

حل مسائل ۲ بعدی:

به منظور تعیین توزیع تنش، کرنش و تغییر مکان در داخل یک جسم الاستیک که تحت تاثیر دستگاه نیروها قرار گرفته است، لازم است ارتباط بین تعدادی از شرایط اساسی مربوط به قوانین فیزیکی، خواص ماده، خواص هندسی و نیرو در سطحی را مورد مطالعه قرار دهیم:

۱ـ معادلات تعادل باید در سرتاسر جسم ارضا شود.
1- Equilibrium Equations

۲ـ روابط ارتباطی خطی تنش ـ کرنش (قانون هوک) باید روی ماده اعمال گردد.
2-Constitutive Equations

۳ـ مولفه‌های کرنش که مشتق نسبی مولفه‌های تغییر مکان هستند باید با هم سازگار شوند و توزیع کرنش بایستی با حفظ پیوستگی جسم موافق باشد.
3-Compatibility equations

۴ـ مولفه‌های تنش، کرنش و تغییر مکان بایستی با شرایط مرزی اعمال شده در مرز سازه سازگار باشد.
4- boundary conditions

تقسیم بندی مسائل ۲ بعدی:

مسائل ۲ بعدی به دو دسته کلی تنش مسطح plane stress و کرنش مسطح (plane strain) تقسیم می‌شوند که در ادامه توضیح داده می‌شوند.

۱- کرنش صفحه‌ای plane strain

در کرنش صفحه‌ای جسم واقعی یک جسم استوانه‌ای یا منشوری است که به چنان بارگذاری شود که با در نظر گرفتن شرایط مرزی تمام کرنش‌ها و تغییر شکل‌ها مستقل از بعد سوم z می‌شود مانند تونل یا سدها (دیوارهای حائل با طول زیاد). استوانه‌ای با طول بلند و تیری که در دو انتها مقید است، نیروهای خارجی فقط تابعی از x و y هستند.

در این حالت کرنش در صفحه xy فقط تابعی از مختصات x و y است:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

در این حالت $\frac{\partial u}{\partial z}$ و $\frac{\partial v}{\partial z}$ و مولفه تغییر مکان روی محور z یعنی w و مشتقات آن صفر است.

بنابراین معادلات ~~تنش~~ تنش و کرنش می‌شود:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

محمدحسین،

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

* معادلات تعادل

معادلات تعادل عبارت است از:

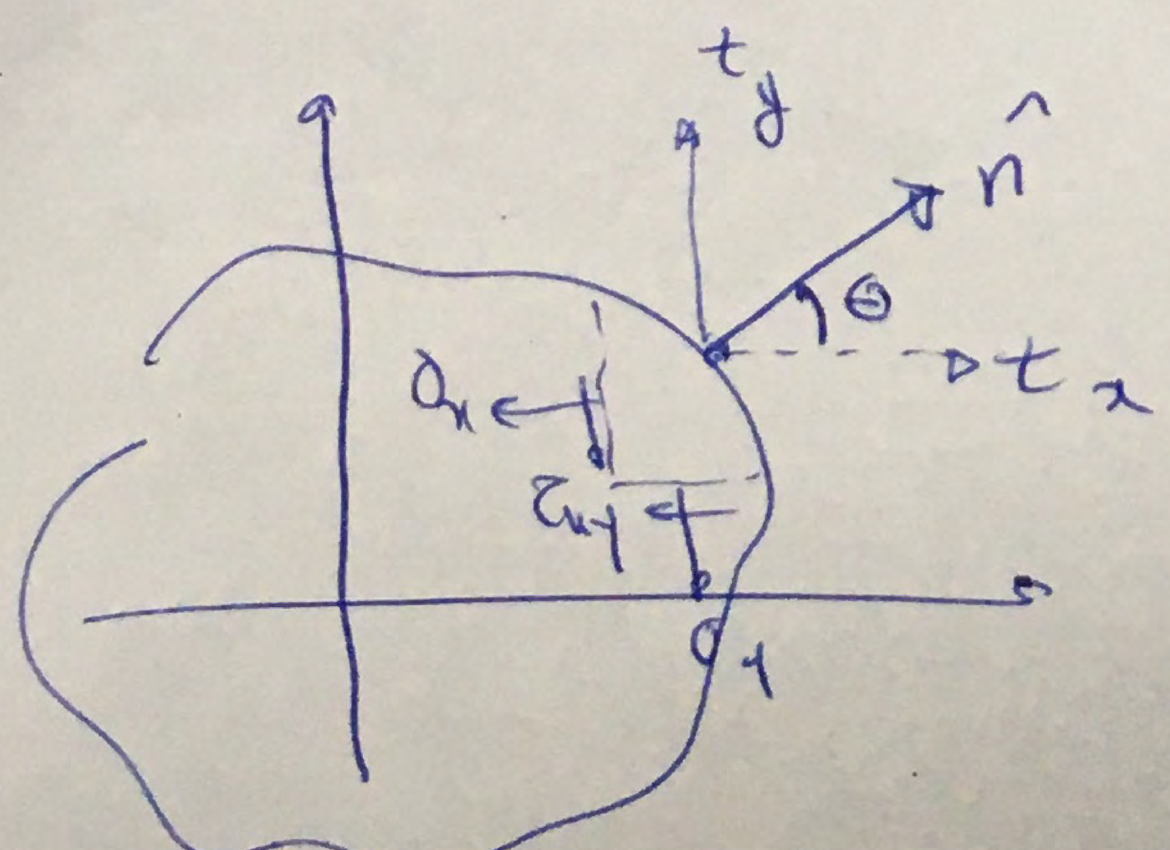
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0$$

معادله سوم تعادل اگر $f_z = 0$ باشد ارضا می‌شود. بنابراین در حالت کرنش صفحه‌ای نیروی بدنی در راستای z وجود ندارد:

شرایط مرزی:

همچنین در این حالت نیروهای سطحی فقط تابع x و y هستند و در راستای سوم نیروی سطحی وجود ندارد چرا که:



$$\left.\begin{aligned}\vec{t} &= T^T\hat{n}\\ t_z &= 0\end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{Bmatrix}$$

$$l = \cos\theta$$
$$m = \sin\theta$$

معادله سازگاری:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

معادله سازگاری برحسب تنش :

با استفاده از رابطه بین تنش و کرنش معادله بالا می‌شود:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right] = 2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (1)$$

یکی را نسبت به x و دیگری را به y

* حال اگر از معادلات تعادل ~~...~~ مشتق گرفته و با هم جمع کنیم:

$$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \qquad (2)$$

از 1 و 2 می‌توان نتیجه گرفت :

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)}$$

معادله بالا معادله سازگاری برحسب تنش در حالت کرنش صفحه‌ای است.

۴ـ تنش صفحه‌ای : plane stress

این حالت در صفحات نازک رخ می‌دهد که دو وجه آن آزاد و نیروی در صفحه بر آنها اعمال می‌شود، لزومی ندارد که ضخامت ورق ثابت باشد اما باید به طور تدریجی تغییر نماید. در حالت تنش صفحه‌ای تنش‌های σ_z و τ_{zx} و τ_{zy} و همچنین نیروی حجمی f_z صفر هستند

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

* معادلات تعادل

معادلات تعادل عبارتست از:

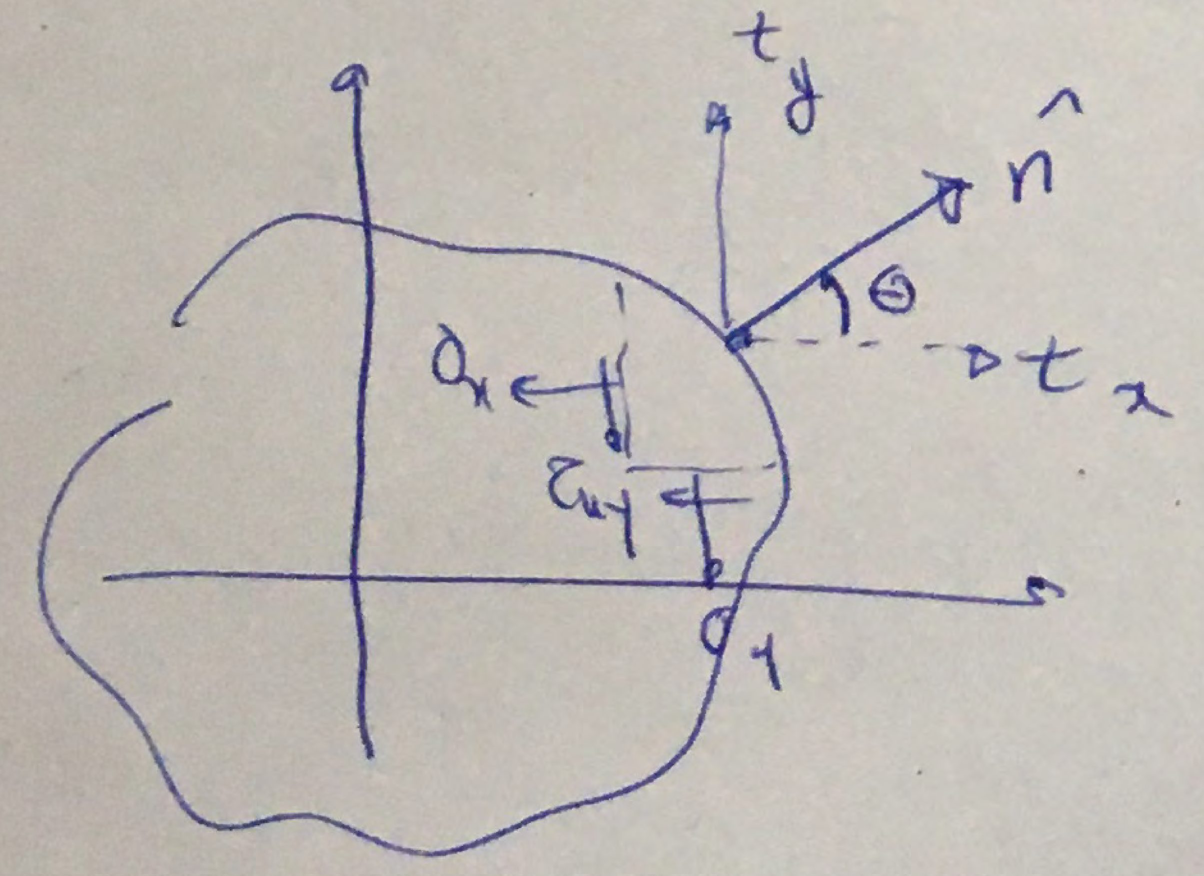
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0$$

معادله سوم تعادل اگر $f_z = 0$ باشد ارضا می‌شود. بنابراین در حالت کرنش صفحه‌ای نیروی بدنی در راستای z وجود ندارد:

شرایط مرزی:

همچنین در این حالت نیروهای سطحی فقط تابع x و y هستند و در راستای سوم نیروی سطحی وجود ندارد چرا که:



$$\left.\begin{aligned} \vec{t} &= T^T \hat{n} \\ t_z &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{Bmatrix}$$

$$l = \cos\theta$$
$$m = \sin\theta$$

معادله سازگاری:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

معادله سازگاری برحسب تنش:

با استفاده از رابطه بین تنش و کرنش معادله بالا می‌شود:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right] = 2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

یکی را نسبت به x و دیگری را y

* حال اگر از معادلات تعادل ~~[illegible]~~ مشتق گرفته و با هم جمع کنیم:

$$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \quad (2)$$

از ① و ② می‌توان نتیجه گرفت:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)}$$

معادله بالا معادله سازگاری برحسب تنش در حالت کرنش صفحه‌ای است.

۴ - تنش صفحه‌ای: plane stress

همان حالت در صفحه نازک رخ می‌دهد که وجوه آن آزاد و نیروی در صفحه آن اعمال می‌شود، لزومی ندارد که ضخامت ورق ثابت باشد اما باید به طور تدریجی تغییر نماید. در حالت تنش صفحه‌ای تنش‌ها σ_z و τ_{zx} و τ_{zy} و همچنین نیروی حجمی f_z صفر هستند.

و نیروهای f_x و f_y فقط تابعی از x و y هستند. پس در این حالت:

$$\sigma_x , \sigma_y , \tau_{xy} \neq 0$$

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

مولفه‌های غیر صفر تنش در ضخامت ورق ثابت بوده و فقط تابعی از مختصات نقطه y و x هستند.

روابط بین تنش و کرنش در حالت تنش صفحه‌ای:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

معادله سازگاری برحسب تنش در حالت تنش صفحه‌ای:

با توجه به حالت تنش می‌توان معادله سازگاری را برحسب تنش نوشت که می‌شود:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

تابع تنش: Airy's function or Stress function

حل مسائل ۲ بعدی در الاستیسیته نیازمند حل معادلات تعادل همراه با معادلات سازگاری با در نظر گرفتن شرایط مرزی می‌شود. بنابراین با صرف نظر از f_x و f_y می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{Equilibrium Equation}$$

$$\left\{ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \right. \longrightarrow \text{Compatibility Equation}$$

حال اگر فرض کنیم:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

به همین شکل معادلات تعادل ارضا می‌شوند. به ϕ تابع تنش ایری گویند

بنابراین معادله سازگاری می‌شود:

$$\nabla^4 \phi = 0 \longrightarrow \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

معادله نوع را معادله Biharmonic (دوهمسازی) گویند

روش حل مسائل الاستیک:

حل مستقیم معادلات الاستیسیته تقریباً غیرممکن است. بنابراین ترجیح داده می‌شود که به دو روش زیر حل شوند:

۱- روش معکوس inverse method

۲- روش نیمه معکوس Semi-inverse method

90122513 امیرمهدی فلاحی

۳۱

* در روش معکوس ابتدا لازم است راه حلی فرض شود که آنگاه چنانچه فرض شده باید معادلات حاکم و شرایط مرزی را ارضا کند.

* در روش نیمه معکوس بخشی از راه حل مسئله به صورت مسئله تنش، کرنش، تغییر مکان یا تابع تنش با ضرایب معلوم یا نامعلوم فرض می‌شود و سپس معادلات حاکم را کنترل کنیم. تعدادی از مسائل الاستیسیته با استفاده از ترکیب خطی توابع چندجمله‌ای بر حسب متغیرهای x و y با ضرایب نامعین از تابع تنش Φ حل نمود. در این صورت تابع چندجمله‌ای باید معادله بای‌هارمونیک را ارضا کند. و از درجه دوم یا بالاتر باشد تا تنش‌های تعریف شده بر حسب آن را با استفاده از معادلات زیر به دست آورد:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

تذکر: مسئله به نوع شکل تابع تنش را می‌توان به اشکال مختلف نظیر توابع جبری، چندجمله‌ای، توابع مثلثاتی، سری‌های فوریه و توابع نمایی فرض کرد.

حل چندجمله‌ای: تعدادی از حل‌های معادله $\nabla^4 \Phi = 0$ را با استفاده از توابع چندجمله‌ای با مرتبه‌های مختلف و تنظیم ضرایب آنها برای ارضای شرایط مرزی می‌توان به دست آورد. شکل کلی چندجمله‌ای به صورت زیر است:

$$\Phi_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + a_{n-3} x^{n-3} y^3 + \dots$$

$$n=1 \rightarrow \Phi_1 = a_1 x + a_0 y$$

$$n=2 \rightarrow \Phi_2 = a_2 x^2 + a_1 xy + a_0 y^2$$

$$n=3 \rightarrow \Phi_3 = a_3 x^3 + a_2 x^2 y + a_1 x y^2 + a_0 y^3$$

تابع ϕ_n باید معادله بای‌هارمونیک و شرایط مرزی را ارضا کند. روش حل به این صورت است که معادلات باید برای ضرایب a_i حل شده و سپس ϕ و آنگاه تنش و کمیات دیگر محاسبه شود.

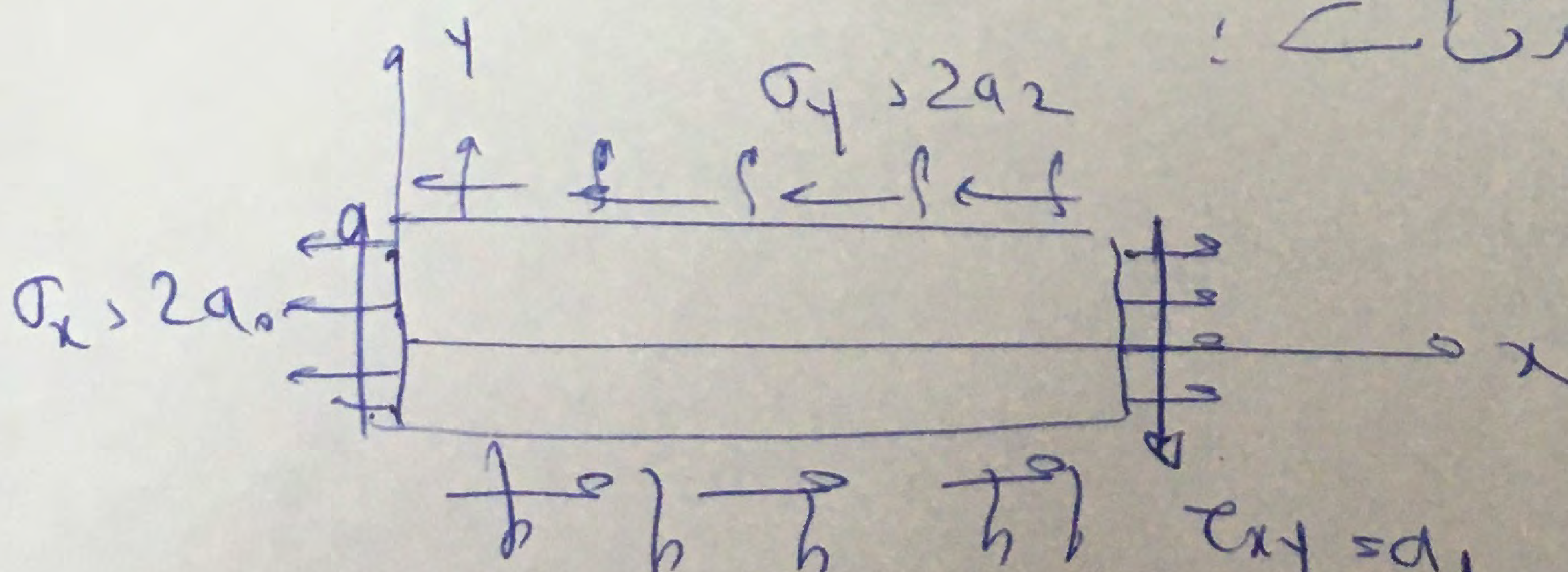
چندجمله‌ای درجه ۲ :

چندجمله‌ای درجه ۲ :

$$\phi_2 = a_2x^2 + a_1xy + a_0y^2$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial y^2} = 2a_0 \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2} = 2a_2 \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x \partial y} = -a_1$$

بنابراین تمامی سه مؤلفه تنش ثابت هستند. در این حالت ترکیبی از تنش‌های عمودی دو محوره و تنش برشی یکنواخت وجود دارد. برای یک ورق نازک مطابق شکل زیر توزیع تنش‌های فوق صادق است:



حال اگر هر کدام از ضرایب صفر باشد حالات مختلف پیش می‌آید:

۱- اگر $a_1 = a_2 = 0$ و $a_0 \neq 0$ ← تنش ساده

۲- اگر $a_1 = 0$ ، $a_2 \neq 0$ ، $a_0 \neq 0$ ← تنش دومحوره

۳- اگر $a_0 = a_2 = 0$ ، $a_1 \neq 0$ ← برش خالص

چندجمله‌ای درجه ۳:

$$\phi_3 = a_3 x^3 + a_2 x^2 y + a_1 x y^2 + a_0 y^3$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = 2a_1 x + 6a_0 y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = 6a_3 x + 2a_2 y$$

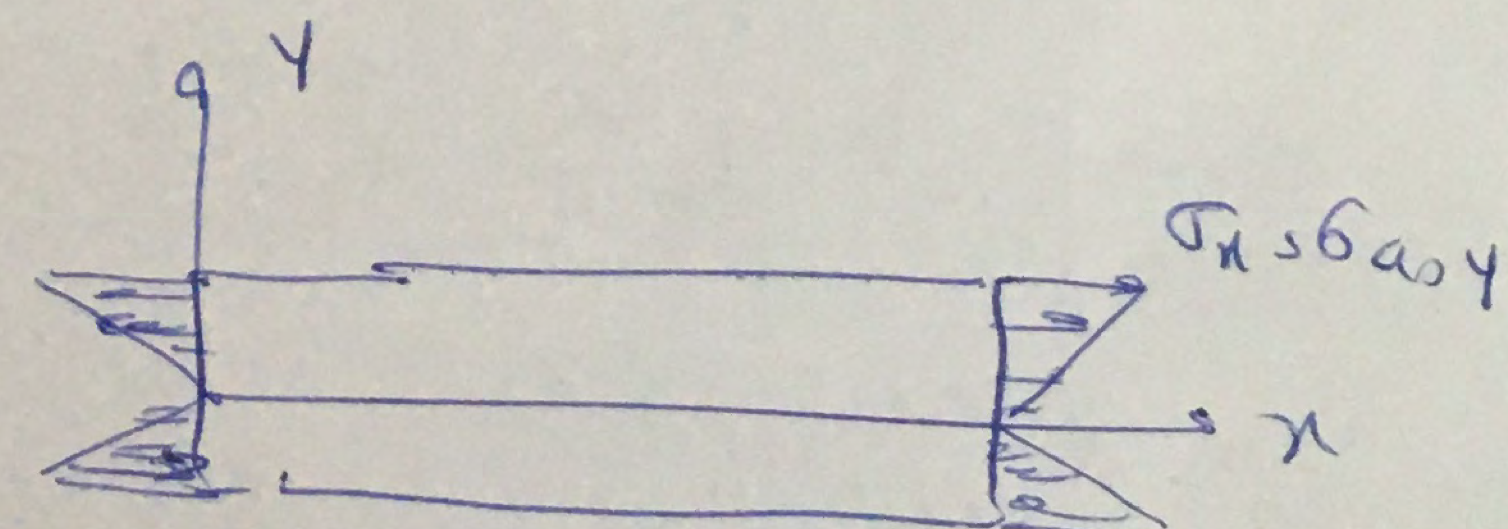
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2a_2 x - 2a_1 y$$

حالات مختلف:

۱- اگر $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ و $a_0 \neq 0$ ←

$$\begin{cases} \sigma_x = 6a_0 y \\ \tau_{xy} = \sigma_y = 0 \end{cases}$$

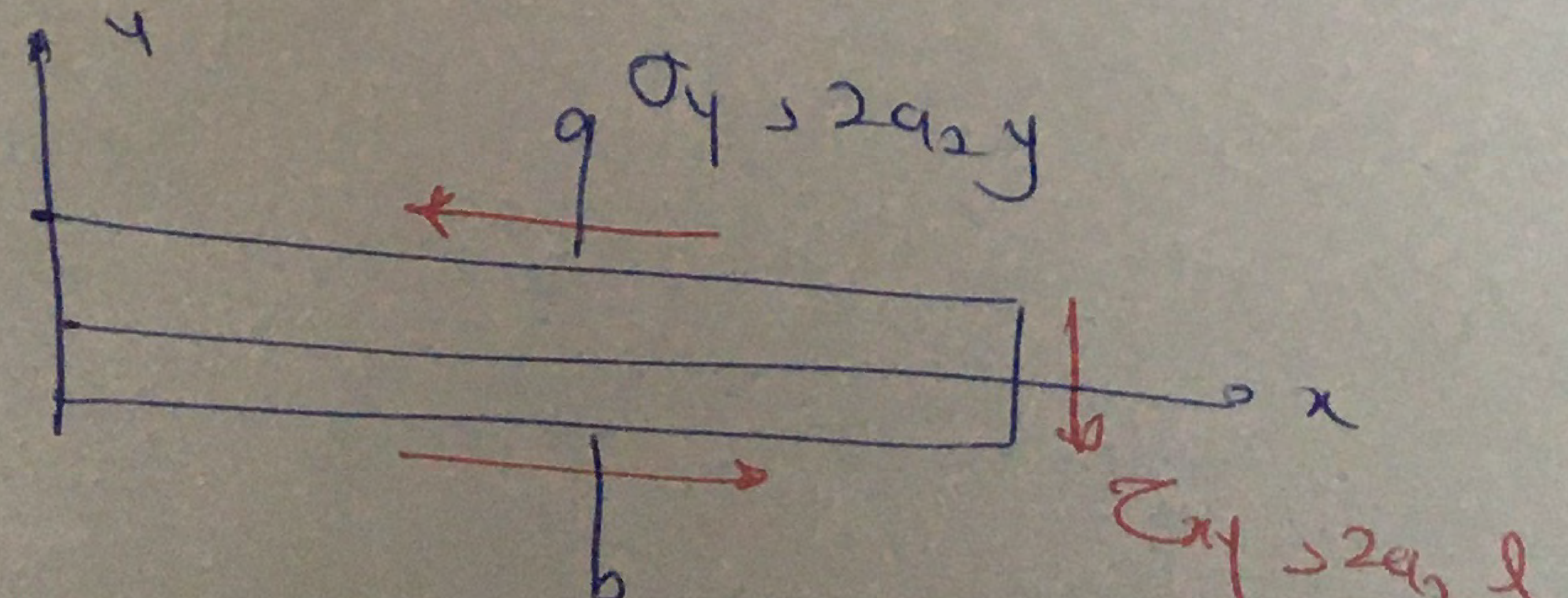
→ خمش خالص یک ورق نازک مستطیلی



۲- اگر $a_2 \neq 0$ و $a_1 = a_0 = a_3 = 0$ ←

$$\sigma_y = 2a_2 y$$
$$\tau_{xy} = -2a_2 x$$

یک ورق تحت تنش برشی متناسب با x و تنش عمودی $\sigma_y = 2a_2 y$ داریم.



مرتبه ۴

چندجمله‌ای‌های بالاتر از ۳ :

وقتی از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالاتر از ۳ استفاده شود معادله بای‌هارمونیک مستقیماً ارضا نمی‌شود و

بین ضرایب شرایط خاصی وجود داشته باشد.

مثال:

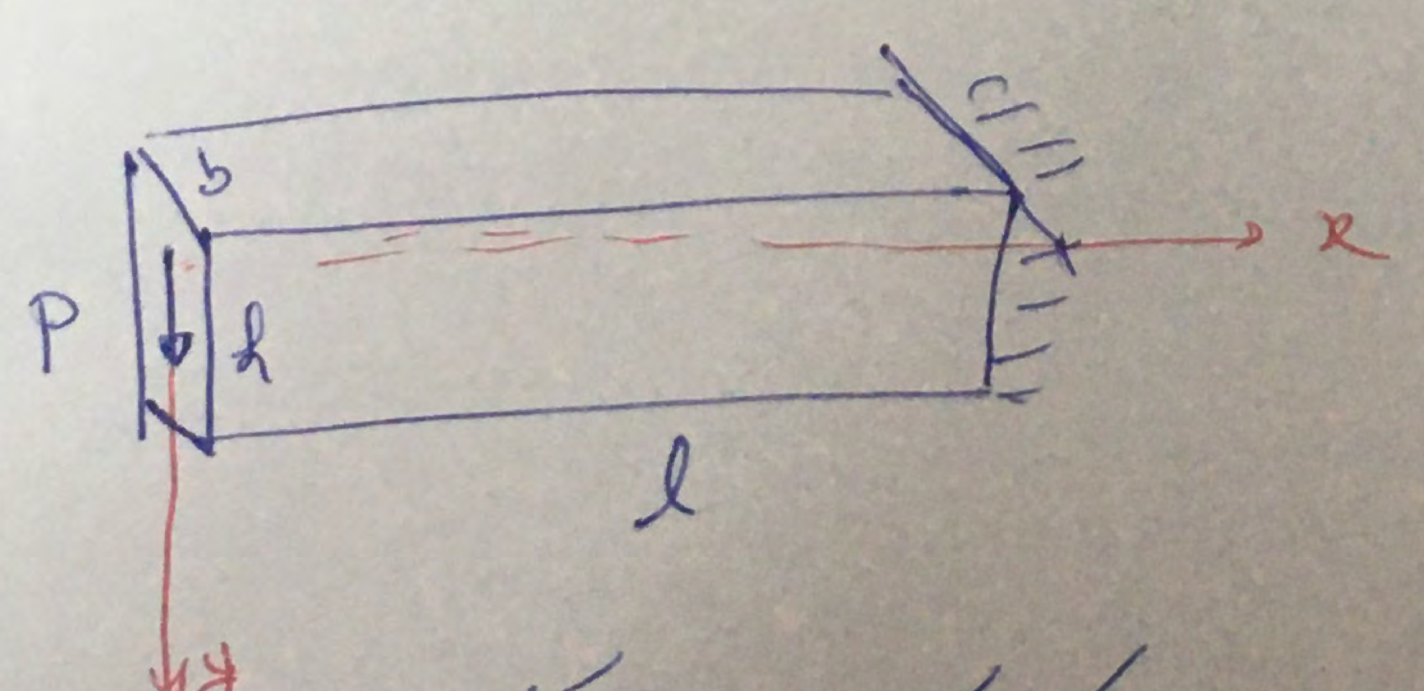
$$\Phi_4 = a_4x^4 + a_3x^3y + a_2x^2y^2 + a_1xy^3 + a_0y^4$$

توجه: معادله $\nabla^4\phi$ ارضا می‌شود که :

$$3a_0 = -a_2 - 3a_4$$

تمرین: برای Φ_5 شرایط لازم برای ارضا معادله بای‌هارمونیک را بنویسید.

مثال: یک تیر یکسرگیردار کم‌عرض با سطح مقطع مستطیلی $b \times h$ تحت نیروی P در انتهای آزاد قرار دارد. توزیع تنش در تیر را بیابید. از وزن صرف‌نظر شود.



حل: الف) چون تیر کم‌عرض است (b کوچک است) اگر اعمال شود، در صفحه xy قرار دارد، نیرویی روی سطح جانبی تیر وارد نمی‌شود لذا مولفه تنش در جهت z وجود ندارد.

ب- نیروهای حجمی صفر هستند. با توجه به فرض قبل واضح است که تنها مولفه‌های تنش حالا در صفحه xy

* در روش معکوس ابتدا لازم است راه حلی فرض شود که آنگاه جواب فرض شده باید معادلات حاکم و شرایط مرزی را ارضا کند.

* در روش نیمه معکوس بخشی از راه حل مسئله به صورت مولفه‌های تنش، کرنش، تغییر مکان یا تابع تنش با ضرایب مجهول یا معلوم فرض می‌شود و سپس معادلات حاکم را کنترل می‌کنیم. تعدادی از مسائل الاستیسیته با استفاده از ترکیب خطی توابع چندجمله‌ای برحسب متغیرها و با ضرایب نامعین از تابع تنش ϕ حل می‌شود. در این صورت تابع چندجمله‌ای باید معادله بای‌هارمونیک را ارضا کند و از درجه دوم یا بالاتر باشد تا تنش‌های تعریف شده برحسب آن را با استفاده از معادلات زیر بدست آورد که بودند:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

تذکر ۱: بسته به نوع شکل تابع تنش را می‌توان به اشکال مختلف نظیر توابع جبری، چندجمله‌ای، توابع مثلثاتی، سری‌های فوریه و توابع مختلط فرض کرد.

حل چندجمله‌ای: تعدادی از حل‌ها برای معادله $\nabla^4 \phi = 0$ را با استفاده از توابعی به شکل چندجمله‌ای با رتبه‌های مختلف و ضرایب نامعلوم که آنها را با ارضای شرایط مرزی می‌توان بدست آورد. شکل کلی چندجمله‌ای به صورت زیر است:

$$\phi_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + a_{n-3} x^{n-3} y^3 + \dots$$

$$n=1 \rightarrow \phi_1 = a_1 x + a_0 y$$

$$n=2 \rightarrow \phi_2 = a_2 x^2 + a_1 xy + a_0 y^2$$

$$n=3 \rightarrow \phi_3 = a_3 x^3 + a_2 x^2 y + a_1 x y^2 + a_0 y^3$$

تابع ϕ_n باید معادله بای هارمونیک و شرایط مرزی را ارضا کند. روش حل به این صورت است که معادلات باید برای ضرایب a_i حل شده و سپس ϕ و آنگاه تنش و کمیات دیگر محاسبه شوند.

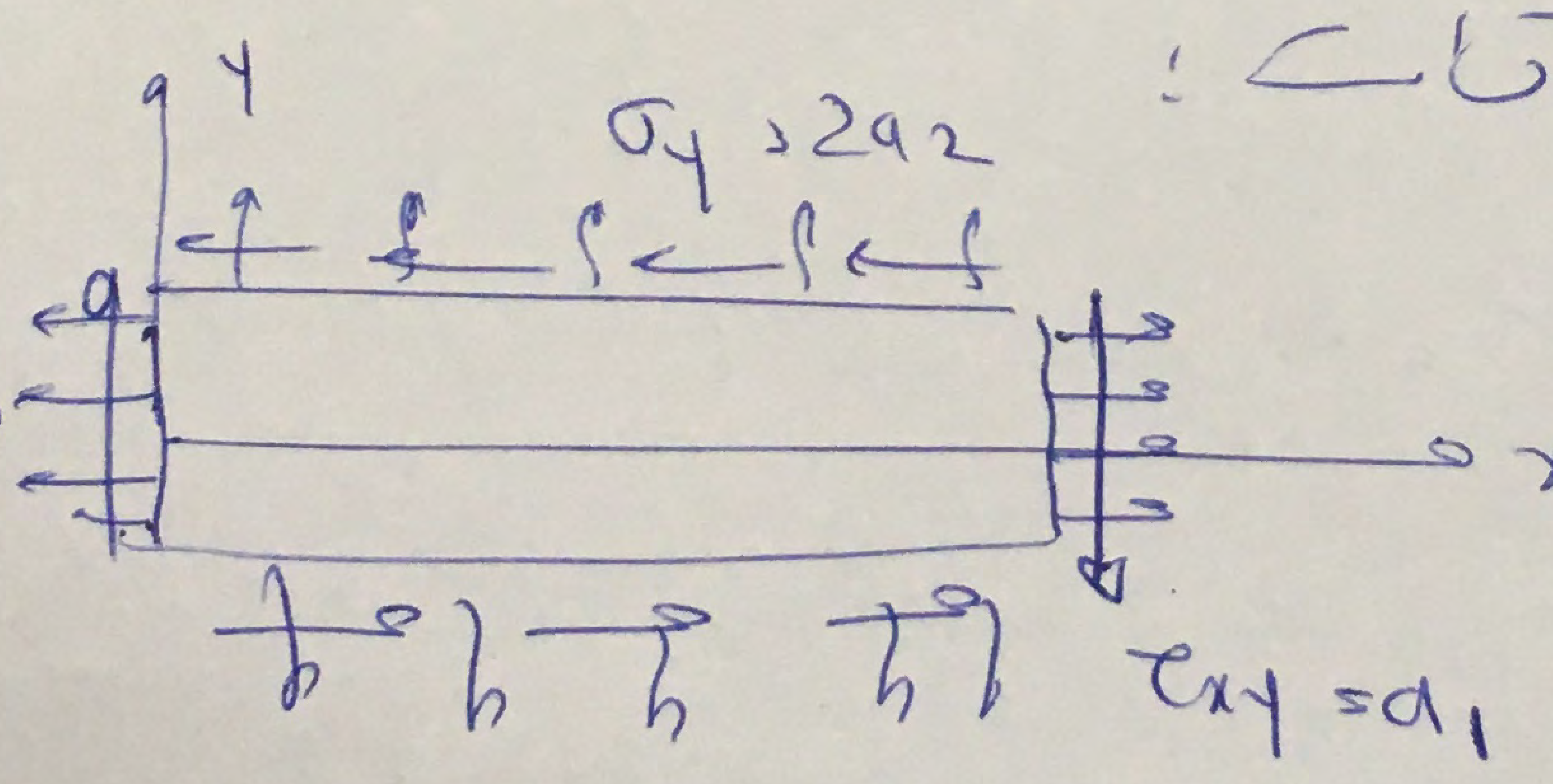
چندجمله‌ای درجه ۲:

چندجمله‌ای درجه ۲:

$$\phi_2 = a_2x^2 + a_1xy + a_0y^2$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial y^2} = 2a_0 \quad \text{و} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2} = 2a_2 \quad \text{و} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x \partial y} = -a_1$$

بنابراین هر سه مولفه تنش ثابت هستند. در این حالت ترکیبی از تنش های محوری در دو راستا و تنش برشی یکنواخت وجود دارد. برای یک ورق نازک مطابق شکل زیر توزیع تنش های فوق صادق است:



حال اگر هر کدام از ضرایب صفر باشد حالات خاص پیش می‌آید:

۱- اگر $a_1 = a_2 = 0$ و $a_0 \neq 0$ ← کشش ساده

۲- اگر $a_0 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_1 = 0$ ← کشش دو محوره

۳- اگر $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$ ← برش خالص

ضرایب درجه ۳:

$$\Phi_3 = a_3x^3 + a_2x^2y + a_1xy^2 + a_0y^3$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y^2} = 2a_1x + 6a_0y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^2} = 6a_3x + 2a_2y$$

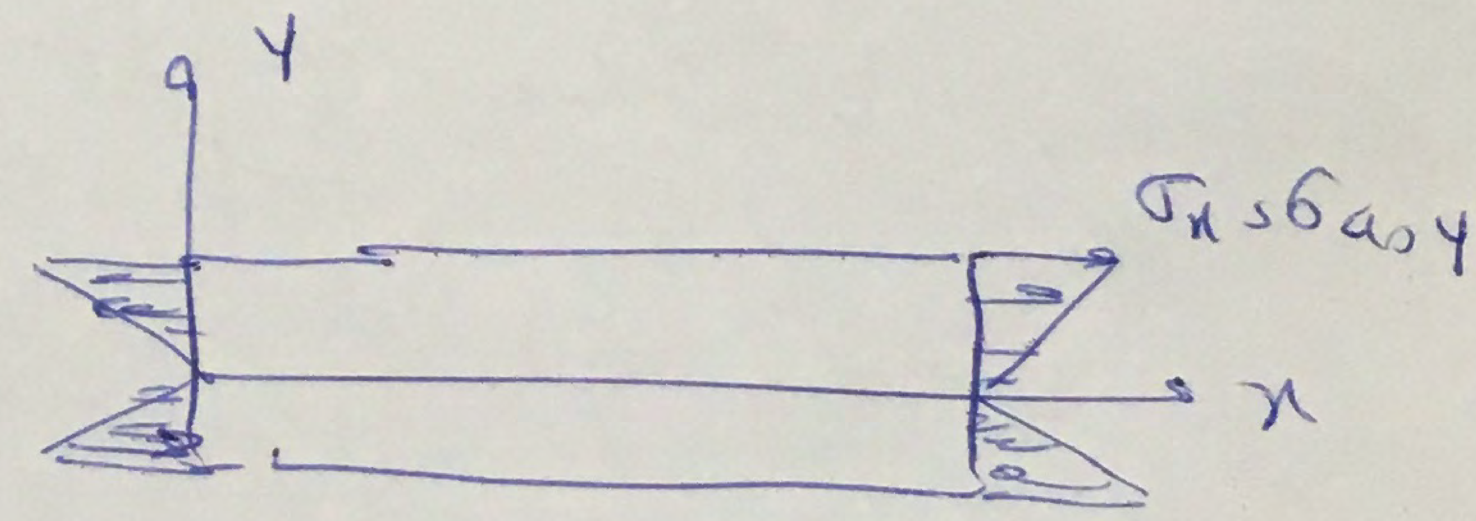
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -2a_2x - 2a_1y$$

حالات مختلف:

۱- اگر $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ و $a_0 \neq 0$ ←

$$\begin{cases} \sigma_x = 6a_0y \\ \tau_{xy} = \sigma_y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

خمش خالص یک ورق نازک مستطیلی

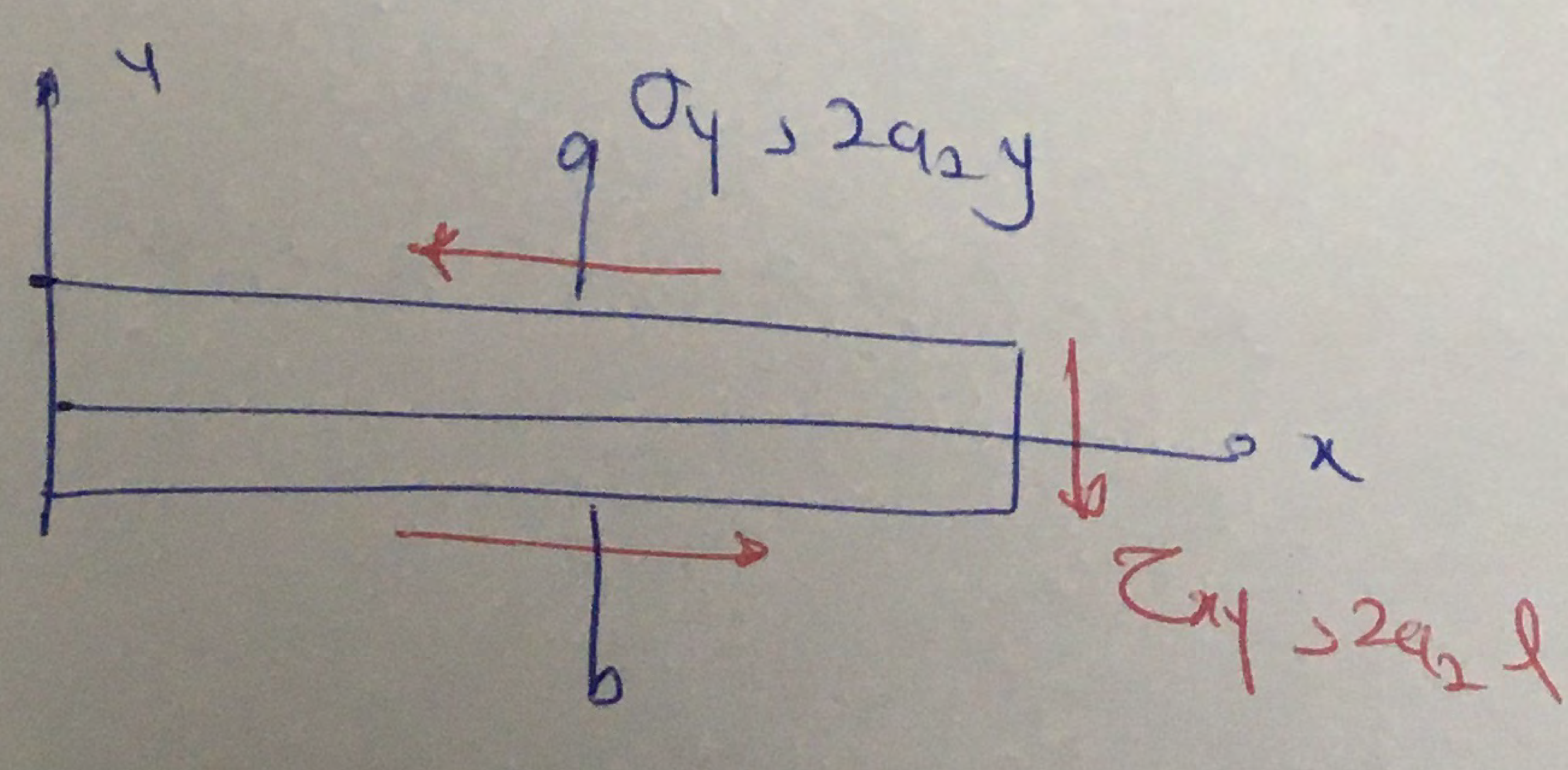


۲- اگر $a_2 \neq 0$ و $a_1 = a_0 = a_3 = 0$ ←

$$\sigma_y = 2a_2y$$

$$\tau_{xy} = -2a_2x$$

یک ورق تحت تنش برشی متناسب با x و تنش عمودی $\sigma_y = 2a_2y$ است.



~~[illegible]~~ مرتبه‌ی بالاتر از ۳ :

وقتی از چندجمله‌ای‌های مرتبه‌ی بالاتر از ۳ استفاده شود معادله‌ی بای‌هارمونیک وقتی ارضا می‌شود که بین ضرایب شرایط خاصی وجود داشته باشد.

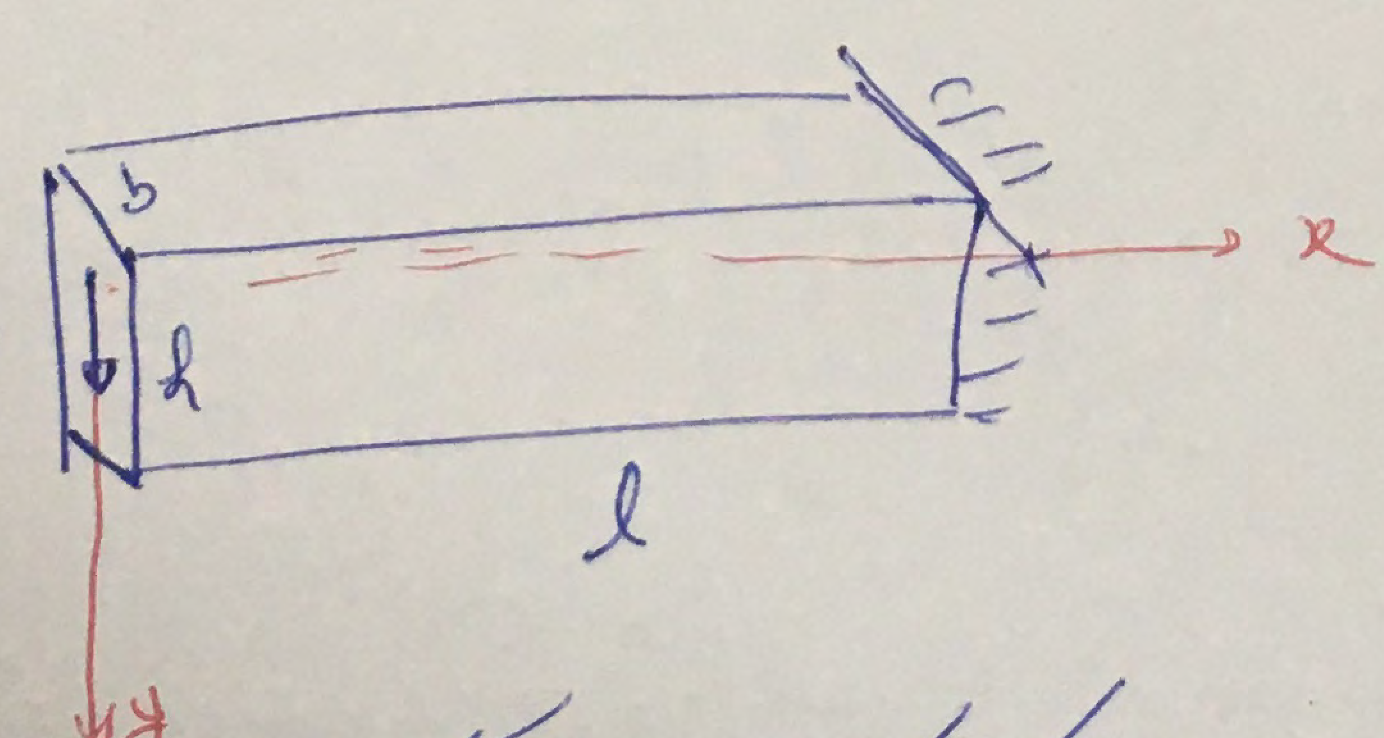
مثال:
$$\Phi_4 = a_4x^4 + a_3x^3y + a_2x^2y^2 + a_1xy^3 + a_0y^4$$

موقعی معادله $\nabla^4\phi$ ارضا می‌شود که:

$$3a_0 = -a_2 - 3a_4$$

تمرین: برای Φ_5 شرایط لازم برای ارضای معادله‌ی بای‌هارمونیک را بنویسید.

مثال: یک تیر یکسر گیردار کم‌عرض با سطح مقطع مستطیلی $b\times h$ تحت نیروی P در انتهای آزاد قرار دارد. توزیع تنش در تیر را بیابید. از وزن صرف‌نظر شود.



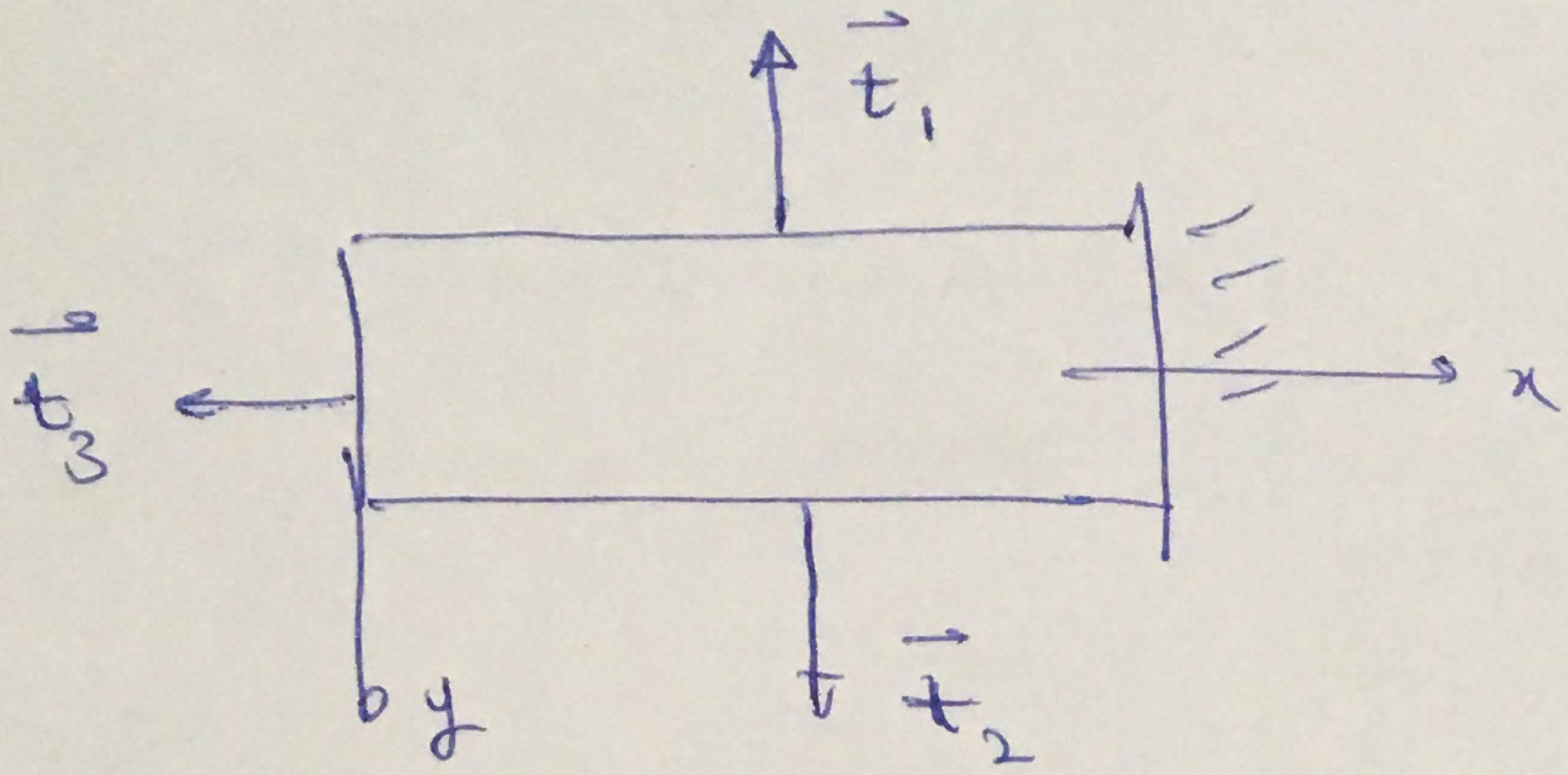
حل: الف) چون تیر کم‌عرض است (b کوچک است) و نیروی اعمال شده در صفحه xy قرار دارد، نیرویی روی سطح جانبی تیر وارد نمی‌شود لذا مولفه‌ی تنش در جهت z وجود ندارد.

ب- نیروهای حجمی صفر هستند. با توجه به فرض قبل واضح است که مولفه‌های تنش همه در صفحه‌ی xy

۲۵

واضح است بنابراین این شکل از نوع تنش صفحه‌ای است. شرایط مرزی عبارتند از:

الف) :



(۱)

$$\vec{t}_1 = T^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \end{Bmatrix}$$

که چون در این مرز هیچ نیرو و برشی یا تاثیری نیست پس:

$$\vec{t}_1 = 0 \Rightarrow \tau_{xy}\Big|_{y=-\frac{h}{2}} = 0 \quad \text{و} \quad \sigma_y\Big|_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

(۲)

$$\vec{t}_2 = T^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\tau_{xy}\Big|_{y=\frac{h}{2}} , \quad \sigma_y\Big|_{y=\frac{h}{2}} = 0$$

(۳)

$$\vec{t}_3 = T^T \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

که داریم:

$$\int \vec{t}_3 \, dA = P\hat{j} \Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\tau_{xy} \, b \, dy = P$$

$$\Rightarrow \boxed{P = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \, b \, dy}$$

گشتاور ناشی از P عبارتست از: $M_z = P \cdot x$

فرض می شود که تابع تنش ویری از ترکیب چندجمله ای ϕ_2 با نیرو تنش مقطع a_2xy و ϕ_4

با نیرو تنش مقطع a_1xy^3 حاصل شده است پس:

$$\phi = \phi_2 + \phi_4 = a_2xy + a_1xy^3$$

پس:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6a_1xy$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -a_2 - 3a_1y^2$$

حال شرایط مرزی را اعمال می کنیم:

1) $\tau_{xy}\Big|_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0 \Rightarrow -a_2 - 3a_1\left(\pm\frac{h}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3h^2}{4}a_1}$

2) $\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, b\, dy = -P \Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b\left(\frac{3h^2}{4}a_1 - 3a_1y^2\right) dy = -P$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{2P}{bh^3}} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{3P}{2bh}}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = 6a_1xy = \frac{-12Px}{bh^3}y = -\frac{M}{I}y$$

$$\sigma_y = 0 \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{2bh} + \frac{6P}{bh^3}y^2 = -\frac{P}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

که $I = \frac{bh^3}{12}$ است. حل به دست آمده با حل تئوری مقاومت مصالح منطبق است.

روش نیمه معکوس حل:

از آنجا که تنش خمشی در خمش با x خطی تغییر می‌کند ~~...~~ و همچنین σ_x در هر مقطع فقط به y بستگی دارد پس:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = c_1 x y$$

پس:

$$\phi = \frac{1}{6} c_1 x y^3 + y f_1(x) + f_2(x)$$

حال این ϕ را در معادله بای‌هارمونیک قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \Rightarrow y\frac{d^4 f_1}{dx^4} + \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$$

چون ترم رابطه فوق مستقل از y است و راه حل معادله برای تمام مقادیر x و y موقعی است که داشته باشیم:

$$\frac{d^4 f_1}{dx^4} = 0 \quad , \quad \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$$

پس:

$$f_1(x) = C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$$

$$f_2(x) = C_6 x^3 + C_7 x^2 + C_8 x + C_9$$

پس:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{6} c_1 x y^3 + (C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5) y + C_6 x^3 + C_7 x^2 + C_8 x + C_9$$

حال تنش σ_y و τ_{xy} را از رابطه مربوطه بدست می‌آوریم :

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6(C_2 y + C_6)x + 2(C_3 y + C_7)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}C_1 y^2 - 3C_2 x^2 - 2C_3 x - C_4$$

حال با اعمال شرایط مرزی :

$$\left.\sigma_y\right|_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0, \quad \left.\tau_{xy}\right|_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0 \longrightarrow C_2 = C_3 = C_6 = C_7 = 0, \quad C_4 = -\frac{1}{8}C_1 h^2$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, b\, dy = -P \Rightarrow C_1 = -\frac{3P}{\frac{bh^3}{4}} = -\frac{P}{I}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = -\frac{Px}{I}y, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

حل

مثال، در مثال قبل میدان تغییر مکان را بیابید.

داریم:

$$\sigma_x = \frac{-P}{I}xy$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

پس:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_y}{E}\right) = \frac{-P}{\cancel{2}EI}xy$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_x}{E}\right) = \frac{\nu P}{EI}xy$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2GI}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

بنابراین:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P}{EI}xy \Rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{-P}{2EI}x^2y + f_1(y)} \quad (*)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu P}{EI}xy \Rightarrow \boxed{v(x,y) = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + f_2(x)} \quad (**)$$

از طرفی:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{-P}{2GI}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right) = \left(\frac{-P}{2EI}x^2 + \frac{df_1}{dy}\right) + \left(\frac{\nu P}{2EI}y^2 + \frac{df_2}{dx}\right)$$

نشان این:

$$\left(-\frac{P}{2EI}x^2+\frac{df_2}{dx}\right)+\left(\frac{\nu P}{2EI}y^2-\frac{P}{2GI}y^2+\frac{df_1}{dy}\right)+$$

$$\frac{Ph^2}{2GI}=0$$

حال فرض می‌کنیم:

$$\boxed{-\frac{P}{2EI}x^2+\frac{df_2}{dx}=A} \quad (1)$$

چرا که ترم اول تابع x و ترم دوم تابع y است.

$$\boxed{\frac{\nu P}{2EI}y^2-\frac{P}{2GI}y^2+\frac{df_1}{dy}=B} \quad (2)$$

و

$$\boxed{A+B=-\frac{Ph^2}{2GI}} \quad (3)$$

پس:

$$(1) \Rightarrow \frac{df_2}{dx}=A+\frac{P}{2EI}x^2 \Rightarrow \boxed{f_2=Ax+\frac{Px^3}{6EI}+C_1} \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{df_1}{dy}=B+\left(\frac{P}{2GI}-\frac{\nu P}{2EI}\right)y^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{f_1=By+\left(\frac{P}{6GI}-\frac{\nu P}{6EI}\right)y^3+C_2} \quad (5)$$

پس:

$*$, $⑤ \Rightarrow$

$$u = -\frac{P}{2EI}x^2 y + By + \left(\frac{P}{6GI} - \frac{\nu P}{6EI}\right)y^3 + C_2$$

$**$, $④ \Rightarrow$

$$v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + Ax + \frac{Px^3}{6EI} + C_1$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$② \begin{matrix} x = l \\ y = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$② \begin{matrix} x = l \\ y = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

داریم:

$$-\frac{P}{2EI}l^2 \times 0 + B \times 0 + \left(\frac{P}{6GI} - \frac{\nu P}{6E}\right)\times 0 + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$\frac{\nu P}{2EI}xl \times 0 + A \times l + \frac{Pl^3}{6EI} + C_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{AL + \frac{Pl^3}{6EI} + C_1 = 0} \quad ⑥$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l,\, y=0} \Rightarrow \Rightarrow ✓$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l,\, y=0} \Rightarrow \Rightarrow A + \frac{Pl^2}{2EI} = 0 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{Pl^2}{2EI}} \quad ⑦$$

از طرفی:

$$③ \Rightarrow A + B = -\frac{Pl^2}{2GI} \Rightarrow$$

$$\boxed{B = -\frac{Pl^2}{2GI} + \frac{Pl^2}{2EI}}$$

$$⑥, ⑦ \Rightarrow C_1 = \frac{Pl^3}{2EI} - \frac{Pl^3}{6EI} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

σ_1 :

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + \frac{Pl^2y}{2EI} - \frac{Pl^2y}{2GI} + \left(\frac{P}{6GI} - \frac{\nu P}{6EI}\right)y^3$$

$$v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + \frac{Pl^3}{3EI}$$

روابط اساسی در مختصات قطبی:

تمام روابطی که در دستگاه مختصات دکارتی بیان شد در دستگاه قطبی نیز وجود دارد:

۱- معادلات کرنش تغییر مکان:

در دستگاه قطبی در حالت ۲ بعدی بجای x و y از r و θ استفاده می‌شود:

$$u_r = u_r(\theta, r)$$
$$u_\theta = u_\theta(\theta, r)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\[2ex] \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\[2ex] \gamma_{r\theta} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r} \end{cases}$$

تذکر: در حالتی که اجسام نسبت به محور z تقارن داشته باشند (مانند استوانه) تولید $u_\theta = 0$ است و $\gamma_{r\theta} = 0$ می‌باشد و بنابراین $\tau_{r\theta} = 0$ است.
و در این حالت تمام مقادیر فقط تابعی از r می‌شوند:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad , \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad \text{و} \quad \gamma_{r\theta} = 0 \quad \text{و} \quad u_\theta = 0$$

۲- معادله سازگاری:

معادله سازگاری در مختصات قطبی عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} - r^2\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}\right) + r\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} = 0$$

۳- معادلات تنش - کرنش:

حالت ۱- تنش صفحه ای:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}$$

۲- حالت کرنش صفحه ای:

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta\right)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}$$

۴- معادله سازگاری برحسب تابع تنش:

در غیاب نیروی حجمی معادله سازگاری برحسب تابع تنش عبارتست از:

$$\nabla^4\phi = 0 \quad , \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

نکته: در مسائل تقارن محوری معادله سازگاری عبارتست از:

$$\nabla^2(\sigma_r+\sigma_\theta) = \frac{d^2(\sigma_r+\sigma_\theta)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d(\sigma_r+\sigma_\theta)}{dr} = 0$$

۴۸

روابط بین تنش‌ها و تابع تنش:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)$$

تذکر: تابع تنش در مختصات قطبی معمولاً بصورت‌های زیر انتخاب می‌شود:

۱- $\phi = f(r)\sin n\theta$

۲- $\phi = f(r)\cos n\theta$

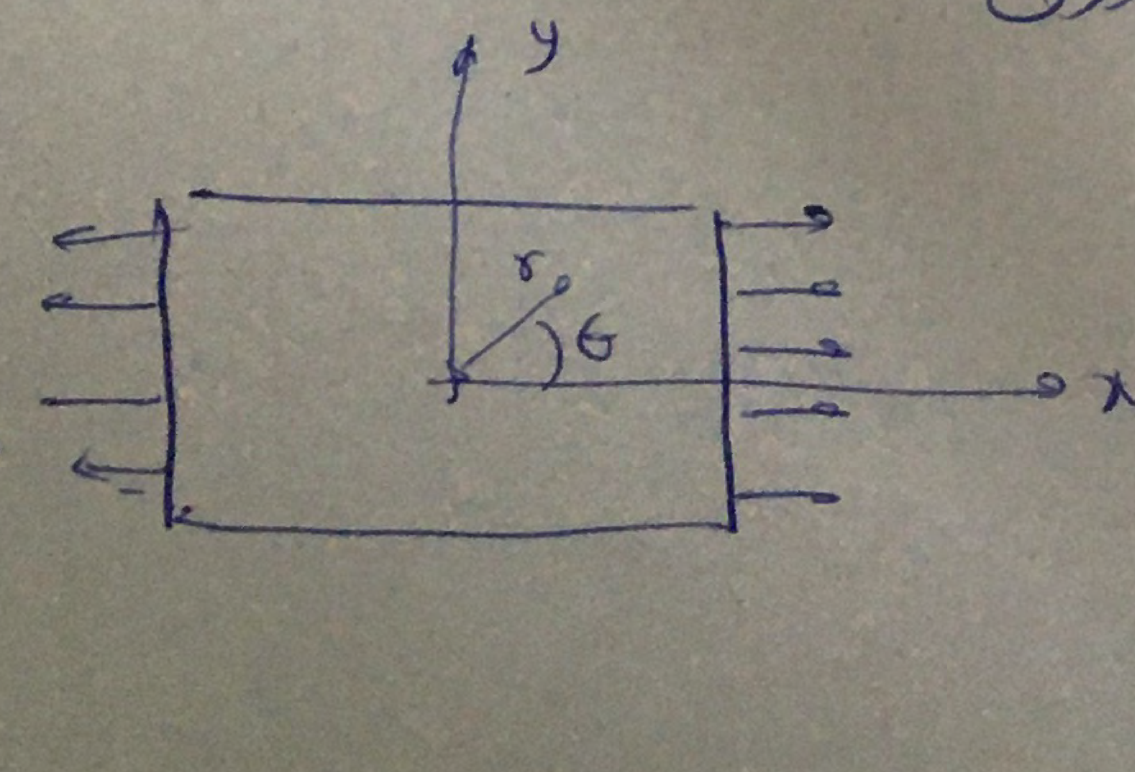
۳- $\phi = Cr\theta\cos\theta$

۴- $\phi = Cr\theta\sin\theta$

۵- $\phi = Cr^2\theta$

مثال: ورقه طویل نازکی تحت تنش کششی یکنواخت σ_0 است. مطلوبست تعیین میدان تنش موجود در داخل ورق.

σ_0



حل:

$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ و $\sigma_x = \sigma_0$

پس با آن‌ها $\phi = \frac{1}{2}\sigma_0 y^2$ مسأله حل می‌شود چرا که $\nabla^4 \phi$ را ارضا می‌کند و تنش‌ها را نیز ارضا می‌کند. پس:

$$\phi = \frac{1}{2}\sigma_0 (r\sin\theta)^2 = \frac{1}{2}\sigma_0 r^2 \sin^2\theta = \frac{1}{4}\sigma_0 r^2 (1-\cos 2\theta)$$

پس:

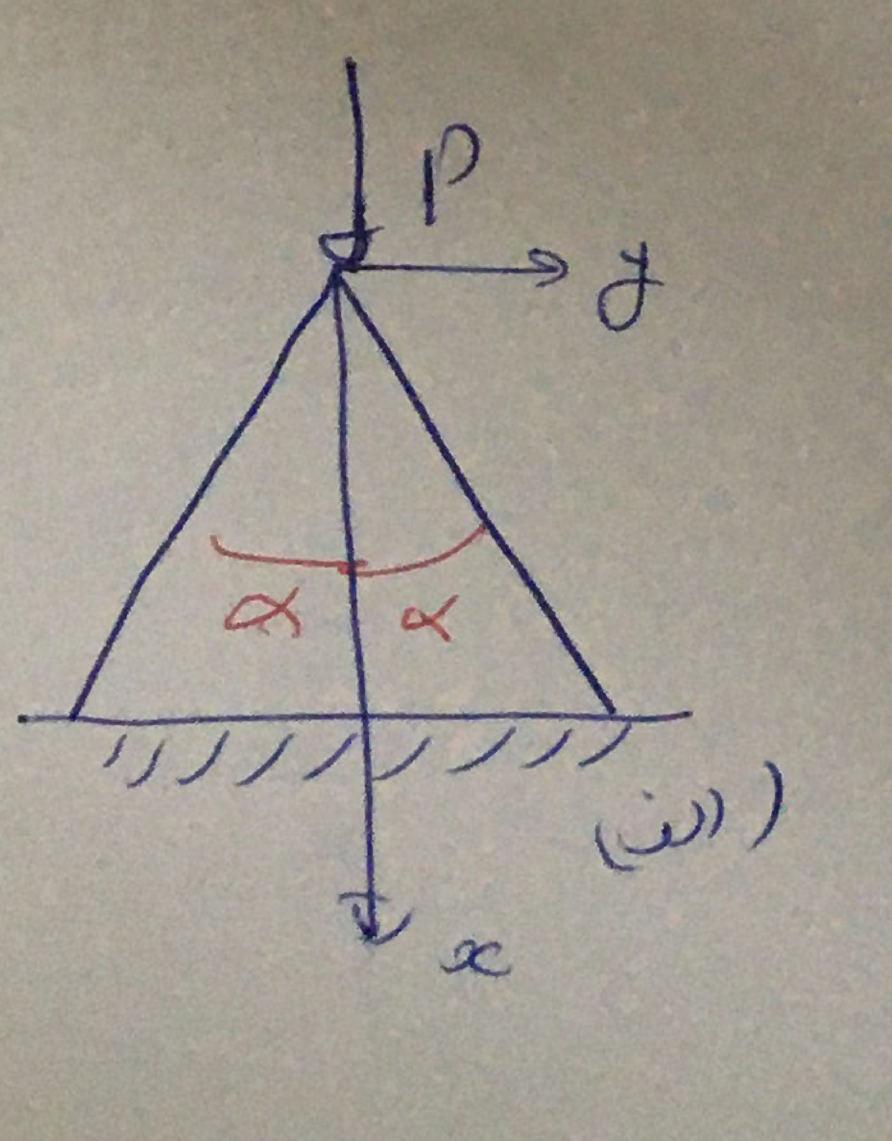
$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2}\sigma_0 (1+\cos 2\theta)$$

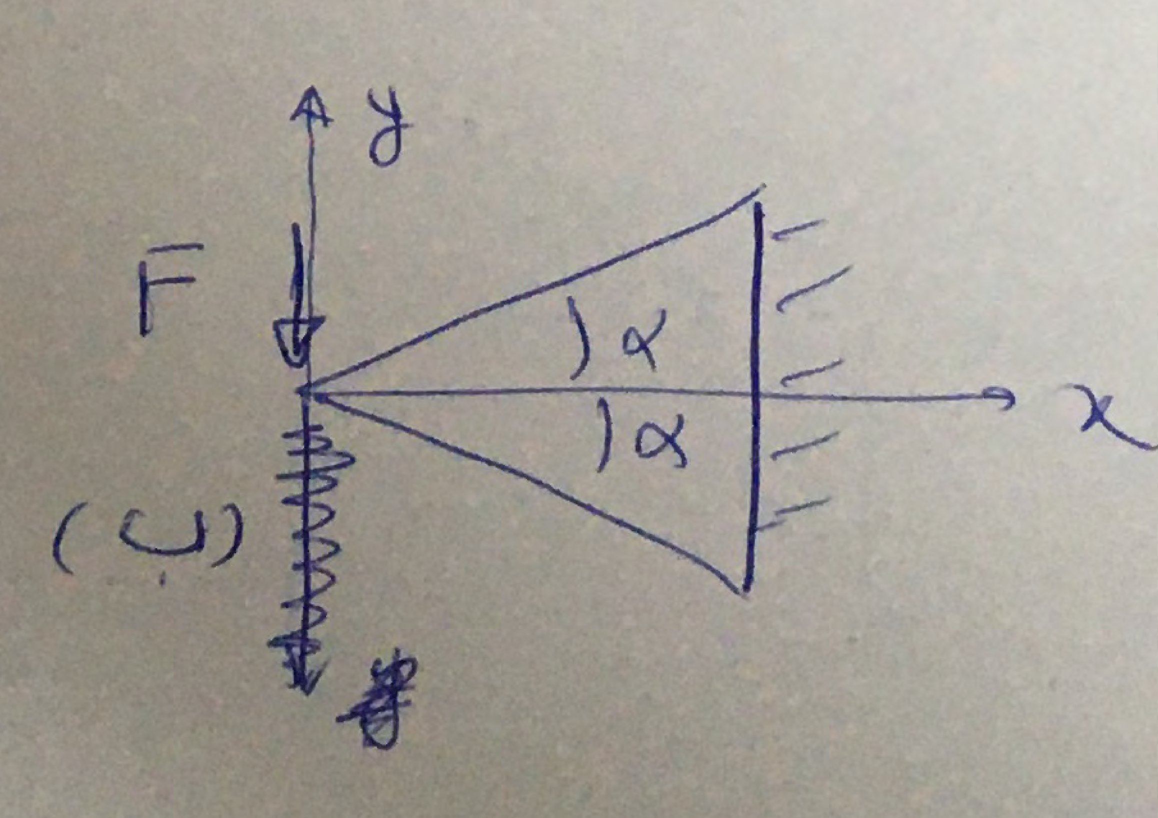
$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{2}\sigma_0 (1-\cos 2\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta$$

تذکر: روابط فوق چیزی نیست جز تبدیل تنش.

مثال: توزیع تنش در شکل‌های زیر با ضخامت واحد را تحت تأثیر بار متمرکز در واحد ضخامت بیابید. این شکل‌ها نوعی گوه یا لبه چاقویی هستند.





۲۹

حل :

الف) ابتدا حالت الف تابع تنش زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\phi = c p r \theta \sin\theta$$

که c مقدار ثابتی است. این تابع تنش معادله بای‌هارمونیک را ارضا می‌کند پس معادلات سازگاری ارضا شده است. حال تنش‌ها عبارتند از:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 2cp\,\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0$$

با توجه به شکل الف شرایط مرزی عبارتند از:

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad @ \quad \theta = \pm\alpha \qquad \mathrm{I}$$

$$2\int_0^\alpha \sigma_r\, r\cos\theta\, d\theta = -p \qquad \mathrm{II}$$

شرط مرزی I ارضا می‌شود چرا که σ_θ و $\tau_{r\theta}$ صفر است. شرط مرزی II عبارتست از:

$$4cp\int_0^\alpha \cos^2\theta\, d\theta = -p \Rightarrow c = \frac{1}{2\alpha + \sin 2\alpha}$$

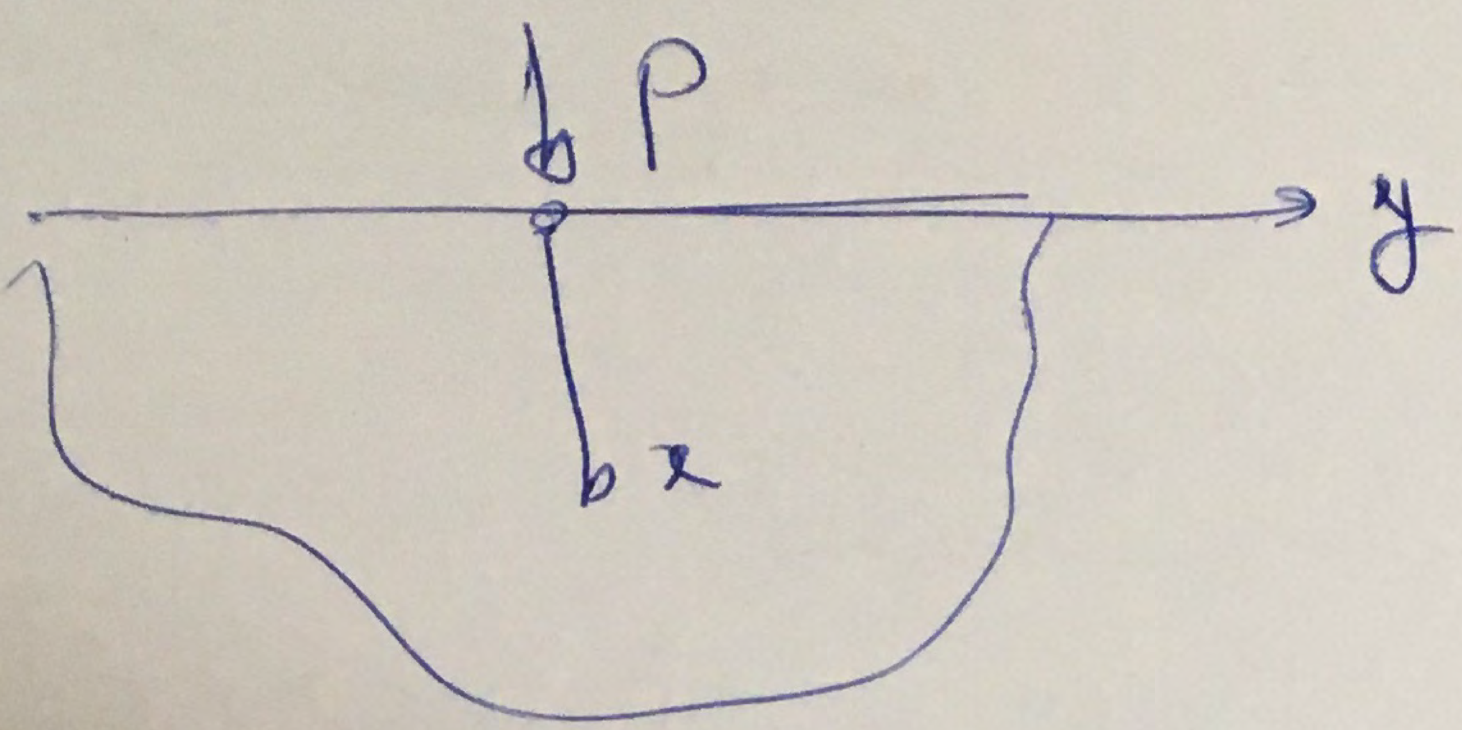
پس: $\sigma_r = -\dfrac{2p}{(2\alpha+\sin 2\alpha)} \cdot \dfrac{\cos\theta}{r}$ و $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$

اگر در روابط فوق $\alpha = \frac{\pi}{2}$ قرار داده شود:

$$\sigma_r = -\frac{2p}{\pi}\frac{\cos\theta}{r} \quad , \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

که توزیع تنش در ورق نیمه بی‌نهایت یا ورق نیمه نامحدود تحت بار نقطه‌ای را بدهد.

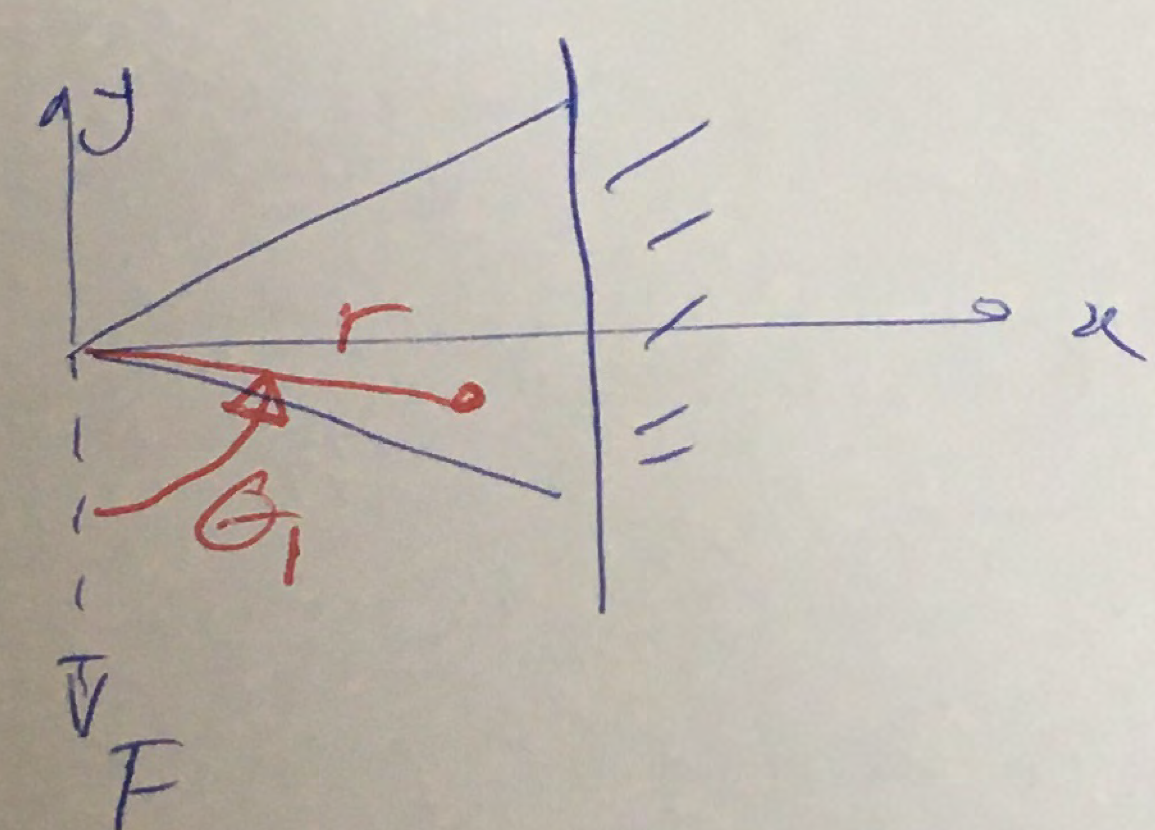
فرض:



۳) در این حالت تابع تنش را اینگونه می‌گیریم

$$\phi = CFr\theta_1 \sin\theta_1$$

که:



پس در اینجا شرط مرزی عبارت است از:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sigma_r r \cos\theta_1 \, d\theta_1 = 2CF \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \cos^2\theta_1 \, d\theta_1 = F$$

پس:

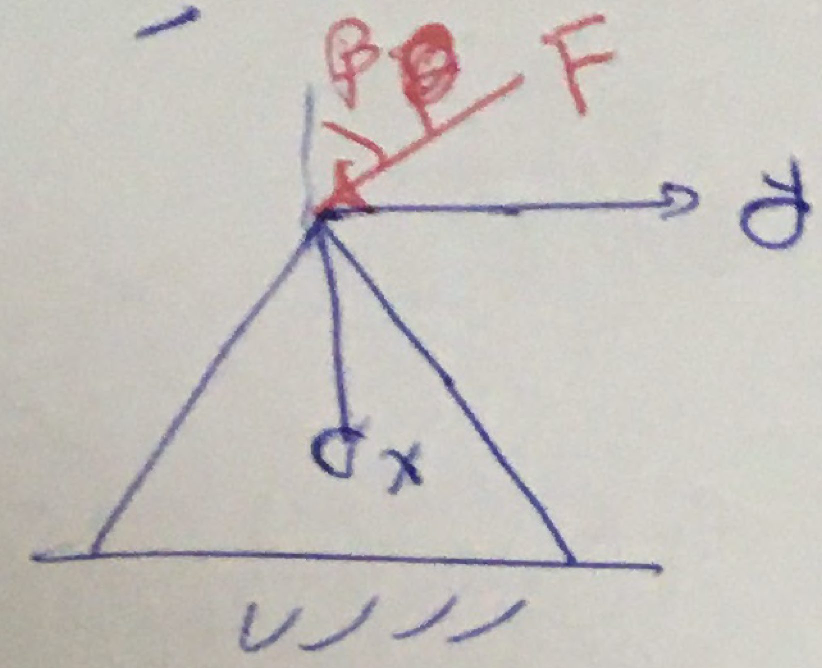
$$C = \frac{1}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

پس:

$$\sigma_r = \frac{2F}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\cos\theta_1}{r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

گوه

تذکر: اگر بارگذاری هم از نوع فشاری هم مخروطی باشد مانند شکل زیر:



در این صورت با جمع اثرات P و F نتیجه به دست می‌آید:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{2\alpha+\sin 2\alpha}\,\frac{\cos\theta}{r} + \frac{2F}{2\alpha-\sin 2\alpha}\,\frac{\cos\theta_1}{r}$$

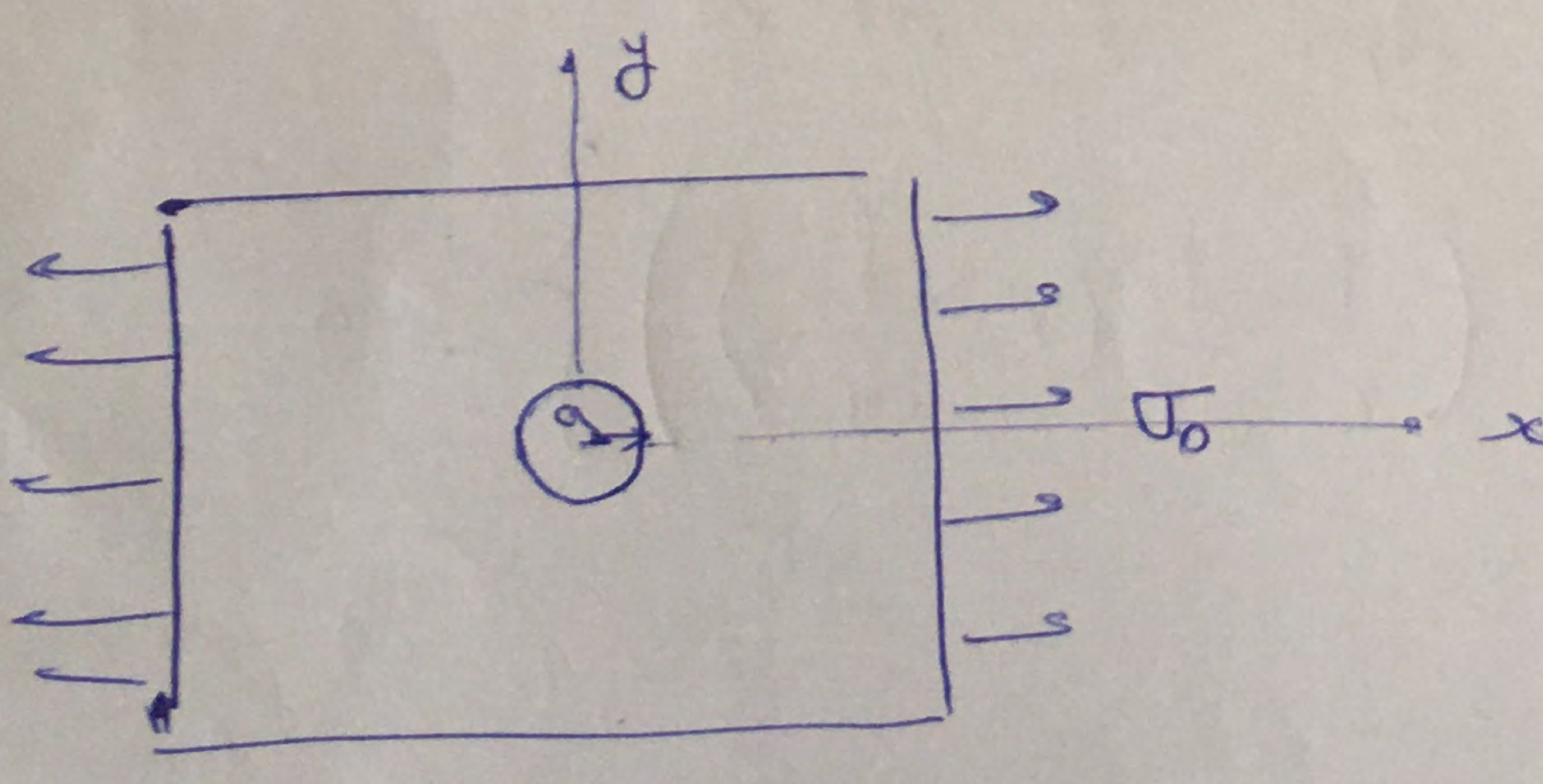
و

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

تمرکز تنش :

وقتی سطح مقطع یک جسم تحت بارداری قرار گرفته است، تغییرات ناگهانی نداشته باشد نتایج حاصل از کاربرد معادلات تعیین شده با حالتی که سطح مقطع ثابت است تفاوت چندانی نداشته و دقت خوبی خواهد داشت. اما وقتی تغییرات ناگهانی در سطح مقطع وجود داشته باشد، از روابط مقاومت مصالح مقداری نمی‌توان مقدار حقیقی تنش را بدست آورد. وجود سوراخ، شکاف و ... در یک جسم مثال‌هایی از این نوع است که محل شروع بوجود آمدن عیب در آن جسم خواهد شد. تنش در این نواحی را می‌توان با استفاده از تئوری الاستیسیته، تکنیک‌های تجربی و روش‌های عددی الاستیسیته بدست آورد. روش المان محدود نیز از این کارها است. در این نواحی تنش‌ها بزرگتر از چیزی که در مقاومت محاسبه می‌شود و برای محاسبه آن از ضریب تمرکز تنش استفاده می‌شود که بزرگتر است از ۱.

مثال: ورق نازک بزرگی را که روی آن سوراخ کوچکی به شعاع a ایجاد شده و تحت تنش ساده محوری قرار گرفته است در نظر بگیرید. میدان تنش در آن را بدست آورده و با ورق بدون سوراخ تحت تنش مقایسه کنید.



حل: شرایط مرزی در نواحی سوراخ عبارت است از:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad (r=a)$$

از طرفی برای نقاطی که در فاصله دوری از مبدا هستند تنش‌های σ_r و σ_θ و $\tau_{r\theta}$ حاصل با مقادیری بدست آمده برای ورق بدون سوراخ است که در قسمت قبل محاسبه شده‌اند.

$$@\ r=\infty \longrightarrow \begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{2}\sigma_0\,(1+\cos 2\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{1}{2}\sigma_0\,(1-\cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\theta \end{cases}$$

بنابراین تابع تنش بصورت زیر میتوان در نظر گرفت:

$$\phi = f_1(r) + f_2(r)\cos 2\theta$$

که باید f_1 و f_2 تعیین شوند.

ϕ باید $\nabla^4\phi$ را ارضا نماید:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 f_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df_1}{dr}\right)+\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df_2}{dr}-\frac{4f_2}{r^2}\right)\cos 2\theta = $$

با توجه به اینکه معادله بالا به ازای کلیه مقادیر r و θ برقرار باشد بنابراین:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 f_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df_1}{dr}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_1}{dr}\right)\right)\right\}=0$$

و

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df_2}{dr}-\frac{4f_2}{r^2}\right)=$$

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left\{r^3\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left(r^2 f_2\right)\right]\right\}\right)=0$$

با تغییر متغیر $r = e^t$ معادلات فوق را می‌توان به صورت دو معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت تبدیل کرد که بعد از انتگرال‌گیری برابر می‌شود:

$$f_1(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$$

$$f_2(r) = C_5 r^2 + C_6 r^4 + \frac{C_7}{r^2} + C_8$$

که C_iها ثابت‌هایی مشخص هستند:

$$\Phi = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 + \left(C_5 r^2 + C_6 r^4 + \frac{C_7}{r^2} + C_8\right)\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = C_1(1 + 2\ln r) + 2C_2 + \frac{C_3}{r^2} - \left(2C_5 + \frac{6C_7}{r^4} + \frac{4C_8}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = C_1(3 + 2\ln r) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + \left(2C_5 + 12 C_6 r^2 + \frac{6C_7}{r^4} + \frac{4C_8}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) = \left(2C_5 + 6C_6 r^2 - \frac{6C_7}{r^4} - \frac{2C_8}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

از طرفی باید برای $r \to \infty$ میدان تنش با میدان تنش یک صفحه بدون سوراخ برابر شود:

$$\tau_{r\theta} \Rightarrow \boxed{C_6 = 0}, \quad 2C_5 = -\frac{\sigma_0}{2} \Rightarrow \boxed{C_5 = -\frac{\sigma_0}{4}}$$

$$\sigma_\theta \Rightarrow C_1 = 0, \quad 2C_2 = \frac{\sigma_0}{2} \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\sigma_0}{4}}$$

از طرفی باید $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ در $r = a$ صفر باشند:

$$2C_2+\frac{C_3}{a^2}=0 \quad \text{و} \quad 2C_5+\frac{6C_7}{a^4}+\frac{4C_8}{a^2}=0 \quad \text{و} \quad 2C_5-\frac{6C_7}{a^4}-\frac{2C_8}{a^2}=0$$

بنابراین:

$$C_3=-\frac{a^2\sigma_0}{2}, \quad C_7=-\frac{a^4\sigma_0}{4}, \quad C_8=\frac{a^2\sigma_0}{2}$$

بنابراین:

$$\sigma_r=\frac{1}{2}\sigma_0\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\left(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma_\theta=\frac{1}{2}\sigma_0\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right]$$

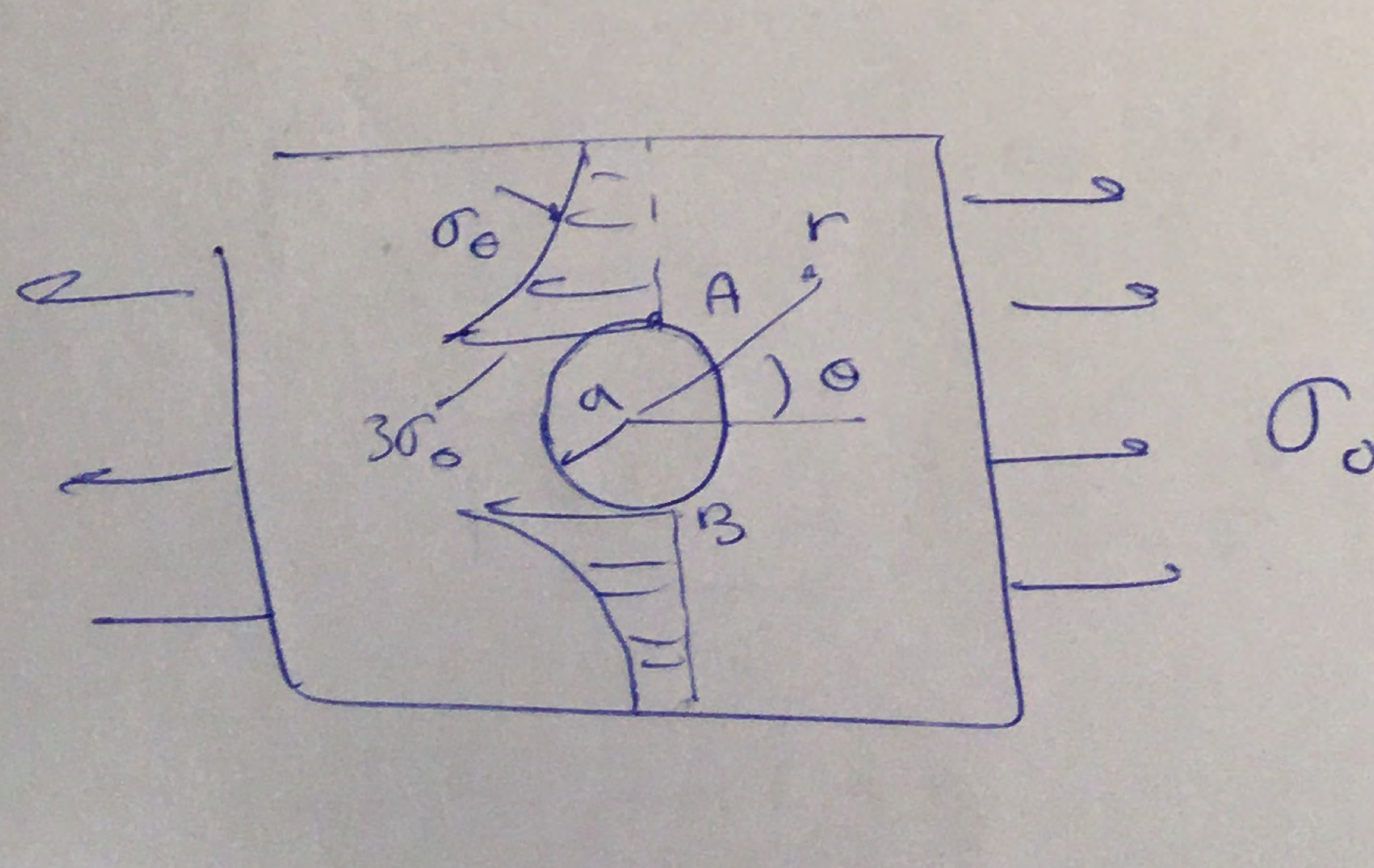
$$\tau_{r\theta}=-\frac{1}{2}\sigma_0\left[1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

در صورت سوراخ تولید تنش محیطی نسبت به سایر تنش‌ها غالب است. بر حسب موقعیت زاویه‌ای، تنش محیطی وقتی که $\cos 2\theta$ بیشترین مقدار منفی را دارد حداکثر است. پس برای $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ که $\cos 2\theta=-1$، بیشترین σ_θ اتفاق می‌افتد:

$$\sigma_\theta=\frac{\sigma_0}{2}\left(2+\frac{a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right)$$

که برای $r=a$ داریم:

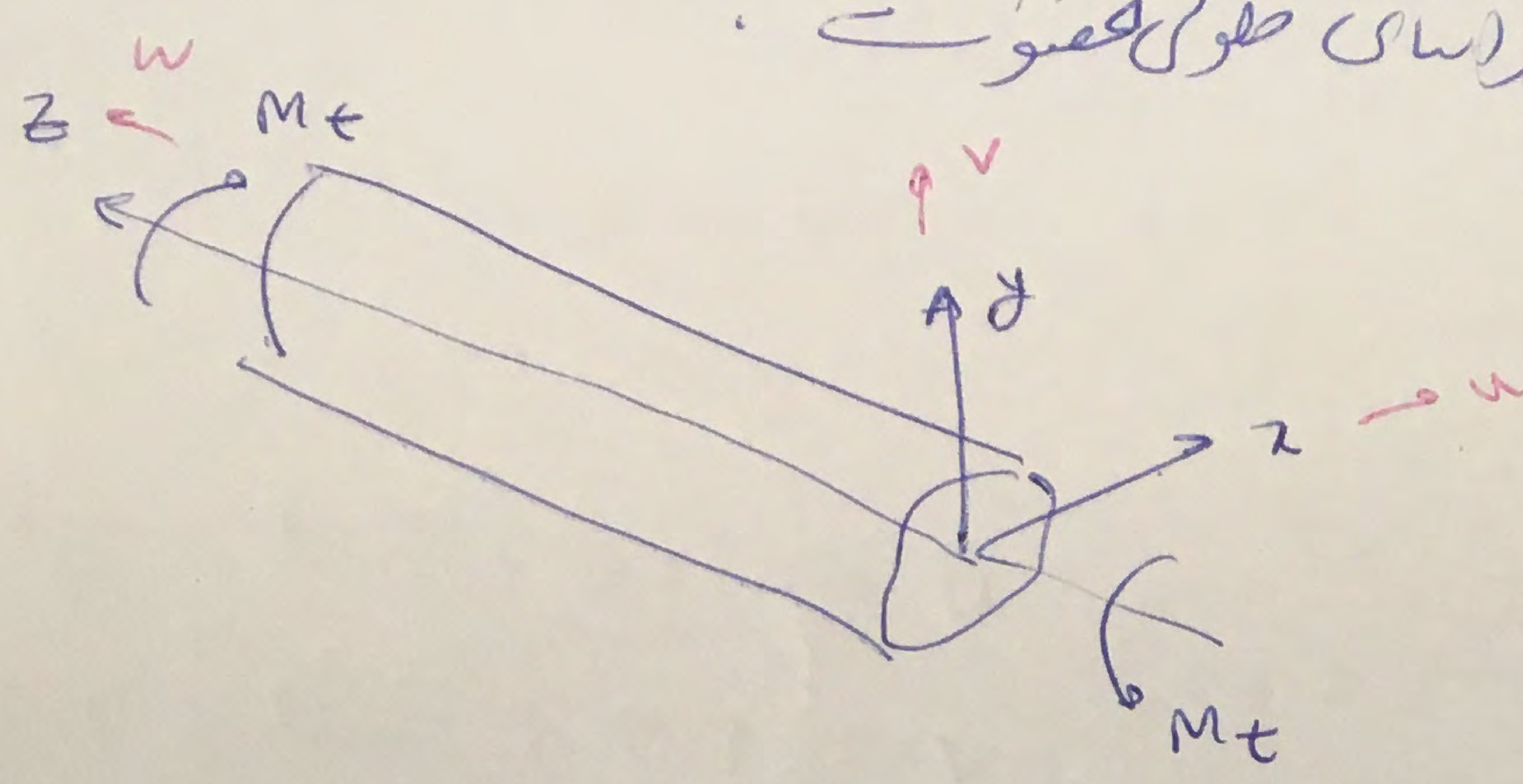
پس: $(\sigma_\theta)_{max}=3\sigma_0$



۳/

پیچش مقاطع غیر دایروی:

عضوی را با سطح مقطع ثابت در نظر بگیرید که دو انتهای آن تحت تاثیر گشتاور پیچشی است (M_t) در نظر بگیرید. مبدأ مختصات دستگاه xyz را در مرکز پیچش سطح مقطع قرار دهید. xy منطبق بر سطح مقطع عرضی و محور z در راستای طول عضو است.

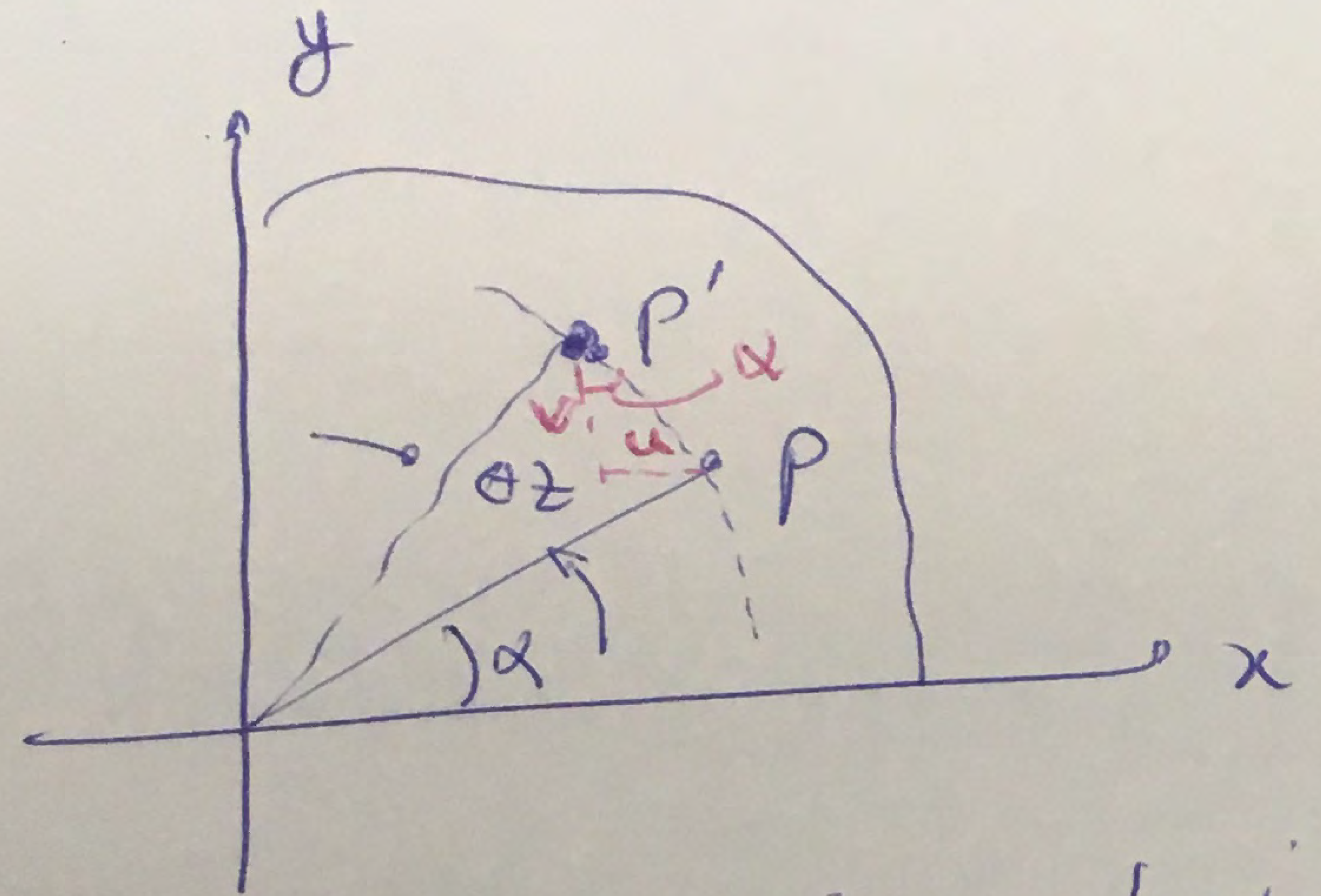


مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای x و y و z را به ترتیب u و v و w در نظر بگیرید. که مؤلفه‌های تغییر مکان را در [illegible] [illegible]

در مقاطع غیر دایره‌ای برخلاف میله‌های مقاطع مدور، عضو که قبل از تاثیر گشتاور پیچشی مسطح هستند بعد از تاثیر گشتاور پیچشی مسطح باقی نمی‌مانند و تاب برمی‌دارند که این انحراف از حالت مسطح اولیه را تابیدگی (warping) گویند. به علت تابیدگی سطح مقطع نیز در اثر پیچش، برای جابجایی هر نقطه سطح مقطع علاوه بر مؤلفه‌های u و v [illegible] مؤلفه دیگری w نیز در امتداد محور طولی z خواهد داشت. برای یافتن رابطه‌ای برای w می‌شود. مؤلفه تغییر مکان w که در امتداد z است، در این مقاطع می‌توان مستقل از z است زیرا تمام مقاطع عضو نسبت به یکدیگر حالت یکسان w دارند و در نتیجه می‌توان فرض کرد که w فقط تابعی از x و y است یعنی:

$$w = f(x,y)$$

همچنین فرض ما این است که تصویر هر سطح مقطع تا حد زیادی روی صفحه xy به صورت یک جسم صلب حول محور z ها، پیچش بر واحد طول θ در تمام طول عضو ثابت است. با توجه به شکل زیر که بخشی از سطح مقطع است می‌توان مولفه‌های تغییر مکان نقطه P را به دست آورد:



$$u = -(r\theta z)\sin\alpha = -y\theta z$$

$$v = r\theta z\cos\alpha = x\theta z$$

که در آن θz تغییر مکان زاویه‌ای AP به فاصله z از مبدأ z ها است.

مولفه‌های تانسور کرنش عبارتند از:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} - y\theta$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + x\theta$$

مولفه‌های تانسور تنش:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\theta\right)$$

$$\tau_{zy} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\theta\right)$$

معادلات تعادل:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

معادله سازگاری:

٤/ $$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = H \quad (2)$$

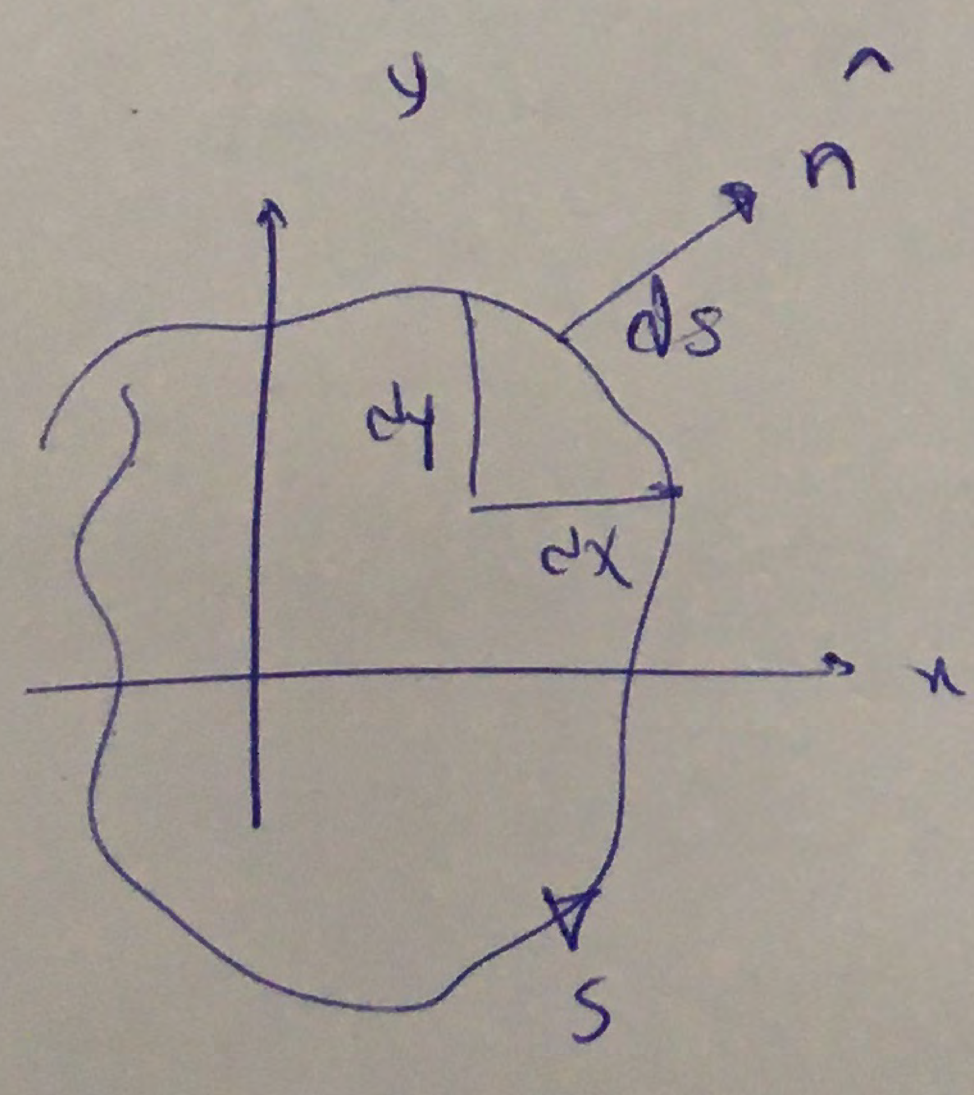
که: $H = -2G\theta$. که با حل معادلات (1) و (2) و استفاده از شرایط مرزی داده شده تنش در یک عضو با مقطع غیر مدور تحت پیچش حاصل می‌شود

تابع تنش: حال اگر فرض کنیم تابع تنش ϕ که تابع تنش پرانتل نام دارد به صورت مقابل باشد که:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad و \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

پس با جایگذاری در معادله (2)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = H \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi = -2G\theta}$$



شرایط مرزی

$$\hat{n} = \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} \qquad n = \cos(\vec{n}, z) = 0$$

$$\vec{t} = T\hat{n} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n=0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{t} = \begin{bmatrix} \sigma_x = 0 & \tau_{xy} = 0 & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y = 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ 0 \end{Bmatrix}$$

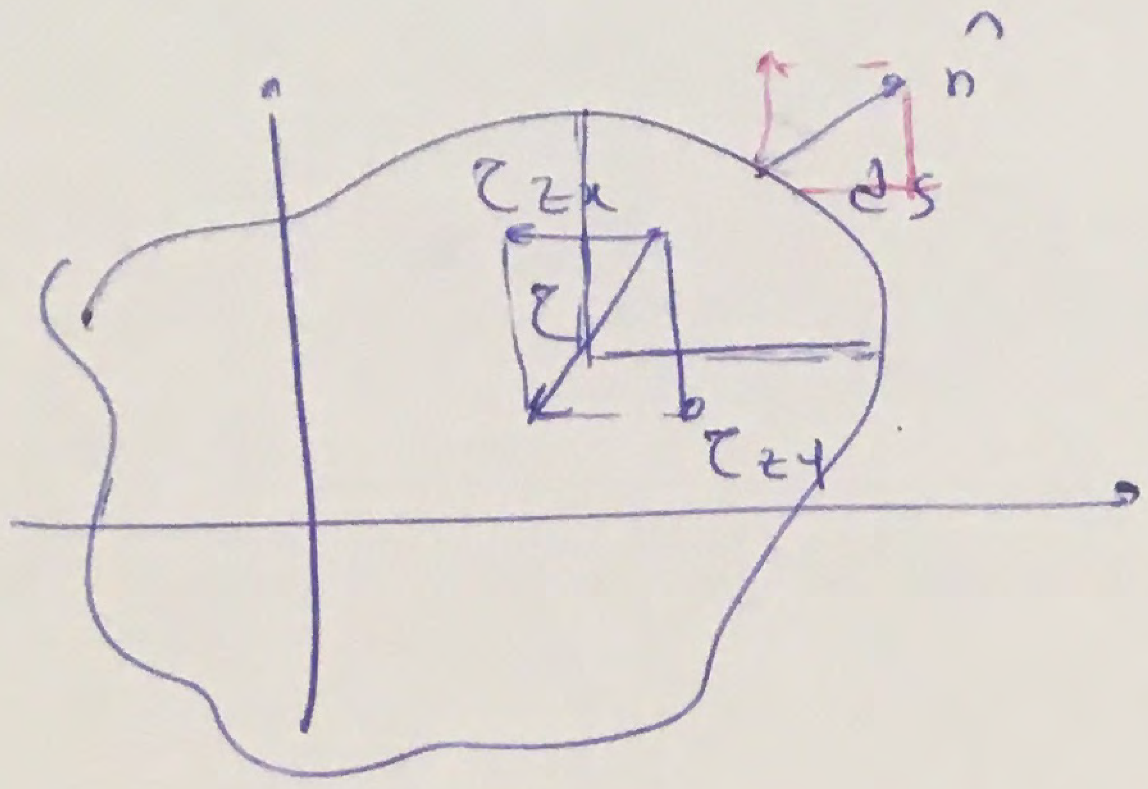
$$\Rightarrow \vec{t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m \end{Bmatrix}$$

که چون سطح مرز فرض شده سطح آزاد است پس باید $\boxed{\tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0}$

~~از طرفی ...~~

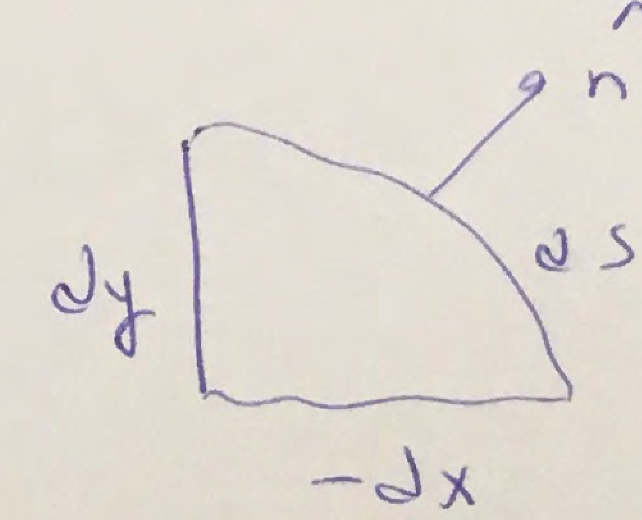
مورد دیگر این است که بیان می‌کند که آیا تنش برشی باید بر مرزها مماس شده یعنی؟

(یعنی باید در راستای $\hat{n}$ نشود)



از طرفی :

$$l = \cos(n,x) = \frac{dy}{ds}$$



$$m = \cos(n,y) = -\frac{dx}{ds}$$

چرا که با افزایش y، x کاهش می‌یابد و l افزایش می‌یابد، لذا علامت منفی در راستای قائم به همین علت است. پس :

$$\tau_{xz}\, l + \tau_{zy}\, m = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (\text{روی مرز})$$

$$\Rightarrow \phi = cte \longrightarrow \text{روی مرز}$$

به عبارت دیگر شرایط مرزی لازم و کافی روی سطح جانبی عضو آن است که ϕ در امتداد مرز سطح مقطع ثابت است. برای سطح مقطع توپر، ϕ در مرز برابر با صفر گرفته می‌شود در حالی که در سطح مقطع توخالی مقداری ثابت فرض می‌شود.

* از طرفی نیروهای ایجاد شده در صورتی که جمع زده شوند صفر می‌شوند و از همین رو گشتاور نیروها برابر است با گشتاور خارجی در راستای z

$$M_t = \iint (x\tau_{zy} - y\tau_{zx})\,dx\,dy = -\iint x\frac{\partial\phi}{\partial x}dx\,dy - \iint y\frac{\partial\phi}{\partial y}dx\,dy$$

$$\Rightarrow M_t = -\iint x\frac{\partial\phi}{\partial x}dx\,dy - \iint y\frac{\partial\phi}{\partial y}dx\,dy = -\int dy\int x\frac{\partial\phi}{\partial x}dx$$

$$-\int dx\int y\frac{\partial\phi}{\partial x}dy$$

با انتگرال گیری جزء به جزء:

$$M_t = -\int [x\phi]\Big|_{x_1}^{x_2} dy + \iint \phi\,dx\,dy - \int [y\phi]\Big|_{y_1}^{y_2} dx +$$

$$\iint \phi\,dx\,dy$$

به دلیل اینکه ϕ در مرز ثابت است (مثلاً $\phi = c$) و x_1 و x_2 و y_1 و y_2 نقاط مرزی سطح هستند به سادگی و با در نظر گرفتن $\phi = 0$ روی مرز:

$$M_t = 2\iint \phi\,dx\,dy$$

مثال: مطلوبست سطح مقطع توپر شکل بیضی مطابق شکل تحت تاثیر کوپل پیچشی $M_t = 1200\pi\ (N.m)$ است. اگر $a = 50mm$, $b = 25mm$ و $G = 80GPa$ تنش برشی حداکثر، زاویه پیچش در واحد طول و تابع تابع پیچش $w(x,y)$ را بیابید:

حل:

$$\phi = k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

با انتخاب ϕ به صورت بالا معادله $\nabla^2\phi = -2G\theta$ ارضا می‌شود و همچنین $\phi = 0$ روی مرز نیز ارضا می‌شود. پس با قرار دادن در معادله $\nabla^2\phi = -2G\theta = H$

$$\frac{2k}{a^2} + \frac{2k}{b^2} = H$$

$$\Rightarrow k = \frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}H$$

پس:

$$\phi = \frac{a^2b^2H}{2(a^2+b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

پس:

$$M_t = 2\iint \phi\, dx\,dy = \frac{a^2b^2H}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{a^2}\iint x^2 dx\,dy + \frac{1}{b^2}\iint y^2 dx\,dy - \iint dx\,dy\right] = \frac{a^2b^2H}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a^2}I_y+\frac{1}{b^2}I_x-A\right)$$

که A مساحت سطح مقطع و I_y و I_x ممان اینرسی حول محورهای x, y است

$$I_x = \iint y^2 dx\,dy = \frac{\pi b a^3}{4} \quad , \quad I_y = \int x^2 dx\,dy = \frac{\pi a b^3}{4}$$

$$A = \pi a.b$$

پس:

$$M_t = \frac{-a^3b^3\pi H}{2(a^2+b^2)} \Rightarrow H = \frac{-2M_t(a^2+b^2)}{\pi a^3 b^3}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{-M_t}{\pi ab}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

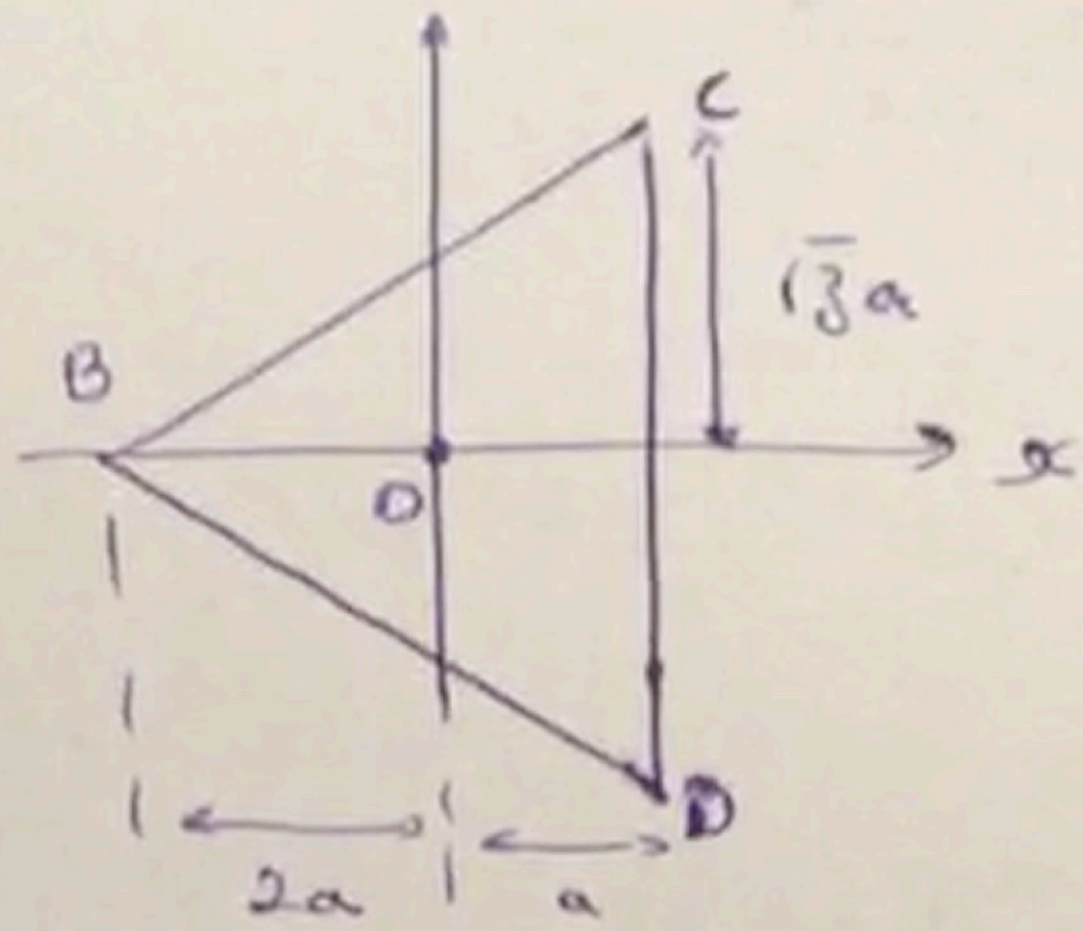
پس:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{-2M_t y}{\pi a b^3} = \frac{-M_t y}{2I_x}$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b} = \frac{M_t x}{2I_y}$$

مثال: پیچش میله‌ی منشوری با مقطع مثلثی:

عضوی با سطح مقطع مثلثی به شکل متساوی الاضلاع است تحت تاثیر کوپل پیچشی M_t قرار دارد. تنش برشی و مقدار حداکثر آن را بیابید:



حل:

اضلاع مثلث در دستگاه مختصات oxy عبارت است از:

$$x=a \quad , \quad x-\sqrt{3}y+2a=0 \quad , \quad x+\sqrt{3}y+2a=0$$

بنابراین تابع تنش بصورت زیر است:

$$\phi = k(x-a)(x-\sqrt{3}y+2a)(x+\sqrt{3}y+2a)$$

که در آن k مقدار ثابت است که از معادله زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=H=-2G\theta \Rightarrow \boxed{k=\frac{-G\theta}{6a}}$$

بنابراین تابع تنش عبارت است از:

$$\phi = -\frac{G\theta}{6a}(x-a)(x-\sqrt{3}y+2a)(x+\sqrt{3}y+2a)$$

بنابراین:

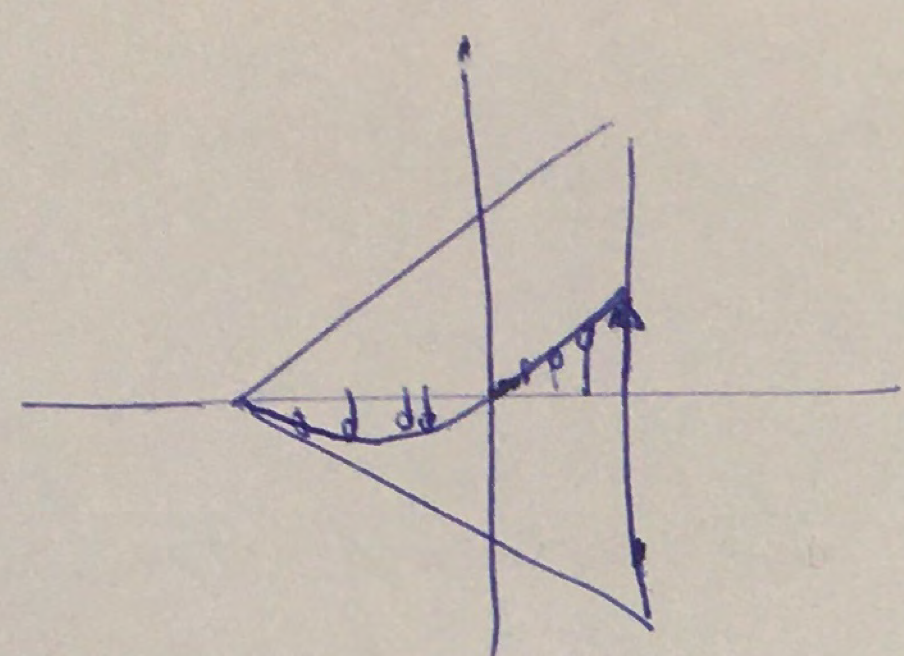
$$\tau_{zx}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{G\theta}{a}(x-a)y$$

$$\tau_{zy}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{G\theta}{2a}(x^2+2ax-y^2)$$

بنابراین مشاهده می‌شود τ_{zx} در امتداد محور ox حذف شده و فقط τ_{zy} روی ox عبارت است از:

$$\tau_{zy} = \frac{G\theta}{2a} x(x+2a) \longrightarrow \text{روی محور } ox$$

توزیع تنش τ_{zy} روی محور ox در زیر رسم شده است.



* تنش برشی در نقاط میانی اضلاع مثلث حداکثر است و مقدار آن برابر است با:

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{3}{2} G\theta a}$$

* تنش برشی در رئوس مثلث و در مبدأ صفر است.

* گشتاور پیچشی عبارت است از:

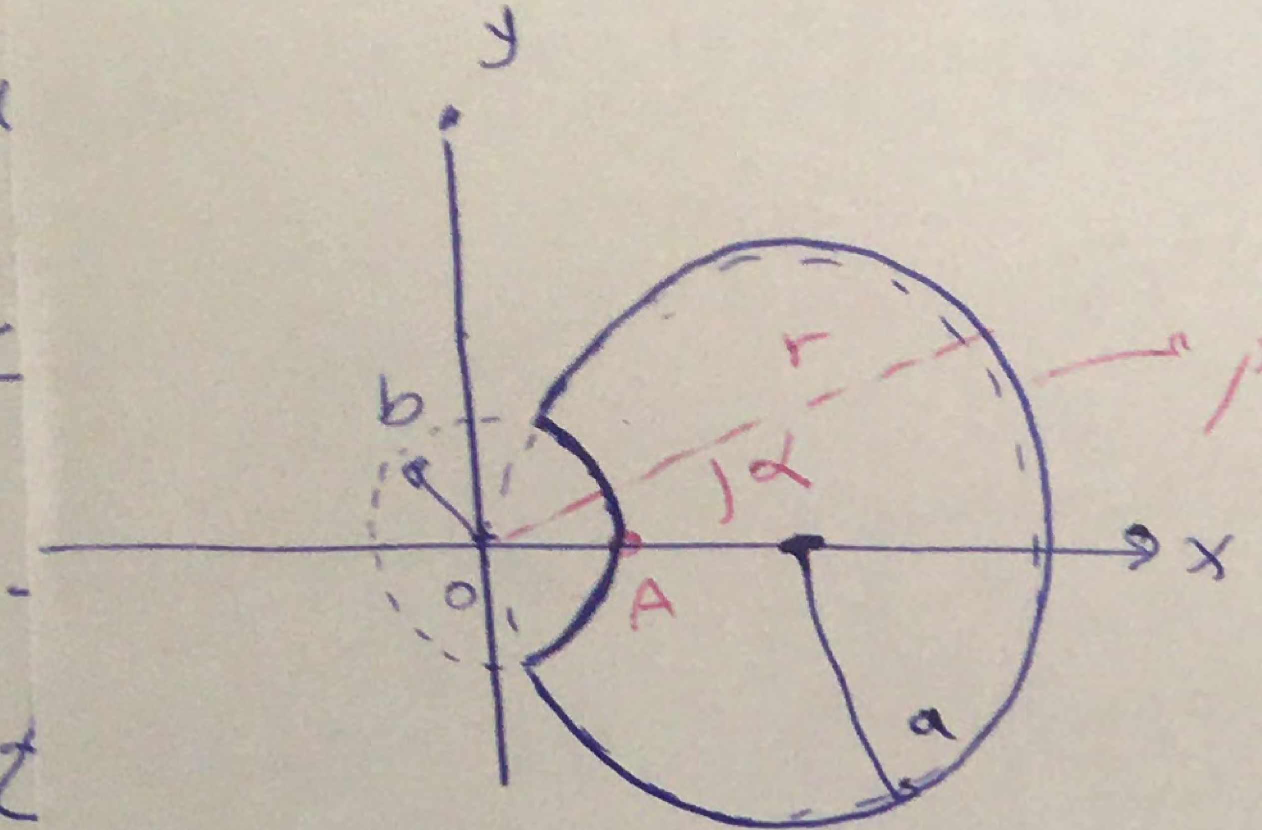
$$M_t = 2\iint \phi\, dx\,dy = 2\iint -\frac{G\theta}{6a}(x-a)(x-\sqrt{3}y+2a)(x+\sqrt{3}y+2a)\,dx\,dy$$

$$= \frac{27}{5\sqrt{3}} G\theta a^4 = \frac{3}{5} G\theta I_z = \frac{9\sqrt{3}}{5} G\theta a^4$$

که $I_z = 3\sqrt{3}a^4$ گشتاور اینرسی قطبی مثلث است.

مثال: یک میله به شعاع a دارای شیار نیم دایره‌ای به شعاع b است. حالت تنش در میله را تحت پیچش بدست آورید:

حل: تابع تنش پرانتل برای سطح مقطع به صورت زیر است:



$$\phi = a\left(x - b^2\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

تابع تنش فوق را به دستگاه مختصات قطبی (r,θ) با روابط $x = r\cos\alpha$ و $y = r\sin\alpha$ می‌بریم:

$$\phi = a\left(r\cos\alpha - b^2\frac{\cos\alpha}{r}\right) + \frac{1}{2}b^2 - \frac{r^2}{2}$$

با قرار دادن $\phi = 0$ روی مرز بیرونی سطح مقطع عرضی داریم:

$$r^2 - b^2 - 2a(r^2-b^2)\frac{\cos\alpha}{r} = 0$$

یا

$$(r^2-b^2)\left(1-\frac{2a\cos\alpha}{r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = b^2 \quad و \quad r = 2a\cos\alpha$$

معادلات فوق بیانگر دو دایره یکی به شعاع $r = b$ که مرکز آن در مبدأ مختصات، نقطه O بوده و دیگری به شعاع $r = 2a\cos\alpha$ که مماس بر محور y در مبدأ است که اولی مربوط به شیار دایره‌ای و دومی مربوط به محور میله است.

تنش برشی حداکثر در نقطه A رخ داده و مقدارش برابر است با:

$$\tau_{max} = G\theta(2a-b)$$