بسم الله الرحمن الرحیم

الکترومغناطیس مهندسی

در نگارش این جزوه از مطالب، اشکال و ... کتب الکترونیکی آموزشی متعددی از جمله کتاب لنگور پارسه استفاده شده است. لذا جا دارد از مولف این کتاب و مولفین سایر کتب مورد استفاده قرار گرفته، جهت تهیه این جزوه آموزشی قدردانی شود.

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم:
سامان راجی

سرفصل ها:

- ❑مروری بر تجزیه و تحلیل برداری
- ❑شدت میدان الکتریکی
  - ▪قانون کولن
  - ▪قانون گوس
- ❑اختلاف پتانسیل الکتریکی
- ❑ انرژی میدان الکتریکی
- ❑ رساناها
  - ▪جریان الکتریکی
  - ▪مقاومت
- ❑عایقها
  - ▪خازن
- ❑تئوری تصویر
- ❑معادلات لاپلاسین و پواسن
- ❑شدت میدان مغناطیسی
  - ▪قانون بیوسلور
  - ▪قانون آمپر
- ❑نیرو و گشتاور در میدان مغناطیسی
- ❑ مدارهای مغناطیسی
- ❑ القاء مغناطیسی
- ❑ انرژی در میدان مغناطیسی

مراجع:

۱ - الکترومغناطیس میدان و موج

- (دیوید چنگ) انتشارات دانشگاه تهران - مترجم: پرویز جبه دار مارالانی

۲- مبانی الکترومغناطیس

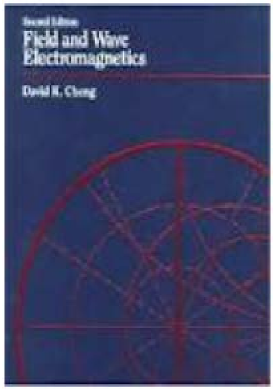
- (احمدصفایی) - انتشارات شیخ بهایی

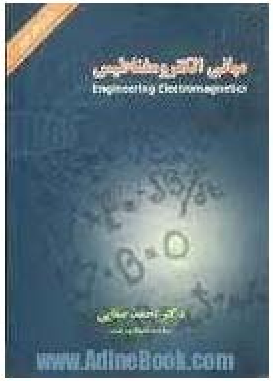
۱ - رهیافت حل مسئله در الکترومغناطیس

-مولف: محمود دیانی - ناشر: نص

۲- الکترومغناطیس مهندسی

- مولف: دکتر محمود محمدطاهری - ناشر: جهش





الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم:
سامان راجی

فصل اول

مروری بر تجزیه و تحلیل برداری

- جمع و تفریق برداری
- ضرب برداری
  - ضرب عدد در بردار
  - ضرب داخلی
  - ضرب خارجی
- دستگاههای مختصات
  - دستگاه کارتزین
  - دستگاه استوانه ای
  - دستگاه کروی

- گرادیان
- دیورژانس
  - قضیه دیورژانس
- کرل
  - قضیه استوکس
- لاپلاسین

آنالیز برداری

انواع کمیت‌ها

اسکالر

حجم، بار، اختلاف‌پتانسیل، زمان و ...

اسکالر Scalar: به کمیت‌هائي اتلاق مي‌شوند که تنها توسط يك عدد که همان اندازه آن کميت باشد مشخص مي‌شوند مانند جرم، انرژي و بار الکتريکي

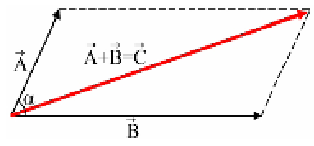
برداری

مساحت، میدان، گشتاور، نیرو و...

بردار vector: کميت‌هايي هستند که براي مشخص شدن آنان علاوه بر اندازه، به جهت نيز نيازمند هستند مانند نيرو، شدت ميدان الکتريکي و چگالي جريان حجمي الکتريکي منظور از جهت در اين کلام، معلوم بودن راستا يا محمل بردار، جهت و سمت بردار بر روي اين راستا مي‌باشد.

آنالیز برداری مقدماتی

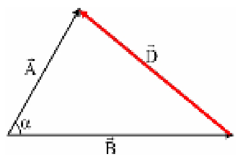
جمع برداری



$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$

$$|\vec{C}|=\sqrt{|A|^2+|B|^2+2|A||B|\cos\alpha}$$

تفریق برداری



$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$$

$$|\vec{D}|=\sqrt{|A|^2+|B|^2-2|A||B|\cos\alpha}$$

ضرب‌های برداری

ضرب عدد در بردار

$$\vec{F}=q\vec{E}$$

$$\text{if}\begin{cases} q>0 & \rightarrow \\ q<0 & \rightarrow \end{cases}$$

$q>0$: بردار $\vec{F}$ هم‌جهت با $\vec{E}$ خواهد شد.

$q<0$: جهت بردار $\vec{F}$ عکس $\vec{E}$ خواهد شد.

ضرب داخلی دو بردار

ضرب خارجی دو بردار

آنالیز برداری

ضرب داخلی دو بردار

ضرب داخلی دو بردار در حقیقت تصویرسازی یک بردار بر روی بردار دیگر است و حاصل آن برابر یک عدد اسکالر خواهد بود. نتیجه حاصلضرب داخلی دو بردار از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

$$0<\alpha<\pi$$

برخی از خواص حاصلضرب داخلی

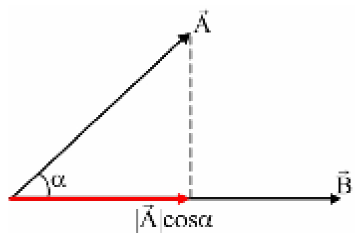
✓ زاویه بین دو بردار

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

✓

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}=\text{صفر}\\ \text{یا}\\ \vec{B}=\text{صفر}\\ \text{یا}\\ \vec{A}\perp\vec{B}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \vec{A}.\vec{B}=0$$

✓ تصویر یک بردار روی برداری دیگر



✓ ضرب داخلی خاصیت جابه‌جایی دارد

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

✓ حاصل‌ضرب دو بردار در دستگاه دکارتی

$$\begin{array}{l}\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}\\ \vec{B}=B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}\end{array}\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

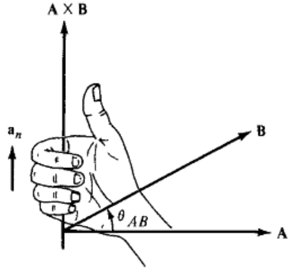
آنالیز برداری

ضرب خارجی دو بردار

اندازه این بردار از رابطه مقابل به دست می‌آید: $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$

جهت این بردار از قانون دست راست به دست می‌آید.

قانون دست راست: اگر چهار انگشت در جهت بردار اول «در اینجا $\vec{A}$» و کف دست به سمت بردار دوم «در اینجا $\vec{B}$» باشد، به طوری که بسته شدن انگشتان، زاویه θ را جاروب کند، انگشت شست جهت $\hat{n}$ را مشخص می‌کند.



برخی از خواص حاصلضرب خارجی

✓ اگر دو بردار با هم موازی باشند

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin(0^\circ) = \text{صفر}$$

✓ ضرب خارجی خاصیت جابه‌جایی ندارد

$$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$$

✓ ضرب خارجی دو بردار در دستگاه دکارتی

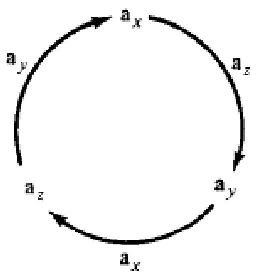
$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

✓ زاویه بین دو بردار

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$



$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال :

به دو روش مختلف، زاویه مابین دو بردار ارائه شده در زیر را بدست آورید

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z$$

پاسخ :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (3, 4, 1) \cdot (0, 2, -5) = 0 + 8 - 5 = 3$$
$$|\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$
$$|\mathbf{B}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$
$$\cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{3}{\sqrt{(26)(29)}} = 0.1092$$
$$\theta_{AB} = \cos^{-1} 0.1092 = 83.73°$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-20 - 2)\mathbf{a}_x + (0 + 15)\mathbf{a}_y + (6 - 0)\mathbf{a}_z = (-22, 15, 6)$$
$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(-22)^2 + 15^2 + 6^2} = \sqrt{745}$$
$$\sin\theta_{AB} = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{\sqrt{745}}{\sqrt{(26)(29)}} = 0.994$$
$$\theta_{AB} = \cos^{-1} 0.994 = 83.73°$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تمرین:

۱- در درون یک مثلث، رابطه معروف به رابطه کسینوس را اثبات نمائید.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

۲- در درون یک مثلث، رابطه معروف به رابطه سینوسها را اثبات کنید.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

۳- روابط ارائه شده در زیر را اثبات کنید.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

۴- به دو سئوال تستی زیر پاسخ دهید.

? بردار $A = (y-1)a_x + 2xa_y$ مفروض است. تصویر این بردار را بر روی بردار $B = 5a_x - a_y + 2a_z$ در نقطه $(2,2,2)$ بدست آورید. (مهندسی برق - آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{\sqrt{30}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{30}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{30}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{30}}$

? اگر $A = a_x + a_y - a_z$ و $B = -2a_x + a_y + a_z$ بوده و رابطه بین A, B, C به صورت زیر باشد، C را محاسبه کنید. (مهندسی برق - آزاد ۸۱)

$$A \times (B \times C) + (A \times B) \times C = -a_x - 9a_y - 5a_z$$

۱) $3a_x + a_y + 2a_z$ ۲) $-3a_x - a_y - 2a_z$ ۳) $-3a_x + a_y - 2a_z$ ۴) $3a_x - a_y + 2a_z$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

دستگاه مختصات

هر سه سطح متقاطع **در یک نقطه** را دستگاه مختصات می‌گویند. سطوح لزوماً نباید صفحه‌ای باشند.

دستگاه مختصات متعامد

اگر سطوح تشکیل‌دهندهٔ دستگاه مختصات دوبه‌دو بر هم عمود باشند، به طوری که:

$$\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 = 0 \quad ، \quad \hat{u}_2 \cdot \hat{u}_3 = 0 \quad ، \quad \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_3 = 0$$

آن‌گاه دستگاه ما یک دستگاه متعامد خواهد بود.

دستگاه مختصات راست‌گرد

اگر بین بردارهای یکه صفحات نظم راست‌گردی برقرار باشد، یعنی از سمت راست، حاصل‌ضرب خارجی دو محور برابر با محور سوم باشد، دستگاه مختصات راست‌گرد خواهیم داشت.

پس از آشنایی با مفهوم دستگاه‌های مختصات قائم راست‌گرد، سه دستگاه خاص و پر کاربرد را بررسی می‌کنیم:

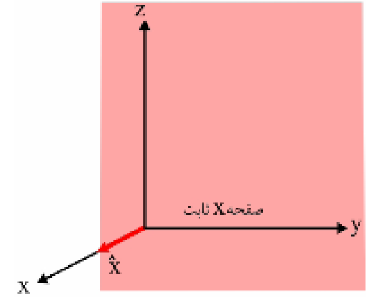
۱) دستگاه مختصات کارتزین
۲) دستگاه مختصات استوانه‌ای
۳) دستگاه مختصات کروی

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

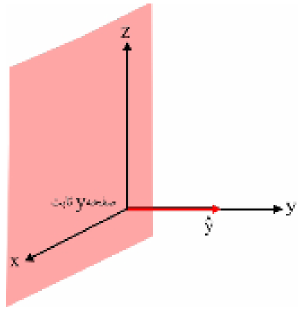
دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

دستگاه مختصات قائم (کارتزین)



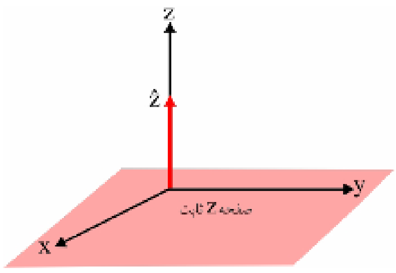
$\hat{x}$ بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ x ثابت است

$\hat{u}_1 = \hat{x}$



$\hat{y}$ بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ y ثابت است

$\hat{u}_2 = \hat{y}$



$\hat{z}$ بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ z ثابت است.

$\hat{u}_3 = \hat{z}$

✓ متعامد بودن صفحات

$\hat{z}.\hat{x} =$ صفر و $\hat{y}.\hat{z} =$ صفر و $\hat{x}.\hat{y} =$ صفر

✓ دستگاه راستگرد است

$\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$, $\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$, $\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$

✓ بردارهای یکه

$\hat{z}.\hat{z} = 1$, $\hat{y}.\hat{y} = 1$, $\hat{x}.\hat{x} = 1$

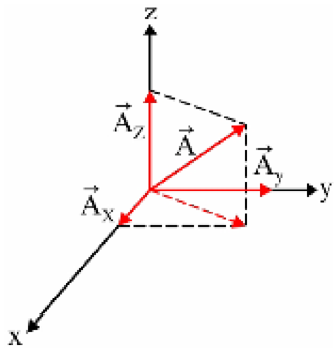
$\hat{z}\times\hat{z} =$ صفر و $\hat{y}\times\hat{y} =$ صفر و $\hat{x}\times\hat{x} =$ صفر

$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$-\infty < z < \infty$$

نمایش بردار در دستگاه کارتزین

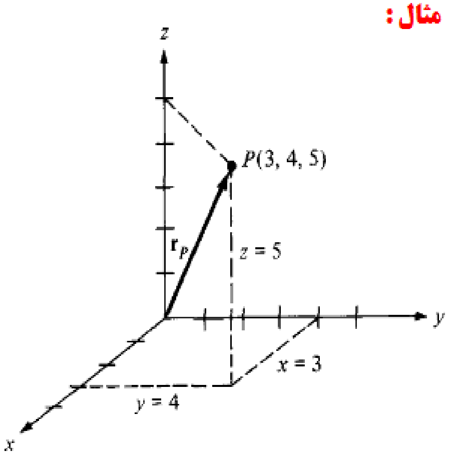


$$A = A_x x + A_y y + A_z z$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

مثال:



$$\mathbf{r}_P = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

انواع ضرب برداری در دستگاه کارتزین

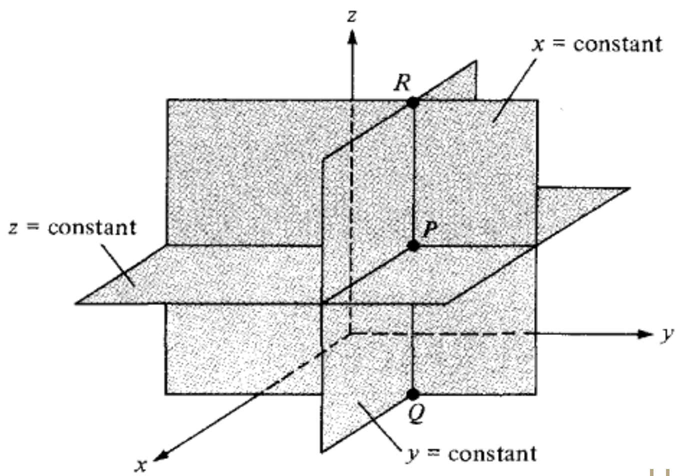
$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\,\hat{x}+(A_y+B_y)\,\hat{y}+(A_z+B_z)\,\hat{z}$$

$$k\vec{A}=kA_x\hat{x}+kA_y\hat{y}+kA_z\hat{z}$$

$$\hat{n}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}$$



اِلمان طولی

نمو طولی همیشه بردار است

$$\vec{d\ell}=dx\hat{x}+dy\hat{y}+dz\hat{z}$$

$$|\vec{d\ell}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

اِلمان سطحی

نموسطحی همیشه بردار است

$$ds_x=dy\,dz\,\hat{x}$$

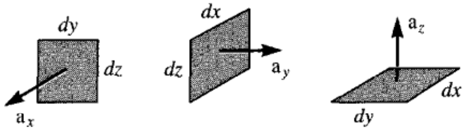
$$\vec{ds}_y=dx\,dz\,\hat{y}$$

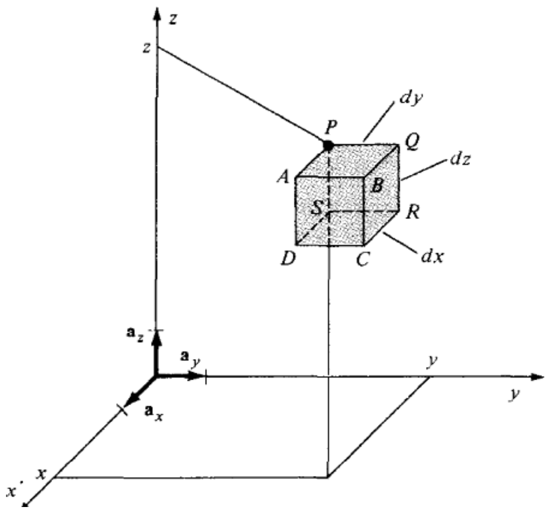
$$\vec{ds}_z=dx\,dy\,\hat{z}$$

اِلمان حجمی

نمو حجمی همیشه اسکالر است

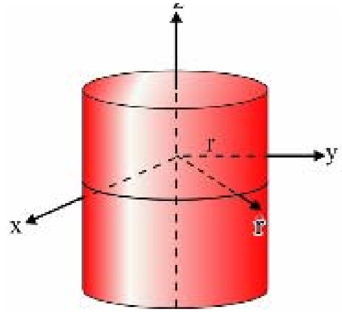
$$dv=dx\,dy\,dz$$





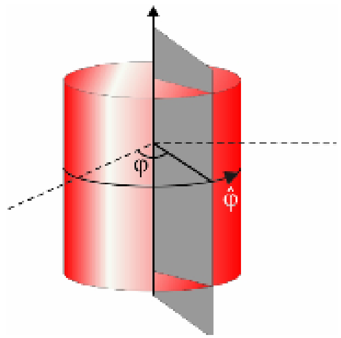
دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

دستگاه مختصات استوانه‌ای



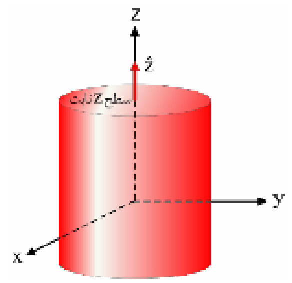
بردار یکه عمود بر سطح r ثابت است $\hat{r}$

$\hat{u}_1 = \hat{r}$



بردار یکهٔ عمود بر نیم‌صفحه φ ثابت است $\hat{\varphi}$

$\hat{u}_2 = \hat{\varphi}$



بردار یکه عمود بر صفحه z ثابت است $\hat{z}$

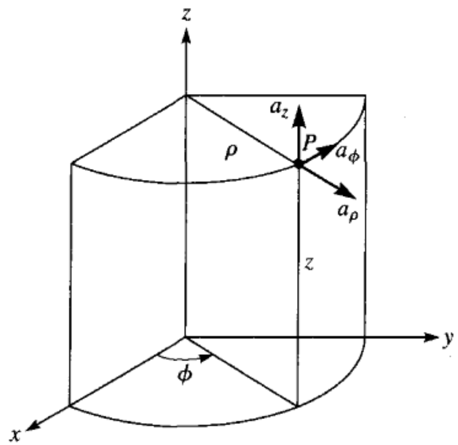
$\hat{u}_3 = \hat{z}$

✔ متعامد بودن صفحات

$$\hat{r}.\hat{\varphi} = 0 \quad , \quad \hat{\varphi}.\hat{z} = 0 \quad , \quad \hat{r}.\hat{z} = 0$$

✔ دستگاه راستگرد است

$$\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{z} \quad , \quad \hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{r} \quad , \quad \hat{z} \times \hat{r} = \hat{\varphi}$$

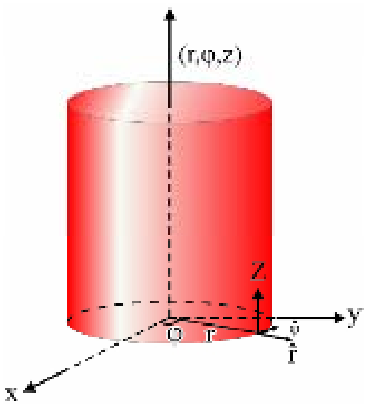


$$0 \le \rho < \infty$$

$$0 \le \phi < 2\pi$$

$$-\infty < z < \infty$$

نمایش بردار در دستگاه استوانه‌ای



$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_r^2 + r^2A_\varphi^2 + A_z^2}$$

$$\hat{n} = \frac{A_r\hat{r} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}}{|\vec{A}|}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

محور تغییرات r

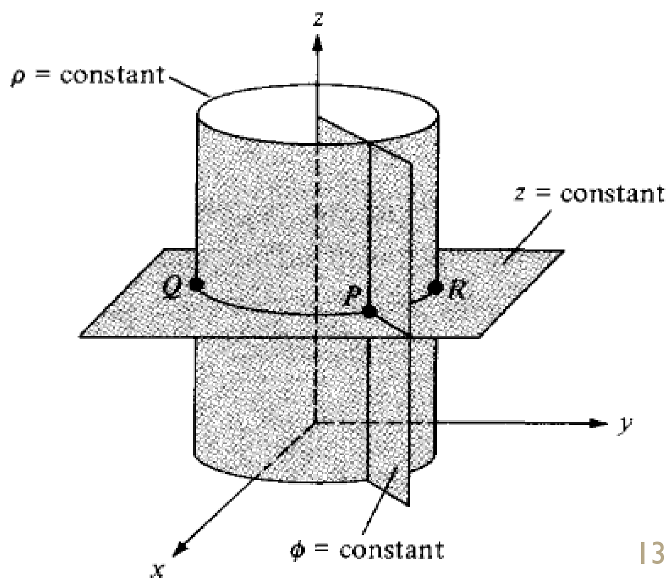
سطح $\varphi = cte$ ← نیم‌صفحه
سطح $z = cte$ ← صفحه
⇐ یک نیم‌خط شعاعی است

محور تغییرات φ

سطح $r = cte$ ← استوانه توخالی
سطح $z = cte$ ← صفحه
⇐ لبه یک دایره است.

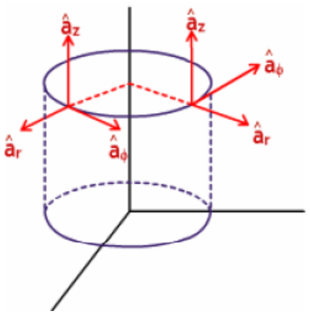
محور تغییرات z

سطح $r = cte$ ← همون استوانه توخالی
سطح $\varphi = cte$ ← نیم‌صفحه
⇐ یک خط عمودی است

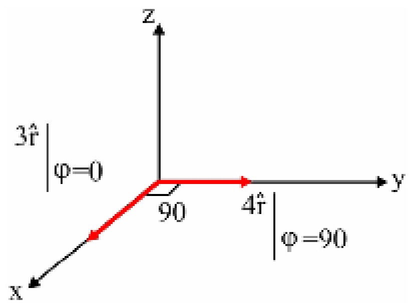


جمع و تفریق بردارها در مختصات استوانه‌ای

به هنگام جمع و تفریق بردارها در دستگاه مختصات استوانه‌ای همواره بایستی به خاطر داشت که با توجه به نحوه تعریف دستگاه استوانه‌ای، جهت بردارهای R و ϕ در این دستگاه ثابت نبوده و در هر نقطه از دستگاه به سمت خاصی می‌باشند، لذا نمی‌توان به راحتی دستگاه دکارتی، بردارها را در این دو جهت با هم جمع یا تفریق نمود.



مثال:



$$3\hat{r}|_{\varphi=0} + 4\hat{r}|_{\varphi=90} = 5\hat{r}|_{\varphi=53^\circ}$$

$$3\hat{r}|_{\varphi=0} \cdot 4\hat{r}|_{\varphi=90} = \text{صفر}$$

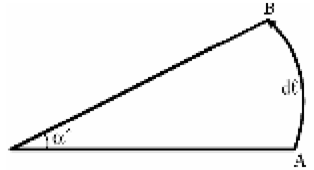
❖ فقط در یک نقطه $\hat{r}\cdot\hat{r}=1$ ، $\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi}=1$ ، $\hat{z}\cdot\hat{z}=1$

دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

المان‌های طولی، سطحی و حجمی

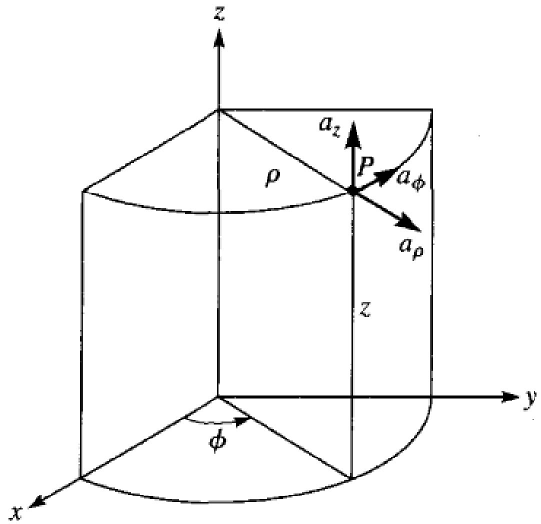
❖ در دستگاه مختصات استوانه‌ای، جنس یکی از متغیرها از نوع زاویه‌ای بوده و بنابراین برای بیان المانهای خطی، سطحی و حجمی که جنس هر سه از نوع طول می‌باشد، بایستی تغییرات زاویه‌ای را نیز از جنس طول بیان کرد.

بدین منظور بجای استفاده از تغییرات زاویه، از تغییرات کمان زاویه استفاده می‌شود.



مکان طی‌شده با همان زاویه α°

$$d\ell = r d\alpha$$



اِلمان طولی

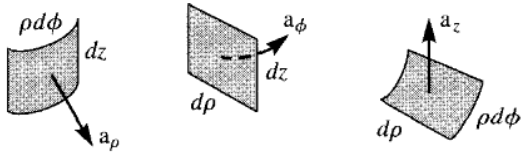
$$\vec{d\ell} = dr\hat{r} + rd\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$$

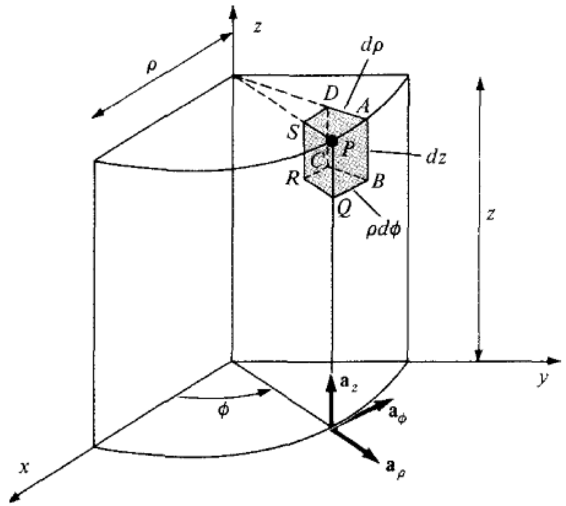
اِلمان سطحی

$$\vec{ds}_r = rd\varphi dz\hat{r} \quad , \quad \vec{ds}_\varphi = drdz\hat{\varphi} \quad , \quad \vec{ds}_z = rdrd\varphi\hat{z}$$

اِلمان حجمی

$$dv = rdrd\varphi dz$$





الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

تنها بردارهای یکهٔ ثابت، $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ هستند؛ یعنی باید سعی کنیم که بردارهای یکهٔ دیگر دستگاه‌های مختصات را بر حسب این بردارها بنویسیم

تبدیل بردار یکه

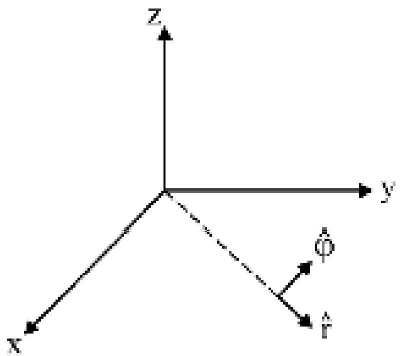
تبدیل قائم به استوانه‌ای

$$\left.\begin{aligned} &\hat{y} \text{ روی } \hat{r} \text{ تصویر } = \hat{r}\cdot\hat{y} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi \\ &\hat{x} \text{ روی } \hat{r} \text{ تصویر } = \hat{r}\cdot\hat{x} = \cos\varphi \\ &\hat{z} \text{ روی } \hat{r} \text{ تصویر } = \hat{r}\cdot\hat{z} = \text{صفر} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \hat{r} = \cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\varphi}.\hat{x} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\sin\varphi \\ &\hat{\varphi}.\hat{y} = \cos\varphi \\ &\hat{\varphi}.\hat{z} = \text{صفر} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \hat{\varphi} = -\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y}$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

تبدیل استوانه‌ای به قائم

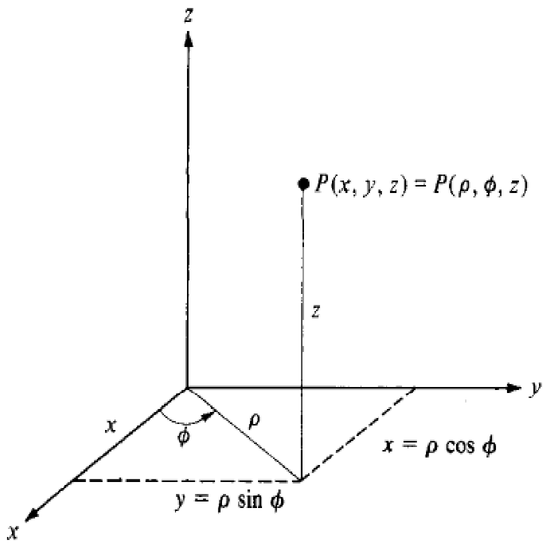


$$\left.\begin{aligned} &\hat{x}.\hat{r} = \cos\varphi \\ &\hat{x}.\hat{\varphi} = -\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \hat{x} = \cos\varphi\hat{r} - \sin\varphi\hat{\varphi}$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{y}.\hat{r} = \sin\varphi \\ &\hat{y}.\hat{\varphi} = \cos\varphi \\ &\hat{y}.\hat{z} = \text{صفر} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \hat{y} = \sin\varphi\hat{r} + \cos\varphi\hat{\varphi}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

تبدیل پارامترها



$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad x = r\cos\varphi$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y = r\sin\varphi \qquad \rightarrow$$

$$(r,\varphi,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2} \;,\; \tan^{-1}\frac{y}{x} \;,\; z\right)$$

$$x = r\cos\varphi \;,\; y = r\sin\varphi \;,\; z = z \;\rightarrow$$

$$(r\cos\varphi \;,\; r\sin\varphi \;,\; z) = (x, y, z)$$

تمرین :

در راستاهای خواسته شده، انتگرال گیری کرده و طول، مساحت و حجم

مورد نظر را بدست آورید

(a) Along BC, $dl = dz$; hence,

$$BC = \int dl = \int_0^{10} dz = 10$$

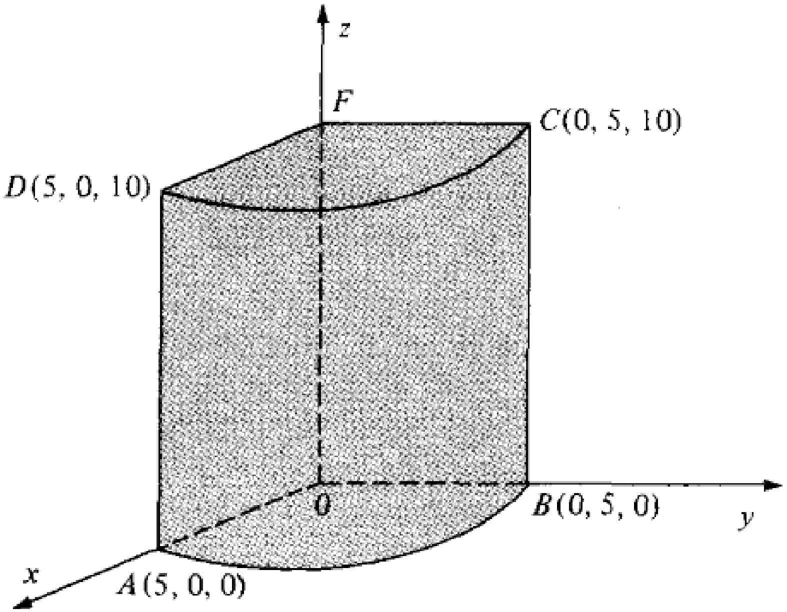
(b) Along CD, $dl = \rho\, d\phi$ and $\rho = 5$

(c) For $ABCD$, $dS = \rho\, d\phi\, dz$, $\rho = 5$

(d) For ABO, $dS = \rho\, d\phi\, d\rho$ and $z = 0$

(e) For $AOFD$, $dS = d\rho\, dz$ and $\phi = 0°$,

(f) For volume $ABDCFO$, $dv = \rho\, d\phi\, dz\, d\rho$



الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تمرین :

به دو سئوال تستی زیر پاسخ دهید.

? مختصات استوانه‌ای نقطه‌ای با مختصات $x=-1, y=-2, z=3$ را بدست آورید. (مهندسی برق - آزاد ۸۱)

۱) $r=2.24,\ \varphi=63.24^{o},\ z=3$ ۲) $r=2.24,\ \varphi=243.4^{o},\ z=3$

۳) $r=2.24,\ \varphi=296.6^{o},\ z=3$ ۴) $r=2.24,\ \varphi=126.8^{o},\ z=3$

? بردار $E=\frac{1}{r}(a_R-a_\varphi)$ در مختصات استوانه‌ای داده شده است. مطلوبست محاسبه بردار واحدی در دستگاه کارتزین که در جهت E بوده و از نقطه $r=1, \varphi=90, z=0$ بگذرد. (مهندسی برق - آزاد ۸۳)

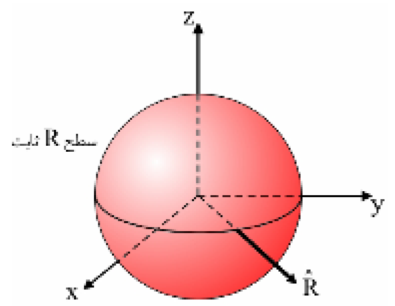
۱) $-0.707a_x+0.707a_y$ ۲) $-0.707a_x-0.707a_y$

۳) $0.707a_x-0.707a_y$ ۴) $0.707a_x+0.707a_y$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

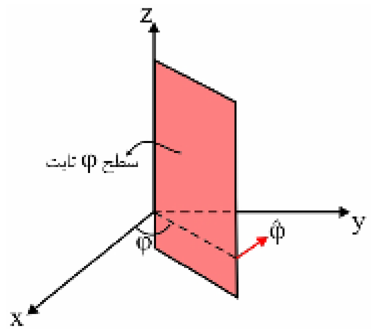
دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

دستگاه مختصات کروی



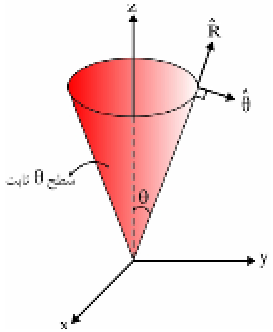
بردار یکه عمود بر سطح R ثابت است $\hat{R}$

$\hat{u}_1 = \hat{R}$



بردار یکه عمود بر صفحه φ ثابت است $\hat{\varphi}$

$\hat{u}_2 = \hat{\varphi}$



بردار یکه عمود بر مخروط θ ثابت است $\hat{\theta}$

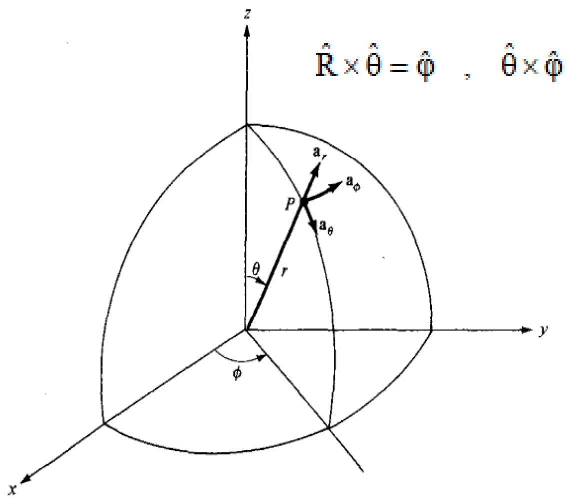
$\hat{u}_3 = \hat{\theta}$

✓ متعامد بودن صفحات

$$\hat{R}.\hat{\varphi} = 0 \quad , \quad \hat{\varphi}.\hat{\theta} = 0 \quad , \quad \hat{\theta}.\hat{R} = 0$$

✓ دستگاه راستگرد است

$$\hat{R} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi} \quad , \quad \hat{\theta} \times \hat{\varphi} = \hat{R} \quad , \quad \hat{\varphi} \times \hat{R} = \hat{\theta}$$

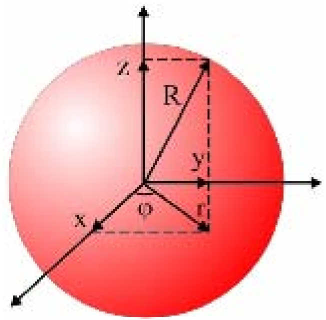


$$0 \le r < \infty$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$0 \le \phi < 2\pi$$

نمایش بردار در دستگاه کروی



$$\vec{A} = A_R\hat{R} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_R^2 + R^2 A_\theta^2 + R^2 \sin^2\theta A_\varphi^2}$$

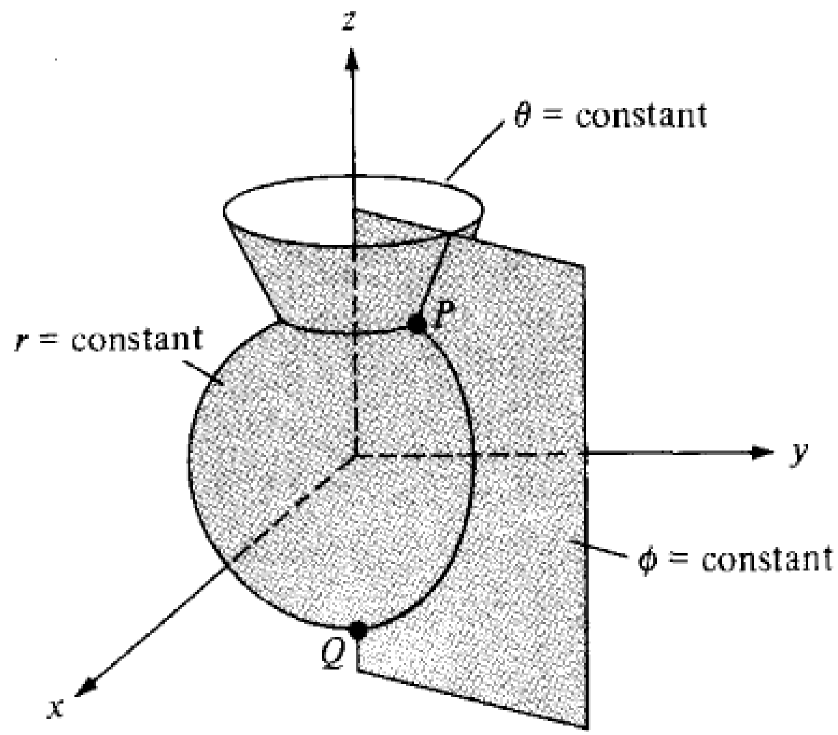
$$\hat{n} = \frac{A_R\hat{a}_R + A_\varphi\hat{a}_\varphi + A_\theta\hat{a}_\theta}{\left|\vec{A}\right|}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

جمع و تفریق بردارها در مختصات کروی

به هنگام جمع و تفریق بردارها در دستگاه مختصات کروی همواره بایستی به خاطر داشت که با توجه به نحوه تعریف دستگاه کروی، جهت بردارهای r، θ و ϕ در این دستگاه ثابت نبوده و در هر نقطه از دستگاه به سمت خاصی می‌باشند، لذا نمی‌توان به راحتی دستگاه دکارتی، بردارها را در این سه جهت با هم جمع یا تفریق نمود.



محور تغییرات R

سطح φ ثابت ← نیم‌صفحه
سطح θ ثابت ← مخروط
⇐ یک نیم‌خط شعاعی است

محور تغییرات θ

سطح R ثابت ← کره
سطح φ ثابت ← نیم‌صفحه
⇐ یک نیم‌دایره است

محور تغییرات φ

سطح R ثابت ← کره
سطح θ ثابت ← مخروط
⇐ لبه یک دایره است.

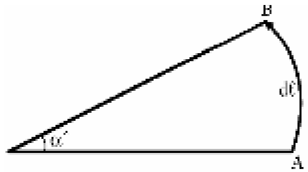
الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

در دستگاه مختصات کروی، جنس دو متغیر از سه متغیر از نوع زاویه‌ای بوده و بنابراین برای بیان المانهای خطی، سطحی و حجمی که جنس هر سه از نوع طول می‌باشد، بایستی تغییرات زاویه‌ای را نیز از جنس طول بیان کرد.

بدین منظور بجای استفاده از تغییرات زاویه، از تغییرات کمان زاویه استفاده می‌شود.



مکان طی‌شده با همان زاویه α°

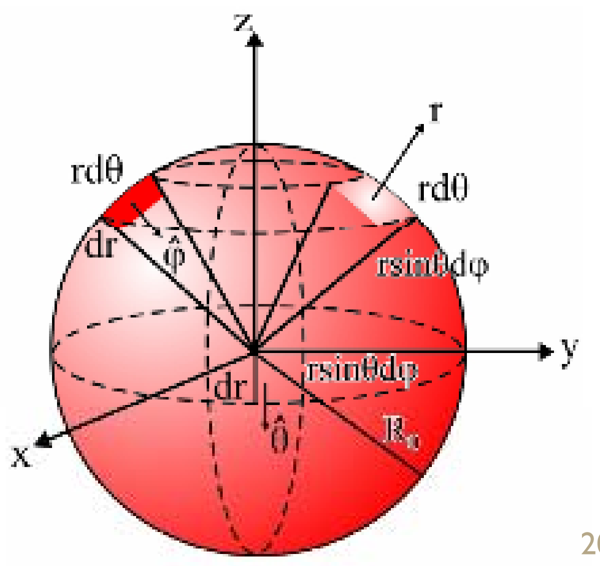
$$d\ell = r d\alpha$$

طول در راستای $\hat{\phi}$

$R\sin\theta d\varphi$

طول در راستای $\hat{\theta}$

$R d\theta$



اِلمان طولی

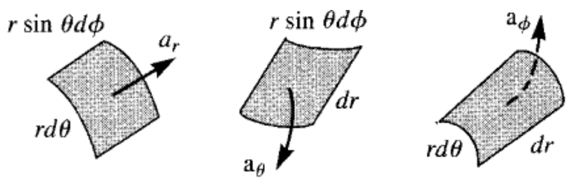
$$\vec{d\ell} = dR\hat{R} + Rd\theta\,\hat{\theta} + R\sin\theta d\varphi\hat{\varphi}$$

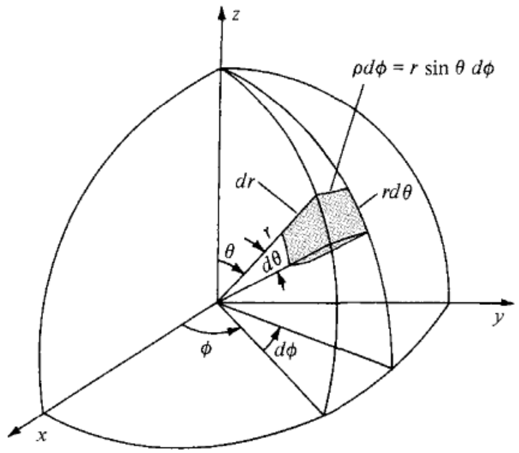
اِلمان سطحی

$$\vec{ds}_R = R^2\ \mathrm{Sin}\theta d\theta d\varphi\hat{R}$$
$$\vec{ds}_\theta = R\mathrm{Sin}\theta dRd\varphi\hat{\theta}$$
$$\vec{ds}_\varphi = RdRd\theta\hat{\varphi}$$

اِلمان حجمی

$$dv = R^2\sin\theta d\theta dRd\varphi$$





الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

در استوانه‌ای بردار z ثابت بود و دو بردار دیگر متغیر، اما درکره هر سه بردار متغیرند؛ بنابراین روال تبدیل را مانند استوانه پی‌می‌گیریم:

تبدیل بردار یکه

تبدیل قائم به کره‌ای

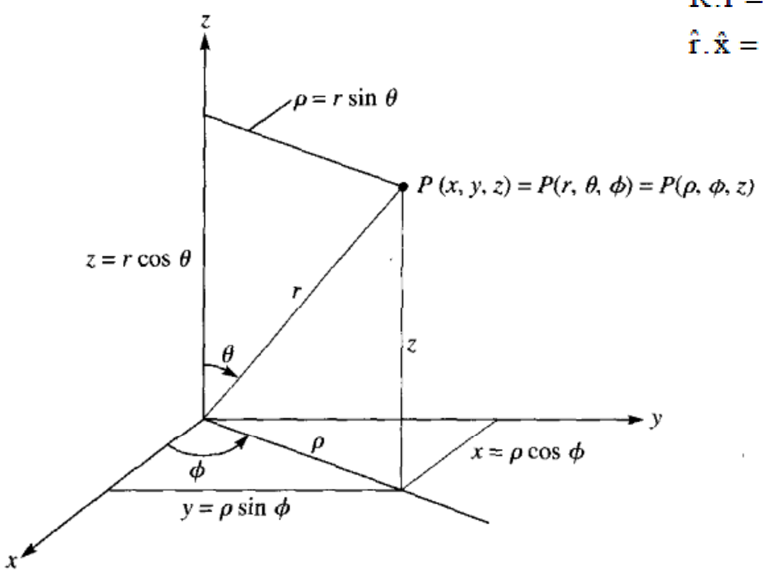
$$\left.\begin{array}{l}\hat{R}.\hat{r} = \sin\theta \\ \hat{r}.\hat{x} = \cos\varphi\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{R}.\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{R}.\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi \\ \hat{R}.\hat{y} = \sin\theta\sin\varphi \\ \hat{R}.\hat{z} = \cos\theta\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{R} = \sin\theta\cos\varphi\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}.\hat{x} = \cos\theta\cos\varphi \\ \hat{\theta}.\hat{y} = \cos\theta\sin\varphi \\ \hat{\theta}.\hat{z} = -\sin\theta\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\varphi}.\hat{x} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\sin\varphi \\ \hat{\varphi}.\hat{y} = \cos\varphi \\ \hat{\varphi}.\hat{z} = \text{صفر}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\varphi} = -\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ -\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$



تبدیل کره‌ای به قائم

به روش مشابه

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

تبدیل پارامترها

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

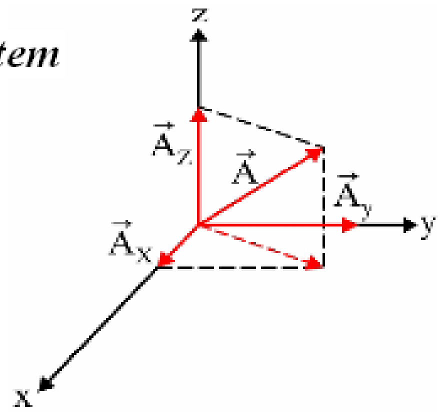
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

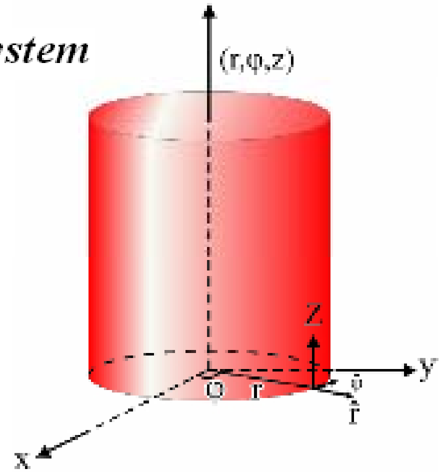
دستگاههای مختصات متعامد و راستگرد

خلاصه تبدیلات دستگاههای متعامد به یکدیگر

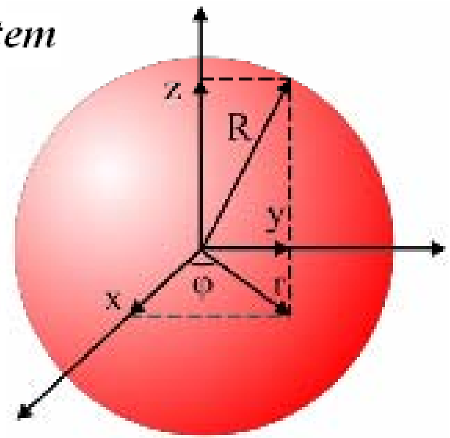
Cartesian System



Cylindrical System



Spherical System



استوانه‌ای \ کارتزین	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{z}$
$\hat{r}$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\hat{\varphi}$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\hat{z}$	0	0	1

استوانه‌ای \ کروی	$\hat{R}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\varphi}$
$\hat{r}$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	0
$\hat{\varphi}$	0	0	1
$\hat{z}$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

کروی \ کارتزین	$\hat{x}$	$\hat{y}$	$\hat{z}$
$\hat{R}$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$
$\hat{\theta}$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\theta$
$\hat{\varphi}$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0

تهیه و تنظیم: سامان راجی

سئوالات چند گزینه‌ای

به سئوالات چندگزینه‌ای زیر در مدت زمان معین شده پاسخ دهید، در صورت لزوم می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید

? برای هر نقطه داده شده در فضا : $\mathbf{a}_\phi \cdot \mathbf{a}_\theta = 1$

(a) True
(b) False

? کدامیک از عبارات زیر در نقطه (0,4,0) برقرار نیست؟

(a) $\mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_x$
(b) $\mathbf{a}_\theta = -\mathbf{a}_z$
(c) $\mathbf{a}_r = 4\mathbf{a}_y$
(d) $\mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_y$

? اگر $\mathbf{H} = 4\mathbf{a}_\rho - 3\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z$ ، در نقطه $(1, \pi/2, 0)$ مولفه‌های از H که با صفحه $\rho = 1$ موازیند، عبارتند از:

(a) $4\mathbf{a}_\rho$
(b) $5\mathbf{a}_z$
(c) $-3\mathbf{a}_\phi$
(d) $-3\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z$
(e) $5\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$

? اگر $\mathbf{G} = 20\mathbf{a}_r + 50\mathbf{a}_\theta + 40\mathbf{a}_\phi$ ، در نقطه $(1, \pi/2, \pi/6)$ مولفه‌هایی از G که بر صفحه $\theta = \pi/2$ عمودند، عبارتند از:

(a) $20\mathbf{a}_r$
(b) $50\mathbf{a}_\theta$
(c) $40\mathbf{a}_\phi$
(d) $20\mathbf{a}_r + 40\mathbf{a}_\theta$
(e) $-40\mathbf{a}_r + 20\mathbf{a}_\phi$

? بردار نرمال واحد بر مخروط $\theta = 30°$ کدام گزینه است؟

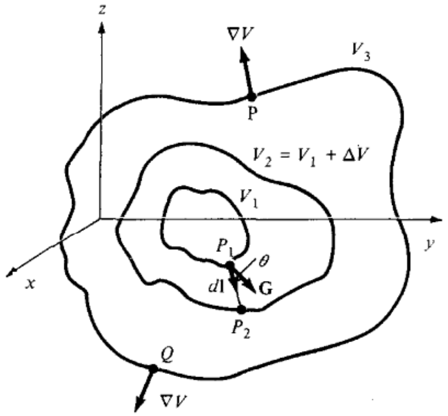
(a) $\mathbf{a}_r$
(b) $\mathbf{a}_\theta$
(c) $\mathbf{a}_\phi$
(d) none of the above

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

گرادیان

گرادیان میدان اسکالر V، برداری است که اندازه و جهت ماکزیمم شیب افزایش V را در فضا نشان می‌دهد.



تعریف مشتق
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)\cdot(dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z)$$

تعریف گرادیان
$$\mathbf{G} = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\left.\begin{aligned} dV &= \mathbf{G}\cdot d\mathbf{l} = G\cos\theta\, dl \\ \frac{dV}{dl} &= G\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\frac{dV}{dl}\right|_{\max} = \frac{dV}{dn} = G$$

خواص گرادیان

$$\nabla(V+U) = \nabla V + \nabla U$$
$$\nabla(VU) = V\nabla U + U\nabla V$$
$$\nabla\left[\frac{V}{U}\right] = \frac{U\nabla V - V\nabla U}{U^2}$$
$$\nabla V^n = nV^{n-1}\nabla V$$

گرادیان در دستگاه دکارتی

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

با توجه به اثبات صورت گرفته در بالا

گرادیان در دستگاه استوانه‌ای

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x} \\ &\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ &\frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\nabla = \mathbf{a}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{a}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \mathbf{a}_z\frac{\partial}{\partial z}}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial\rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

گرادیان در دستگاه کروی

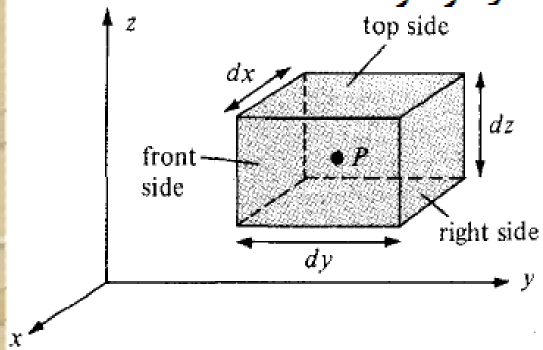
$$\left.\begin{aligned} &r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x} \\ &\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ &\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} \\ &\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\nabla = \mathbf{a}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{a}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi$$

دیورژانس

دیورژانس بردار **A** در نقطه **P** نشاندهنده شار خارج شونده از واحد حجمی است که نقطه **P** را فرا گرفته است.



$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} + \int_{\text{left}} + \int_{\text{right}} + \int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_{\text{front}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dy\,dz \left[A_x(x_o, y_o, z_o) + \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \bigg|_P \right]$$

$$\int_{\text{back}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = -dy\,dz \left[A_x(x_o, y_o, z_o) - \frac{dx}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \bigg|_P \right]$$

$$\Rightarrow \int_{\text{front}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{back}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx\,dy\,dz \frac{\partial A_x}{\partial x} \bigg|_P$$

$$\int_{\text{left}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{right}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx\,dy\,dz \frac{\partial A_y}{\partial y} \bigg|_P$$

$$\int_{\text{top}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{bottom}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = dx\,dy\,dz \frac{\partial A_z}{\partial z} \bigg|_P$$

$$\Delta v = dx\,dy\,dz$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \bigg|_{\text{at } P}$$

دیورژانس در دستگاه دکارتی

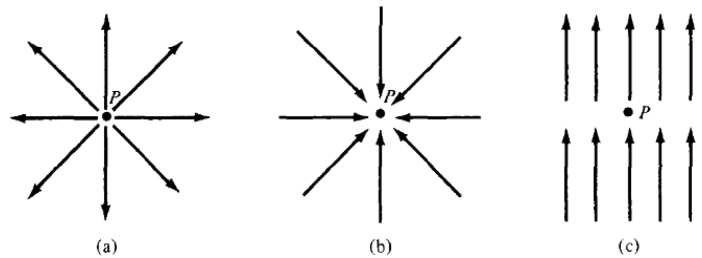
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

دیورژانس در دستگاه استوانه‌ای

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

دیورژانس در دستگاه کروی

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$



at P; **(a)** positive divergence, **(b)** negative divergence, **(c)** zero divergence.

خواص دیورژانس

1. It produces a scalar field (because scalar product is involved
2. The divergence of a scalar V, div V, makes no sense.
3. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
4. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$

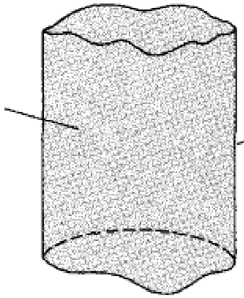
تهیه و تنظیم: سامان راجی

قضیه دیورژانس

طبق قضیه دیورژانس، جمع شار خارج شونده در اثر بردار A از طریق یک سطح بسته برابر شار خارج شونده در اثر دیورژانس A از حجمی است که توسط همان سطح بسته ایجاد شده است.

جهت اثبات قضیه، یک حجم دلخواه در نظر گرفته شده و این حجم به تعدادی از حجمهای کوچکتر تقسیم می‌شود. حال برای یکی از این حجمهای کوچک خواهیم داشت:

$$\oint_S A\cdot d\mathbf{S} = \sum_k \oint_{S_k} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \sum_k \frac{\oint_{S_k} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta v_k}\Delta v_k$$



$$\boxed{\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\, dv}$$

مثال

دیورژانس بردارهای زیر را بدست آورید.

$$\mathbf{P} = x^2yz\,\mathbf{a}_x + xz\,\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{Q} = \rho\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + \rho^2 z\,\mathbf{a}_\phi + z\cos\phi\,\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{T} = \frac{1}{r^2}\cos\theta\,\mathbf{a}_r + r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\theta + \cos\theta\,\mathbf{a}_\phi$$

پاسخ :

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{P} &= \frac{\partial}{\partial x}P_x + \frac{\partial}{\partial y}P_y + \frac{\partial}{\partial z}P_z \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) \\ &= 2xyz + x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{Q} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho Q_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}Q_\phi + \frac{\partial}{\partial z}Q_z \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sin\phi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(\rho^2 z) + \frac{\partial}{\partial z}(z\cos\phi) \\ &= 2\sin\phi + \cos\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{T} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2T_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(T_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(T_\phi) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin^2\theta\cos\phi) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\theta) \\ &= 0 + \frac{1}{r\sin\theta}2r\sin\theta\cos\theta\cos\phi + 0 = 2\cos\theta\cos\phi\end{aligned}$$

مثال

اگر $\mathbf{G}(r) = 10e^{-2z}(\rho\mathbf{a}_\rho + \mathbf{a}_z)$ باشد، شار خارج شونده ناشی از G از استوانه‌ای با مشخصات$\rho = 1, 0 \le z \le 1$ را محاسبه کنید. با استفاده از نتیجه بدست آمده، قضیه دیورژانس را اثبات کنید.

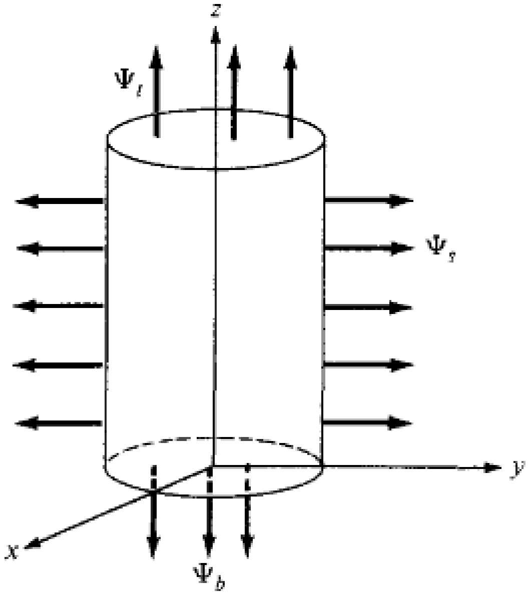
پاسخ :

$$\Psi = \oint \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S} = \Psi_t + \Psi_b + \Psi_s$$

$$\Psi_t = \int \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{-2}\rho\, d\rho\, d\phi = 10e^{-2}(2\pi)\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^1 = 10\pi e^{-2}$$

$$\Psi_b = \int_b \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{0}\rho\, d\rho\, d\phi = -10(2\pi)\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^1 = -10\pi$$

$$\Psi_s = \int_s \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S} = \int_{z=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} 10e^{-2z}\rho^2\, dz\, d\phi = 10(1)^2(2\pi)\left.\frac{e^{-2z}}{-2}\right|_0^1 = 10\pi(1 - e^{-2})$$



$$\Rightarrow \quad \Psi = \Psi_t + \Psi_b + \Psi_s = 10\pi e^{-2} - 10\pi + 10\pi(1 - e^{-2}) = 0$$

با استفاده از قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\Psi = \oint_S G\cdot d\mathbf{S} = \int_v (\nabla\cdot\mathbf{G})\, dv$$

$$\nabla\cdot\mathbf{G} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho G_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}G_\phi + \frac{\partial}{\partial z}G_z$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 10e^{-2z}) - 20e^{-2z} = 0$$

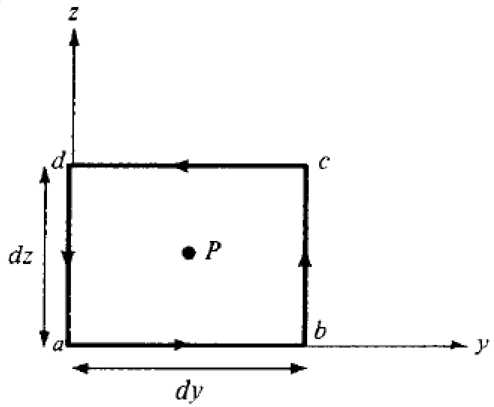
الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

کرل

کرل بردار A برداری است که اندازه آن برابر ماکزیمم مقدار چرخانندگی بردار A بر روی صفحه‌ای با مساحت متمایل به صفر و جهت آن در راستای عمود بر صفحه‌ای است که بازای این صفحه قدرت چرخانندگی A ماکزیمم می‌شود.

$$\text{curl}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \right) \mathbf{a}_{n_{\max}}$$



$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_{ab} + \int_{bc} + \int_{cd} + \int_{da} \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_{ab} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dy \left[A_y(x_o, y_o, z_o) - \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \bigg|_P \right]$$

$$\int_{bc} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = dz \left[A_z(x_o, y_o, z_o) + \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_P \right]$$

$$\int_{cd} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dy \left[A_y(x_o, y_o, z_o) + \frac{dz}{2} \frac{\partial A_y}{\partial z} \bigg|_P \right]$$

$$\int_{da} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -dz \left[A_z(x_o, y_o, z_o) - \frac{dy}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_P \right]$$

$$\Delta S = dy\, dz$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta S \to 0} \oint_L \frac{\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \Rightarrow \begin{cases} (\text{curl}\,\mathbf{A})_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\text{curl}\,\mathbf{A})_y = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\text{curl}\,\mathbf{A})_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases}$$

کرل در دستگاه دکارتی

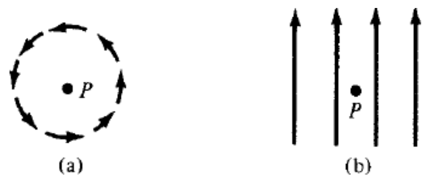
$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

کرل در دستگاه استوانه‌ای

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho\, \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

کرل در دستگاه کروی

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\, \mathbf{a}_\theta & r \sin\theta\, \mathbf{a}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\, A_\phi \end{vmatrix}$$



(a) curl at P points out of the page; **(b)** curl at P is zero.

خواص کرل

1. The curl of a vector field is another vector field.
2. The curl of a scalar field V, $\nabla \times V$, makes no sense.
3. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
4. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
5. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = V\nabla \times \mathbf{A} + \nabla V \times \mathbf{A}$
6. The divergence of the curl of a vector field vanishes, that is, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.
7. The curl of the gradient of a scalar field vanishes, that is, $\nabla \times \nabla V = 0$.

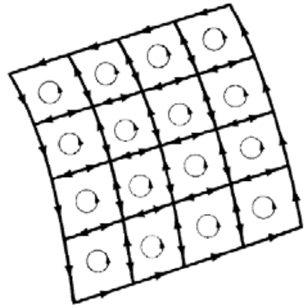
قضیه استوکس

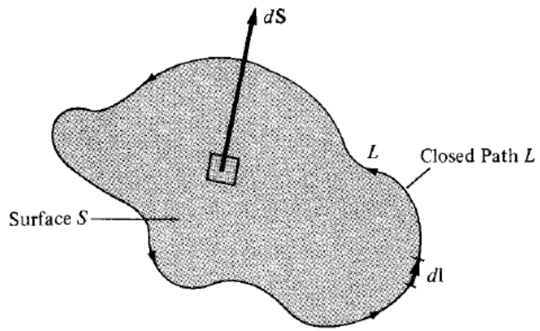
طبق قضیه استوکس، میزان چرخانندگی میدان برداری A حول یک مسیر بسته برابر است با انتگرال سطحی از کرل A روی سطح بسته‌ای که توسط همان خط بسته احاطه شده است.

جهت اثبات قضیه، یک سطح دلخواه در نظر گرفته شده و این سطح به تعدادی از سطحهای کوچکتر تقسیم می‌شود. حال برای یکی از این سطحهای کوچک خواهیم داشت:

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \sum_k \oint_{L_k} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \sum_k \frac{\oint_{L_k} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_k}\,\Delta S_k$$

$$\boxed{\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}}$$





مثال

کرل میدانهای برداری زیر را بدست آورید.

$$\mathbf{P} = x^2yz\,\mathbf{a}_x + xz\,\mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{Q} = \rho\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + \rho^2 z\,\mathbf{a}_\phi + z\cos\phi\,\mathbf{a}_z$$

پاسخ :

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{P} &= \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z\\ &= (0-0)\,\mathbf{a}_x + (x^2y - z)\,\mathbf{a}_y + (0 - x^2z)\,\mathbf{a}_z\\ &= (x^2y - z)\mathbf{a}_y - x^2z\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

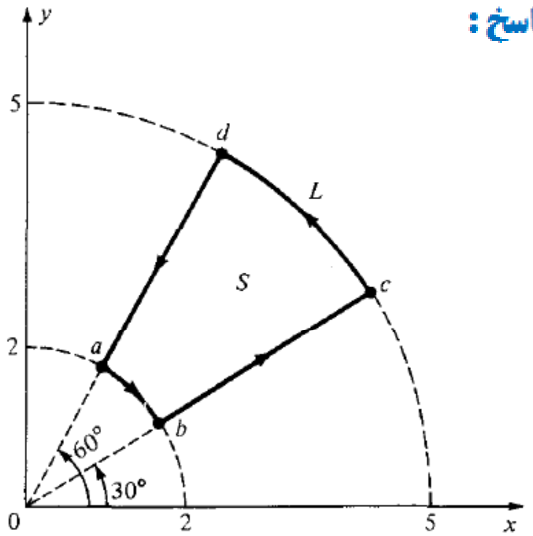
$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{Q} &= \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial Q_z}{\partial\phi} - \frac{\partial Q_\phi}{\partial z}\right]\mathbf{a}_\rho + \left[\frac{\partial Q_\rho}{\partial z} - \frac{\partial Q_z}{\partial\rho}\right]\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho Q_\phi) - \frac{\partial Q_\rho}{\partial\phi}\right]\mathbf{a}_z\\ &= \left(\frac{-z}{\rho}\sin\phi - \rho^2\right)\mathbf{a}_\rho + (0-0)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}(3\rho^2 z - \rho\cos\phi)\mathbf{a}_z\\ &= -\frac{1}{\rho}(z\sin\phi + \rho^3)\mathbf{a}_\rho + (3\rho z - \cos\phi)\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

اگر بردار $\mathbf{A} = \rho \cos\phi\, \mathbf{a}_\rho + \sin\phi\, \mathbf{a}_\phi$ باشد، مقدار انتگرال $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ را حول مسیر بسته نشان داده شده بدست آورید. درستی قضیه استوکس را تحقیق کنید.

پاسخ :



$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\phi=60^\circ}^{30^\circ} \rho \sin\phi\, d\phi = 2(-\cos\phi)\Big|_{60^\circ}^{30^\circ} = -(\sqrt{3} - 1)$$

$$\int_b^c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\rho=2}^{5} \rho \cos\phi\, d\rho = \cos 30^\circ \frac{\rho^2}{2}\Big|_2^5 = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

$$\int_c^d \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\phi=30^\circ}^{60^\circ} \rho \sin\phi\, d\phi = 5(-\cos\phi)\Big|_{30^\circ}^{60^\circ} = \frac{5}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\int_d^a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\rho=5}^{2} \rho \cos\phi\, d\rho = \cos 60^\circ \frac{\rho^2}{2}\Big|_5^2 = -\frac{21}{4}$$

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\sqrt{3} + 1 + \frac{21\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} - \frac{21}{4} = 4.941$$

با استفاده از قضیه استوکس خواهیم داشت:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right] + \mathbf{a}_\phi \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \mathbf{a}_z \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] = \frac{1}{\rho}(1 + \rho) \sin\phi\, \mathbf{a}_z$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=30^\circ}^{60^\circ} \int_{\rho=2}^{5} \frac{1}{\rho}(1 + \rho) \sin\phi\, \rho\, d\rho\, d\phi = \int_{30^\circ}^{60^\circ} \sin\phi\, d\phi \int_2^5 (1 + \rho) d\rho = -\cos\phi \Big|_{30^\circ}^{60^\circ} \left(\rho + \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_2^5$$

$$= \frac{27}{4}(\sqrt{3} - 1) = 4.941$$

تمرین :

برای هر میدان برداری A ثابت کنید: $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ بعبارت دیگر، ثابت کنید دیورژانس کرل هر برداری برابر صفر است.

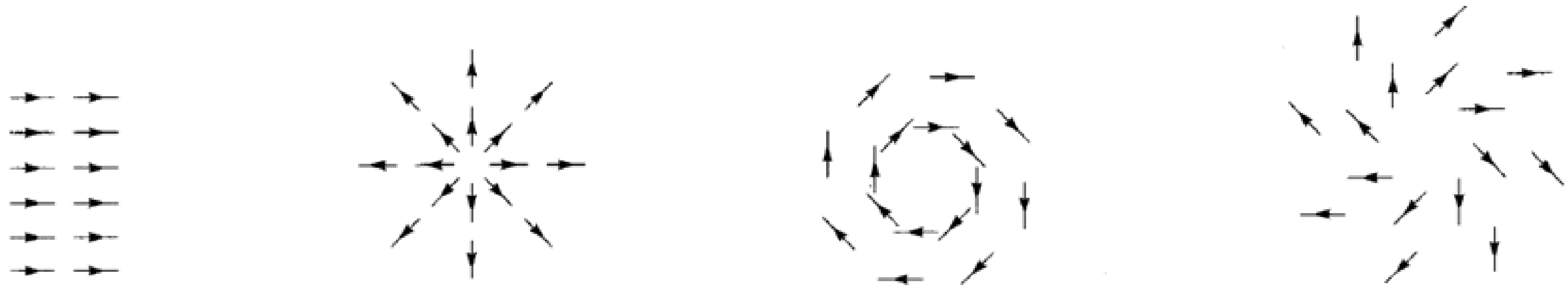
الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

➢ اگر دیورژانس یک بردار برابر صفر باشد، آن بردار سلونوئیدی گفته می‌شود. چرا که اگر دیورژانس یک بردار برابر صفر باشد، با توجه به اینکه $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ پس حتما بایستی آن بردار خود کرل یک بردار دیگر باشد.

➢ اگر کرل یک میدان بردار برابر صفر باشد، آن بردار غیر چرخشی یا پتانسیلی گفته می‌شود. چرا که اگر کرل یک بردار برابر صفر باشد، با توجه به اینکه : $\nabla \times (\nabla V) = 0$ پس حتما بایستی آن بردار خود گردیان یک میدان اسکالر باشد.

➢ دسته‌بندی میدانهای الکتریکی با توجه به خطوط میدان



(a) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$

(b) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0$

(c) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$

(d) $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \nabla \times \mathbf{A} \neq 0$

➢ تاثیرگذاری مولفه‌های یک بردار بر مقادیر کرل و دیورژانس آن

(a) $\mathbf{A} = k\mathbf{a}_x, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} = 0,$

(b) $\mathbf{A} = k\mathbf{r}, \nabla \cdot \mathbf{A} = 3k, \nabla \times \mathbf{A} = 0$

(c) $\mathbf{A} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} = 2\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{A} = \mathbf{k} \times \mathbf{r} + c\mathbf{r}, \nabla \cdot \mathbf{A} = 3c, \nabla \times \mathbf{A} = 2\mathbf{k}$

لاپلاسین

طبق تعریف، به دیورژانس گرادیان یک تابع اصطلاحا لاپلاسین گفته می‌شود.

$$\text{Laplacian } V = \nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$$

لاپلاسین در دستگاه دکارتی

$$\nabla^2 V = \left[\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right] \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right] \Rightarrow \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

لاپلاسین در دستگاه استوانه‌ای

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

لاپلاسین در دستگاه کروی

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

- میدان اسکالر V در یک منطقه خاص هارمونیک خوانده می‌شود اگر در آن منطقه مقدار لاپلاسین V برابر صفر باشد.

$$\nabla^2 V = 0$$

- لاپلاسین A به شکلی دیگر نیز قابل بیان است: گرادیان دیورژانس A منهای کرل کرل A

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

سئوالات چند گزینه‌ای

به سئوالات چندگزینه‌ای زیر در مدت زمان معین شده پاسخ دهید. در صورت لزوم می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید

? کدامیک از عبارات زیر بی‌معنی است؟

(a) grad div
(b) div curl
(c) curl grad
(d) curl grad
(e) div curl

? حاصل کدامیک از عبارات داده شده، برابر صفر است؟

(a) grad div
(b) div grad
(c) curl grad
(d) curl curl

? اگر بردار A بصورت $\mathbf{A} = 3x^2yz\,\mathbf{a}_x + x^3z\,\mathbf{a}_y + (x^3y - 2z)\mathbf{a}_z$ باشد، بردار A را می‌توان در کدام حوزه قرار داد؟

(a) Harmonic
(b) Divergenceless
(c) Solenoidal
(d) Rotational
(e) Conservative

? با استفاده از دیفرانسیل طولی، طول هر کدام از منحنی‌های داده شده را بیابید.

(a) $\rho = 3, \pi/4 < \phi < \pi/2, z = \text{constant}$
(b) $r = 1, \theta = 30°, 0 < \phi < 60°$
(c) $r = 4, 30° < \theta < 90°, \phi = \text{constant}$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دستگاه مختصات متعامد عمومی

در این قسمت با معرفی دستگاه متعامد عمومی با سه مولفه U_1, U_2, U_3 و سه پارامتر h_1, h_2, h_3 همه روابط ارائه شده در سه دستگاه دکارتی، استوانه‌ای و کروی را در یک دستگاه و یک مجموعه معادلات بصورت زیر بیان می‌کنیم:

	U1	U2	U3
مختصات کارتزین	x	y	z
مختصات استوانه‌ای	R	φ	z
مختصات کروی	r	θ	φ

	h1	h2	h3
مختصات کارتزین	1	1	1
مختصات استوانه‌ای	1	R	1
مختصات کروی	1	r	$r\sin\theta$

گرادیان

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\widehat{u_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\widehat{u_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\widehat{u_3}$$

دیورژانس

$$\nabla . \overline{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 \overline{f_{u_1}}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 \overline{f_{u_2}}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 \overline{f_{u_3}})\right]$$

کرل

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\widehat{u_1} & h_2\widehat{u_2} & h_3\widehat{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1\overline{f_{u_1}} & h_2\overline{f_{u_2}} & h_3\overline{f_{u_3}} \end{vmatrix}$$

لاپلاسین

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right] + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right] + \frac{\partial}{\partial u_3}\left[\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right]\right]$$

اِلمان طولی

$$dl = h_1 du_1 \hat{u}_1 + h_2 du_2 \hat{u}_2 + h_3 du_3 \hat{u}_3$$

اِلمان سطحی

$$ds_1 = h_2 du_2 h_2 du_2 \hat{u}_1$$

$$ds_2 = h_1 du_1 h_3 du_3 \hat{u}_2$$

$$ds_3 = h_1 du_1 h_2 du_2 \hat{u}_3$$

اِلمان حجمی

$$dv = h_1 du_1 h_2 du_2 h_3 du_3$$

انتگراهای مفید

۱) $$\int \frac{du}{(u^2+a^2)} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$$

۲) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} \quad ; \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{u}{a}$$

۳) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a}$$

۴) $$\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{Ln}\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

۵) $$\int \frac{d\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{Ln}\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)$$

۶) $$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\left(\sqrt{u^2+a^2}\right)}$$

۷) $$\int \frac{udu}{\sqrt{u^2+a^2}} = \sqrt{u^2+a^2}$$

۸) $$\int \frac{udu}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

۹) $$\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{u\sqrt{u^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\mathrm{Ln}\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$$

۱۰) $$\int \frac{u^2du}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2+a^2}} + \mathrm{Ln}\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)$$

۱۱) $$\int \frac{u^3du}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

۱۲) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{a+b\cos\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

۱۳) $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\mathrm{Ln}\left(\frac{u+a}{u-a}\right) = \frac{1}{a}\tanh\frac{u}{a} \quad ; \quad u^2<a^2$$

۱۴) $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\mathrm{Ln}\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -\frac{1}{a}\coth\frac{u}{a} \quad ; \quad u^2>a^2$$

روابط مثلثاتی مفید

1. Sum or difference:

a. $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

b. $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

c. $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

d. $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

e. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

f. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$

g. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

h. $\tan^2 x - \sec^2 x = -1$

i. $\cot^2 x - \csc^2 x = -1$

2. Sum or difference into products:

a. $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$

b. $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$

c. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$

d. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$

3. Products into sum or difference:

a. $2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

b. $2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$

c. $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

d. $2\sin x\sin y = -\cos(x+y) + \cos(x-y)$

4. Double and half-angles:

a. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

c. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

d. $\sin\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ or $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

e. $\cos\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ or $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$

f. $\tan\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تمرین :

۱. مختصات استوانه‌ای نقطه‌ای با مختصات $z=3$ و $y=-2$ و $x=-1$ را به دست آورید.

۱) $\rho=2.24 \;,\; \varphi=63.4^\circ \;,\; z=3$

۲) $\rho=2.24 \;,\; \varphi=243.4^\circ \;,\; z=3$

۳) $\rho=2.24 \;,\; \varphi=296.6^\circ \;,\; z=3$

۴) $\rho=2.24 \;,\; \varphi=126.8^\circ \;,\; z=3$

۲. مختصات کروی نقطه‌ای با مختصات مقابل را بیابید.

$$x=-1 \,,\, y=-2 \,,\, z=-3$$

۱) $r=3.74 \;,\; \varphi=36.7^\circ \;,\; \theta=296.6^\circ$

۲) $r=3.74 \;,\; \varphi=143.3^\circ \;,\; \theta=243.4^\circ$

۳) $r=3.74 \;,\; \varphi=143.3^\circ \;,\; \theta=296.6^\circ$

۴) $r=3.74 \;,\; \varphi=36.7 \;,\; \theta=243.4^\circ$

۳. اگر $\bar{A}-\hat{a}_x+\hat{a}_y-\hat{a}_z$ و $\bar{B}--2\hat{a}_x+\hat{a}_y+\hat{a}_z$ بوده و رابطه بین $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $\bar{C}$ به صورت زیر باشد. به دست آورید $\bar{C}$ را.

$$\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C})+(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{C}=-\hat{a}_x-9\hat{a}_y-5\hat{a}_z$$

۱) $3\hat{a}_x+\hat{a}_y+2\hat{a}_z$

۲) $-3\hat{a}_x-\hat{a}_y-2\hat{a}_z$

۳) $-3\hat{a}_x+\hat{a}_y-2\hat{a}_z$

۴) $3\hat{a}_x-\hat{a}_y+2\hat{a}_z$

۴. در مختصات استوانه‌ای، فاصله بین دو نقطه به مختصات $\left(4,\frac{3\pi}{2},0\right)$ و $\left(8,\frac{\pi}{2},10\right)$ را به دست آورید.

۱) 15.62 ۲) 12.32 ۳) 18.41 ۴) 23.22

۵. بردار $\bar{A}=(y-1)\hat{x}+2x\hat{y}$ مفروض است. تصویر این بردار را بر روی بردار $\bar{B}=5\hat{x}-\hat{y}+2\hat{z}$ در نقطه $(2,2,2)$ به دست آورید.

۱) $\frac{1}{\sqrt{30}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{30}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{30}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{30}}$

۶. با استفاده از تئوری استوکس، مطلوب است محاسبه $\oint \bar{A}\cdot\bar{d}l$ بر روی حلقه بسته‌ای شامل قطعات خط مستقیمی در صفحه $z=0$ از $(0,0)$ به $(0,1)$ به $(-1,1)$ به $(-1,0)$ و به $(0,0)$.

$$\bar{A}=3\cos\pi x\sin\pi y\hat{x}-3\sin\pi x\cos\pi y\hat{y}-3\cos\pi x\cos\pi y\hat{z}$$

۱) 0.0 ۲) 1.0 ۳) 2.0 ۴) 3.0

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

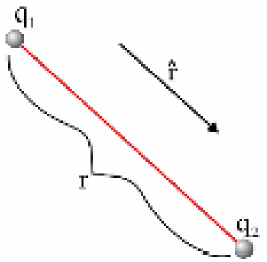
فصل دوم

میدانهای الکتریکی

- شدت میدان الکتریکی
  - شدت میدان بار نقطه‌ای
  - شدت میدان بارهای توزیعی
- خطوط میدان الکتریکی
- چگالی شار الکتریکی
- قانون گوس
- پتانسیل الکتریکی
- انرژی الکتریکی
- میدان الکتریکی در درون مواد
- شرایط مرزی

قانون کولن

طبق آزمایشهای انجام شده توسط کولمب، معلوم گردید : نیروی وارد بر هم از طرف دو بار الکتریکی q_2, q_1 که در مختصاتهای مکانی R_2 ,R_1 قرار گرفته‌اند، با عبارت زیر متناسب است:



$$\vec{F}_{21} \propto \frac{q_1 q_2}{\varepsilon_0 \left|\bar{R}_2 - \bar{R}_1\right|^2} \frac{\bar{R}_2 - \bar{R}_1}{\left|\bar{R}_2 - \bar{R}_1\right|}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} = 8.85 \times 10^{-12} \left[F/m\right] \text{ یا } \left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$$

Electric permitivity coeficient of Free-space ضریب نفوذپذیری الکتریکی خلاء

ضرب تناسب معادله محاسبه براي دستگاه اندازه‌گيري MKS يا SIبرابر $\frac{1}{4\pi}$ مي‌باشد.

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left|\bar{R}_2 - \bar{R}_1\right|^3} \left(\bar{R}_2 - \bar{R}_1\right)$$

هر دو بار الکتریکی به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند فرمولی که بیانگر نیروی بین دو بار الکتریکی q_1 و q_2 است که در فاصله‌ی r از یکدیگر هستند:

$$\left(F = \frac{k\,Q_1 Q_2}{R^2} \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \text{ m/F} \right) \qquad F_{12} = F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

r : فاصله دو بار از یکدیگر

r̂ : بردار یکه در جهت خط فاصل دو بار

نیروی مابین دوبار به ماهیت بارها بستگی دارد:

اگر بجای یک بار، N بار مختلف بر روی یک بار نیرو وارد نمایند، نیروی کل برابر جمع برداری همه نیروها خواهد بود.

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q q_i \left(\vec{R} - \vec{R}_i\right)}{\left|\vec{R} - \vec{R}_i\right|^3}$$

مثال

سه بار نقطه اي q_1، q_2 و q که بترتیب در نقاط p_1 و p_2 و p در فضاي خالي قرار گرفته‌اند را در نظر بگیرید نیرو وارد بر بار q چقدر است؟

$$\begin{cases} q_1 = 3.2\times10^{-9}c \\ p_1(2,1,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} q_2 = -4.8\times10^{-9}c \\ p_2(3,2,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} q = -1.6\times10^{-9}c \\ p(1,2,0) \end{cases}$$

پاسخ :

ابتدا فاصله دو بار q_1،q_2 از بار q محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= \overrightarrow{OP} = \hat{a}_x(1-0)+\hat{a}_y(2-0)+\hat{a}_z(0-0)=\hat{a}_x+2\hat{a}_y \\ \bar{R}_1 &= \overrightarrow{OP_1} = 2\hat{a}_x+\hat{a}_y \\ \bar{R}_2 &= \overrightarrow{OP_2} = 3\hat{a}_x+2\hat{a}_y \end{aligned}\right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\bar{R}-\bar{R}_1 = \hat{a}_x(1-2)+\hat{a}_y(2-1) = -\hat{a}_x+\hat{a}_y \\ &\left|\bar{R}-\bar{R}_1\right| = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2} \\ &\bar{R}-\bar{R}_2 = -2\hat{a}_x \\ &\left|\bar{R}-\bar{R}_2\right| = 2 \end{aligned}\right.$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{qq_i}{\left|\bar{R}-\bar{R}_i\right|^3}(\bar{R}-\bar{R}_i)$$

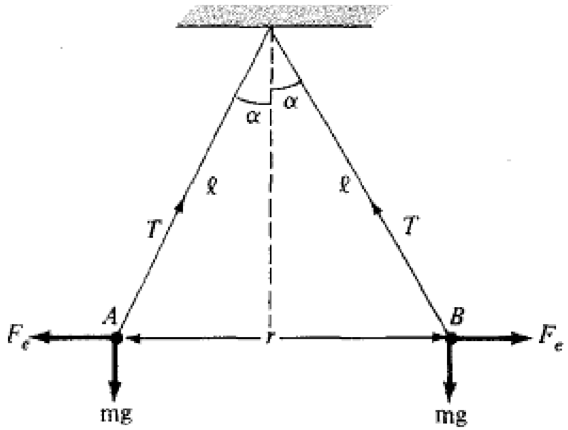
$$\bar{F}_q = \frac{-1.6\times10^{-9}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}}\left[\frac{3.2\times10^{-9}}{(\sqrt{2})^3}(-\hat{a}_x+\hat{a}_y)+\frac{-4.8\times10^{-9}}{2^3}(-2\hat{a}_x)\right]$$

$$\bar{F}_q = (-\hat{a}_x - \hat{a}_y 16.3)\times10^{-9} \quad N$$

مثال

دو بار نقطه‌ای با جرم برابر m و بار مساوی Q با نخهایی که جرم آنها قابل صرفنظر است، از یک نقطه مشترک آویزان شده‌اند.

نشان دهید در حالت تعادل، رابطه زیر برقرار است:



$$Q^2 = 16\pi\, \varepsilon_o mg\ell^2 \sin^2\alpha \tan\alpha$$

همچنین نشان دهید اگر زاویه تعادل به سمت صفر میل کند، رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_o mg\ell^2}}$$

پاسخ :

$$\begin{aligned} T\sin\alpha &= F_e \\ T\cos\alpha &= mg \end{aligned} \;\Rightarrow\; \left.\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{F_e}{mg} = \frac{1}{mg}\cdot\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o r^2} \\ r = 2\ell\sin\alpha \end{aligned}\right] \Rightarrow Q^2\cos\alpha = 16\pi\varepsilon_o mg\ell^2\sin^3\alpha$$

$$\Rightarrow Q^2 = 16\pi\varepsilon_o mg\ell^2\sin^2\alpha\tan\alpha$$

وقتی زاویه تعادل به سمت صفر میل کند:

$$\tan\alpha \simeq \alpha \simeq \sin\alpha \;\Rightarrow\; Q^2 = 16\pi\varepsilon_o mg\ell^2\alpha^3$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_o mg\ell^2}}$$

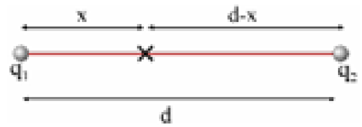
تهیه و تنظیم: سامان راجی

نقطه کور

یعنی نقطه‌ای که اگر باری در آن جا قرار دهیم، هیچ نیرویی به آن وارد نخواهد شد.

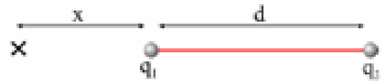
۱) اگر دو بار همنام باشند:

نقطه کور، بین دو بار، نزدیک‌تر به بار کوچک‌تر است.



$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(d-x)^2}$$

۲) اگر دو بار ما غیرهمنام باشند:



$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(d+x)^2}$$

مثال

دو بار نقطه‌ای $-q$ و $\frac{+q}{2}$ به ترتیب در مبدأ مختصات و در نقطه‌ای با مختصات $(a,0,0)$ قرار گرفته‌اند. در چه نقطه‌ای میدان صفر است؟ (سراسری ۱۳۷۲)

۱) $x=\frac{a}{2}$ ۲) $x=\left(2-\sqrt{2}\right)a$ ۳) $x=2a$ ۴) $x=\left(2+\sqrt{2}\right)a$

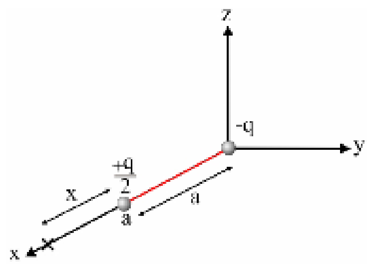
پاسخ :

بارها غیر همنام هستند؛ پس در نقطه‌ای خارج و نزدیک به بار کوچک‌تر، نقطه‌ای کور داریم:

$$\frac{\frac{q}{2}}{x^2} = \frac{q}{(a+x)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}(a+x)^2 = x^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a+x) = x \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} = x\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = x\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}-1}$$



پس مختصات نقطه کور:

$$a+\frac{a}{\sqrt{2}-1} = a\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right] = a\left[\frac{\sqrt{2}-1+1}{\sqrt{2}-1}\right] = a\,(2+\sqrt{2})$$

گزینه ۴ درست است.

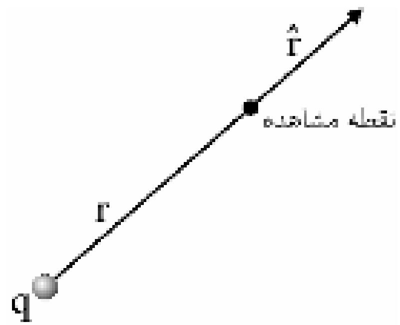
مفهوم میدان الکتریکی

هر جرمی در اطراف خود یک میدان جاذبه گرانشی ایجاد می‌کند. هر بار الکتریکی در اطراف خود یک میدان الکتریکی می‌آفریند و هر بار متحرک (جریان) در اطراف خود ایجاد میدان مغناطیسی می‌کند.

هر بار الکتریکی مثل یک حفره (بار منفی) و یا چشمه (بار مثبت) عمل می‌کند و اصلاً فلسفه نیروی دو بار الکتریکی در همین مفهوم «میدان» نهفته است.

معمولا در مباحث الکترومغناطیسی، بجای استفاده از مفهوم نیرو، از شدت میدان الکتریکی در معرفی یک میدان الکتریکی استفاده می‌شود.

$$\bar{E}(\bar{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\bar{R}-\bar{R}')}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3} \qquad [N/C] \text{ یا } [V/m]$$



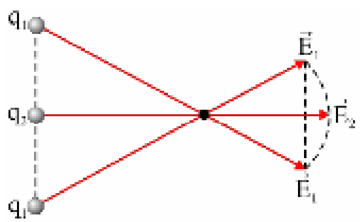
در حقیقت، شدت میدان الکتریکی نیروی وارد بر بار مثبت یک کولنی است. ($\mathbf{E}=\dfrac{\mathbf{F}}{Q}$)

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$q>0 \Rightarrow$ میدان شعاعی دور شونده است.

$q<0 \Rightarrow$ میدان شعاعی نزدیک شونده است.

اگر بجای یک بار، N بار مختلف میدان الکتریکی بوجود آورند، شدت میدان الکتریکی کل برابر جمع برداری همه شدت میدانهای الکتریکی خواهد بود.



$$\bar{E}(\bar{R})=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i(\bar{R}-\bar{R}_i)}{|\bar{R}-\bar{R}'|^3}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

میدان الکتریکی ناشی از بارهای پیوسته

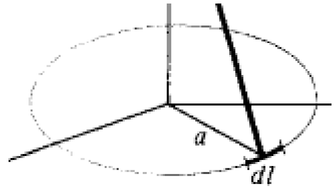
بارهای توزیعی در سه حالت خطی، سطحی یا حجمی دسته‌بندی می‌شوند. در هر سه حالت بایستی بار توزیع شده ممان‌گیری شود تا بتوان با آن همانند یک بار نقطه‌ای رفتار نمود.

توزیع بار خطی

Line charge

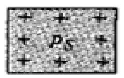
$$dQ = \rho_L \, dl \rightarrow Q = \int_L \rho_L \, dl \qquad \text{(line charge)}$$

line charge density, ρ_L (in C/m)



$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L \, dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \qquad \text{(line charge)}$$

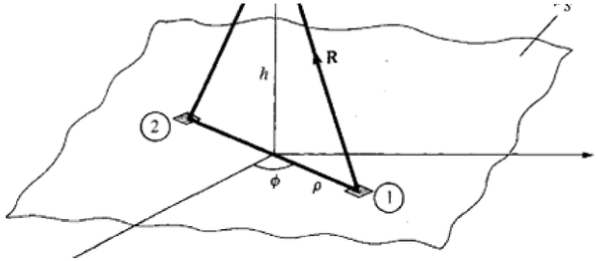
توزیع بار سطحی



Surface charge

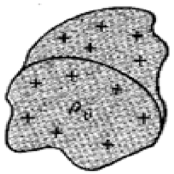
$$dQ = \rho_S \, dS \rightarrow Q = \int_S \rho_S \, dS \qquad \text{(surface charge)}$$

surface charge density ρ_S (in C/m^2)



$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S \, dS}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \qquad \text{(surface charge)}$$

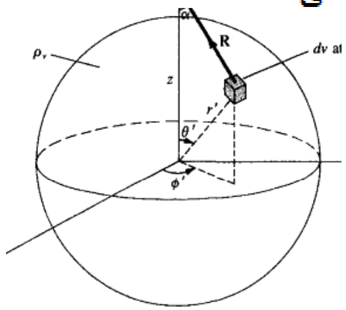
توزیع بار حجمی



Volume charge

$$dQ = \rho_v \, dv \rightarrow Q = \int_v \rho_v \, dv \qquad \text{(volume charge)}$$

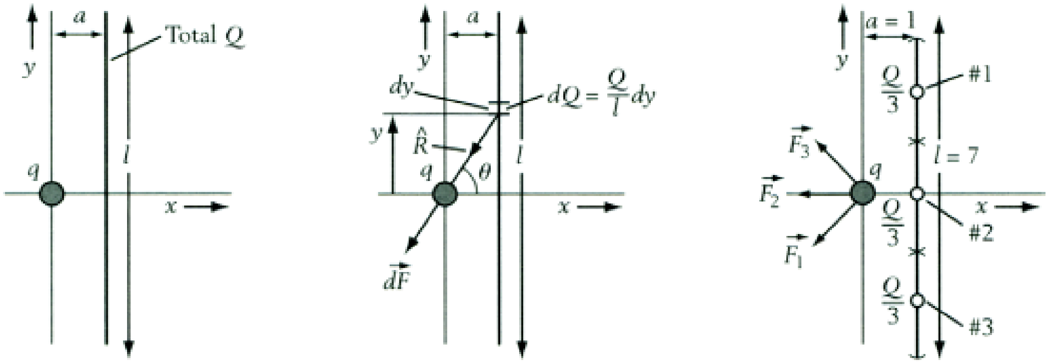
volume charge density ρ_v (in C/m^3)



$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_v \, dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \qquad \text{(volume charge)}$$

ممان گیری

هنگامی که بار بر روی خط یا سطح یا حجمی توزیع شده باشد، دیگر نمی‌توان مستقیما با آن توزیع، همانند بار نقطه‌ای رفتار نمود. بعنوان مثال، در شکل زیر یک توزیع خطی نمایش داده شده است. ابتدا کل خط بعنوان یک بار نقطه‌ای در نظر گرفته شده و شدت میدان الکتریکی ناشی از آن محاسبه شده است. سپس این بار خطی دو بار نقطه‌ای فرض شده و جواب ناشی از آنها محاسبه شده است. به همین ترتیب این توزیع خطی تا دوازده بار نقطه‌ای تقسیم بندی شده و جوابهای ناشی از آنها در جدول ذکر شده است. ملاحظه می‌شود هر چقدر تعداد تقسیمات توزیع خطی بیشتر می‌شود جواب دقیقتری حاصل می‌شود.



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	45	5.50	16.83	10.60	13.22	12.01	12.53	12.30	12.40	12.3540	12.3714	12.3631

به تقسیم یک توزیع به ابعاد کوچکتر بطوریکه اولا: به قدر کافی کوچک شده باشد و ثانیا: با برگرداندن ابعاد کوچک شده به مقدار اصلی (انتگرال‌گیری)، شکل توزیع عوض نشود، اصطلاحا ممان‌گیری گفته می‌شود.

در توزیع خطی، ممان خطی فقط در یک بعد، در توزیع سطحی، ممان سطحی در دو بعد و در توزیع حجمی، ممان حجمی در دو بعد محاسبه می‌شود.

المان طولی

$$dL = \begin{cases} h_1 du_1 \widehat{a_{u_1}} \\ h_2 du_2 \widehat{a_{u_2}} \\ h_3 du_3 \widehat{a_{u_3}} \end{cases}$$

المان سطحی

$$ds = \begin{cases} h_2 du_2 h_3 du_3 \ \widehat{a_{u_1}} \\ h_1 du_1 h_3 du_3 \ \widehat{a_{u_2}} \\ h_1 du_1 h_2 du_2 \ \widehat{a_{u_3}} \end{cases}$$

المان حجمی

$$dv = h_1 du_1 h_2 du_2 h_3 du_3$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته خطی

بار الکتریکی با چگالی خطی ρ_L مطابق شکل بر روی محور z در محدوده تعیین شده توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه مشاهده محاسبه می‌نمائیم :

$$dl = dz' \qquad dQ = \rho_L \, dl = \rho_L \, dz$$

$$Q = \int_{z_A}^{z_B} \rho_L \, dz$$

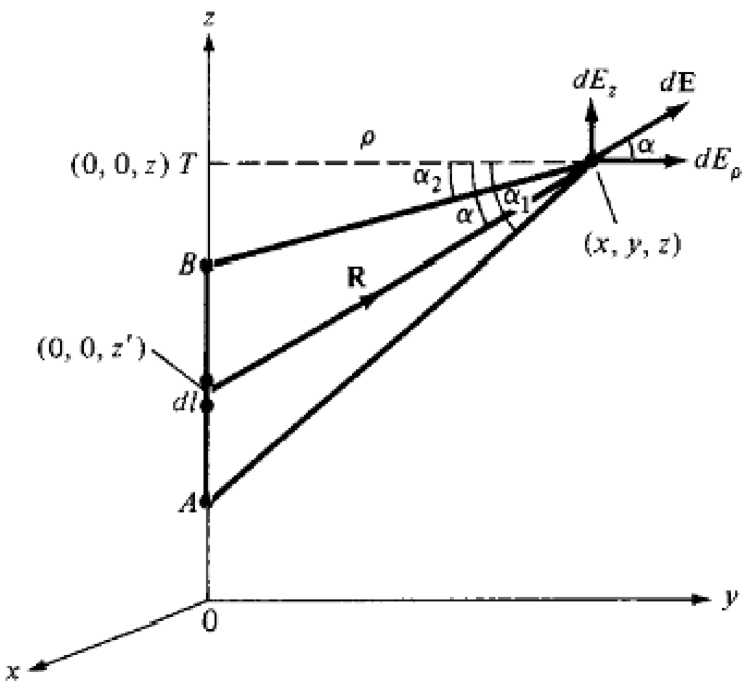
$$\mathbf{R} = (x, y, z) - (0, 0, z') = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R} = \rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\,\mathbf{a}_z$$

$$R^2 = |\mathbf{R}|^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$

$$\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\,\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \, dz'$$



$$R = [\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2} = \rho \sec \alpha$$

$$z' = OT - \rho \tan \alpha \Longrightarrow dz' = -\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha$$

$$\mathbf{E} = \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, [\cos \alpha \, \mathbf{a}_\rho + \sin \alpha \, \mathbf{a}_z] \, d\alpha}{\rho^2 \sec^2 \alpha}$$

$$= -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o\rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\cos \alpha \, \mathbf{a}_\rho + \sin \alpha \, \mathbf{a}_z] \, d\alpha \Longrightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o\rho}[-(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)\mathbf{a}_\rho + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)\mathbf{a}_z]$$

اگر در شکل بررسی شده، طول قسمت باردار را بی‌نهایت در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\alpha_1 = \pi/2, \alpha_2 = -\pi/2$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho} \mathbf{a}_\rho$$

تهیه و تنظیم:
سامان راجی

مثال

یک حلقه باردار به شعاع a و چگالی خطی ρ_L در صفحه xy مفروض است. اگر محور این حلقه محور z باشد، درستی رابطه زیر را تحقیق کنید.

$$\mathbf{E}(0,0,h) = \frac{\rho_L a h}{2\varepsilon_0[h^2+a^2]^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

پاسخ :

$$dl = a\,d\phi, \qquad \mathbf{R} = a(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = [a^2+h^2]^{1/2}, \qquad \mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

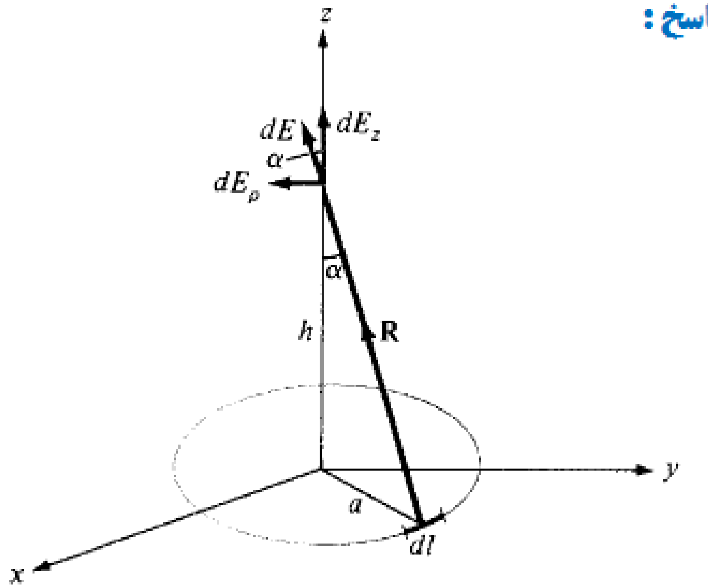
$$\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z}{[a^2+h^2]^{3/2}}$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L\, dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R \qquad \text{(line charge)}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{(-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z)}{[a^2+h^2]^{3/2}}a\,d\phi$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{4\pi\varepsilon_0[h^2+a^2]^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{\rho_L a h \mathbf{a}_z}{2\varepsilon_0[h^2+a^2]^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell\, a\cdot z}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.\hat{z}$$



For maximum $\mathbf{E}$, $\frac{d|\mathbf{E}|}{dh} = 0$

$$\frac{d|\mathbf{E}|}{dh} = \frac{\rho_L a}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{[h^2+a^2]^{3/2}(1) - \frac{3}{2}(h)2h[h^2+a^2]^{1/2}}{[h^2+a^2]^3}\right\}$$

$$[h^2+a^2]^{1/2}[h^2+a^2-3h^2] = 0$$

$$a^2 - 2h^2 = 0 \quad \text{or} \quad h = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

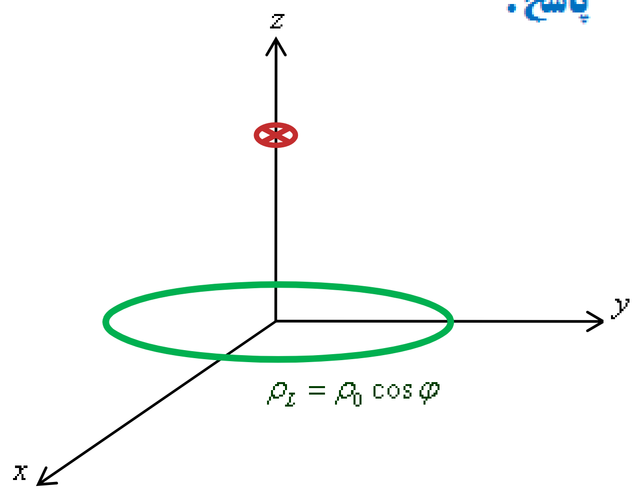
الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

میدان ناشی از یک حلقه باردار به چگالی بار خطی $\rho_\ell = \rho_0 \cos\varphi \left(\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{m}}\right)$ را روی محور حلقه به دست آورید؟

پاسخ:



$$dl = a\,d\phi, \qquad \mathbf{R} = a(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = [a^2 + h^2]^{1/2}, \qquad \mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z}{[a^2 + h^2]^{3/2}}$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L\,dl}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R \qquad \text{(line charge)}$$

$\rho_0 \cos\varphi$

$\hat{\mathbf{r}} = \cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\hat{\mathbf{y}}$

$$\mathbf{E} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o}\frac{(-a\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z)}{[a^2 + h^2]^{3/2}}\,a\,d\phi$$

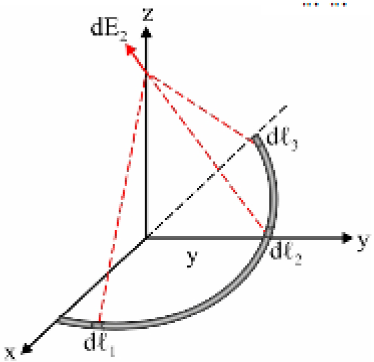
$\hat{r}$ و $\hat{\phi}$ جهت ثابتی ندارند و به نقطه شروع بستگی دارند

$$E = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 a^2}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}(\cos^2\varphi\,\widehat{a_x} + \underbrace{\cos\varphi\sin\varphi\,\widehat{a_y}}_{0} + \underbrace{h\cos\varphi\,\widehat{a_z}}_{0})\,d\varphi$$

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{-\rho_0\,a^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{\mathrm{x}}$$

تمرین :

میدان ناشی از نیم‌دایره زیر را در نقطه p روی محور z بیابید.

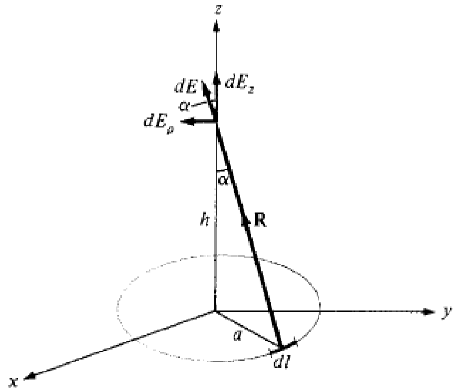


پاسخ نهایی :

$$E = \frac{\rho_\ell a z \hat{z}}{4\varepsilon_0 R^3} - \frac{a^2 \rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{y} = \frac{\rho_\ell a}{2\varepsilon_0 (z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{z\hat{z}}{2} - a\hat{y}\right]$$

تمرین :

اگر در حلقه مثال حل شده قبلی، کل بار موجود بر روی حلقه برابر Q باشد، شدت میدان الکتریکی را در همان نقطه واقع بر روی محور حلقه، هنگامی که شعاع حلقه به سمت صفر میل‌می‌کند، بیابید

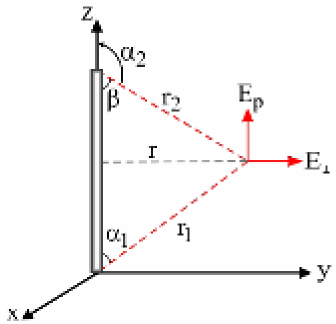


پاسخ نهایی :

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}\mathbf{a}_z$$

تمرین :

میدان ناشی از میله‌ای محدود با چگالی بار طولی ρ_ℓ در فاصله عمودی r از میله چقدر است؟



پاسخ نهایی :

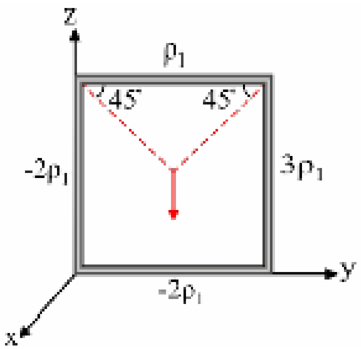
$$E = \underbrace{\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\hat{R}}_{\text{مؤلفه عمود بر محور میله}} + \underbrace{\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\hat{z}}_{\text{مؤلفه موازی با محور میله}}$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

میدان در مرکز مربع نشان داده شده چقدر است؟ (ضلع مربع a است.)



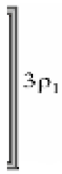
پاسخ :

- در جهت $-z$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\, \varepsilon_0 \frac{a}{2}}[\cos 45° + \cos 45°]\ \hat{r} + 0 \ \Rightarrow\ \vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\, \varepsilon_0 \frac{a}{2}}\left[2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\hat{r}$$

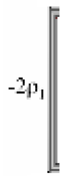
- در جهت $-z$

$$\vec{E} = \frac{-2\,\rho_\ell}{4\pi\, \varepsilon_0 \frac{a}{2}}[\cos 45° + \cos 45°]\ \hat{r} + 0 \ \Rightarrow\ \vec{E} = \frac{-2\,\rho_\ell}{4\pi\, \varepsilon_0 \frac{a}{2}}\left[2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\hat{r}$$



- در جهت $-y$

$$\vec{E} = \frac{\mathbf{3}\,\rho_\ell}{4\pi\, \varepsilon_0 \frac{a}{2}}[\cos 45° + \cos 45°]\ \hat{r} + 0 \ \Rightarrow\ \vec{E} = \frac{\mathbf{3}\,\rho_\ell}{4\pi\, \varepsilon_0 \frac{a}{2}}\left[2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\hat{r}$$



- در جهت $-y$

$$\vec{E} = \frac{-2\,\rho_\ell}{4\pi\, \varepsilon_0 \frac{a}{2}}[\cos 45° + \cos 45°]\ \hat{r} + 0 \ \Rightarrow\ \vec{E} = \frac{-2\,\rho_\ell}{4\pi\, \varepsilon_0 \frac{a}{2}}\left[2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\hat{r}$$

$$E = -\sqrt{2}\,\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{2}}\,\hat{y} + \sqrt{2}\,\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{2}}\,\hat{z}$$

مثال

بار خطی یکنواخت با چگالی ρ_ℓ روی محور z از $-a < z < a$ توزیع شده است. میدان الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله r از خط بار واقع در صفحه xy چقدر است؟ (سراسری ۱۳۸۵)

۱) $\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\hat{r}$

۲) $\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

۳) $\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

۴) $\vec{E} = \frac{\rho_\ell a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

پاسخ :

p روی عمود منصّف میله قرار دارد؛ پس $E_\parallel = 0$ و فقط مؤلفه $E_\perp$ دارد.

$$\alpha = \beta \Rightarrow r_1 = r_2 = \sqrt{a^2+r^2}$$

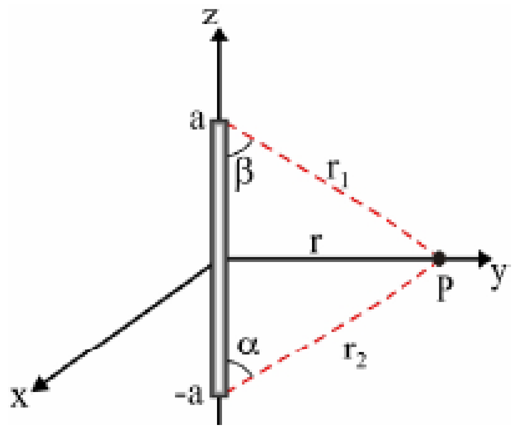
$$E_\perp = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\alpha + \cos\beta) = \frac{\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}(2\cos\alpha)$$

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

$$E_\perp = \frac{2\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 r} \times \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}} = \frac{\rho_\ell a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2+r^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell a}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{a^2+r^2}}\hat{r}$$

گزینهٔ ۴ درست است.



➢ یادآوری

$$E = \underbrace{\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\hat{R}}_{\text{مؤلفه عمود بر محور میله}} + \underbrace{\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\hat{z}}_{\text{مؤلفه موازی با محور میله}}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته سطحی

بار الکتریکی با چگالی سطحی ρ_S مطابق شکل بر روی صفحه xy توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در نقطه مشاهده محاسبه می‌نمائیم :

$$dQ = \rho_S\, dS$$

$$Q = \int \rho_S\, dS$$

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R$$

$$\mathbf{R} = \rho(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z, \qquad R = |\mathbf{R}| = \left[\rho^2 + h^2\right]^{1/2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}, \qquad dQ = \rho_S\, dS = \rho_S\, \rho\, d\phi\, d\rho$$

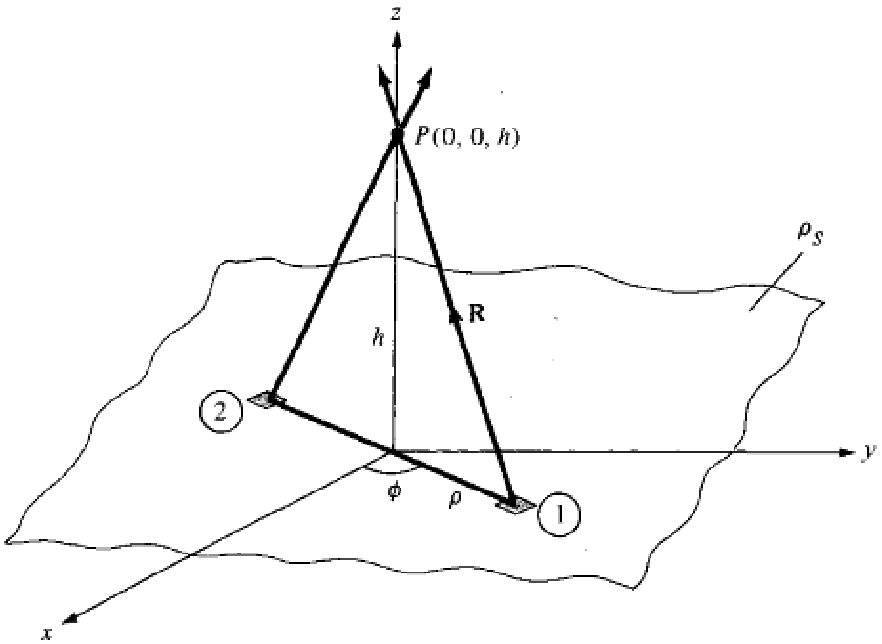
$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S\, \rho\, d\phi\, d\rho\left[-\rho\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z\right]}{4\pi\varepsilon_0\left[\rho^2 + h^2\right]^{3/2}}$$

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{h\rho\, d\rho\, d\phi}{\left[\rho^2 + h^2\right]^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

$$= \frac{\rho_S h}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\int_0^{\infty}\left[\rho^2 + h^2\right]^{-3/2}\frac{1}{2}d(\rho^2)\,\mathbf{a}_z$$

$$= \frac{\rho_S h}{2\varepsilon_0}\left\{-\left[\rho^2 + h^2\right]^{-1/2}\right\}_0^{\infty}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_z$$



و در حالت کلی شدت میدان الکتریکی ناشی از صفحه باردار بی‌نهایت

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n$$

با توجه به نتیجه بدست آمده، شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای مابین دو صفحه بی‌نهایت با بار یکسان

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n + \frac{-\rho_S}{2\varepsilon_0}(-\mathbf{a}_n) = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\mathbf{a}_n$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

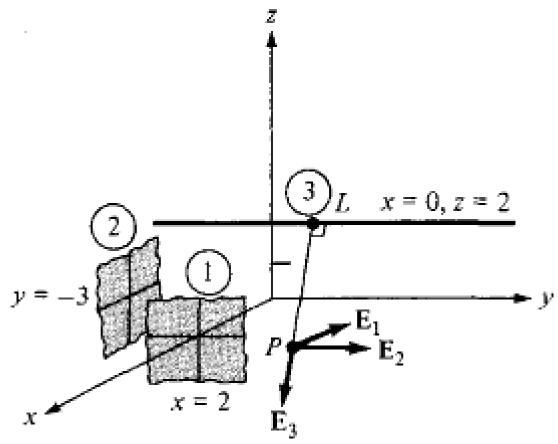
صفحات $x = 2$ و $y = -3$ به ترتیب دارای بارهای $10\ \mathrm{nC/m^2}$ و $15\ \mathrm{nC/m^2}$ می‌باشند. اگر خط $x = 0, z = 2$ حامل بار $10\pi\ \mathrm{nC/m}$ باشد، شدت میدان الکتریکی ناشی از این سه توزیع بار را در نقطه $(1, 1, -1)$ بیابید.

پاسخ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_{S_1}}{2\varepsilon_o}(-\mathbf{a}_x) = -\frac{10\cdot 10^{-9}}{2\cdot\frac{10^{-9}}{}}\mathbf{a}_x = -180\pi\mathbf{a}_x$$

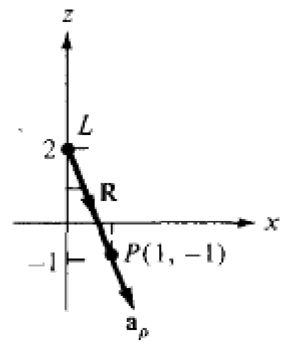
$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho_{S_2}}{2\varepsilon_o}\mathbf{a}_y = \frac{15\cdot 10^{-9}}{2\cdot\frac{10^{-9}}{36\pi}}\mathbf{a}_y = 270\pi\,\mathbf{a}_y$$



$$\mathbf{E}_3 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho}\mathbf{a}_\rho$$

$$\mathbf{R} = -3\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_x$$

$$\rho = |\mathbf{R}| = \sqrt{10}, \qquad \mathbf{a}_\rho = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{a}_x - \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{a}_z$$



$$\mathbf{E}_3 = \frac{10\pi\cdot 10^{-9}}{2\pi\cdot\frac{10^{-9}}{36\pi}}\cdot\frac{1}{10}(\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z)$$
$$= 18\pi(\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z)$$

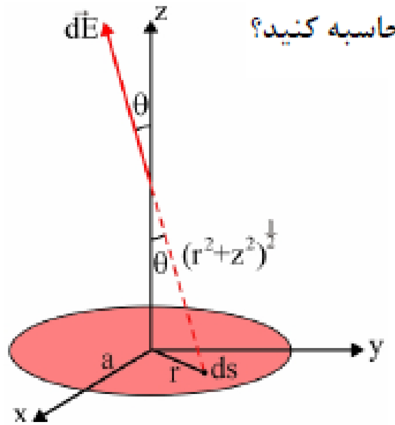
$$\mathbf{E} = -162\pi\mathbf{a}_x + 270\pi\mathbf{a}_y - 54\pi\mathbf{a}_z\ \mathrm{V/m}$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

میدان یک دیسک با چگالی بار سطحی $\rho_S\left(\frac{c}{m^2}\right)$ و شعاع a را در فاصله z روی محور آن محاسبه کنید؟



پاسخ:

$$ds = r\,dr\,d\varphi$$

$$dq = \rho_s r dr d\varphi$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_S r\,dr\,d\varphi}{(r^2+z^2)}\hat{R}$$

$$\hat{r} = \underline{\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}}$$

$$0$$

$$\mathbf{R} = r(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S h}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r\,dr}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S h}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|h|} - \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right]\hat{z}$$

➢ یادآوری

$$\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

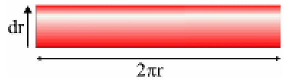
$$a \to \infty \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_n$$

راه حل دوم (مهم)

این دیسک از ∞ تا از این حلقه‌های باردار تشکیل شده که فقط شعاع آن‌ها متفاوت است.

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell\, a \cdot z}{2\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell\, r\, z}{2\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$



طول حلقه باردار

«ρ_ℓ» بار روی حلقه باردار از دید توزیع خطی: $q = \rho_\ell \,.\, 2\pi r$

«ρ_s» بار روی حلقه باردار از دید توزیع سطحی: $q = \rho_s \,.\, 2\pi r dr$

مساحت حلقه باردار

$$\rho_\ell \cdot 2\pi r = \rho_s \cdot 2\pi r dr \Rightarrow \rho_\ell = \rho_s dr$$

$$\overline{dE} = \frac{\rho_S dr\, rz}{2\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\hat{z} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_S\, z}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{r dr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

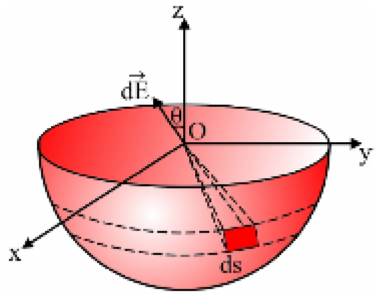
$$\vec{E} = \frac{\rho_S\, z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]\hat{z}$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

پوسته نیم‌کروی شکل زیر دارای بار سطحی یکنواخت ρ_s است. یک بار به جرم m و بار Q در مرکز کره قرار می‌دهیم. جرم m چقدر باشد تا ذره سقوط نکند؟ (سراسری ۱۳۷۶)



۱) $\dfrac{Q\rho_s}{4g\varepsilon_0}$ ۲) $\dfrac{Q\varepsilon_0}{2g\rho_s}$

۳) $\dfrac{2Qg}{\varepsilon_0\rho_s}$ ۴) $\dfrac{4Qg}{\varepsilon_0\rho_s}$

پاسخ:

میدان در مرکز نیم‌کره

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_s a^2 \, \mathrm{Sin}\theta \, d\theta \, d\varphi}{a^2}(-\hat{r}) \qquad \sin\theta \underbrace{\cos\varphi\hat{x}}_{0} + \sin\theta \underbrace{\sin\varphi\hat{y}}_{0} + \cos\theta\hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \cos\theta \, \hat{z} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \times 2\pi \times \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{4\varepsilon_0}\hat{z}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \hat{E} = \frac{Q\rho_s}{4\varepsilon_0}\hat{z} = mg\hat{z} \Rightarrow m = \frac{Q\rho_s}{4g\varepsilon_0}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

یک سطح بی‌نهایت با چگالی سطحی $\rho_s = 12\varepsilon_0 \left(\frac{c}{m^2}\right)$ منطبق بر صفحه $x - 2y + 3z = 4$ در فضای آزاد قرار دارد.

مطلوب است محاسبه شدت میدان الکتریکی در آن ناحیه از فضا که مبدأ هست. (سراسری ۱۳۷۴)

۱) $\vec{E} = \frac{-3}{\sqrt{14}}(\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z})$

۲) $\vec{E} = \frac{-6}{\sqrt{14}}(\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z})$

۳) $\vec{E} = \frac{-6}{\sqrt{14}}(\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z})$

۴) $\vec{E} = \frac{-3}{\sqrt{14}}(\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z})$

پاسخ :

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

ابتدا بایستی معین شود آیا مبداء مختصات در زیر صفحه مورد نظر قرار دارد یا بالای آن.

$$x - 2y + 3z = 4 \xrightarrow{\text{جایگذاری مختصات مبدأ}} 0 - 2\times 0 + 3\times 0 < 4$$

مبدأ در پایین صفحه قرار دارد.

بردار عمود بر سطح:

$$f = x - 2y + 3z$$

$$\overline{\nabla f} = \hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z} \ (\text{در منفی ضرب}) \rightarrow \ \vec{n} = -\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}$$

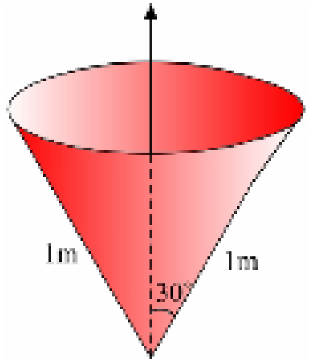
$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} \Longrightarrow \hat{n} = \frac{-\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z}}{\sqrt{14}} \Rightarrow \left(\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{12\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{(\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z})}{\sqrt{14}}\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{-6}{\sqrt{14}}(\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z})$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

بار سطحی با چگالی $\rho_s = \sqrt{3}R$ روی مخروط شکل مقابل توزیع شده است.
اولاً کل بار چقدر است؟ ثانیاً میدان در رأس مخروط چقدر است؟



پاسخ :

$$q = \int \rho_s \, ds \;\Rightarrow\; q = \int \sqrt{3}R \, . \, R \sin\theta \, dR \, d\varphi = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \int_0^1 R^2 dR \int_0^{2\pi} d\varphi \;\Rightarrow\; q = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sqrt{3}R \, R\sin\theta \, d\varphi dR}{R^2} (-\hat{r})$$

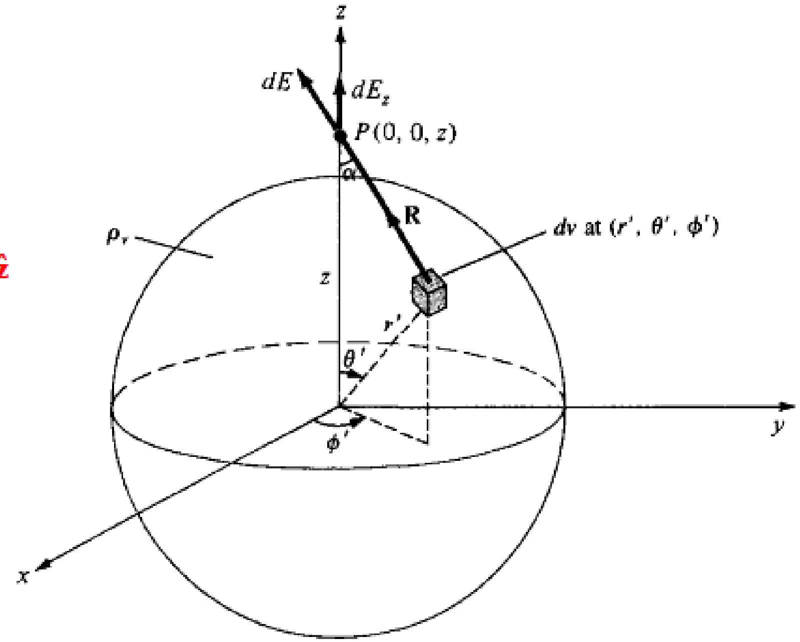
$$\sin\theta \underbrace{\cos\varphi \hat{x}}_{0} + \sin\theta \underbrace{\sin\varphi \hat{y}}_{0} + \cos\theta \hat{z}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sqrt{3}R \, R\sin\theta \, d\varphi dR}{R^2} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{2} \sin 2\theta \times 2\pi \overset{(\theta=30^\circ)}{=\!=\!=} \frac{3}{8\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{3}{8\varepsilon_0}(-\hat{z})$$

میدان الکتریکی ناشی از توزیع پیوسته حجمی

بار الکتریکی با چگالی حجمی ρ_v مطابق شکل بر روی حجم کره نشان داده شده در شکل زیر توزیع شده است. شدت میدان الکتریکی را در مبداء مختصات (مرکز کره) و در نقطه‌ای بر روی محور Z محاسبه می‌نمائیم :



مبداء مختصات

$$dQ = \rho_v\, dv$$

$$dv = r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\phi'$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_v\, dv}{4\pi\varepsilon_o R^2}(-\hat{r})$$

$$\sin\theta \underbrace{\cos\varphi}_{0}\hat{x} + \sin\theta \underbrace{\sin\varphi}_{0}\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$$

$$r^2$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin 2\theta = 0 \Rightarrow E = 0$$

نقطه‌ای بر روی محور z

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_v\, dv}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R$$

$$\mathbf{a}_R = \cos\alpha\, \mathbf{a}_z + \cancel{\sin\alpha\, \mathbf{a}_\rho}$$

$$E_z = \mathbf{E}\cdot\mathbf{a}_z = \int dE\cos\alpha = \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{dv\cos\alpha}{R^2} \Longrightarrow$$

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta'$$

$$r'^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}$$

$$\cos\theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'} \qquad \sin\theta'\, d\theta' = \frac{R\, dR}{z\, r'}$$

$$E_z = \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{R\, dR}{zr'}\, dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}\frac{1}{R^2}$$

$$= \frac{\rho_v 2\pi}{8\pi\varepsilon_o z^2}\int_{r'=0}^{a}\int_{R=z-r'}^{z+r'} r'\left[1 + \frac{z^2 - r'^2}{R^2}\right] dR\, dr'$$

$$= \frac{\rho_v \pi}{4\pi\varepsilon_o z^2}\int_0^a r'\left[R - \frac{(z^2 - r'^2)}{R}\right]_{z-r'}^{z+r'} dr'$$

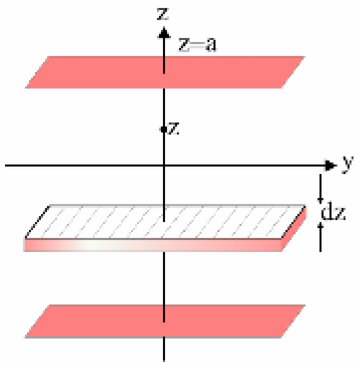
$$= \frac{\rho_v \pi}{4\pi\varepsilon_o z^2}\int_0^a 4r'^2\, dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{z^2}\left(\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v\right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o z^2}\mathbf{a}_z$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

بار الکتریکی با چگالی حجمی یکنواخت $\rho_0\left(\frac{c}{m^3}\right)$ در بخشی از فضا بین دو صفحه $z=\pm a$ محصور شده است. شدت میدان الکتریکی در نقطه‌ای روی محور z چقدر است؟



پاسخ :

مسئله از دو سمت x و y متقارن است. چون در این دو راستا نامحدود است، پس تقارن نسبت به x و y داریم؛ یعنی میدان مؤلفه x و y ندارد.

با توجه به در دست بودن شدت میدان الکتریکی ناشی از صفحه باردار بی‌نهایت، فضای موجود را بعنوان صفحه‌ای با ضخامت دیفرانسیلی در نظر گرفته، سپس با انتگرال‌گیری این صفحه را به ابعاد خواسته شده تبدیل می‌کنیم.

میدان یک صفحه باردار

$$\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\rho_s ds = \rho_0 ds\, dz \quad \Rightarrow \quad \rho_s = \rho_0 dz$$

میدان برای یک نقطه داخل

$$\vec{E} = \int_{-a}^{z} \frac{\overbrace{\rho_0 dz}^{\rho_s}}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \int_{z}^{a} \frac{\rho_0 dz}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} z\hat{z}$$

میدان برای یک نقطه بیرون

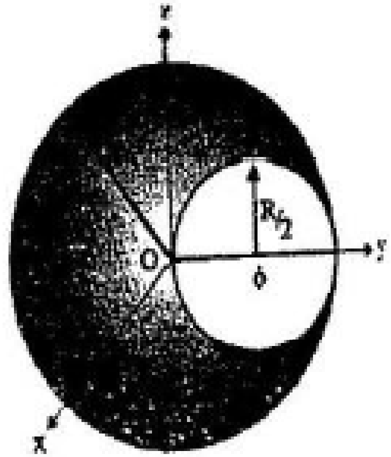
$$\vec{E} = \int_{-a}^{a} \frac{\rho_0 dz}{2\varepsilon_0}\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\hat{z}$$

مثال

بار الکتریکی با چگالی یکنواخت $\rho \frac{C}{m^3}$ در حجم کره‌ای حفره‌دار مطابق شکل توزیع شده است. میدان الکتریکی در درون حفره روی محور x برابر است با: (سراسری ۱۳۷۳)

۱) $\frac{\rho R}{2\varepsilon_0}\hat{x}$ ۲) $\frac{\rho R}{3\varepsilon_0}\hat{x}$ ۳) $\frac{\rho R}{6\varepsilon_0}\hat{x}$ ۴) $\frac{\rho}{2\varepsilon_0 R}\hat{x}$

پاسخ :



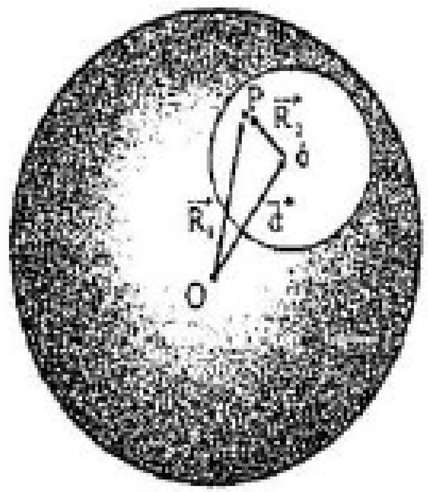
میدان سیستم حفره‌دار = میدان کل (بی‌حفره) $\underset{\text{تفاضل برداری}}{-}$ میدان ناشی از فقط خود حفره

$$\vec{E}_{\text{حفره‌دار}} = \vec{E}_{\text{بی‌حفره (پر)}} - \vec{E}_{\text{فقط حفره}}$$

$$\vec{E}_{\text{حفره‌دار}} = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}\vec{R}_1 - \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}\vec{R}_2 = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}\vec{d} = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{OO'})$$

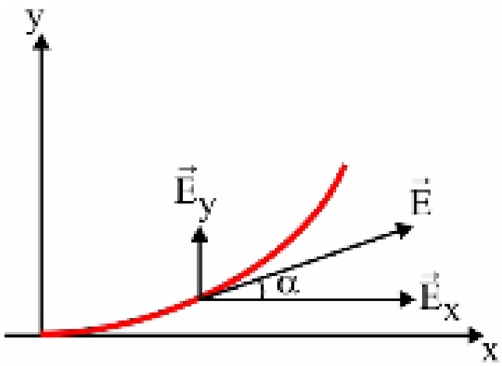
$$\vec{E} = \frac{\rho_v R}{6\varepsilon_0}\hat{x}$$



تهیه و تنظیم: سامان راجی

خطوط میدان الکتریکی

اگر برای میدان $\vec{E}$، معادله خطوط میدان الکتریکی را داشته باشیم، به راحتی می‌توانیم در مورد معادله و مسیر حرکت ذره باردار واقع در میدان اظهار نظر کنیم.
جهت میدان الکتریکی، مماس بر خطوط میدان در نظر گرفته می‌شود.



$$\left.\begin{array}{ll} \tan\alpha = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{Ey}{Ex} & \text{(I)} \\ \tan\alpha = \dfrac{dy}{dx} & \text{(II)} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{dy}{Ey} = \frac{dx}{Ex}$$

حل این معادله دیفرانسیل، خطوط میدان الکتریکی را خواهد داد که برای دستگاه‌های مختصات به صورت زیر بیان می‌شود:

دستگاه کروی

$$\frac{dR}{E_R} = \frac{Rd\theta}{E_\theta} = \frac{R\sin\theta d\varphi}{E\varphi}$$

دستگاه استوانه‌ای

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\varphi}{E\varphi} = \frac{dz}{E_z}$$

دستگاه دکارتی

$$\frac{dy}{Ey} = \frac{dx}{Ex} = \frac{dz}{Ez}$$

مثال

بردار میدان الکتریکی در فضا به صورت $\vec{E} = \sin x\, e^{-y}\hat{x} + \cos x\, e^{-y}\hat{y}$ است. اگر بار الکتریکی q در نقطه $\left(\frac{\pi}{2}, 0.69\right)$ قرار بگیرد معادله حرکت آن کدام است؟

پاسخ :

$$\frac{dx}{Ex} = \frac{dy}{Ey} \Rightarrow \frac{dx}{e^{-y}\mathrm{Sin}x} = \frac{dy}{e^{-y}\mathrm{Cos}x} \Rightarrow dy = \frac{\mathrm{Cos}x\, dx}{\mathrm{Sin}x} \overset{\int}{\Rightarrow} y = \mathrm{LnSin}x + C$$

نقش نقطه داده شده، یافتن ثابت C است که با جایگذاری نقطه مورد نظر به دست می‌آید:

$$0.69 = 0 + C \Rightarrow C = 0.69 \Rightarrow \quad \text{معادله حرکت} : y = \mathrm{LnSin}x + 0.69$$

چگالی شار الکتریکی

با توجه به وجود ضریب پرمیتیویته در رابطه شدت میدان الکتریکی($E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$)، بدیهی است که شدت میدان الکتریکی به محیط اطراف بار الکتریکی بستگی خواهد داشت. چنانچه بخواهیم میزان میدان الکتریکی را مستقل از فضای اطراف بار بیان کنیم از مفهوم چگالی شار الکتریکی استفاده خواهیم کرد:

$$D = \varepsilon_0 E$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{r}$$

شار الکتریکی

معمولا در مسائل، بجای چگالی شار الکتریکی، شار الکتریکی گذرنده از یک سطح مطلوب مسئله می‌باشد که با توجه به رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

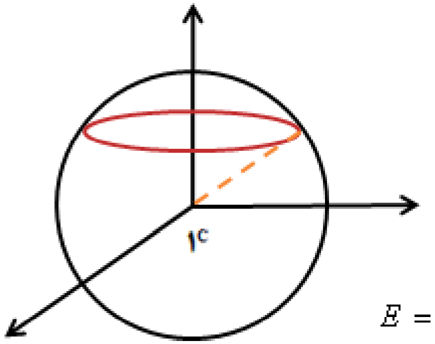
$$\phi = \int D.ds$$

مثال

روی کره‌ای که در مرکز آن بار الکتریکی یک کولنی قرار دارد و شعاع آن دو متر است، یک حلقه به شعاع یک متر قرار می‌دهیم. شار الکتریکی خارج شونده از حلقه کدام است؟

پاسخ :

با توجه به ابعاد داده شده، زاویه جدا شونده از محور z یا همان زاویه θ برابر با ۳۰ درجه خواهد بود



$$\left.\begin{array}{l} E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r} \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} \end{array}\right] \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}\widehat{a_r}$$

$$\phi = \int D.ds = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{Q}{4\pi r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\phi = \frac{Q}{2}(1-\cos\frac{\pi}{6}) = 0.075$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

قانون گوس

با توجه به رابطه شار الکتریکی، بدیهی است اگر فضای خارج شونده شار از اطراف بار را کره‌ای به شعاع r (محل اندازه‌گیری چگالی شار الکتریکی) در نظر بگیریم، شار خارج شونده برابر کل بار موجود در داخل این کره (Q) خواهد شد

$$\varphi = \int D.ds = \int \frac{Q}{4\pi r^2} ds = Q$$

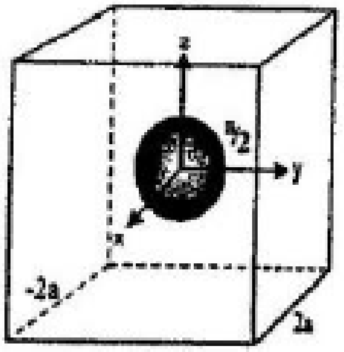
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت شار خارج شونده از یک سطح بسته، برابر مقدار بار موجود در داخل همان سطح بسته خواهد بود. با توجه به نتیجه بدست آمده، ابتدا مسائل مربوط به شار الکتریکی را پیگیری نموده و سپس به کاربردهای قانون گوس برخواهیم گشت.

مثال

بار الکتریکی به چگالی حجمی یکنواخت $\rho\ (c/m^3)$ در درون کره‌ای به شعاع a توزیع شده است. اگر این کره در مرکز مکعبی به ضلع 4a قرار گرفته باشد، شار الکتریکی خارج شونده از سطوح جانبی مکعب چقدر خواهد بود؟ (سراسری ۸۱)

۱) $\pi(4a)^3$ ۲) $\frac{\rho}{6}\pi a^3$ ۳) $\frac{\rho\pi a^3}{9}$ ۴) $\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\pi a^3$

پاسخ :



$$q = \rho \times \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{\pi a^3}{6}\rho$$

$$\varphi_{\text{شار عبوری از سطوح جانبی}} = \frac{4}{6} \times \left(\frac{\pi a^3}{6}\rho\right) = \rho\frac{\pi a^3}{9}$$

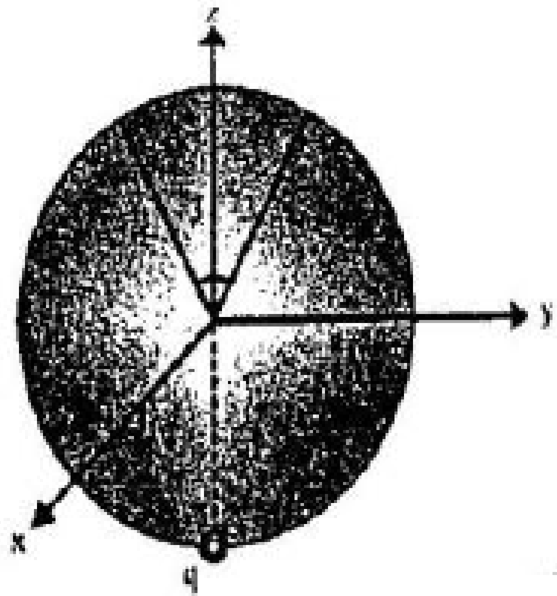
تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ را در نظر بگیرید. بار q در نقطه **(x=0 , y=0 , z=-a)** قرار دارد. شار الکتریکی گذرنده از بخش از کره که در آن $\theta \le \frac{\pi}{3}$ کدام است؟(سراسری ۱۳۸۲)

۱) $\frac{q}{4}$ ۲) $\frac{q}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)$ ۳) $\frac{q}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$ ۴) $\frac{q}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)$

پاسخ :



$$d\alpha = \frac{r\,d\alpha}{r} = d\alpha$$

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2} = \frac{R^2 \operatorname{Sin}\theta\, d\theta\, d\varphi}{R^2} \Rightarrow d\Omega = \operatorname{Sin}\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Omega_{\text{تمام فضا}} = \int_0^{\pi} \operatorname{Sin}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$$

$$\begin{cases} \Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta} \operatorname{Sin}\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi\left(1-\operatorname{Cos}\theta\right) \\ \Omega_{\text{کل}} = 4\pi \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{q}{2}\left(1-\operatorname{Cos}\theta\right)$$

$$\varphi = \frac{q}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

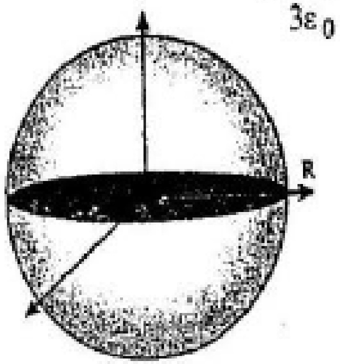
تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

روی سطح دایره‌ای به شعاع a، هم‌مرکز با مبدأ مختصات واقع در صفحه $z = 0$ بار الکتریکی با چگالی سطحی $\rho_s = k_0 r$ (k_0 ثابت و r در مختصات استوانه‌ای) توزیع شده است. مطلوب است محاسبه شار الکتریکی (توسط میدان E) که از نصف سطح کروی به شعاع R هم‌مرکز با مبدأ مختصات و واقع در ناحیه $z > 0$ که از داخل به سمت خارج آن می‌گذرد، به طوری که $R > a > 0$.(سراسری ۱۳۷۹)

۱) $\dfrac{-\pi k_0 a^3}{3\varepsilon_0}$ ۲) $\dfrac{-2\pi k_0 a^3}{3\varepsilon_0}$ ۳) $\dfrac{\pi k_0 a^3}{3\varepsilon_0}$ ۴) $\dfrac{2\pi k_0 a^3}{3\varepsilon_0}$

پاسخ :



$$\varphi_t = q = \int_S k_0 r ds = k_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} r.rdr\, d\varphi$$

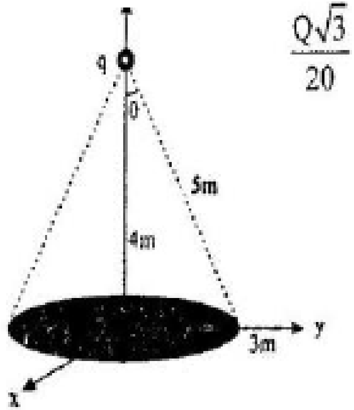
$$= k_0 \times 2\pi \times \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a = \frac{2k_0 \pi a^3}{3} \Rightarrow \varphi_{\text{نیم‌کره}} = \frac{k_0 \pi a^3}{3}$$

مثال

بار نقطه‌ای Q در بالای یک سطح دایره‌ای به شعاع 3 m واقع است. فاصله بار مذکور از دایره 4 m است. مطلوب است محاسبه شار الکتریکی گذرنده از سطح دایره‌ای. (سراسری ۱۳۷۸)

۱) $\dfrac{Q}{5}$ ۲) $\dfrac{Q}{10}$ ۳) $\dfrac{Q}{20}$ ۴) $\dfrac{Q\sqrt{3}}{20}$

پاسخ :



$$\theta = 37^\circ$$

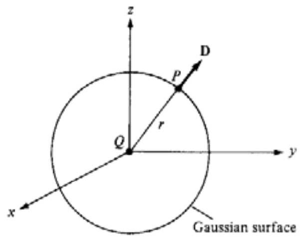
$$\varphi = \frac{q}{2}(1-\cos 37^\circ) = \frac{q}{2}(1-0.8) = \frac{q}{10}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

کاربردهای قانون گوس

قانون گوس علاوه بر کاربرد نشان داده شده در محاسبه شار الکتریکی، قابلیت استفاده در محاسبات شدت میدان الکتریکی در توزیعهای پیوسته متقارن را نیز دارد. بدین منظور می‌توان با استفاده از سطح گوسی مناسب که معمولا هم شکل توزیع بار بوده و سپس با استفاده از رابطه معروف گوس($D\,S = Q$) شدت میدان الکتریکی را بدست آورد. در زیر سه نمونه از محاسبات شدت میدان الکتریکی با استفاده از قانون گوس نمایش داده شده است.

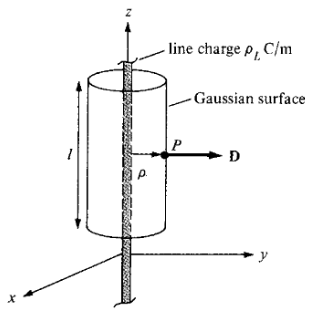
Point Charge



$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r\, 4\pi r^2 \qquad \oint dS = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi r^2$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\, \mathbf{a}_r$$

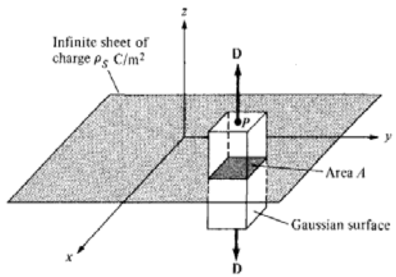
Infinite Line Charge



$$\rho_L \ell = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_\rho \oint dS = D_\rho\, 2\pi\rho\ell$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\, \mathbf{a}_\rho$$

Infinite Sheet of Charge



$$\rho_S \int dS = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_z \left[\int_{\text{top}} dS + \int_{\text{bottom}} dS \right]$$

$$\rho_S A = D_z (A + A)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_S}{2}\, \mathbf{a}_z$$

کاربردهای قانون گوس

اگر بار موجود داده شده در فضای گوسی بصورت یک بار حجمی با چگالی حجمی معین باشد، خواهیم داشت:

$$Q = \int \rho_v \, dv \quad \Rightarrow \quad Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v \, dv$$

اما با توجه به قضیه دیورژانس:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv \quad \Rightarrow \quad \rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

مثال

اگر در فضای مفروض، $\mathbf{D} = z\rho \cos^2\phi \, \mathbf{a}_z \ \mathrm{C/m^2}$ باشد، چگالی شار الکتریکی را در نقطه $(1, \pi/4, 3)$ محاسبه نموده و سپس کل بار محاط شده در فضای استوانه‌ای به شعاع یک متر و ارتفاع ۴ متر $-2 \leq z \leq 2 \ \mathrm{m}$ را بدست آورید.

پاسخ :

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \cos^2 \phi$$

$$\text{At } (1, \pi/4, 3), \ \rho_v = 1 \cdot \cos^2(\pi/4) = 0.5 \ \mathrm{C/m^3}$$

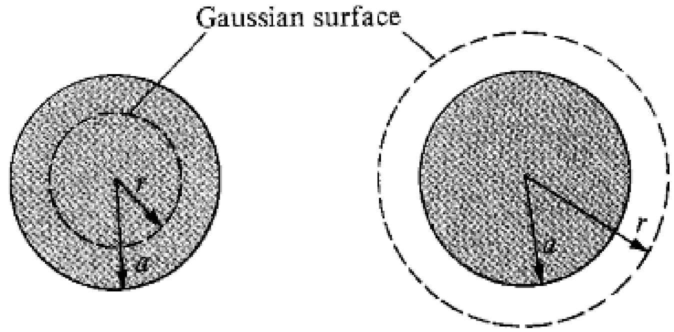
$$\begin{aligned} Q &= \int_v \rho_v \, dv = \int_v \rho \cos^2 \phi \, \rho \, d\phi \, d\rho \, dz \\ &= \int_{z=-2}^{2} dz \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \int_{\rho=0}^{1} \rho^2 \, d\rho = 4(\pi)(1/3) \\ &= \frac{4\pi}{3} \ \mathrm{C} \end{aligned}$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

کره‌ای با شعاع a و چگالی حجمی یکنواخت $\rho_v \ C/m^3$ را در نظر گرفته و D را در همه جای فضا محاسبه نمائید.



پاسخ :

$r \le a$

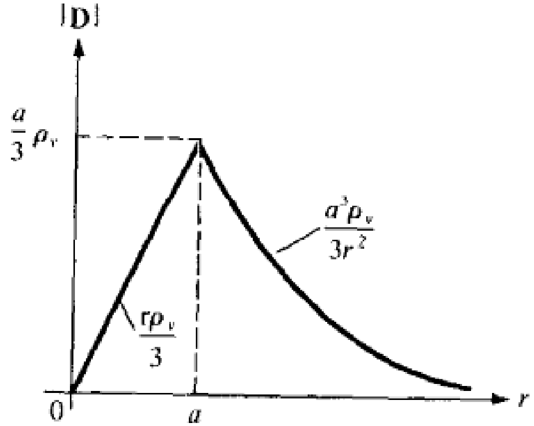
$$Q_{enc} = \int \rho_v \, dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{r} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \rho_v \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= D_r 4\pi r^2$$

$$\Psi = Q_{enc} \Rightarrow D_r 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3}{3}\rho_v \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{r}{3}\rho_v \mathbf{a}_r \qquad 0 < r \leqslant a$$



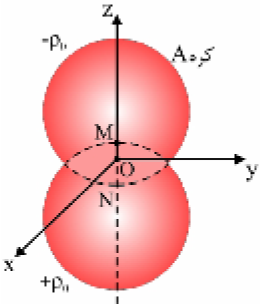
$r \ge a$

$$Q_{enc} = \int \rho_v \, dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \rho_v \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r 4\pi r^2 \Rightarrow D_r 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{a^3}{3r^2}\rho_v \mathbf{a}_r \qquad r \geqslant a$$

مثال

دو کره به شعاع‌های مساوی a و مراکز $(0,0,d)$ و $(0,0,-d)$ «در مختصات دکارتی» و $d<a$ دارای بارهای حجمی با چگالی ثابت و به‌ترتیب برابر $\rho_0, -\rho_0$ هستند، در ناحیه مشترک بین دو کره میدان $\bar{E}$ چقدر است؟ (سراسری ۱۳۸۰)



۱) 0

۲) $\dfrac{2\rho_0 d}{3\varepsilon_0}\hat{z}$ ✓

۳) $\dfrac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y})$

۴) $\dfrac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$

مثال

اگر در یک فضای کروی چگالی حجمی بار با رابطه زیر بیان شده باشد، شدت میدان الکتریکی را در همه جای فضا بیابید.

$$\rho_v = \begin{cases} \dfrac{\rho_o r}{R}, & 0 \le r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

پاسخ:

$r > R$

$$\varepsilon_o E_r 4\pi r^2 = Q_{enc} = \int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho_v r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^R \frac{\rho_o r}{R} 4\pi r^2 \, dr + \int_R^r 0 \cdot 4\pi r^2 \, dr = \pi\rho_o R^3$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o R^3}{4\varepsilon_o r^2}\mathbf{a}_r$$

$r < R$

$$\varepsilon_o E_r 4\pi r^2 = Q_{enc} = \int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho_v r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^r 4\pi r^2 \frac{\rho_o r}{R} dr = \frac{\rho_o \pi r^4}{R}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o r^2}{4\varepsilon_o R}\mathbf{a}_r$$

پتانسیل الکتریکی

اگر بار Q در محیطی که دارای شدت میدان الکتریکی E است جابجا شود، طبق قانون کولمب مقدار نیروی لازم جهت این تغییر مکان برابر $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ بوده و میزان کار انجام گرفته برای این جابجایی برابر خواهد بود با:

$$dW = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = -Q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad W = -Q\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

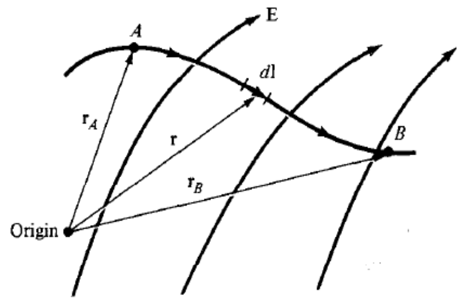
به مقدار کار انجام گرفته بر مقدار بار جابجا شده اصطلاحا پتانسیل الکتریکی مابین نقاط جابجایی اطلاق می‌شود

$$V_{AB} = \frac{W}{Q} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

بعبارت دیگر، اختلاف پتانسیل الکتریکی مابین دو نقطه برابر کار لازم جهت انتقال بار یک کولنی مابین آن دو نقطه خواهد بود

- بهنگام نگارش پتانسیل بصورت V_{AB}، نقطه A بعنوان نقطه شروع و B بعنوان نقطه نهایی حرکت در نظر گرفته خواهد شد.
- اگر اختلاف پتانسیل مابین دو نقطه منفی باشد، بمنزله انجام کار توسط میدان بوده و اگر اختلاف پتانسیل مثبت باشد به معنی انجام کار توسط نیروی خارجی است.
- اختلاف پتانسیل مابین دو نقطه مستقل از مسیر در نظر گرفته شده مابین آن دو نقطه است.
- واحد اختلاف پتانسیل ژول بر کولمب است که اصطلاحا ولت نامیده می‌شود.

رابطه اختلاف پتانسیل الکتریکی



$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

$$V_{AB} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \cdot dr\,\mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$V_{AB} = V_B - V_A$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad r_A \to \infty,\quad r_B \to r$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\rho_L(\mathbf{r}')dl'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad \text{(line charge)}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad \text{(surface charge)}$$

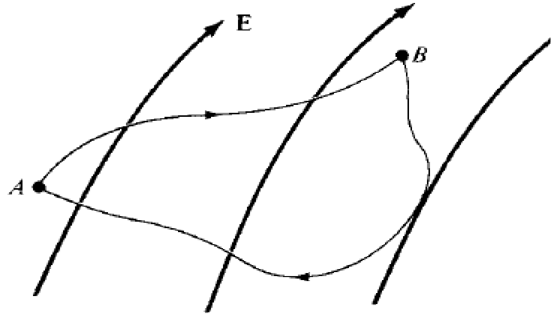
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho_v(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad \text{(volume charge)}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

رابطه بین میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی



$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$V_{BA} = -V_{AB}$$

$$V_{BA} + V_{AB} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

بنا به قضیه استوکس

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

conservative field.

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_x\,dx - E_y\,dy - E_z\,dz$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

مثال

کره‌ای از عایقی با $\varepsilon = 2\varepsilon_0$ به شعاع a و چگالی حجمی یکنواخت ρ ساخته شده است. پتانسیل در مرکز کره کدام است؟ (سراسری ۱۳۸۱)

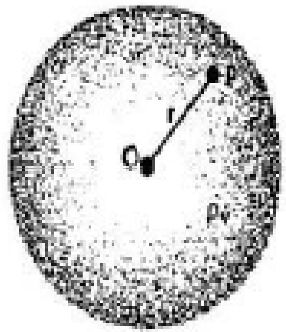
۱) $\dfrac{a^2\rho}{12\varepsilon_0}$ ۲) $\dfrac{a^2\rho}{4\varepsilon_0}$ ۳) $\dfrac{5a^2\rho}{6\varepsilon_0}$ ۴) $\dfrac{5a^2\rho}{12\varepsilon_0}$

پاسخ :

$$V_p = \int_r^a E_{\text{داخل}}\,dr + \int_a^\infty E_{\text{خارج}}\,dr$$

$$\begin{cases} \text{در داخل} : \vec{E} = \dfrac{\rho r}{6\varepsilon_0}\hat{r} \\ \text{در خارج} : \vec{E} = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \end{cases} \Rightarrow V = \int_0^a \frac{\rho r}{6\varepsilon_0}dr + \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}dr = \left(\frac{\rho}{6\varepsilon_0} \times \frac{r^2}{2}\right)_0^a + \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)_a^\infty$$

$$V = \frac{\rho}{12\varepsilon_0}a^2 + \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} = \frac{5\rho a^2}{12\varepsilon_0}$$



مثال

اگر در ناحیه‌ای پتانسیل الکتریکی با رابطه $V = \dfrac{10}{r^2}\sin\theta\cos\phi$ مشخص شده باشد، چگالی شار الکتریکی را در نقطه $\mathbf{D}$ at $(2, \pi/2, 0)$ بیابید. همچنین کار لازم جهت جابجای بار ۱۰ میکروکولنی از نقطه $A(1, 30°, 120°)$ به نقطه $B(4, 90°, 60°)$ را بیابید.

پاسخ:

(a) $\mathbf{D} = \varepsilon_o\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi\right]$$

$$= \frac{20}{r^3}\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_r - \frac{10}{r^3}\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\theta + \frac{10}{r^3}\sin\phi\,\mathbf{a}_\phi$$

At $(2, \pi/2, 0)$,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o\mathbf{E}\,(r = 2, \theta = \pi/2, \phi = 0) = \varepsilon_o\left(\frac{20}{8}\mathbf{a}_r - 0\mathbf{a}_\theta + 0\mathbf{a}_\phi\right)$$

$$= 2.5\varepsilon_o\mathbf{a}_r \text{ C/m}^2 = 22.1\ \mathbf{a}_r \text{ pC/m}^2$$

(b)

Method 1:

$$W = -Q\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \quad \text{or} \quad -\frac{W}{Q} = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$A(1, 30°, 120°)$ $\downarrow$ $d\mathbf{l} = dr\,\mathbf{a}_r$ $A'(4, 30°, 120°)$

$\xrightarrow{d\mathbf{l} = r\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta}$

$B'(4, 90°, 120°)$ $\uparrow$ $d\mathbf{l} = r\sin\theta\,d\phi\,a_\phi$ $B(4, 90°, 60°)$

$$\frac{-W}{Q} = -\frac{1}{Q}(W_{AA'} + W_{A'B'} + W_{B'B})$$

$$= \left(\int_{AA'} + \int_{A'B'} + \int_{B'B}\right)\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_{r=1}^{4} \frac{20\sin\theta\cos\phi}{r^3}dr\,\Bigg|_{\theta=30°,\ \phi=120°}$$

$$+ \int_{\theta=30°}^{90°} \frac{-10\cos\theta\cos\phi}{r^3}r\,d\theta\,\Bigg|_{r=4,\ \phi=120°}$$

$$+ \int_{\phi=120°}^{60°} \frac{10\sin\phi}{r^3}r\sin\theta\,d\phi\,\Bigg|_{r=4,\ \theta=90°}$$

$$= 20\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left[-\frac{1}{2r^2}\Bigg|_{r=1}^{4}\right]$$

$$-\frac{10}{16}\frac{(-1)}{2}\sin\theta\Bigg|_{30°}^{90°} + \frac{10}{16}(1)\left[-\cos\phi\Bigg|_{120°}^{60°}\right]$$

$$-\frac{W}{Q} = \frac{-75}{32} + \frac{5}{32} - \frac{10}{16}$$

$$W = \frac{45}{16}Q = 28.125\ \mu\text{J}$$

Method 2:

$$W = -Q\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = QV_{AB}$$

$$= Q(V_B - V_A)$$

$$= 10\left(\frac{10}{16}\sin 90°\cos 60° - \frac{10}{1}\sin 30°\cos 120°\right)\cdot 10^{-6}$$

$$= 10\left(\frac{10}{32} - \frac{-5}{2}\right)\cdot 10^{-6}$$

$= 28.125\ \mu$J as obtained before

مثال

اگر در سطح بسته S هیچ‌گونه بار الکتریکی موجود نباشد و تمامی نقاط این سطح بسته دارای پتانسیل معلوم V_0 باشند، در مورد نقاط داخل این سطح بسته می‌توان گفت: (سراسری ۱۳۸۲)

۱) پتانسیل برابر صفر است.

۲) شدت میدان الکتریکی برابر صفر است.

۳) در حالت کلی پتانسیل نقاط داخل سطح متفاوت‌اند.

۴) شدت میدان الکتریکی برابر مقدار ثابتی مخالف صفر است.

پاسخ :

چون در داخل این سطح بسته بار نداریم پس میدان داخل سطح بسته = 0

مثال

همانند شکل در فضای بین دو صفحه رسانای موازی نامتناهی بار صفحه‌ای یکنواخت با چگالی σ_0 موجود است. اگر $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}=100\left(\frac{v}{m}\right)$ باشد، ولتمتر متصل بین دو صفحه چه ولتاژی را نشان می‌دهد؟ (سراسری ۱۳۷۹)

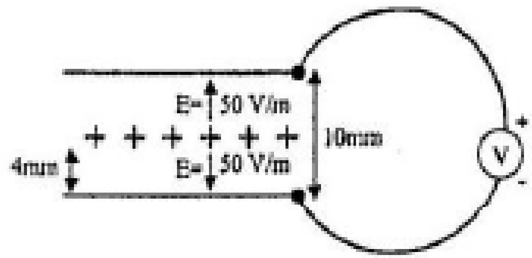
پاسخ :

صفحه را می‌توان به عنوان یک صفحه باردار نامحدود در نظر گرفت که جهت میدان در بالا و پایین با هم فرق کرده ولی مقدار میدان مستقل از فاصله و برابر $\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$ است.

$$|E|=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}=\frac{100}{2}=50\ \frac{V}{m}$$

$$V=\int \vec{E}.\vec{d\ell}\ \Rightarrow\ V=\vec{E}.\vec{d}$$

$$Vab=-50\times 6\times 10^{-3}+50\times 10^{-3}\times 4=+0.1\,V$$



تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

یک حباب توخالی از جنس مایع هادی به شعاع 2mm و ضخامت $10^{-3}cm$ دارای پتانسیل 1000 ولت است. پتانسیل قطره‌ای که از ترکیدن حباب حاصل می‌شود چقدر است؟ (حباب را کروی فرض کنید.) (سراسری ۱۳۷۲)

۱) 10.25 kv ۲) 7.625 kv ۳) 8.695 kv ۴) 6.325 kv

پاسخ :

شعاع حباب $r' = r + dr$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 r V$$

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \times 2\times 10^{-3}\times 10^{3} \Rightarrow Q = 8\pi\varepsilon_0$$

حجم قطره = حجم حباب $\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left[(2-0.001)^3\right] \Rightarrow r_1 = 0.2289$

$$V = \frac{8\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0(0.2289)\times 10^{-3}} = \frac{2\times 10^3}{(0.2298)} = 8737.6\ v \Rightarrow V = 8.737\ kv$$

مثال

در مرکز یک ابر کروی به شعاع R که دارای بار کل $-Q$ «پخش شده به صورت یکنواخت» است، یک بار نقطه‌ای Q قرار گرفته است. پتانسیل در نقطه‌ای به فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز کدام است؟ (سراسری ۱۳۸۶)

۱) $\frac{-3Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$ ۲) $\frac{3Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$ ۳) $\frac{5Q}{32\pi\varepsilon_0 R}$ ۴) $\frac{5Q}{16\pi\varepsilon_0 R}$

پاسخ :

$$-Q = \rho_v \times \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \rho_v = \frac{-3Q}{4\pi R^3} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r\hat{r}$$

$$V\left(\frac{R}{2}\right) = \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \vec{E}.\vec{dr}$$

$\frac{R}{2} < r < R$ میدان برآیند در فاصله: $\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right]\hat{r}$

$$V\left(\frac{R}{2}\right) = \int_{\frac{R}{2}}^{R} \vec{E}.\vec{dr} + \int_{R}^{\infty} 0.dr$$

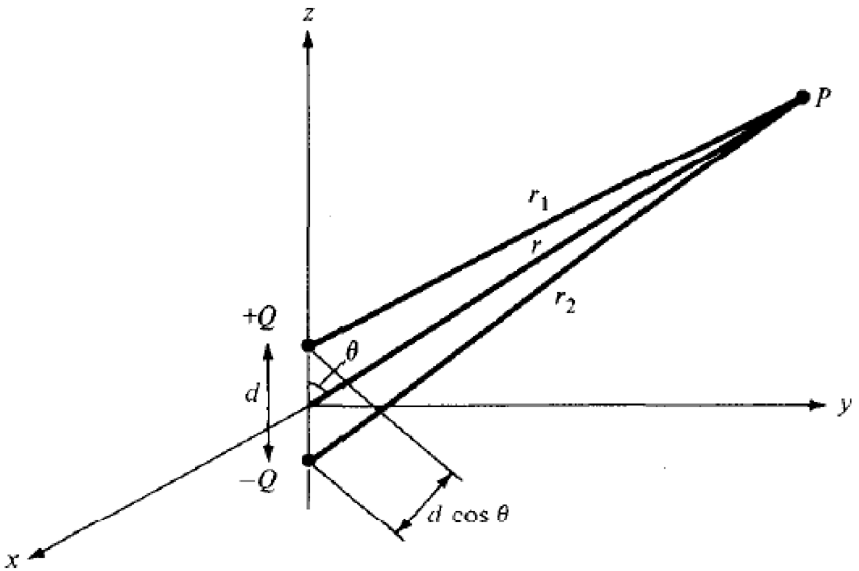
$$V\left(\frac{R}{2}\right) = \int_{\frac{R}{2}}^{R} \vec{E}_t.\vec{dr} \Rightarrow V\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{\frac{R}{2}}^{R}\frac{dr}{r^2} - \int_{\frac{R}{2}}^{R}\frac{r\,dr}{R^3}\right] = \frac{5Q}{32\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+Q}{r^2}\hat{r} \qquad \vec{E}_{\text{درون کره}} = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0}r\hat{r}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دو قطبی الکتریکی

دو قطبی الکتریکی عبارت از دو بار با مقدار یکسان ولی با علامتهای متفاوت می‌باشد که در فاصله کمی از همدیگر قرار گرفته‌اند



$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right]$$

$$r \gg d,\ r_2 - r_1 \simeq d\cos\theta,\ r_2 r_1 \simeq r^2$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{d\cos\theta}{r^2}$$

Since $d\cos\theta = \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}_r$, where $\mathbf{d} = d\mathbf{a}_z$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \quad \textit{dipole moment}$$

$$V = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

If the dipole center is not at the origin

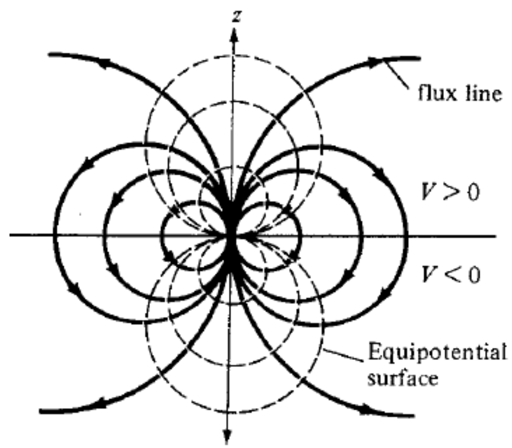
$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta\right]$$

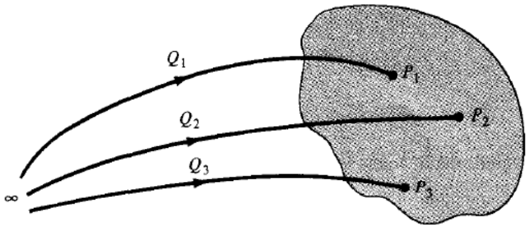
$$= \frac{Qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_o r^3}\mathbf{a}_r + \frac{Qd\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}\mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta)$$



انرژی الکتریکی

فرض کنم سه بار نقطه‌ای را بخواهیم از نقطه ای در بی‌نهایت به یک فضای خالی منتقل کنیم. کار انجام شده جهت این انتقال به شرطی که اولین با Q1 را منتقل کرده باشیم، به صورت زیر خواهد بود:



$$W_E = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + Q_2V_{21} + Q_3(V_{31} + V_{32})$$

حال اگر ابتدا بار Q3 را منتقل نمائیم، میزان انرژی صرف شده (کار انجام شده) برابر خواهد بود با:

$$W_E = W_3 + W_2 + W_1 = 0 + Q_2V_{23} + Q_1(V_{12} + V_{13})$$

$$2W_E = Q_1(V_{12} + V_{13}) + Q_2(V_{21} + V_{23}) + Q_3(V_{31} + V_{32}) = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3$$

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3)$$

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_kV_k$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int \rho_L V\,dl \qquad W_E = \frac{1}{2}\int \rho_S V\,dS \qquad W_E = \frac{1}{2}\int \rho_v V\,dv$$

$$\rho_v = \nabla\cdot\mathbf{D} \qquad W_E = \frac{1}{2}\int_v (\nabla\cdot\mathbf{D})\,V\,dv$$

$$\nabla\cdot V\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\nabla V + V(\nabla\cdot\mathbf{A}) \qquad W_E = \frac{1}{2}\int_v (\nabla\cdot V\mathbf{D})\,dv - \frac{1}{2}\int_v (\mathbf{D}\cdot\nabla V)\,dv$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{A})V = \nabla\cdot V\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla V \qquad W_E = \frac{1}{2}\oint_S \cancelto{0}{(V\mathbf{D})\cdot d\mathbf{S}} - \frac{1}{2}\int_v (\mathbf{D}\cdot\nabla V)\,dv$$

$$W_E = -\frac{1}{2}\int_v (\mathbf{D}\cdot\nabla V)\,dv = \frac{1}{2}\int_v (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\,dv \quad\rightarrow\quad W_E = \frac{1}{2}\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{1}{2}\int \epsilon_0 E^2\,dv$$

electrostatic energy density $\quad w_E = \frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon_0}$

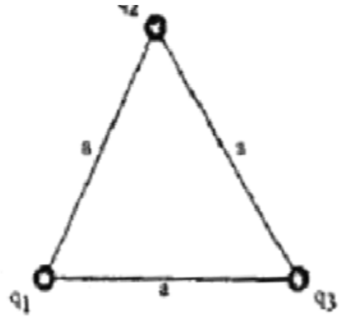
تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

3 بار الکتریکی q به جرم m در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a قرار گرفته‌اند. اگر یکی از بارها مجاز به حرکت باشد و تنها نیروی کولنی حضور داشته باشد و فضای آزاد بدون اصطکاک فرض شود، سرعت آن در ∞ برابر است با: (سراسری ۱۳۷۷)

۱) $v = \frac{\sqrt{3}q}{\sqrt{ma\pi\varepsilon_0}}$ ۲) $v = \frac{q}{\sqrt{ma\pi\varepsilon_0}}$ ۳) $v = \frac{q}{\sqrt{2ma\pi\varepsilon_0}}$ ۴) $v = \frac{q}{\sqrt{3ma\pi\varepsilon_0}}$

پاسخ :



این بار مجاز به حرکت است

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

$$\Delta W_{loss} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_3}{a} + \frac{q_2 q_3}{a}\right] \Rightarrow \Delta W_{loss} = \frac{q^2}{2\pi\,\varepsilon_0 a}$$

$$\frac{q^2}{2\pi\,\varepsilon_0 a} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \frac{q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 ma}}$$

مثال

انرژی لازم برای ایجاد یک لایه کروی بار الکتریکی با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ در ناحیه $a < r < b$ چقدر است؟ (سراسری ۱۳۸۲)

۱) $w = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\left(b^3 - a^3\right)$ ۲) $w = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon_0}\left(b^3 - a^3\right)$

۳) $w = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{4\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)\rho\right)^2$ ۴) $w = \frac{12\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}\left(3a^5 + 2b^5 - 5a^3b^2\right)$

پاسخ :

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon\int_v |E|^2\,dv$$

در ناحیه $a < r < b$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ در ناحیه $r > b$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = \frac{\rho\left(b^3 - a^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

در ناحیه $r > a$

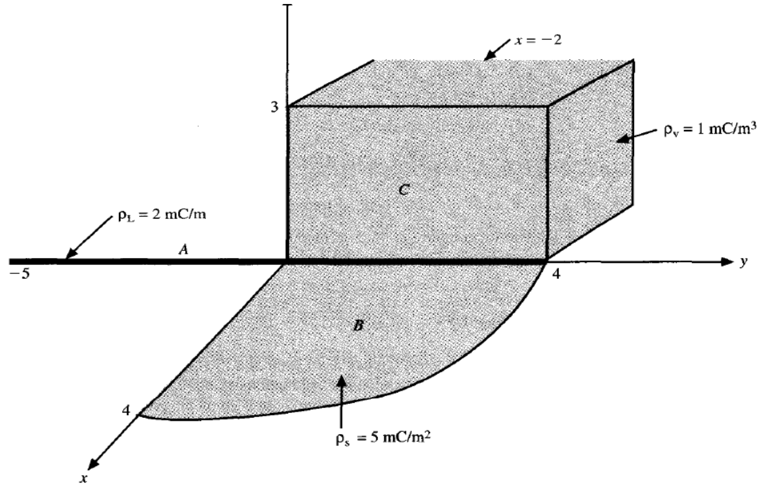
$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int |E|^2\,dv\right]$$

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b \left|\frac{\rho\left(r^3 - a^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}\right|^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_b^\infty \left|\frac{\rho\left(b^3 - a^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}\right|^2 4\pi r^2 dr = \frac{12\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}\left(3a^5 + 2b^5 - 5a^3b^2\right)$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تمرین :

? با توجه به توزیع بار مشخص شده بر روی شکل، کل بار موجود در فضا را محاسبه نمائید.



? اگر در فضای آزاد چگالی شار الکتریکی بصورت $\mathbf{D} = 2y^2\mathbf{a}_x + 4xy - \mathbf{a}_z \ \mathrm{mC/m^2}$ باشد، کل بار الکتریکی محصور شده در ناحیه زیر را تعیین نمائید. $1 < x < 2, 1 < y < 2, -1 < z < 4$

? یک دیسک دایروی به شعاع a دارای بار سطحی به چگالی $\rho_S = \frac{1}{\rho}\ \mathrm{C/m^2}$ می‌باشد. پتانسیل را در نقطه $(0, 0, h)$ محاسبه کنید.

? اگر میدان الکتریکی در فضا بصورت زیر باشد:

$$\mathbf{E} = (z+1)\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + (z+1)\cos\,\mathbf{a}_\phi + \rho\sin\phi\,\mathbf{a}_z \ \mathrm{V/m}$$

آنگاه کار انجام شده در جابجایی بار ۴ نانو کولنی در مسیرهای مشخص شده زیر را محاسبه کنید.

(a) $A(1, 0, 0)$ to $B(4, 0, 0)$
(b) $B(4, 0, 0)$ to $C(4, 30°, 0)$
(c) $C(4, 30°, 0)$ to $D(4, 30°, -2)$
(d) A to D

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

میدان الکتریکی در درون مواد

در مباحث گذشته میدان الکتریکی در تنها در محیط خلاء مورد بررسی قرار گرفت. اکنون در این فصل به بررسی حضور میدان الکتریکی در درون مواد میپردازیم

در مباحث میدانهای الکتریکی، معمولا مواد بر حسب میزان هدایت آنها σ مورد بررسی قرار می‌گیرند. اگر هدایت الکتریکی آنها بسیار بزرگتر از ۱ باشد هادی و در صورتی که بسیار کمتر از ۱ باشد عایق (دی الکتریک) نامیده می‌شوند. موادی نیز که میزان هدایت آنها مابین مقدار هدایت هادیها و عایقها باشد، نیمه هادی نامیده می‌شود. $\sigma \ (\mho/m)$

جریانهای هدایتی و جابجایی

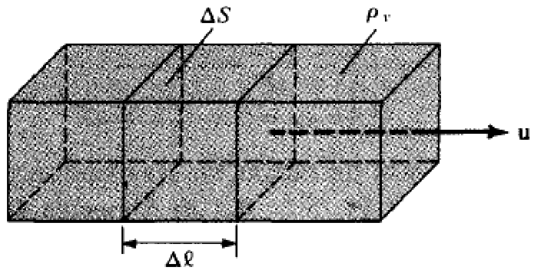
جریان الکتریکی در یک سطح تعیین شده برابر بارهای عبوری از آن سطح در واحد زمان است.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$J_n = \frac{\Delta I}{\Delta S} \qquad \Delta I = J_n \Delta S \qquad \Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S} \qquad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

current density **J**

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \, \Delta S \frac{\Delta \ell}{\Delta t} = \rho_v \, \Delta S \, u_y$$



چگالی جریان در جهت y

$$J_y = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho_v u_y$$

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}$$

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} \qquad \frac{m\mathbf{u}}{\tau} = -e\mathbf{E} \qquad \mathbf{u} = -\frac{e\tau}{m}\mathbf{E} \qquad \rho_v = -ne$$

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u} = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$$

$$J = \sigma E$$

Ohm's law.

هادی‌ها

طبق تعریف، هادی به موادی اطلاق می‌شود که بارهای الکتریکی می‌توانند در درون آن آزادانه حرکت نمایند.

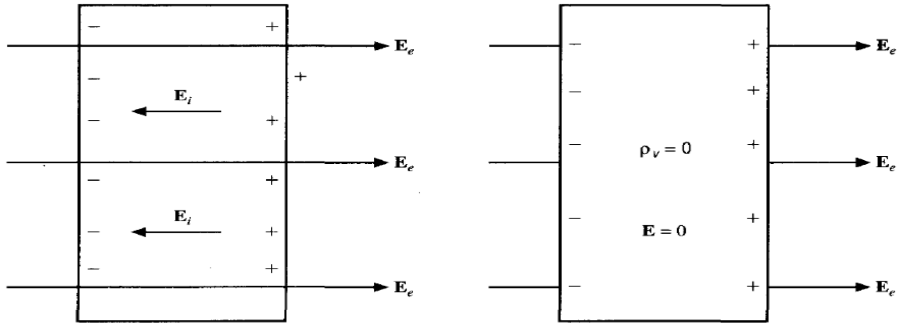
حال اگر هادی تحت تاثیر یک میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، بارهای مثبت و منفی درون آن در خلاف جهت هم به سرعت حرکت کرده و تا بیشترین محل ممکن که همان سطح هادی است، از هم دور می‌شوند. بنابراین بارهای مثبت درون هادی در یک سمت و بارهای منفی درون هادی در سمت دیگر هادی قرار گرفته و این امر سبب می‌شود مابین این دو بخش از هادی یک میدان الکتریکی القایی بوجود آید بطوریکه حاصلجمع این دو میدان در درون هادی سبب صفر شدن میدان الکتریکی کل خواهد شد.

از طرف دیگر می‌توان یک ماده هادی تحت تاثیر میدان الکتریکی را اینگونه نیز مورد بررسی قرار داد:

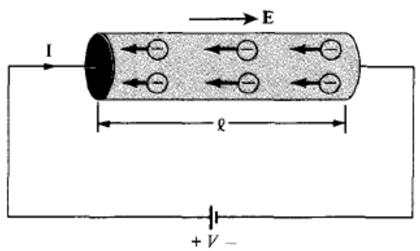
هنگامی که بارهای مثبت و منفی درون هادی تحت تاثیر میدان الکتریکی خارجی به سطوح هادی منتقل شدند، چگالی حجمی بار داخلی برابر صفر شده و در نتیجه بنا به قانون گوس، میدان الکتریکی درون هادی صفر خواهد شد. در نتیجه بنا به رابطه $\mathbf{E} = -\nabla V = 0$ می‌توان گفت پتانسیل درون هادی در یک مقدار ثابت تثبیت شده خواهد بود.

$$\mathbf{E} = 0, \qquad \rho_v = 0, \qquad V_{ab} = 0$$

inside a conductor



اگر دو سمت یک هادی الکتریکی به یک منبع ولتاژ متصل گردد یا بعبارت دیگر در دو سمت یک هادی الکتریکی اختلاف پتانسیلی ایجاد گردد، دیگر میدان الکتریکی در درون هادی برابر صفر نشده و در نتیجه حضور میدان الکتریکی موید حضور بارهای الکتریکی نیز در درون هادی خواهد بود. این بارهای الکتریکی همان بارهای آزادی هستند که توسط منبع مولد به درون هادی تزریق شده‌اند. بنابراین خواهیم داشت:



$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{V}{\ell} \\ J &= \frac{I}{S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{I}{S} = \sigma E = \frac{\sigma V}{\ell}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S} \qquad R = \frac{\rho_c \ell}{S}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

سیمی به قطر یک میلیمتر و هدایت $5*10^7$ زیمنس بر متر دارای 10^{29} الکترون آزاد در فضای یک متر مکعب است. اگر یک میدان الکتریکی به اندازه 10 میلی ولت بر متر بر این سیم اعمال شود، موارد زیر را محاسبه کنید.

چگالی الکترونهای آزاد.

چگالی جریان

جریان سیم

سرعت حرکت الکترونها در سیم.

پاسخ :

(a) $\rho_v = ne = (10^{29})(-1.6 \times 10^{-19}) = -1.6 \times 10^{10}\ \text{C/m}^3$

(b) $J = \sigma E = (5 \times 10^7)(10 \times 10^{-3}) = 500\ \text{kA/m}^2$

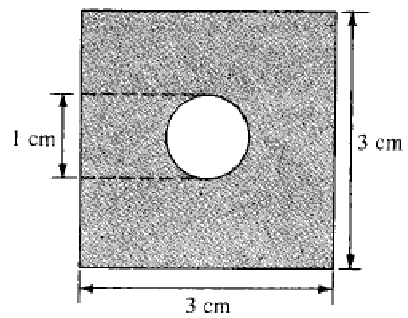
(c) $I = JS = (5 \times 10^5)\left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right) = \dfrac{5\pi}{4} \cdot 10^{-6} \cdot 10^5 = 0.393\ \text{A}$

(d) Since $J = \rho_v u$, $u = \dfrac{J}{\rho_v} = \dfrac{5 \times 10^5}{1.6 \times 10^{10}} = 3.125 \times 10^{-5}$ m/s.

مثال

یک هادی با سطح مقطع مربعی مطابق شکل دارای حفره دایروی می‌باشد. اگر طول این هادی برابر ۴ متر بوده و هدایت آن $5*10^6$ زیمنس بر متر باشد، مقاومت انتها به ابتدای آنرا بدست آورید.

پاسخ :



$$R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

where $S = d^2 - \pi r^2 = 3^2 - \pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 9 - \dfrac{\pi}{4}\ \text{cm}^2$.

Hence,

$$R = \frac{4}{5 \times 10^6 (9 - \pi/4) \times 10^{-4}} = 974\ \mu\Omega$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

معادله پیوستگی و زمان بازیابی

بنا به قانون جابجایی بار، نرخ کاهش بار درون یک حجم بایستی برابر با جریان خالص خارج شونده از سطوح بسته همان حجم باشد. بنابراین:

$$I_{\text{out}} = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{-dQ_{\text{in}}}{dt}$$

divergence theorem

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{J}\, dv$$

$$\frac{-dQ_{\text{in}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_v \rho_v\, dv = -\int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, dv$$

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{J}\, dv = -\int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, dv$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} &= -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \\ \text{Gauss's law} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_v}{\varepsilon} \end{aligned}\right] \longrightarrow \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma \rho_v}{\varepsilon} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \rho_v}{\rho_v} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\partial t$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v = 0$$

$$\ln \rho_v = -\frac{\sigma t}{\varepsilon} + \ln \rho_{vo}$$

$$\rho_v = \rho_{vo} e^{-t/T_r}$$

$$T_r = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

زمان بازیابی مدت زمانی است که طول می‌کشد تا بار قرار داده شده در درون یک هادی، به $e^{-1}=36.8\%$ مقدار اولیه برسد.

این زمان برای هادیهای خوب بسیار کم و برای دی‌الکتریک‌ها بسیار بیشتر از هادیهاست. بعنوان مثال برای مس با $\sigma = 5.8 \times 10^7$ mhos/m, $\varepsilon_r = 1$

داریم:

$$T_r = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\sigma} = 1 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{1}{5.8 \times 10^7} = 1.53 \times 10^{-19}\ \text{s}$$

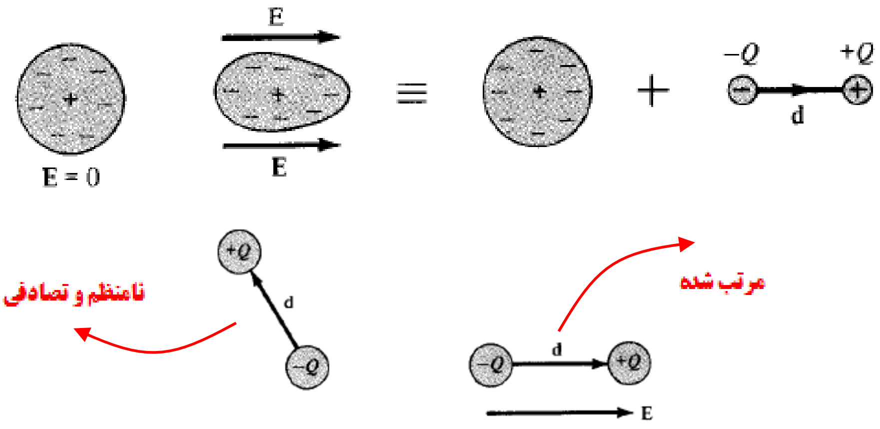
همچنین برای یک کوارتز با $\sigma = 10^{-17}$ mhos/m, $\varepsilon_r = 5.0$ داریم:

$$T_r = 5 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{1}{10^{-17}} = 51.2\ \text{days}$$

پلاریزاسیون در دی‌الکتریک‌ها

برخلاف هادیها، در درون مواد دی‌الکتریک امکان جابجایی راحت و آزادانه بارهای الکتریکی وجود ندارد. جهت درک بیشتر تاثیر یک میدان الکتریکی خارجی بر مواد دی‌الکتریک، معمولا بارهای موجود در درون مواد دی‌الکتریک بصورت بارهای مثبتی که توسط ابرهای الکترونی دارای بار منفی احاطه شده‌اند، مدل می‌شوند. در حقیقت، بارهای درون دی‌الکتریک بصورت دوقطبی‌ها در نظر گرفته شده-اند.هنگام اعمال میدان الکتریکی، این دو قطبی‌ها تحت تاثیر میدان الکتریکی جابجا می‌شوند. در این هنگام دی‌الکتریک پلاریزه شده نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر، در حالت پلاریزگی مواد دی‌الکتریک، ابر الکترونی اشاره شده، تحت تاثیر میدان الکتریکی اعمالی تغییر شکل می‌دهد.



$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$$

P ممان دو قطبی نامیده شده و اگر تعداد N دو قطبی در یک حجم قرار گرفته باشد، ممان کل آنها که اصطلاحا پلاریزاسیون نامیده شده و با واحد کولمب برمتر مربع سنجیده می‌شود، برابر خواهد بود با:

$$Q_1\mathbf{d}_1 + Q_2\mathbf{d}_2 + \cdots + Q_N\mathbf{d}_N = \sum_{k=1}^{N} Q_k\mathbf{d}_k$$

$$\mathbf{P} = \frac{\lim_{\Delta v \to 0} \sum_{k=1}^{N} Q_k\mathbf{d}_k}{\Delta v}$$

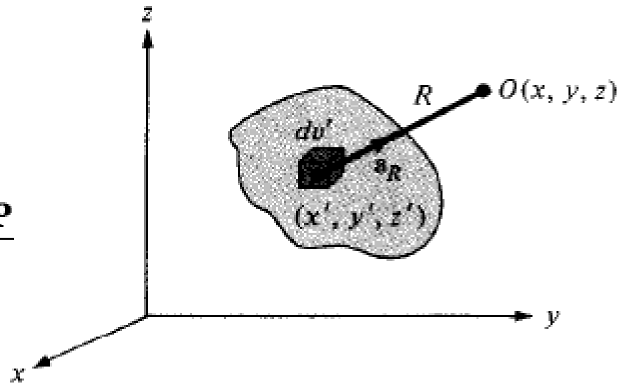
اثر میدان الکتریکی بر روی مواد دی‌الکتریک بصورت مرتب شدگی دوقطبی‌ها در جهت میدان الکتریکی بیان می‌شود

بارهای سطحی و حجمی پلاریزه شده

اگر یک دی‌الکتریک تحت میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، مرتب شدگی دو قطبی‌های داخل آن که منجر به پلاریزاسیون دی الکتریک می‌شود، جهت تولید میدانهای القاء شده در درون دی‌الکتریک خواهد شد. جهت محاسبه این میدانهای القاء شده، پلاریزایون دی‌الکتریک با دو نوع بار سطحی و حجمی ناشی از پلاریزاسیون مدلسازی می‌شود.

$$V = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_r}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad \longrightarrow \quad dV = \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R\, dv'}{4\pi\varepsilon_o R^2}$$ dipole moment **P** per unit volume

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$



$$\nabla'\frac{1}{R} = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R}{R^2} = \mathbf{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\nabla'\cdot f\mathbf{A} = f\nabla'\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla' f, \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_R}{R^2} = \nabla'\cdot\frac{\mathbf{P}}{R} - \frac{\nabla'\cdot\mathbf{P}}{R}$$

$$V = \int_{v'} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\nabla'\cdot\frac{\mathbf{P}}{R} - \frac{1}{R}\nabla'\cdot\mathbf{P}\right]dv'$$

$$V = \int_{S'} \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}'_n}{4\pi\varepsilon_o R}\, dS' + \int_{v'} \frac{-\nabla'\cdot\mathbf{P}}{4\pi\varepsilon_o R}\, dv'$$

که بصورت چگالی بارهای سطحی و حجمی ظاهر شده‌اند:

$$\rho_{ps} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_n$$
$$\rho_{pv} = -\nabla\cdot\mathbf{P}$$

چون این بارها بصورت دو قطبی می‌باشند، بایستی حاصل جمع بارهای سطحی و حجمی صفر باشند:

$$Q_b = \oint \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = \int \rho_{ps}\, dS$$

$$-Q_b = \int \rho_{pv}\, dv = -\int \nabla\cdot\mathbf{P}\, dv$$

$$\text{Total charge} = \oint_S \rho_{ps}\, dS + \int_v \rho_{pv}\, dv = Q_b - Q_b = 0$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

بردار پلاریزگی و حساسیت الکتریکی

اثر بارهای حجمی پلاریزه شده بر روی چگالی شار الکتریکی درون دی الکتریک بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho_t = \rho_v + \rho_{pv} = \nabla \cdot \varepsilon_o \mathbf{E}$$

$$\begin{aligned}\rho_v &= \nabla \cdot \varepsilon_o \mathbf{E} - \rho_{pv} \\ &= \nabla \cdot (\varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{D}\end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

چنانچه ملاحظه می‌شود چگالی شار الکتریکی درون دی‌الکتریک، بیشتر از مقدار آن در فضای آزاد است.

از آنجایی که مقدار پلاریزگی متناسب با مقدار میدان اعمالی خارجی است، داریم:

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_o \mathbf{E}$$

electric susceptibility of the material

حساسیت الکتریکی

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o (1 + \chi_e)\, \mathbf{E} = \varepsilon_o \varepsilon_r \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}$$

dielectric constant or *relative permittivity.*

For free space and nondielectric materials (such as metals) $\varepsilon_r = 1$

Material	Dielectric Constant ε_r (Dimensionless)
Barium titanate	1200
Water (sea)	80
Water (distilled)	81
Nylon	8
Paper	7
Glass	5–10
Mica	6
Porcelain	6
Bakelite	5
Quartz (fused)	5
Rubber (hard)	3.1
Wood	2.5–8.0
Polystyrene	2.55
Polypropylene	2.25
Paraffin	2.2
Petroleum oil	2.1
Air (1 atm.)	1

قدرت دی‌الکتریک ماکزیمم میدان الکتریکی خارجی است که یک دی‌الکتریک بدون شکستگی الکتریکی قادر به تحمل آن است.

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

فضای مابین صفحات خازنی موازی با شدت میدان الکتریکی ۱۰ کیلوولت بر متر از پلی استر با $\varepsilon_r = 2.55$ پر شده است. اگر فاصله بین صفحات یک و نیم متر باشد، چگالی شار الکتریکی، بردار پلاریزگی، بار سطحی روی صفحه خازن، بار پلاریزگی سطحی موجود بر صفحه خازن و اختلاف پتانسیل بین صفحات را بدست آورید.

پاسخ :

(a) $D = \varepsilon_o \varepsilon_r E = \dfrac{10^{-9}}{36\pi} \cdot (2.55) \cdot 10^4 = 225.4 \text{ nC/m}^2$

(b) $P = \chi_e \varepsilon_o E = (1.55) \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 10^4 = 137 \text{ nC/m}^2$

(c) $\rho_S = \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n = D_n = 225.4 \text{ nC/m}^2$

(d) $\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n = P_n = 137 \text{ nC/m}^2$

(e) $V = Ed = 10^4 (1.5 \times 10^{-3}) = 15 \text{ V}$

مثال

یک کره دی‌الکتریک با $\varepsilon_r = 5.7$ به شعاع ۱۰ سانتی متری، دارای یک بار ۲ پیکو کولنی در مرکز می‌باشد. بارهای سطحی پلاریزه شده در سطح کره را بدست آورید. نیروی وارد شده بر یک بار ۴- پیکو کولنی که در سطح کره واقع شده است، چقدر خواهد بود.

پاسخ :

(a) We apply Coulomb's or Gauss's law to obtain

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2}\mathbf{a}_r \qquad \mathbf{P} = \chi_e\varepsilon_o\mathbf{E} = \frac{\chi_e Q}{4\pi\varepsilon_r r^2}\mathbf{a}_r$$

$$\rho_{ps} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_r = \frac{(\varepsilon_r - 1)\,Q}{4\pi\varepsilon_r r^2} = \frac{(4.7)\,2 \times 10^{-12}}{4\pi(5.7)\,100 \times 10^{-4}}$$
$$= 13.12 \text{ pC/m}^2$$

(b) Using Coulomb's law, we have

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2}\mathbf{a}_r = \frac{(-4)(2) \times 10^{-24}}{4\pi \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}(5.7)\,100 \times 10^{-4}}\mathbf{a}_r = -1.263\,\mathbf{a}_r \text{ pN}$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

شرایط مرزی در میدانهای الکتریکی

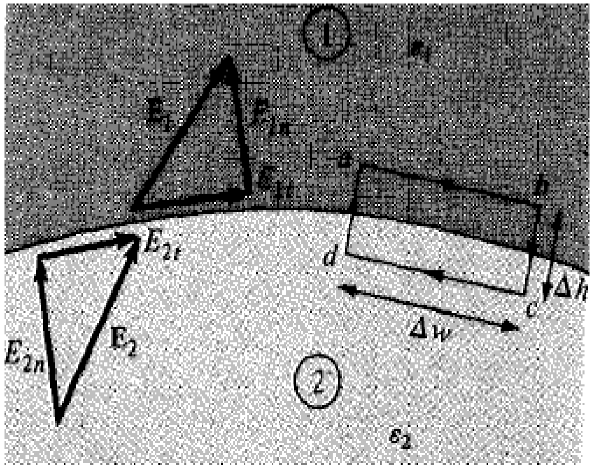
هنگامی که محیط میدان الکتریکی در فضا تغییر می‌کند بحث شرایط مرزی مابین آن دو محیط تغییر می‌کند. تغییر مابین محیطها در یکی از سه حالت کلی زیر اتفاق می‌افتد:

- dielectric (ε_{r1}) and dielectric (ε_{r2})
- conductor and dielectric
- conductor and free space

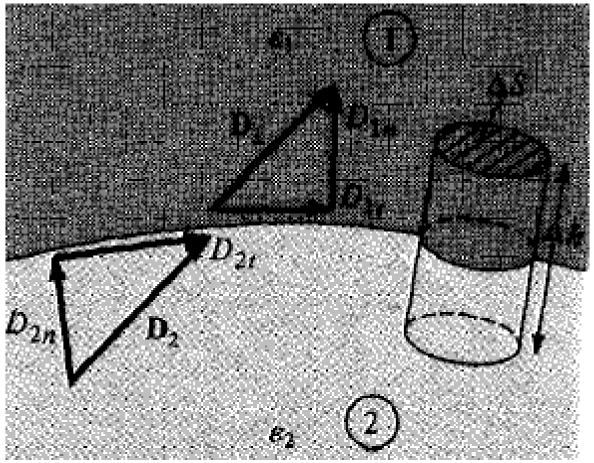
روابط لازم جهت ارضای شرایط مرزی عبارتند از:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n$$

شرایط مرزی دی‌الکتریک – دی الکتریک



$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1t} + \mathbf{E}_{1n}$$
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n}$$



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$0 = E_{1t}\,\Delta w - E_{1n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2t}\,\Delta w + E_{2n}\frac{\Delta h}{2} + E_{1n}\frac{\Delta h}{2}$$

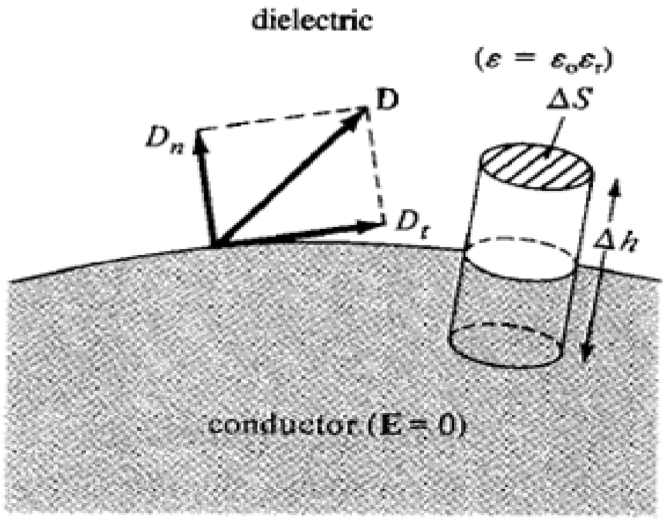
$$E_{1t} = E_{2t}$$

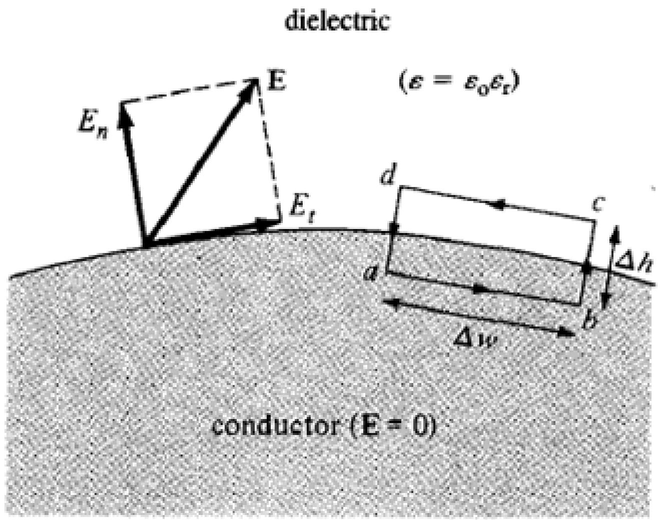
$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

$$\Delta Q = \rho_S\,\Delta S = D_{1n}\,\Delta S - D_{2n}\,\Delta S$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$$

شرایط مرزی دی‌الکتریک – هادی





$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

$$\Delta Q = D_n \cdot \Delta S - 0 \cdot \Delta S$$

$$D_n = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_S$$

$$D_n = \rho_S$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$0 = 0 \cdot \Delta w + 0 \cdot \frac{\Delta h}{2} + E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - E_t \cdot \Delta w - E_n \cdot \frac{\Delta h}{2} - 0 \cdot \frac{\Delta h}{2}$$

$$E_t = 0$$

در درون یک هادی، هیچ میدان الکتریکی نمی‌تواند وجود داشته باشد، بنابراین:

$$\rho_v = 0, \qquad \mathbf{E} = 0$$

از آنجایی که $\mathbf{E} = -\nabla V = 0$ بنابراین اختلاف پتانسیلی مابین هیچ دو نقطه‌ای در درون هادی وجود نداشته و هادی در یک پتانسیل ثابت خواهد بود.

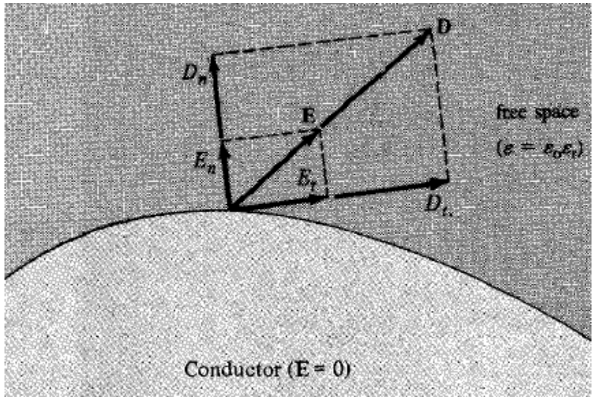
تنها میدان الکتریکی خارجی و عمود بر سطح هادی می‌تواند وجود داشته باشد:

$$D_t = \varepsilon_o \varepsilon_r E_t = 0, \qquad D_n = \varepsilon_o \varepsilon_r E_n = \rho_S$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

شرایط مرزی فضای آزاد – هادی

از آنجایی که فضای آزاد همانند یک دی الکتریک با ضریب دی الکتریک نسبی یک در نظر گرفته می‌شود، روابط مرزی آن با هادی همانند روابط مرزی دی‌الکتریک –هادی بوده و کافیست ضریب دی‌الکتریک نسبی برابر یک در نظر گرفته شود.



$$D_t = \varepsilon_o E_t = 0, \qquad D_n = \varepsilon_o E_n = \rho_S$$

مثال

مطابق شکل، ناحیه $y < 0$ از هادی کامل و ناحیه $y > 0$ از دی الکتریکی با ضریب دی الکتریک نسبی ۲ پر شده است. اگر بار برروی سطح هادی برابر 2nC/m^2 باشد، شدت میدان و چگالی شار الکتریکی را در نقاط زیر بیابید.

$A(3, -2, 2)$

$B(-4, 1, 5)$

پاسخ :

(a) Point $A(3, -2, 2)$ is in the conductor since $y = -2 < 0$ at A. Hence,

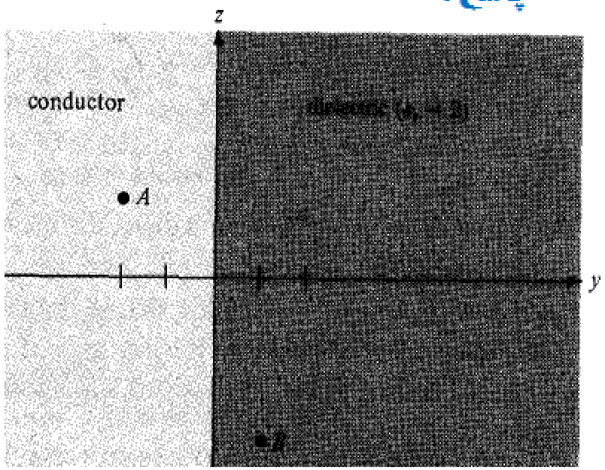
$$\mathbf{E} = 0 = \mathbf{D}$$

(b) Point $B(-4, 1, 5)$ is in the dielectric medium since $y = 1 > 0$ at B.

$$D_n = \rho_S = 2 \text{ nC/m}^2$$

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{a}_y \text{ nC/m}^2$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_o \varepsilon_r} = 2 \times 10^{-9} \times \frac{36\pi}{2} \times 10^9 \, \mathbf{a}_y = 36\pi \mathbf{a}_y$$
$$= 113.1\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$



مثال

دو محیط دی الکتریک همگن دارای مرز در $z = 0$ می‌باشند. برای $z > 0$ ضریب دی الکتریک نسبی برابر ۴ و برای $z < 0$ ضریب دی‌الکتریک نسبی برابر ۳ می‌باشد. اگر شدت میدان الکتریکی در محیط اول برابر $\mathbf{E}_1 = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ kV/m باشد، شدت میدان الکتریکی در محیط دوم، زوایا ی میدانهای الکتریکی در دو محیط و چگالی انرژی در آنها را محاسبه کنید.

پاسخ :

$$E_{1n} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_z = 3$$

$$\mathbf{E}_{1n} = 3\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_{2n} = (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t$$

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{1n} = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{D}_{2n} = \mathbf{D}_{1n} \rightarrow \varepsilon_{r2}\mathbf{E}_{2n} = \varepsilon_{r1}\mathbf{E}_{1n}$$

$$\mathbf{E}_{2n} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\mathbf{E}_{1n} = \frac{4}{3}(3\mathbf{a}_z) = 4\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2t} + \mathbf{E}_{2n} = 5\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \text{ kV/m}$$

$$\alpha_1 = 90 - \theta_1$$

$$\alpha_2 = 90 - \theta_2$$

$$\text{Since } E_{1n} = 3 \text{ and } E_{1t} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{\sqrt{29}}{3} = 1.795 \rightarrow \theta_1 = 60.9°$$

$$\alpha_1 = 29.1°$$

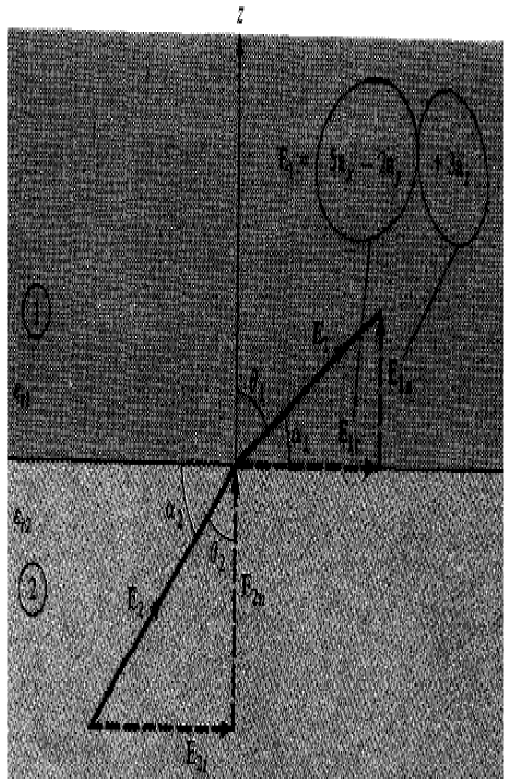
$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_n = |\mathbf{E}_1| \cdot 1 \cdot \cos\theta_1$$

$$\cos\theta_1 = \frac{3}{\sqrt{38}} = 0.4867 \rightarrow \theta_1 = 60.9°$$

$$E_{2n} = 4 \qquad E_{2t} = E_{1t} = \sqrt{29}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \frac{\sqrt{29}}{4} = 1.346 \rightarrow \theta_2 = 53.4°$$

$$\alpha_2 = 36.6°$$



$$w_{E1} = \frac{1}{2}\varepsilon_1|\mathbf{E}_1|^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot (25 + 4 + 9) \times 10^6 = 672\ \mu\text{J/m}^3$$

$$w_{E2} = \frac{1}{2}\varepsilon_2|\mathbf{E}_2|^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}(25 + 4 + 16) \times 10^6 = 597\ \mu\text{J/m}^3$$

مثال

در فضای خالی روی سطح کره‌ای به شعاع a، چگالی بارهای سطحی الکتریکی به صورت $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ فرض شده است. (σ_0 ثابت) پتانسیل الکتریکی در داخل و خارج کره به صورت زیر به دست آمده است: (سراسری ۱۳۸۵)

$$\begin{cases} V_i = Ar\cos\theta & ;r < a \\ V_o = \dfrac{B}{r^2}\cos\theta & ;r > a \end{cases}$$

، ضرایب A و B به ترتیب عبارت‌اند از:

۱) $\dfrac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0} , \dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$ ۲) $\dfrac{\sigma_0 a^2}{3\varepsilon_0} , \dfrac{\sigma_0}{3a\varepsilon_0}$ ۳) $\dfrac{\sigma_0 a^4}{\varepsilon_0} , \dfrac{\sigma_0 a}{3\varepsilon_0}$ ۴) $\dfrac{\sigma_0 a^3}{\varepsilon_0} , \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

پاسخ :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = -\vec{\nabla} V_i = -A\cos\theta\,\hat{r} + A\sin\theta\,\hat{\theta} \\ \vec{E}_o = -\vec{\nabla} V_o = \dfrac{2B}{r^3}\cos\theta\,\hat{r} + \dfrac{B}{r^3}\sin\theta\,\hat{\theta} \end{cases}$$

$$E_{t_1} = E_{t_2} \rightarrow A\sin\theta = \frac{B}{r^3}\sin\theta \Rightarrow Aa^3 = B \qquad (I)$$

$$\begin{cases} E_{i_r} = -A\cos\theta \rightarrow D_{i_r} = -A\varepsilon_0\cos\theta \\ E_{o_r} = \dfrac{2B}{r^3}\cos\theta \rightarrow D_{o_r} = \dfrac{2B\varepsilon_0}{r^3}\cos\theta \end{cases}$$

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \rightarrow D_{o_r} - D_{i_r} = \sigma_0\cos\theta$$

$$\frac{2B\varepsilon_0}{a^3}\cos\theta + A\varepsilon_0\cos\theta = \sigma_0\cos\theta$$

$$\frac{2B\varepsilon_0}{a^3} + A\varepsilon_0 = \sigma_0 \qquad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow A = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$$

$$B = Aa^3 \Rightarrow B = \frac{\sigma_0 a^3}{3\varepsilon_0}$$

الکترومغناطیس مهندسی

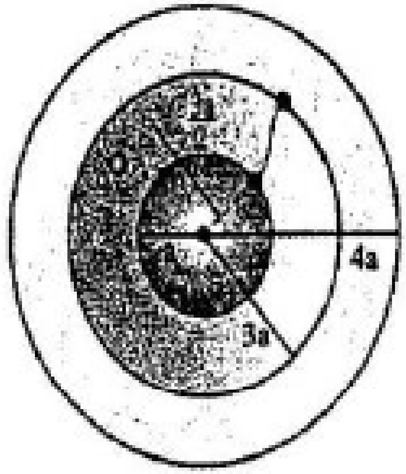
تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

در مجموعه شکل زیر، کره رسانای مرکزی توسط یک سیم بسیار نازک به پوسته رسانای کروی متصل شده است. بار نقطه‌ای 1c در فاصله $\frac{3}{2}a$ از کره مرکزی قرار دارد. درعین‌حال 1c بار دیگر به پوسته کروی اعمال می‌شود. پتانسیل کره مرکزی کدام است؟ (سراسری ۱۳۸۶)

۱) $\frac{1}{6\pi\varepsilon_0 a}$ ۲) $\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 a}$ ۳) $\frac{1}{16\pi\varepsilon_0 a}$ ۴) $\frac{11}{48\pi\varepsilon_0 a}$

پاسخ :



چون کره و پوسته رسانا به هم وصل شده‌اند پس هم پتانسیل‌اند

$$V\big|_{r=a} = V\big|_{r=4a}$$

وقتی 1c بار در فاصله $\frac{3a}{2}$ از مرکز کره گذاشته شود، القا صورت می‌گیرد. درنتیجه به اندازه 1c بار منفی روی سطح داخلی پوسته و روی کره داخلی و 1c مثبت روی سطح خارجی پوسته القا خواهد کرد. از طرف دیگر 1c بار نیز ما به پوسته اضافه کردیم. درنتیجه داریم:

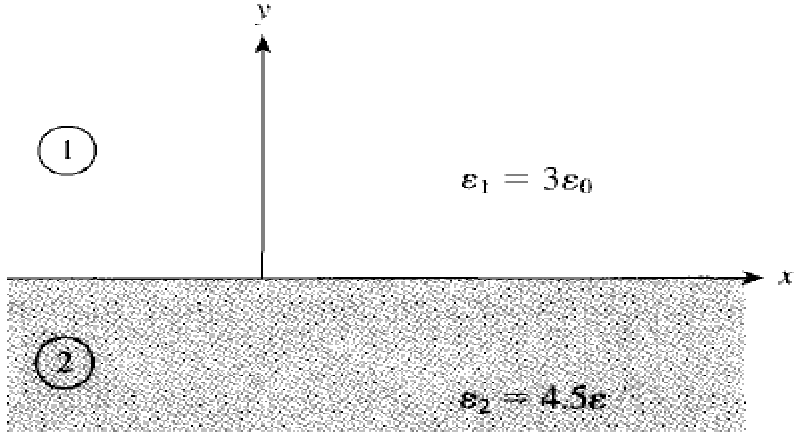
$$q\big|_{R=4a} = 2c$$

$$V\big|_{R=a} = V\big|_{r=4a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0 (4a)} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

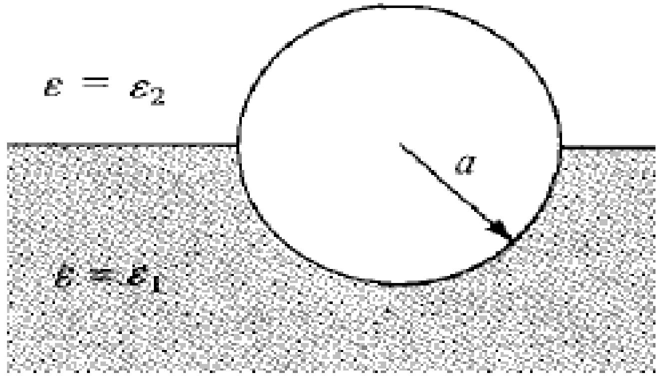
تهیه و تنظیم: سامان راجی

تمرین :

? اگر در محیط ۱ شدت میدان الکتریکی برابر $\mathbf{E}_1 = 10\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$ V/m باشد، بردار پلاریزگی، شدت میدان الکتریکی در محیط دوم، زاویه میدان الکتریکی محیط دوم با محور y و چگالی انرژی در دو محیط را بدست آورید.



? یک کره هادی به شعاع a دارای بار آزاد Q بوده و نصف آن در یک مایع به ضریب دی الکتریک ϵ_1 و نصف دیگر آن در یک محیط گازی به ضریب دی‌الکتریک ϵ_2 قرار گرفته است. شدت میدان الکتریکی را در همه فضا بیابید.



الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

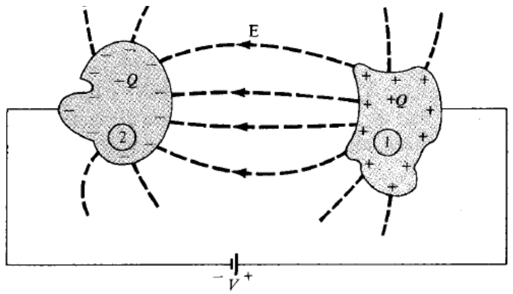
فصل سوم

کاربرد معادلات میدانهای الکتریکی

- خازن
- مقاومت
- توری تصویر

خازن

نسبت دامنه بار موجود بر روی یکی از دو صفحه هادی موازی و روبروی هم به اختلاف پتانسیل موجود بین این دو صفحه اصطلاحا ظرفیت خازنی نامیده می‌شود. بنابراین:



$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

علامت منفی رابطه انتگرالی ولتاژ و شدت میدان الکتریکی بدلیل عدم جبری بودن مقدار ظرفیت خازن در نظر گرفته نشده است.

روش محاسبه

۱- با فرض وجود بار ولتاژ مابین صفحات خازن بر حسب بار فرض شده محاسبه و سپس با رابطه $C = \frac{Q}{V}$ ظرفیت خازن بدست می‌آید. (قانون گوس)

۲- با فرض وجود اختلاف پتانسیل مابین صفحات خازن، بار بر روی آنها بر حسب پتانسیل فرضی محاسبه می‌شود. (معادله لاپلاس)

استفاده از روش بار مفروض

- ابتدا دستگاه مختصات مناسب را انتخاب کنید.
- بر روی هادیهای خازن بارهای $+Q$ و $-Q$ را فرض کنید.
- با استفاده از قانون گوس، شدت میدان الکتریکی و سپس با استفاده از رابطه $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ اختلاف پتانسیل صفحات خازن را بدست آورید.
- با استفاده از رابطه $C = Q/V$ ظرفیت خازنی را محاسبه کنید.

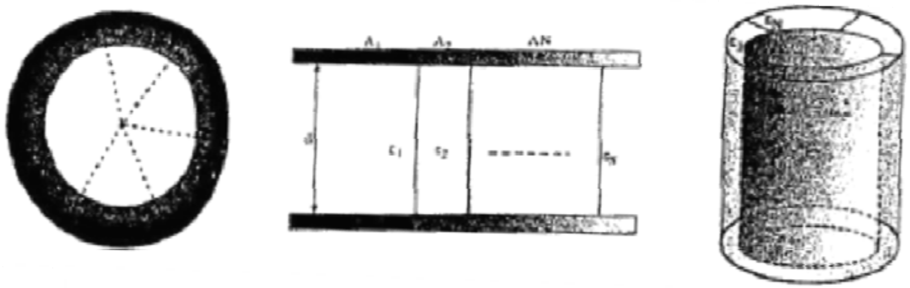
خازن چند لایه سری

اگر مرز مشترک دی‌الکتریک‌ها با سطوح هادی موازی باشد، آن‌گاه خازن‌ها با هم سری‌اند.

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}$$

$$\frac{1}{C}=\int_{\ell}\frac{d\ell}{\int_{S}\varepsilon ds}$$

خازن چند لایه موازی



اگر مرز مشترک بر سطوح هادی عمود باشد، خازن‌ها با هم موازی‌اند.

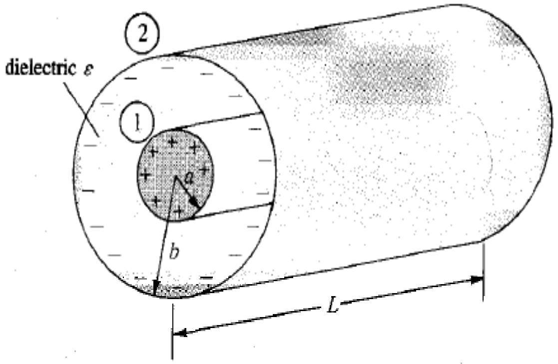
$$C=C_1+C_2+\ldots C_N$$

$$C=\int dC$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

خازن کواکسیال

این خازن بوسیله دو صفحه هادی استوانه‌ای شکل هم مرکز می‌باشد که مابین این دو استوانه از دی‌الکتریک پر شده است



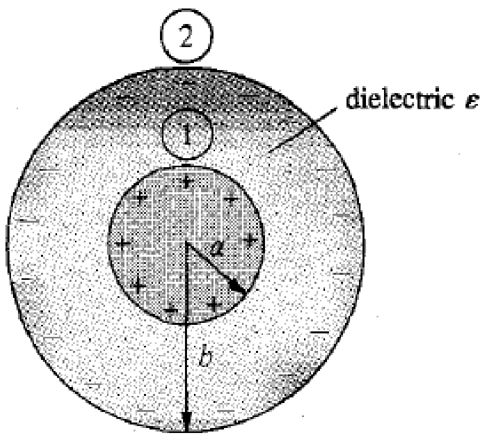
$$Q = \varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon E_\rho 2\pi\rho L$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho L}\,\mathbf{a}_\rho$$

$$V = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_b^a \left[\frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho L}\,\mathbf{a}_\rho\right] \cdot d\rho\,\mathbf{a}_\rho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\frac{b}{a}}$$

خازن کروی

این خازن بوسیله دو صفحه هادی کروی شکل هم مرکز می‌باشد که مابین این دو کره از دی‌الکتریک پر شده است



$$Q = \varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon E_r 4\pi r^2$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathbf{a}_r$$

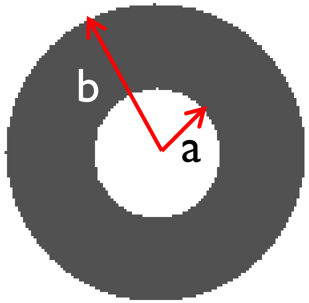
$$V = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_b^a \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathbf{a}_r\right] \cdot dr\,\mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$b \to \infty,\; C = 4\pi\varepsilon a$$

الکترومغناطیس مهندسی

مثال

بین دو استوانه هادی هم‌محور به شعاع‌های b,a $(a<b)$ از عایقی با ضریب $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{r}$ پر شده است. ظرفیت خازن واحد طول آن چقدر است؟ (سراسری ۱۳۷۹)



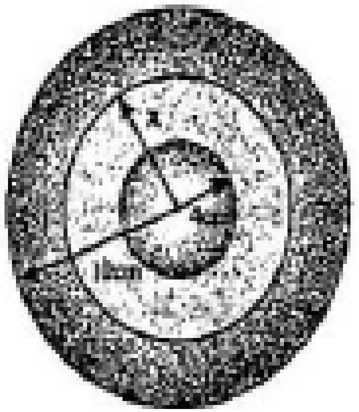
۱) $2\pi\varepsilon_0(b-a)$
۲) $2\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
۳) $2\pi\varepsilon_0 \operatorname{Ln}\frac{b}{a}$
۴) $\frac{2\pi\varepsilon_0}{b-a}$

پاسخ :

$$\frac{1}{c} = \int_a^b \frac{dr}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon_0}{r} r\, d\phi\, dz} \Rightarrow c = \frac{2\pi\varepsilon_0}{b-a}$$

مثال

یک خازن کروی به شعاع‌های 10cm,4cm با عایق فضای آزاد داریم. ضخامت عایقی که با ثابت دی‌الکتریک $\varepsilon_r = 5$ باید روی سطح رسانای داخلی قرار دهیم تا ظرفیت خازنی 3 برابر شود، چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ۱۳۷۷)



۱) 2
۲) 2.5
۳) 3
۴) 4

پاسخ :

$$c_{1\,\text{جدید}} = \frac{4\pi 5\varepsilon_0}{\frac{1}{4}-\frac{1}{x}} \qquad c_{2\,\text{جدید}} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{x}-\frac{1}{10}} \qquad c_{\text{قدیم}} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{4}-\frac{1}{10}}$$

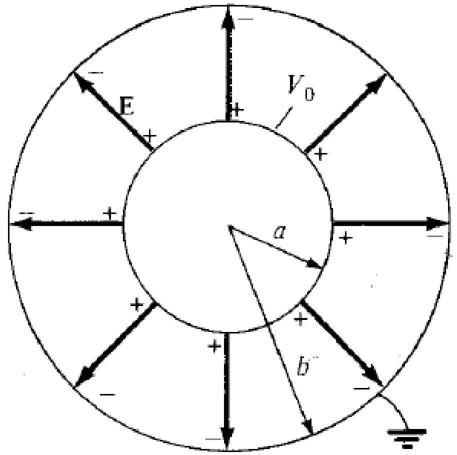
$$\frac{1}{c_{\text{جدید}}} = \frac{1}{c_{1\,\text{جدید}}} + \frac{1}{c_{2\,\text{جدید}}} \Rightarrow \text{if } c_{\text{جدید}} = 3c_{\text{قدیم}} \Rightarrow x = 8 \Rightarrow x-4 = 8-4 = 4$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

دو صفحه هادی کروی هم مرکز یکی به شعاع a و به پتانسیل 0 ولت و دیگری به شعاع b و به پتانسیل V_0 مفروضند. ظرفیت خازنی مابین این دو صفحه هادی را بیابید.

پاسخ :



$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dV}{dr}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dV}{dr}\right] = 0$$

$$r^2\frac{dV}{dr} = A$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

$$V = -\frac{A}{r} + B$$

$$r = b, V = 0 \rightarrow 0 = -\frac{A}{b} + B \quad \text{or} \quad B = \frac{A}{b}$$

$$V = A\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right]$$

$$r = a, V = V_o \rightarrow V_o = A\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

$$A = \frac{V_o}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \quad \Rightarrow \quad V = V_o\frac{\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right]}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\mathbf{a}_r = -\frac{A}{r^2}\mathbf{a}_r$$

$$= \frac{V_o}{r^2\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]}\mathbf{a}_r$$

$$Q = \int \varepsilon\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{\varepsilon_o\varepsilon_r V_o}{r^2\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]} r^2\sin\theta\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r V_o}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$C = \frac{Q}{V_o} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مقاومت

نسبت ولتاژ دو سر یک هادی به جریان عبوری از آن هادی اصطلاحا مقاومت اطلاق می‌شود. بنابراین:

روش محاسبه

- ابتدا دستگاه مختصات مناسب را انتخاب کنید.
- اکنون به یکی از در روش زیر می‌توان عمل نمود:

۱- با استفاده از رابطه $R = \frac{\ell}{\sigma s}$ و تعیین متغیرهای برداری مابین دو بخش هادی، مستقیما مقاومت مابین دو هادی را محاسبه کنید.

$$R = \frac{\ell}{\sigma s} \Rightarrow R = \int_{\ell} \frac{d\ell}{\int_{S} \sigma ds}$$

ℓ: راستای جریان

S: سطح عمود بر جریان

۱- سطح مقطع یکنواخت باشد (در طول مسیر)

۲- σ یکنواخت باشد.

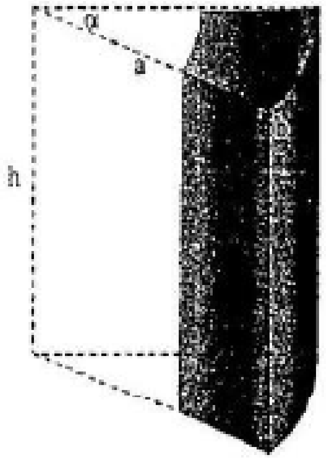
۲- با فرض ولتاژ V مابین دو هادی مقاومت، معادله لاپلاس در فضای ما بین دو هادی حل شده و از روی آن، معادله شدت میدان استخراج می‌شود. سپس با استفاده از رابطه $I = \int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ جریان در این فضا محاسبه شده و نهیتا با استفاده از قانون اهم و تقسیم اختلاف پتانسیل بر جریان بدست آمده، مقاومت ما بین دو هادی تعیین می‌شود.

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\oint \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

مثال

مقاومت بین دو سطح استوانه در یک قطاع، با زاویه مرکزی α چقدر است؟

پاسخ :



$$R = \frac{1}{\sigma}\int_a^b \frac{dr}{\iint r\,d\varphi\,dz}$$

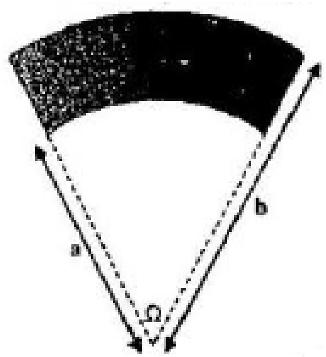
$$R = \frac{1}{\sigma}\int_a^b \frac{dr}{\int_0^h\int_0^\alpha r\,d\varphi\,dz} \quad\rightarrow\quad R = \frac{1}{\sigma h \alpha}\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$$

$$\alpha \rightarrow 2\pi \quad\Rightarrow\quad R = \frac{1}{2\pi\sigma h}\mathrm{Ln}\frac{b}{a}$$

مثال

مقاومت بین دو سطح کروی با زاویه فضایی Ω را بیابید. (جریان در راستای شعاعی پخش می‌شود.)

پاسخ :



$$R = \frac{1}{\sigma}\int_a^b \frac{dr}{\int_\theta\int_\varphi r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\int_a^b \frac{dr}{r^2\int_\theta\int_\varphi \sin\theta\,d\theta\,d\varphi} \quad\rightarrow\quad R = \frac{1}{\Omega\sigma}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$

$$\Omega = 4\pi \quad\rightarrow\quad R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

چنانچه رسانایی یک عایق غیرکامل یک کابل هم‌محور، غیریکنواخت و به صورت $\sigma = \frac{\sigma_0}{1+\frac{a}{r}}$ باشد، مقاومت موازی در واحد طول کابل بالا کدام است؟ (a و b به ترتیب شعاع داخلی و بیرونی کابل است.) (سراسری ۱۳۸۵)

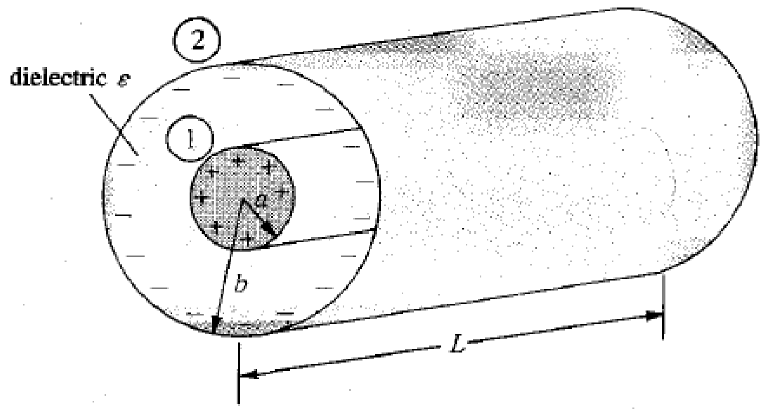
۱) $\frac{1}{2\pi\sigma_0}\left[\mathrm{Ln}\frac{2b}{a^2}+\frac{b-a}{b}\right]$

۲) $-\frac{1}{2\pi\sigma_0}\left[ab-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\right]$

۳) $\frac{1}{2\pi\sigma_0}\left[\mathrm{Ln}\frac{b}{a}+\frac{b-a}{b}\right]$

۴) $-\frac{1}{2\pi\sigma_0}\left[a^2b-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\right]^4$

پاسخ :



$$R = \int \frac{dr}{\iint \frac{\sigma_0}{1+\frac{a}{r}} \cdot r\, d\varphi\, dz} = \frac{1}{\sigma_0 2\pi} \int \frac{dr}{\int \frac{r\, dz}{\frac{r+a}{r}}} = \frac{1}{2\pi\sigma_0} \int \frac{r+a}{r^2} dr$$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_0}\left[\int \frac{dr}{r} + \int \frac{a}{r^2} dr\right] = \frac{1}{2\pi\sigma_0}\left[\mathrm{Ln}r\Big|_a^b + a\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^b\right] \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi\sigma_0}\left(\mathrm{Ln}\frac{b}{a}+\frac{b-a}{b}\right)$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

کره‌ای از رسانای کامل به شعاع a از نیمه داخل زمین قرار گرفته، رسانش زمین در ناحیه $a < R < b$ برابر σ_1 و در $R > b$ برابر σ_2 است. مقاومت زمین را وقتی توزیع جریان یکنواخت است بیابید. (سراسری ۱۳۷۸)

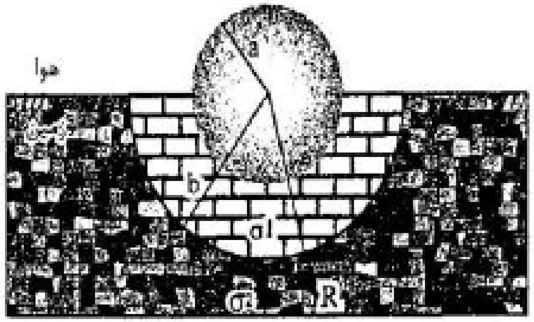
۱) $R = \dfrac{1}{2\pi\sigma_2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{2\pi\sigma_1}\dfrac{1}{b}$

۲) $R = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{2\pi\sigma_2}\dfrac{1}{b}$

۳) $R = \dfrac{1}{4\pi\sigma_1}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{4\pi\sigma_2}\dfrac{1}{b}$

۴) $R = \dfrac{1}{4\pi\sigma_2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{4\pi\sigma_1}\dfrac{1}{b}$

پاسخ :



دو مقاومت سری

۱) مقاومت بین دو نیم‌کره با شعاع‌های a و b

۲) مقاومت بین دو نیم‌کره با شعاع‌های b و ∞

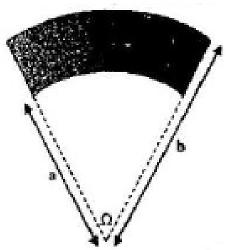
$$R = R_1 + R_2$$

$$R = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{2\pi\sigma_1}+\frac{\frac{1}{b}}{2\pi\sigma_2}$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\int_a^b \frac{dr}{\int_\theta\int_\varphi r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\int_a^b \frac{dr}{r^2\int_\theta\int_\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi} \rightarrow R = \frac{1}{\Omega\sigma}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$

$$\Omega = 4\pi \rightarrow R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$$



الکترومغناطیس مهندسی

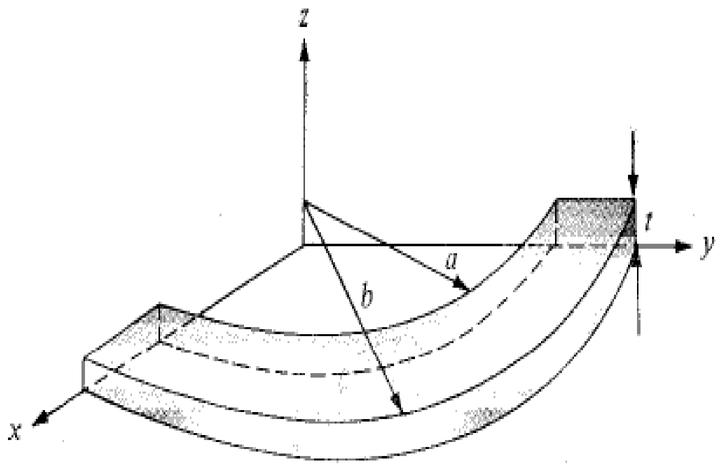
تهیه و تنظیم: سامان راجی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

جسمی مطابق شکل مفروض است. اگر بخش پائینی آن که در ارتفاع صفر واقع شده است در پتانسیل صفر و بخش بالایی آن که در ارتفاع t واقع شده در پتانسیل V_0 قرار گرفته باشد، مقاومت از لایه هادی پائینی تا لایه هادی بالایی را بدست آورید.

پاسخ :



$$V(z = 0) = 0 \text{ and } V(z = t) = V_o$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

$$V = Az + B$$

$$V(z = 0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B \qquad \text{or} \qquad B = 0$$

$$V(z = t) = V_o \rightarrow V_o = At \qquad \text{or} \qquad A = \frac{V_o}{t}$$

$$V = \frac{V_o}{t} z$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\mathbf{a}_z = -\frac{V_o}{t}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = -\frac{\sigma V_o}{t}\mathbf{a}_z, \qquad d\mathbf{S} = -\rho\, d\phi\, d\rho\, \mathbf{a}_z$$

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=a}^{b} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{V_o\sigma}{t} \rho\, d\phi\, d\rho$$

$$= \frac{V_o\sigma}{t} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\rho^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{V_o\, \sigma\, \pi\, (b^2 - a^2)}{4t}$$

$$R' = \frac{V_o}{I} = \frac{4t}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$$

$$R' = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{t}{\sigma \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2)}$$

$$= \frac{4t}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$$

تئوری تصویر

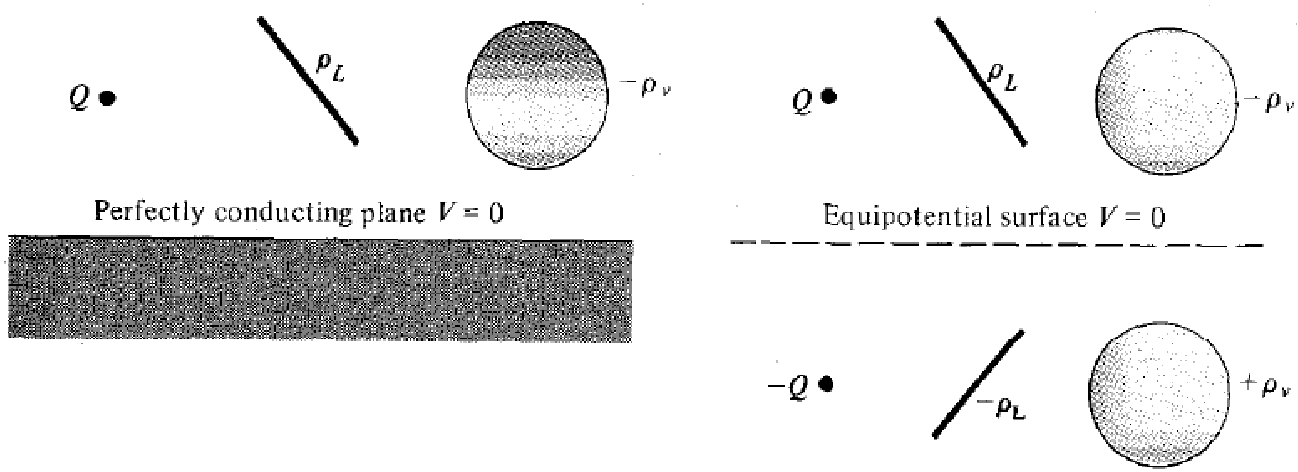
این تئوری که در سال ۱۸۴۸ میلادی توسط کلوین ارائه شده است، جهت محاسبه بار الکتریکی، شدت میدان و پتانسیل الکتریکی در حضور هادیهای الکتریکی بکار برده می‌شود. هر چند این روش در مورد همه مسائل قابل اعمال نیست، ولی در مواردی که بکار برده می‌شود می‌تواند حل مسئله را بسیار ساده نماید.

طبق این تئوری، یک ساختار باری که در مقابل یک صفحه هادی قرار گرفته است می‌تواند به یک ساختار باری معادل که در مقابل یک صفحه هم پتانسیل قرار گرفته است، تبدیل شود.

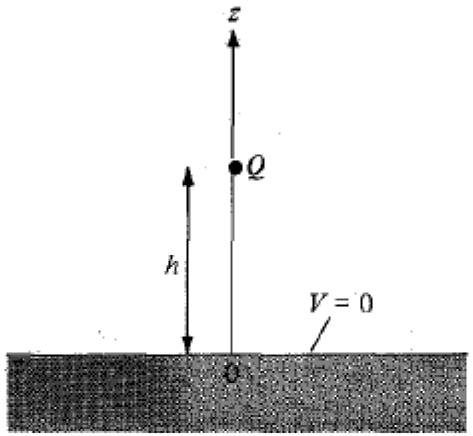
نحوه تشخیص مقدار و محل بار تصویر

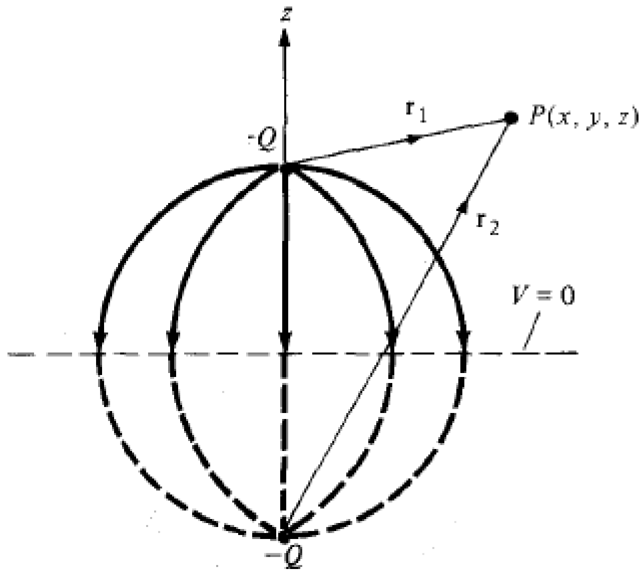
در تشخیص مقدار بار تصویر و محل قرار گیری آن دو نکته بایستی مدنظر قرار گیرد:

- محل بار تصویر حتما باید در درون فضای هادی باشد.
- مقدار و محل بار بایستی طوری در نظر گرفته شود تا پتانسیل سطح هادی صفر یا برابر یک مقدار ثابت باشد.



بار نقطه‌ای بر روی صفحه هادی (زمین)





$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$
$$= \frac{Q\,\mathbf{r}_1}{4\pi\varepsilon_o r_1^3} + \frac{-Q\,\mathbf{r}_2}{4\pi\varepsilon_o r_2^3}$$
$$\mathbf{r}_1 = (x, y, z) - (0, 0, h) = (x, y, z - h)$$
$$\mathbf{r}_2 = (x, y, z) - (0, 0, -h) = (x, y, z + h)$$
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z-h)\mathbf{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} - \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z+h)\mathbf{a}_z}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}}\right]$$
$$V = V_+ + V_-$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_o r_2}$$
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{1/2}}\right\}$$
$$\rho_S = D_n = \varepsilon_o E_n\Big|_{z=0}$$
$$= \frac{-Qh}{2\pi[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}}$$

total induced charge on the conducting plane

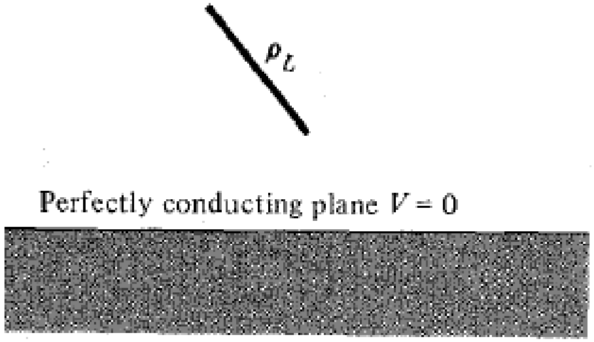
$$Q_i = \int \rho_S\, dS = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Qh\,dx\,dy}{2\pi[x^2 + y^2 + h^2]^{3/2}}$$
$$Q_i = -\frac{Qh}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho\,d\rho\,d\phi}{[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$
$$Q_i = -\frac{Qh}{2\pi}2\pi\int_0^{\infty}[\rho^2 + h^2]^{-3/2}\,\frac{1}{2}\,d(\rho^2)$$
$$= \frac{Qh}{[\rho^2 + h^2]^{1/2}}\Bigg|_0^{\infty}$$
$$= -Q$$

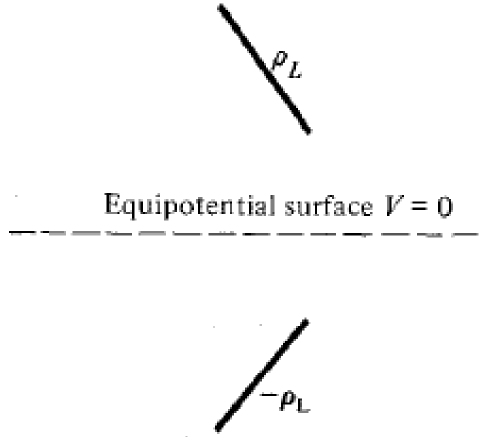
تهیه و تنظیم: سامان راجی

بار خطی بر روی صفحه هادی (زمین)

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم
سامان راجی





$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho_1}\mathbf{a}_{\rho 1} + \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho_2}\mathbf{a}_{\rho 2}$$

$$\boldsymbol{\rho}_1 = (x, y, z) - (0, y, h) = (x, 0, z - h)$$

$$\boldsymbol{\rho}_2 = (x, y, z) - (0, y, -h) = (x, 0, z + h)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\left[\frac{x\mathbf{a}_x + (z - h)\mathbf{a}_z}{x^2 + (z - h)^2} - \frac{x\mathbf{a}_x + (z + h)\mathbf{a}_z}{x^2 + (z + h)^2}\right]$$

$$V = V_+ + V_-$$

$$= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\rho_1 - \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\rho_2$$

$$= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$V = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left[\frac{x^2 + (z - h)^2}{x^2 + (z + h)^2}\right]^{1/2}$$

$$\rho_S = D_n = \varepsilon_o E_z\Big|_{z=0} = \frac{-\rho_L h}{\pi(x^2 + h^2)}$$

$$\rho_i = \int \rho_S\, dx = -\frac{\rho_L h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2 + h^2}$$

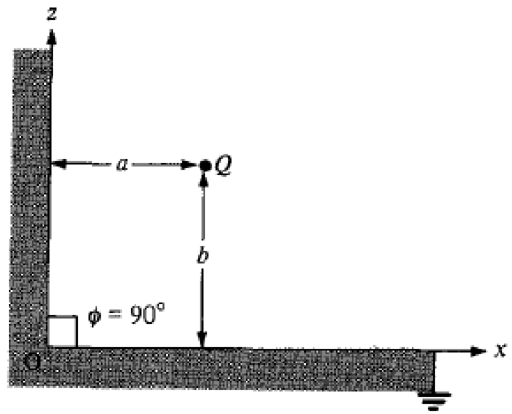
$$\rho_i = -\frac{\rho_L h}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\alpha}{h}$$

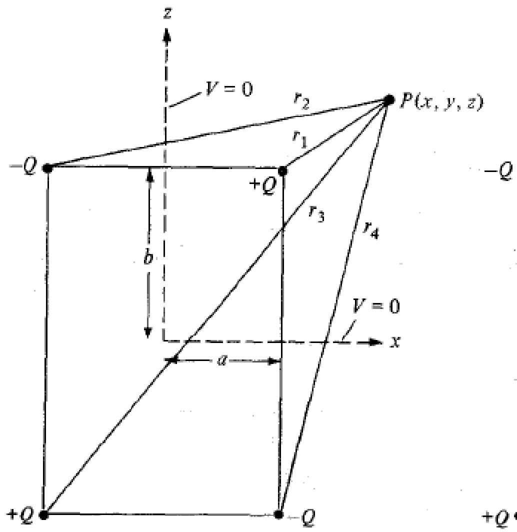
$$= -\rho_L$$

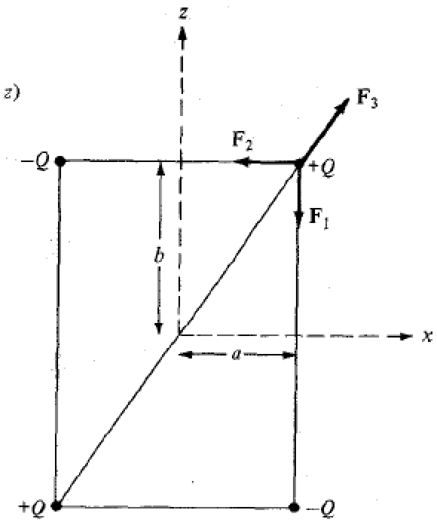
مثال

مطابق شکل، بار Q مابین دو نیم صفحه هادی که با یکدیگر زاویه ۹۰ درجه دارند، قرار گرفته است. در چنین شرایطی شدت میدان الکتریکی را در نقطه دلخواه (x,y,z) بیابید.

پاسخ :







$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right]$$

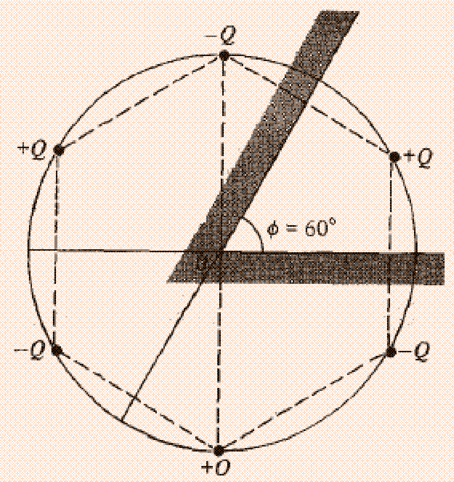
$$r_1 = [(x-a)^2 + y^2 + (z-b)^2]^{1/2}$$

$$r_2 = [(x+a)^2 + y^2 + (z-b)^2]^{1/2}$$

$$r_3 = [(x+a)^2 + y^2 + (z+b)^2]^{1/2}$$

$$r_4 = [(x-a)^2 + y^2 + (z+b)^2]^{1/2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o(2b)^2}\mathbf{a}_z - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o(2a)^2}\mathbf{a}_x + \frac{Q^2(2a\mathbf{a}_x + 2b\mathbf{a}_z)}{4\pi\varepsilon_o[(2a)^2 + (2b)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_o}\left\{\left[\frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2}\right]\mathbf{a}_x + \left[\frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}} - \frac{1}{b^2}\right]\mathbf{a}_z\right\}\end{aligned}$$



$$N = \left(\frac{360°}{\phi} - 1\right)$$

تعداد بارهای تصویر

الکترومغناطیس مهندسی

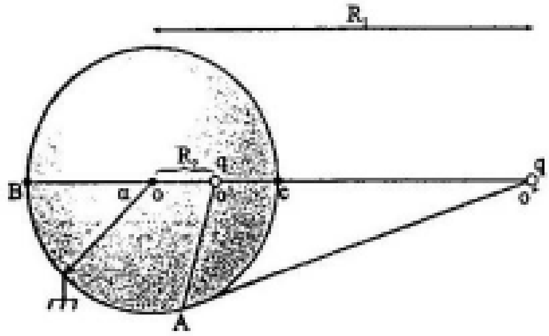
تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

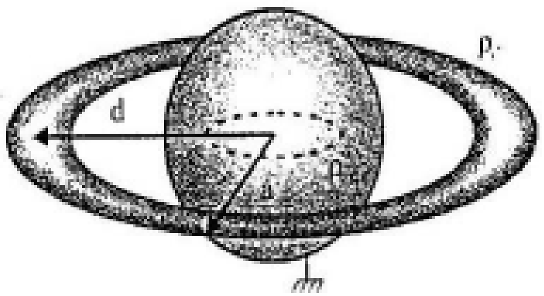
یک حلقه با چگالی یکنواخت ρ_ℓ به شعاع d هم‌مرکز با کره هادی به شعاع a $(d > a)$ است و کره در پتانسیل صفر قرار دارد. چگالی بار خطی حلقه تصویر ρ_ℓ چقدر است؟ (سراسری ۱۳۸۲)

۱) $-\frac{d}{a}\rho_\ell$ ۲) $-\rho_\ell$ ۳) $-\frac{a}{d}\rho_\ell$ ۴) $-\frac{a^2}{d^2}\rho_\ell$

پاسخ :



$$\left.\begin{aligned} V_A &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{O''A} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{O'A} = 0 \\ V_B &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(R_1+a)} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{(R_2+a)} = 0 \\ V_C &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(R_1-a)} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{(a-R_2)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_1 R_2 = a^2 \qquad q' = -\frac{q}{R_1}$$



$q = \rho_\ell 2\pi d$ کل بار بیرون

$$q = \rho_\ell 2\pi d \Rightarrow \begin{cases} q' = -\rho_\ell 2\pi d \frac{a}{d} \\ R_2 = \frac{a^2}{d} \end{cases} \Rightarrow \rho'_\ell = \frac{-2\pi d \rho_\ell \frac{a}{d}}{2\pi \frac{a^2}{d}} \to \rho'_\ell = \frac{-\rho_\ell}{a} d$$

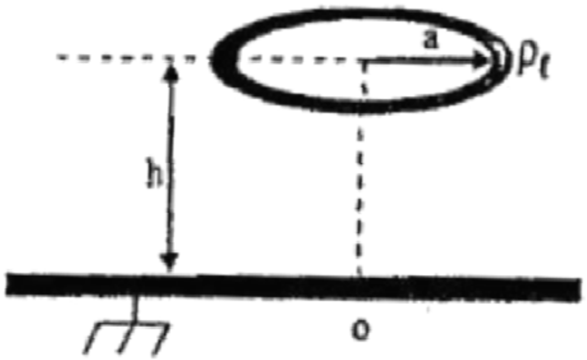
تهیه و تنظیم: سامان راجی

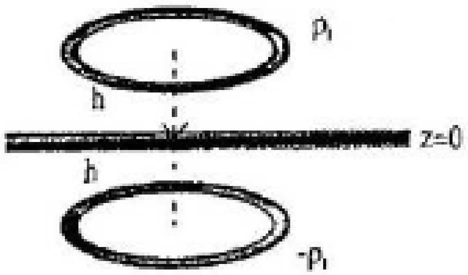
مثال

حلقه‌ای به شعاع a با چگالی بار خطی ρ_ℓ به موازات صفحه هادی زمین‌شده $Z=0$ و با فاصله h از آن قرار گرفته، چگالی بار الکتریکی سطحی در نقطهٔ O، درست در زیر مرکز دایره کدام است؟ (سراسری ۱۳۸۱)

۱) $\dfrac{h^2\rho_\ell}{\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ۲) $-\dfrac{a\rho_\ell}{\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ۳) $\dfrac{a^2h\rho_\ell}{\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ۴) $\dfrac{-ah\rho_\ell}{\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

پاسخ :





$$\rho_s = D_n = \varepsilon_0 E_n \Rightarrow \rho_s = \frac{-\rho_\ell ah}{\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{E} = \frac{\rho_\ell ah}{\varepsilon_0\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-\hat{z})$$

$$E = \frac{\rho_\ell ah}{2\varepsilon_0\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تهیه و تنظیم:
سامان راجی

فصل چهارم

معادلات لاپلاس و پواسن

معادلات لاپلاس وپواسن

Gauss's law $\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \rho_v \\ \mathbf{E} = -\nabla V \end{aligned}\right] \Rightarrow \nabla \cdot (-\varepsilon \nabla V) = \rho_v \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$

Poisson's equation

برای منطقه بدون بار $\Rightarrow \nabla^2 V = 0$

Laplace's equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

روش حل معادلات لاپلاس و پواسن

چنانچه تغییرات پتانسیل ناشی از تغییرات یک متغیر باشد، معادله لاپلاس یا پواسن با انتگرال گیری مستقیم از آنها حل می‌شود اما اگر متغیرهای پتانسیل بیش از یک متغیر باشد، بایستی با استفاده از روش جداسازی متغیرها نسبت به حل مسئله اقدام نمود.

جواب بدست آمده از مرحله قبلی با توجه به وجود ثابتهای انتگرال گیری جواب عمومی مسئله محسوب شده لذا جهت تعیین جواب دقیق مسئله بایستی با استفاده از شرایط مرزی مقدار ثابتهای انتگرال گیری را مشخص نمود.

پس از تعیین رابطه پتانسیل می‌توان با استفاده از روابط موجود نسبت به تعیین معادله شدت میدان الکتریکی و چگالی شار الکتریکی اقدام نمود.

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

در شکل نشان داده شده در زیر، الکترود سمت چپ (قاعده سمت چپ استوانه) دارای بار الکتریکی ρ_0 بوده و سطح پتانسیل آن برابر V_0 می‌باشد. اگر الکترود سمت راست در پتانسیل 0 ولت قرار گرفته باشد، میزان نیروی پمپاژ بار از الکترود سمت چپ به الکترود سمت راست را بدست آورید.

پاسخ:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

با توجه به شکل مسئله، وابستگی پتانسیل تنها به z است.

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{-\rho_o}{\varepsilon}$$

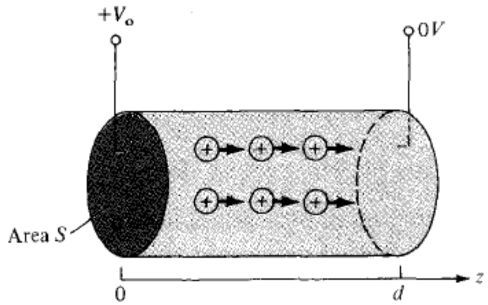
$$\frac{dV}{dz} = \frac{-\rho_o z}{\varepsilon} + A$$

$$V = -\frac{\rho_o z^2}{2\varepsilon} + Az + B$$

$$V_o = -0 + 0 + B \rightarrow B = V_o$$

$$0 = -\frac{\rho_o d^2}{2\varepsilon} + Ad + V_o$$

$$A = \frac{\rho_o d}{2\varepsilon} - \frac{V_o}{d}$$



$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\mathbf{a}_z = \left(\frac{\rho_o z}{\varepsilon} - A\right)\mathbf{a}_z$$
$$= \left[\frac{V_o}{d} + \frac{\rho_o}{\varepsilon}\left(z - \frac{d}{2}\right)\right]\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{F} = \int \rho_v \mathbf{E}\, dv = \rho_o \int dS \int_{z=0}^{d} \mathbf{E}\, dz$$
$$= \rho_o S\left[\frac{V_o z}{d} + \frac{\rho_o}{2\varepsilon}(z^2 - dz)\right]\Bigg|_0^d \mathbf{a}_z$$
$$\mathbf{F} = \rho_o S V_o \mathbf{a}_z$$

$$\text{pressure} = \frac{F}{S} = \rho_o V_o = 25 \times 10^{-3} \times 22 \times 10^3 = 550\ \text{N/m}^2$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

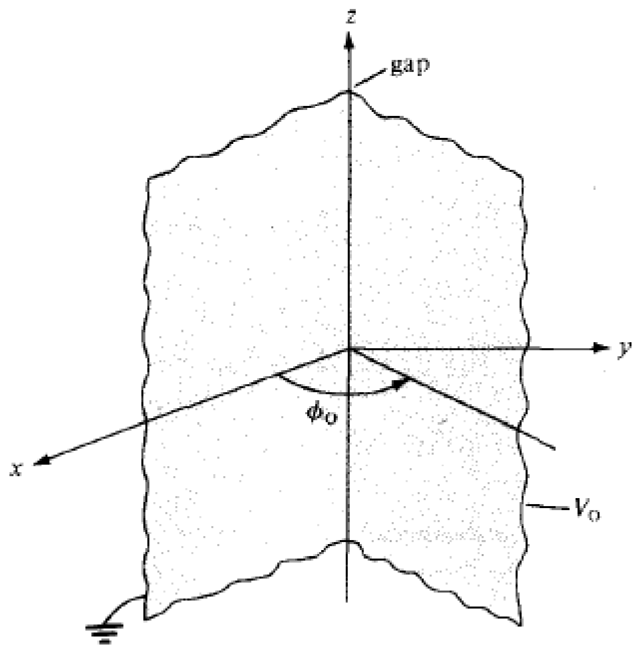
دو نیم صفحه یکی در $\phi=0$ با پتانسیل 0 ولت و دیگری در $\phi=30^0$ با پتانسیل ۱۰۰ ولت مفروضند. معادله پتانسیل و میدان الکتریکی را در فضای مابین دو صفحه محاسبه کنید.

پاسخ :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$$

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$$

$$V = A\phi + B$$



When $\phi = 0$, $V = 0$, $\quad 0 = 0 + B \rightarrow B = 0$

When $\phi = \phi_o$, $V = V_o$, $\quad V_o = A\phi_o \rightarrow A = \dfrac{V_o}{\phi_o}$

$$V = \frac{V_o}{\phi_o}\phi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{d\phi}\mathbf{a}_\phi = -\frac{V_o}{\rho\phi_o}\mathbf{a}_\phi$$

Substituting $V_o = 100$ and $\phi_o = \pi/6$ gives

$$V = \frac{600}{\pi}\phi \qquad \text{and} \qquad \mathbf{E} = \frac{600}{\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

دو مخروط هادی یکی در $\theta = 18^0$ با پتانسیل 0 ولت و دیگری در $\phi = 30^0$ با پتانسیل 50 ولت مفروضند. معادله پتانسیل و میدان الکتریکی را در فضای مابین دو صفحه محاسبه کنید.

پاسخ :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \frac{dV}{d\theta}\right] = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \frac{dV}{d\theta}\right] = 0$$

$$\sin\theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{\sin\theta}$$

$$\begin{aligned} V &= A\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = A\int \frac{d\theta}{2\cos\theta/2 \sin\theta/2} \\ &= A\int \frac{1/2 \sec^2\theta/2 \, d\theta}{\tan\theta/2} \\ &= A\int \frac{d(\tan\theta/2)}{\tan\theta/2} \\ &= A\ln(\tan\theta/2) + B \end{aligned}$$

$$V(\theta = \theta_1) = 0 \rightarrow 0 = A\ln(\tan\theta_1/2) + B$$

$$B = -A\ln(\tan\theta_1/2)$$

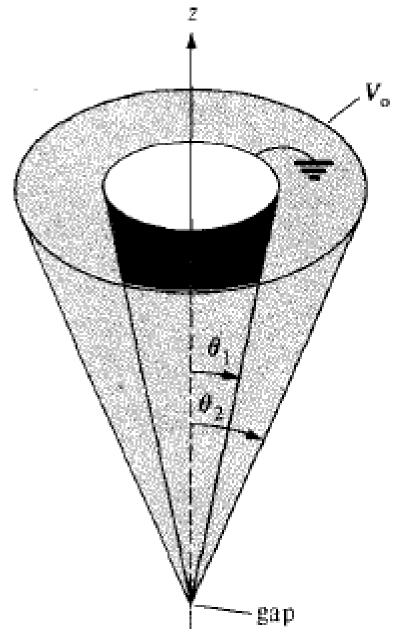
$$V = A\ln\left[\frac{\tan\theta/2}{\tan\theta_1/2}\right]$$

$$V(\theta = \theta_2) = V_o \rightarrow V_o = A\ln\left[\frac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right]$$

$$A = \frac{V_o}{\ln\left[\dfrac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right]}$$

$$V = \frac{V_o \ln\left[\dfrac{\tan\theta/2}{\tan\theta_1/2}\right]}{\ln\left[\dfrac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right]}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\mathbf{a}_\theta = -\frac{A}{r\sin\theta}\mathbf{a}_\theta \\ &= -\frac{V_o}{r\sin\theta \ln\left[\dfrac{\tan\theta_2/2}{\tan\theta_1/2}\right]}\mathbf{a}_\theta \end{aligned}$$



Taking $\theta_1 = \pi/10$, $\theta_2 = \pi/6$, and $V_o = 50$ gives

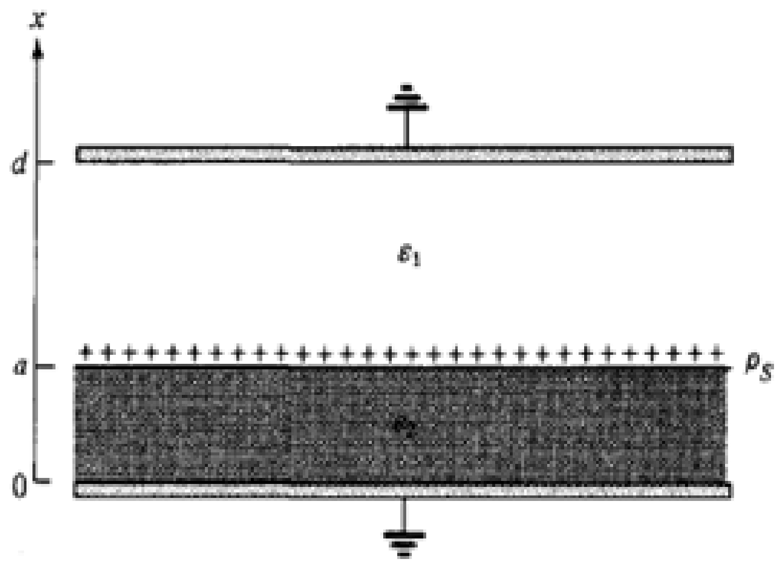
$$V = \frac{50\ln\left[\dfrac{\tan\theta/2}{\tan\pi/20}\right]}{\ln\left[\dfrac{\tan\pi/12}{\tan\pi/20}\right]} = 95.1\ln\left[\frac{\tan\theta/2}{0.1584}\right] V$$

$$\mathbf{E} = -\frac{95.1}{r\sin\theta}\mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$$

مثال

دو صفحه هادی نشان داده شده در شکل زیر در پتانسیل صفر قرار دارند. اگر ضخامتی به ارتفاع a از ماده با دی الکتریک ε_2 پر شده باشد، و بر روی این دی الکتریک باری با چگالی سطحی ρ_s قرار گرفته باشد، معادله پتانسیل در فضای مابین دو هادی را بدست آورید.

پاسخ :



$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

$$V = Ax + B$$

$$V_1 = A_1 x + B_1, \qquad x > a$$

$$V_2 = A_2 x + B_2, \qquad x < a$$

$$V_1(x = d) = 0$$

$$V_2(x = 0) = 0$$

$$V_1(x = a) = V_2(x = a)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \Big|_{x=a}$$

$$0 = A_1 d + B_1 \rightarrow B_1 = -A_1 d$$

$$0 = 0 + B_2 \rightarrow B_2 = 0$$

$$A_1 a + B_1 = A_2 a$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \nabla V$$

$$\rho_S = D_{1n} - D_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = -\varepsilon_1 \frac{dV_1}{dx} + \varepsilon_2 \frac{dV_2}{dx}$$

$$\rho_S = -\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2$$

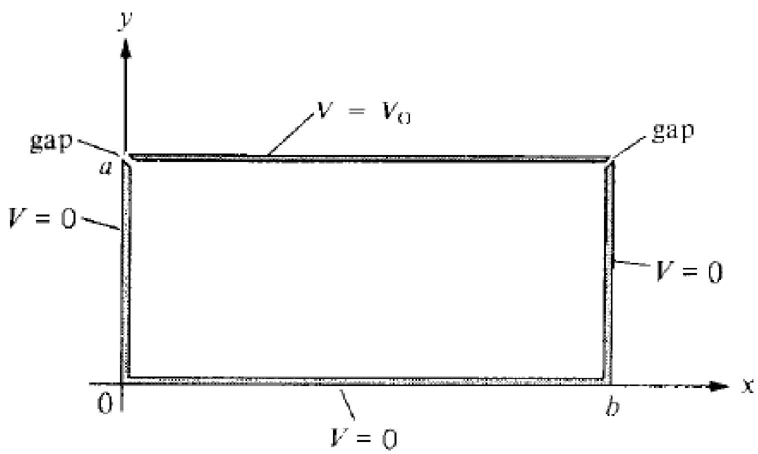
$$\mathbf{E}_1 = -A_1 \mathbf{a}_x = \frac{\rho_S \mathbf{a}_x}{\varepsilon_1 \left[1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{d}{a} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right]}$$

$$\mathbf{E}_2 = -A_2 \mathbf{a}_x = \frac{-\rho_S \left(\frac{d}{a} - 1\right) \mathbf{a}_x}{\varepsilon_1 \left[1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{d}{a} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right]}$$

مثال

در درون یک قاب مستطیلی که سطح مقطع آن در شکل زیر نشان داده شده است، تابع پتانسیل را محاسبه کنید.

پاسخ :



$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$V(x = 0, 0 \le y \le a) = 0$$

$$V(x = b, 0 \le y \le a) = 0$$

$$V(0 \le x \le b, y = 0) = 0$$

$$V(0 \le x \le b, y = a) = V_o$$

$$V(x, y) = X(x)\,Y(y)$$

$$X''Y + Y''X = 0$$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y}$$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

$$V(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \rightarrow X(0) = 0$$

$$V(b, y) = X(b)Y(y) = 0 \rightarrow X(b) = 0$$

$$V(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0$$

$$V(x, a) = X(0)Y(a) = V_o \text{ (inseparable)}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

پاسخ :

CASE A.

$$\lambda = 0$$

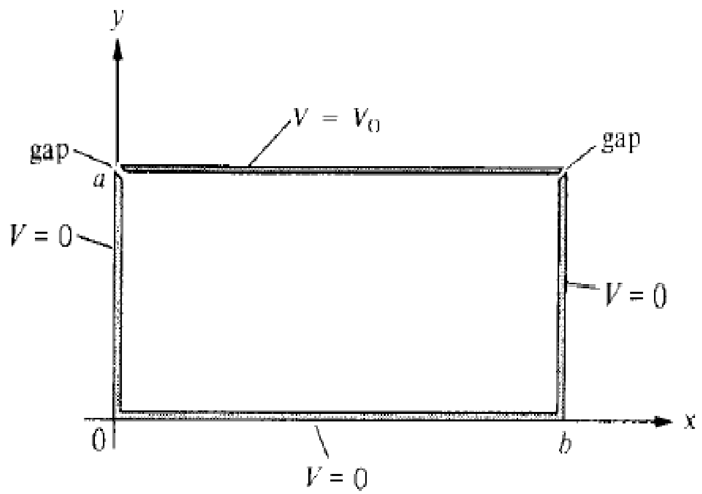
$$X'' = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{d^2X}{dx^2} = 0$$

$$X = Ax + B$$

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B \qquad \text{or} \qquad B = 0$$

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = A \cdot b + 0 \qquad \text{or} \qquad A = 0$$

$$X(x) = 0$$



CASE B.

$$\lambda < 0, \lambda = -\alpha^2$$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

$$X'' - \alpha^2 X = 0$$

$$m^2 - \alpha^2 = 0$$

$$m = \pm\alpha$$

$$X(x) = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}$$

$$\cosh \alpha x = (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})/2$$

$$\sinh \alpha x = (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})/2$$

$$e^{\alpha x} = \cosh \alpha x + \sinh \alpha x \text{ and } e^{-\alpha x} = \cosh \alpha x - \sinh \alpha x$$

$$X(x) = B_1 \cosh \alpha x + B_2 \sinh \alpha x$$

$$B_1 = A_1 + A_2 \qquad B_2 = A_1 - A_2$$

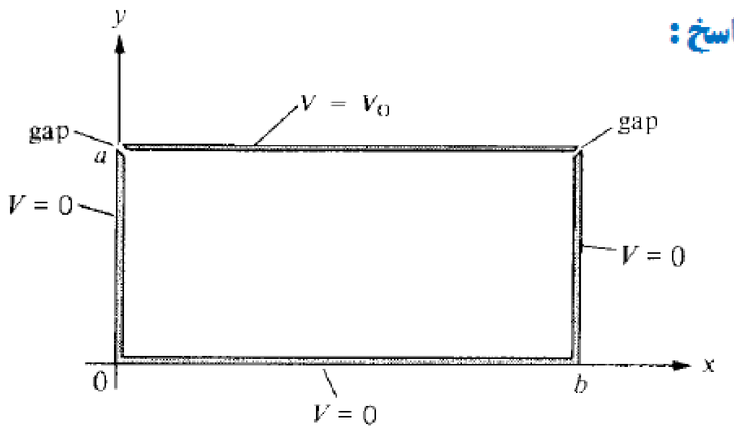
$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = B_1 \cdot (1) + B_2 \cdot (0) \qquad \text{or} \qquad B_1 = 0$$

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B_2 \sinh \alpha b$$

$$X(x) = 0$$

الکترومغناطیس مهندسی

پاسخ :



CASE C.

$$\lambda > 0 \qquad \lambda = \beta^2$$

$$X'' + \beta^2 X = 0$$

$$X(x) = C_0 e^{j\beta x} + C_1 e^{-j\beta x}$$

$$e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \sin \beta x$$

$$e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \sin \beta x$$

$$X(x) = g_0 \cos \beta x + g_1 \sin \beta x$$

$$g_0 = C_0 + C_1 \text{ and } g_1 = C_0 - jC_1$$

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = g_0 \cdot (1) + 0 \qquad \text{or} \qquad g_0 = 0$$

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = 0 + g_1 \sin \beta b$$

$$\sin \beta b = 0 = \sin n\pi$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b} \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$X_n(x) = g_n \sin \frac{n\pi x}{b}$$

$$\lambda = \beta^2 = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

$$Y'' - \beta^2 Y = 0$$

$$Y(y) = h_0 \cosh \beta y + h_1 \sinh \beta y$$

$$Y(y = 0) = 0 \rightarrow 0 = h_0 \cdot (1) + 0 \qquad \text{or} \qquad h_0 = 0$$

$$Y_n(y) = h_n \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

$$V_n(x, y) = g_n h_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

superposition theorem

$$V = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3 + \cdots + c_n V_n$$

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{b}$$

where $c_n = g_n h_n$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

پاسخ :

$$V(x, y = a) = V_o = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi a}{b}$$

Multiplying both sides by $\sin m\pi x/b$ and integrating over $0 < x < b$ gives

$$\int_0^b V_o \sin \frac{m\pi x}{b}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi x}{b}\, dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^b V_o \sin \frac{n\pi x}{b}\, dx = c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi x}{b}\, dx$$

$$-V_o \frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{b} \Big|_0^b = c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \frac{1}{2} \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{b}\right) dx$$

$$\frac{V_o b}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \cdot \frac{b}{2}$$

$$c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2V_o}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \dfrac{4V_o}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{4V_o}{n\pi \sinh \dfrac{n\pi a}{b}}, & n = \text{odd} \\ 0, & n = \text{even} \end{cases}$$

$$V(x, y) = \frac{4V_o}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{n\pi x}{b} \sinh \dfrac{n\pi y}{b}}{n \sinh \dfrac{n\pi a}{b}}$$

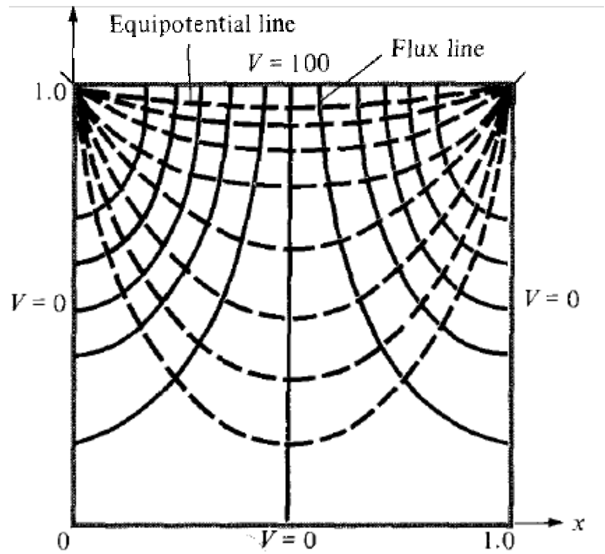
(b) For $x = a/2$ and $y = 3a/4$, where $b = 2a$, we have

$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) = \frac{4V_o}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin n\pi/4 \sinh 3n\pi/8}{n \sinh n\pi/2}$$

$$= \frac{4V_o}{\pi}\left[\frac{\sin \pi/4 \sinh 3\pi/8}{\sinh \pi/2} + \frac{\sin 3\pi/4 \sinh 9\pi/8}{3 \sinh 3\pi/2} + \frac{\sin 5\pi/4 \sinh 15\pi/4}{5 \sinh 5\pi/4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{4V_o}{\pi}(0.4517 + 0.0725 - 0.01985 - 0.00645 + \cdots)$$

$$= 0.6374 V_o$$



تهیه و تنظیم:
سامان راجی

تهیه و تنظیم:
سامان راجی

فصل پنجم

میدانهای مغناطیسی

- شدت میدان مغناطیسی
  - قانون بیوساوار
  - قانون آمپر
- چگالی شار مغناطیسی
- تابع پتانسیل مغناطیسی
- معادلات پواسن مغناطیسی
- نیرو در میدانهای مغناطیسی
- گشتاور مغناطیسی
- مواد مغناطیسی
- شرایط مرزی
- اندوکتانس
- انرژی مغناطیسی
- مدارهای مغناطیسی

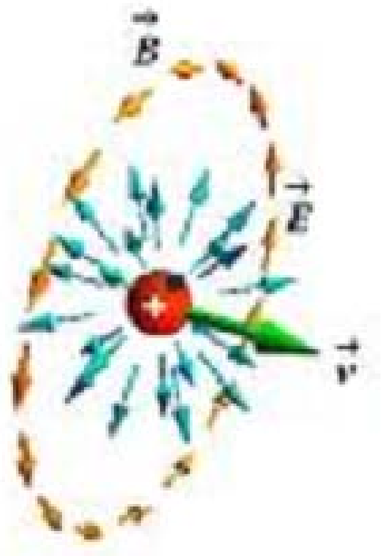
مغناطیس

همانطور که در مباحث قبلی مشاهده شد، بارهای الکتریکی ساکن سبب بوجود آمدن میدان الکتریکی ساکن می‌شوند. اما اگر همین بارهای الکتریکی با یک سرعت ثابت شروع به حرکت نمایند، میدان مغناطیسی ساکن را بوجود خواهند آورد. بعبارت دیگر، میدان مغناطیسی ساکن در اثر حرکت بارهای الکتریکی (جریان) بوجود می‌آید.

مباحث مغناطیس دارای ارتباط نزدیکی با مباحث الکتریسیته می‌باشد. هنگامی که در الکتریسیته صحبت از شدت میدان و چگالی شار الکتریکی میشود در مغناطیس نیز از شدت میدان و چگالی شار مغناطیسی مورد بحث قرار می‌گیرد. در جدول ارائه شده در زیر، مشابهت روابط الکتریسیته و مغناطیس مورد اشاره قرار گرفته است.

Term	Electric	Magnetic
Basic laws	$\mathbf{F} = \dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\mathbf{a}_r$	$d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_o I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$
	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$
Force law	$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$	$\mathbf{F} = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$
Source element	dQ	$Q\mathbf{u} = I\,d\mathbf{l}$
Field intensity	$E = \dfrac{V}{\ell}$ (V/m)	$H = \dfrac{I}{\ell}$ (A/m)
Flux density	$\mathbf{D} = \dfrac{\Psi}{S}$ (C/m^2)	$\mathbf{B} = \dfrac{\Psi}{S}$ (Wb/m^2)
Relationship between fields	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
Potentials	$\mathbf{E} = -\nabla V$	$\mathbf{H} = -\nabla V_m\ (\mathbf{J} = 0)$
	$V = \displaystyle\int \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon r}$	$\mathbf{A} = \displaystyle\int \frac{\mu I\, d\mathbf{l}}{4\pi R}$
Flux	$\Psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$	$\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
	$\Psi = Q = CV$	$\Psi = LI$
	$I = C\dfrac{dV}{dt}$	$V = L\dfrac{dI}{dt}$
Energy density	$w_E = \dfrac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$	$w_m = \dfrac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$
Poisson's equation	$\nabla^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$	$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$

در مباحث مغناطیسی دو قانون اساسی وجود دارد: قانون بیوساوار و قانون جریان آمپر. قانون بیوساوار همانند قانون کولن در الکتریسیته قانون کلی محاسبات شدت میدان می‌باشد. قانون آمپر نیز مشابه قانون گوس جهت تعیین میدان در حالتهای خاص مورد استفاده قرار می‌گیرد

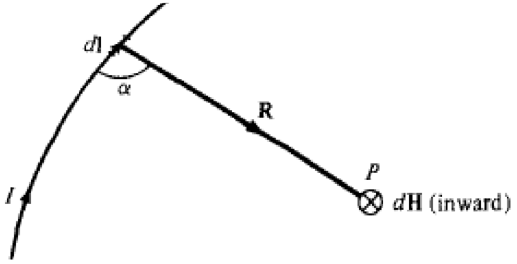


تهیه و تنظیم: سامان راجی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

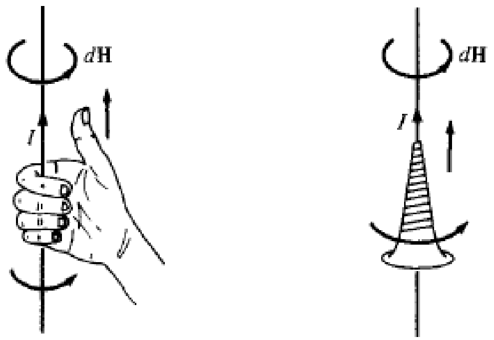
قانون بیوساوار

طبق قانون بیوساوار، شدت میدان مغناطیسی حاصل از ممان جریان الکتریکی IdL در نقطه P متناسب با جریان موجود در درون ممان و سینوس زاویه مابین ممان و خط واصل آن به نقطه P و معکوس مجذور فاصله ممان تا نقطه مشاهده می‌باشد.



$$dH \propto \frac{I\, dl \sin\alpha}{R^2}$$

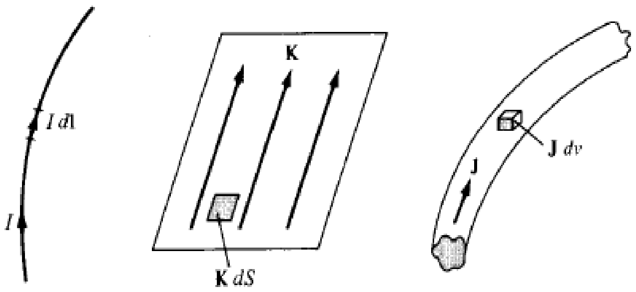
$$dH = \frac{kI\, dl \sin\alpha}{R^2}$$



In SI units, $k = 1/4\pi$

$$dH = \frac{I\, dl \sin\alpha}{4\pi R^2}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

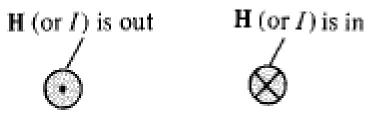


$$I\, d\mathbf{l} \equiv \mathbf{K}\, dS \equiv \mathbf{J}\, dv$$

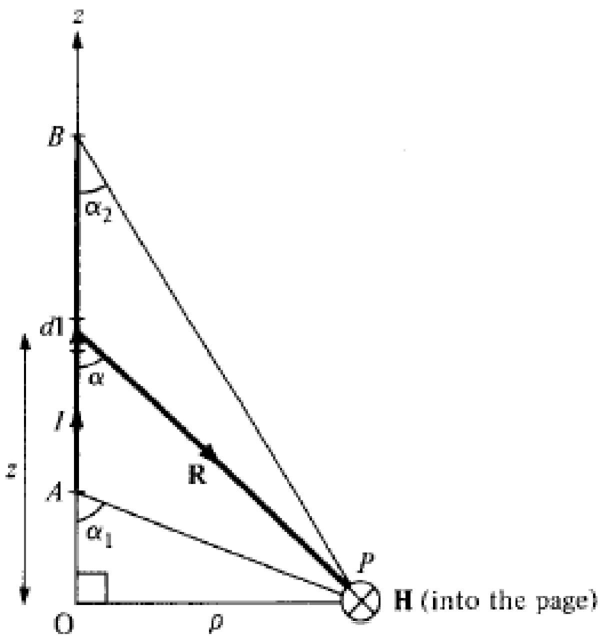
$$\mathbf{H} = \int_L \frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \qquad \text{(line current)}$$

$$\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{K}\, dS \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \qquad \text{(surface current)}$$

$$\mathbf{H} = \int_v \frac{\mathbf{J}\, dv \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \qquad \text{(volume current)}$$



شدت میدان مغناطیسی ناشی از سیم راست حامل جریان



$$d\mathbf{H} = \frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$ قانون بیوساوار

$$d\mathbf{l} = dz\, \mathbf{a}_z \text{ and } \mathbf{R} = \rho \mathbf{a}_\rho - z\mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{R} = \rho\, dz\, \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{H} = \int \frac{I\rho\, dz}{4\pi[\rho^2 + z^2]^{3/2}} \mathbf{a}_\phi$$

$$z = \rho \cot \alpha,\ dz = -\rho \operatorname{cosec}^2 \alpha\, d\alpha$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha\, d\alpha}{\rho^3 \operatorname{cosec}^3 \alpha} \mathbf{a}_\phi$$
$$= -\frac{I}{4\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha\, d\alpha$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)\mathbf{a}_\phi$$

میدان مغناطیسی ناشی از سیم نیمه محدود

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

میدان مغناطیسی ناشی از سیم نامحدود

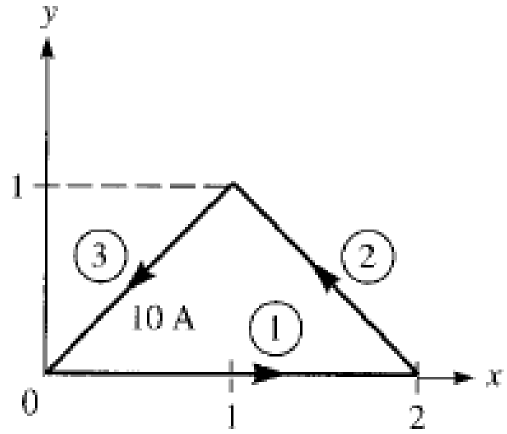
$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

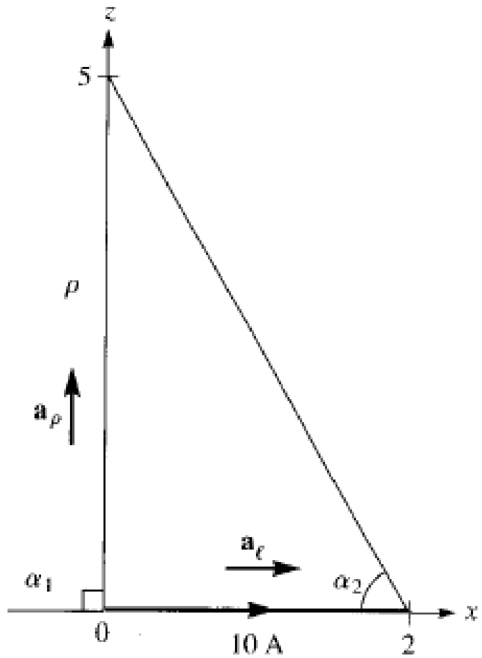
تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

در سیم مثلثی نشان داده شده در شکل زیر جریان ۱۰ آمپری جاری است. شدت میدان مغناطیسی ناشی از ضلع شماره یک این سیم مثلثی را در نقطه (0,0,5) بیابید.



پاسخ :



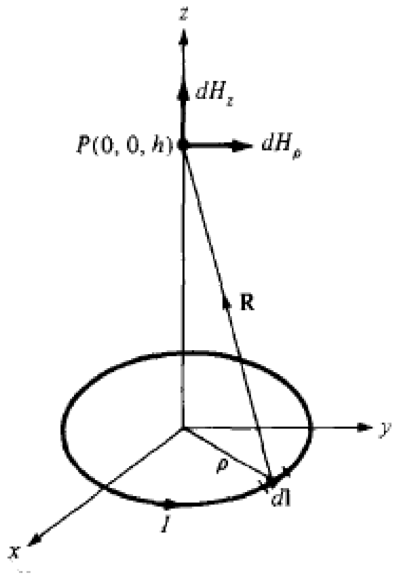
$$\cos\alpha_1 = \cos 90^\circ = 0, \qquad \cos\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{29}}, \qquad \rho = 5$$

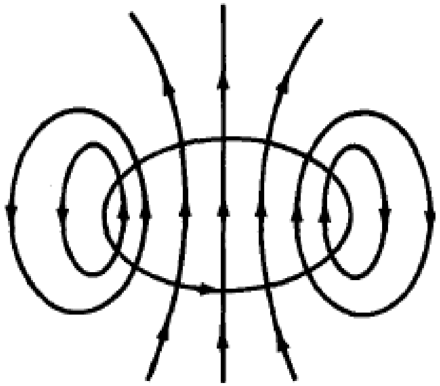
$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= \frac{I}{4\pi\rho}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\mathbf{a}_\phi = \frac{10}{4\pi(5)}\left(\frac{2}{\sqrt{29}} - 0\right)(-\mathbf{a}_y)\\ &= -59.1\mathbf{a}_y \text{ mA/m}\end{aligned}$$

مثال

یک سیم دایروی با معادله $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ حاوی جریان ۱۰ آمپری در جهت ϕ است. شدت میدان مغناطیسی ناشی از این سیم حلقوی را در نقاط (0,0,4) و (0,0,-4) بیابید.

پاسخ :





$$d\mathbf{H} = \frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

$$d\mathbf{l} = \rho\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi,\ \mathbf{R} = (0, 0, h) - (x, y, 0) = -\rho \mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ 0 & \rho\, d\phi & 0 \\ -\rho & 0 & h \end{vmatrix} = \rho h\, d\phi\, \mathbf{a}_\rho + \rho^2\, d\phi\, \mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}} (\rho h\, d\phi\, \mathbf{a}_\rho + \rho^2\, d\phi\, \mathbf{a}_z) = dH_\rho\, \mathbf{a}_\rho + dH_z\, \mathbf{a}_z$$

$\cos\phi$ or $\sin\phi$ over $0 \le \phi \le 2\pi$ gives zero

$$\mathbf{H} = \int dH_z\, \mathbf{a}_z = \int_0^{2\pi} \frac{I\rho^2\, d\phi\, \mathbf{a}_z}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}} = \frac{I\rho^2 2\pi \mathbf{a}_z}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I\rho^2 \mathbf{a}_z}{2[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

(a) Substituting $I = 10\,A$, $\rho = 3$, $h = 4$ gives

$$\mathbf{H}(0, 0, 4) = \frac{10\,(3)^2\, \mathbf{a}_z}{2[9 + 16]^{3/2}} = 0.36\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

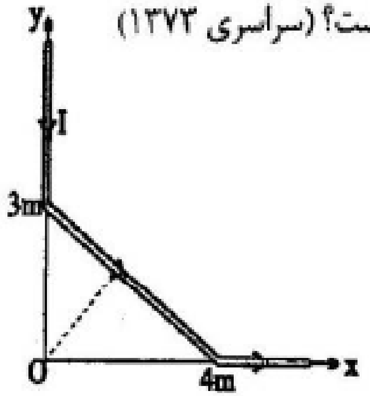
(b)

$$\mathbf{H}(0, 0, -4) = \mathbf{H}(0, 0, 4) = 0.36\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

از سیمی مطابق شکل، جریان ثابت I می‌گذرد. چگالی شار مغناطیسی $(\vec{B})$ در مرکز مختصات چقدر است؟ (سراسری ۱۳۷۳)



۱) $\vec{B}=\frac{-7\mu_0 I\hat{z}}{48\pi}$

۲) $\vec{B}=\frac{-\mu_0 I}{48}\hat{z}$

۳) $\vec{B}=\frac{-\mu_0 I}{36\pi}\hat{z}$

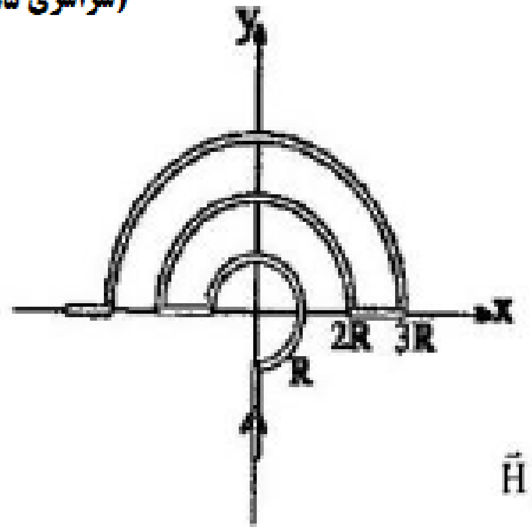
۴) $\vec{B}=\frac{-5\mu I}{24\pi}\hat{z}$

پاسخ :

$$\begin{cases}\alpha=37^\circ\\ \beta=53^\circ\end{cases} \rightarrow \quad x=2.4m \qquad \vec{H}=\frac{I}{4\pi r}[\cos\alpha+\cos\beta] \Rightarrow \vec{H}=\frac{I}{4\pi\times 2.4}[0.6+0.8] \Rightarrow \vec{B}=\frac{-7\mu_0 I}{48\pi}\hat{z}$$

مثال

سیم حامل جریان سه آمپری را بصورت زیر در نظر بگیرید. چنانچه R=10cm باشد،چگالی شار مغناطیسی را در مبداء بیابید. (سراسری ۸۵)



۱) $3\mu_0\hat{z}$ ۲) $10\mu_0\hat{z}$ ۳) $20\mu_0\hat{z}$ ۴) $30\mu_0\hat{z}$

پاسخ :

میدان ناشی از دایرهٔ کامل به شعاع a در مرکز برابر است با $\frac{I}{2a}$

$$\vec{H}_{کل}=\frac{3}{4}\times\frac{I}{2R}(\hat{z})+\frac{1}{2}\times\frac{I}{4R}(-\hat{z})+\frac{1}{2}\times\frac{I}{6R}(\hat{z})=10\hat{z}\Rightarrow\vec{B}=10\mu_0\hat{z}$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

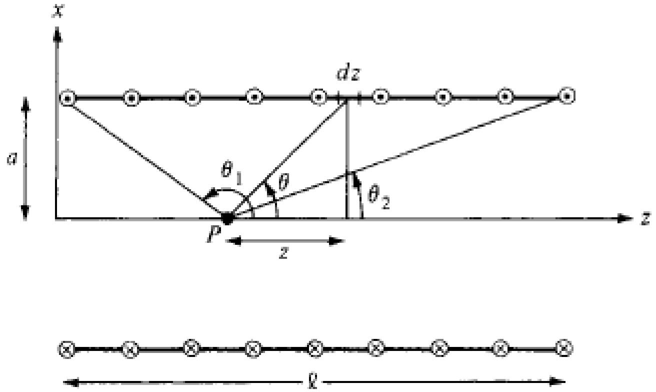
نشان دهید شدت میدان مغناطیسی ناشی از یک سلونوئید که شامل N دور بوده و حامل جریان I می‌باشد، با رابطه زیر تعیین می-شود:

$$\mathbf{H} = \frac{nI}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\mathbf{a}_z$$

همچنین نشان دهید اگر طول سلونوئید بی‌نهایت در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\mathbf{H} = nI\mathbf{a}_z$$

پاسخ :



$$dH_z = \frac{I\,dl\,a^2}{2[a^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{Ia^2 n\,dz}{2[a^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$dl = n\,dz = (N/\ell)\,dz$$

$$\tan\theta = a/z$$

$$dz = -a\,\mathrm{cosec}^2\,\theta\,d\theta = -\frac{[z^2 + a^2]^{3/2}}{a^2}\sin\theta\,d\theta$$

$$dH_z = -\frac{nI}{2}\sin\theta\,d\theta$$

$$H_z = -\frac{nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta$$

$$\mathbf{H} = \frac{nI}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\,\mathbf{a}_z$$

$$n = N/\ell \longrightarrow \mathbf{H} = \frac{NI}{2\ell}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\,\mathbf{a}_z$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\ell/2}{[a^2 + \ell^2/4]^{1/2}} = -\cos\theta_1$$

$$\mathbf{H} = \frac{In\ell}{2[a^2 + \ell^2/4]^{1/2}}\,\mathbf{a}_z$$

If $\ell \gg a$ or $\theta_2 \simeq 0°, \theta_1 \simeq 180°$,

$$\mathbf{H} = nI\mathbf{a}_z = \frac{NI}{\ell}\,\mathbf{a}_z$$

الکترومغناطیس مهندسی

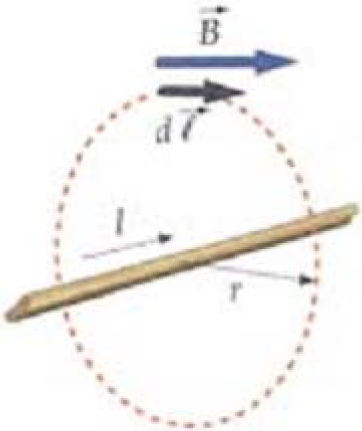
تهیه و تنظیم: سامان راجی

قانون آمپر

طبق قانون آمپر، انتگرال خطی از مولفه مماسی شدت میدان مغناطیسی بر روی یک مسیر بسته، برابر جریان خالص گذرنده از درون آن مسیر بسته خواهد بود.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$$

قانون آمپر



$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad I_{\text{enc}} = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

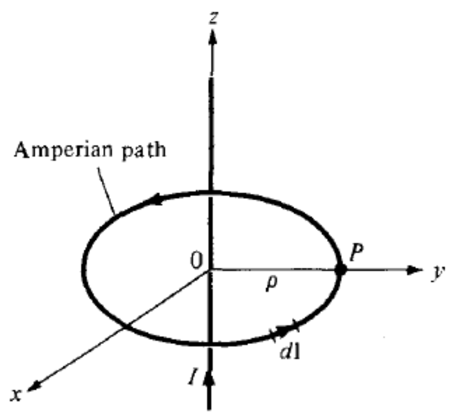
(تعریف چگالی جریان) $I_{\text{enc}} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

معادله سوم ماکسول

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0 \quad \Rightarrow$ magnetostatic field is not conservative

جریان خطی بینهایت



$$I = \int H_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \rho \, d\phi \, \mathbf{a}_\phi$$

$$I = H_\phi \int \rho \, d\phi$$

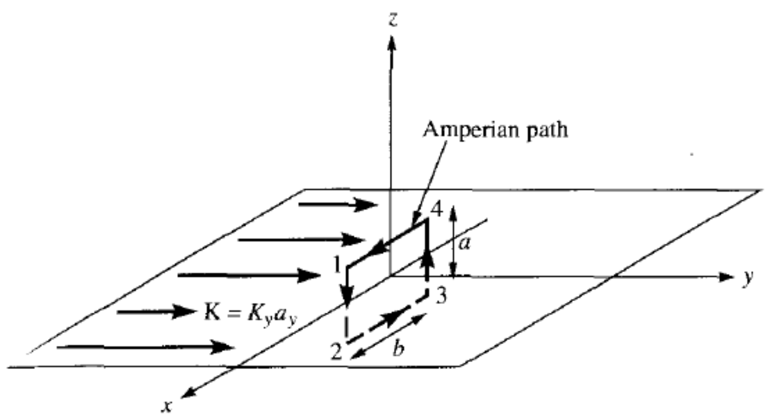
$$I = H_\phi \cdot 2\pi\rho$$

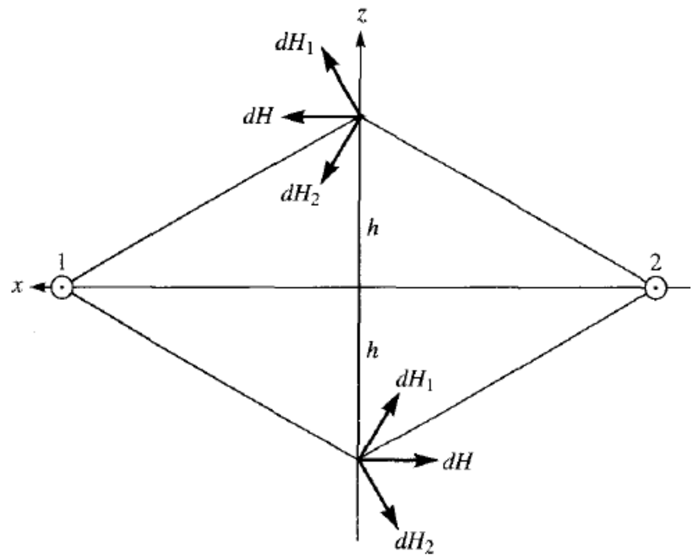
$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

جریان صفحه‌ای بینهایت





$$\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{enc} = K_y b$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} H_o \mathbf{a}_x & z > 0 \\ -H_o \mathbf{a}_x & z < 0 \end{cases}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \right) \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$
$$= 0(-a) + (-H_o)(-b) + 0(a) + H_o(b)$$
$$= 2H_o b$$

$$H_o = \frac{1}{2} K_y$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{1}{2} K_y \mathbf{a}_x, & z > 0 \\ -\frac{1}{2} K_y \mathbf{a}_x, & z < 0 \end{cases}$$

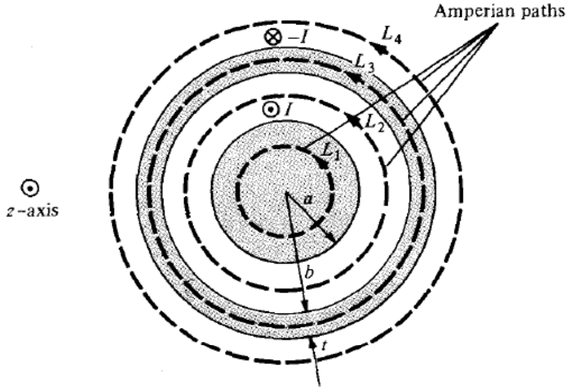
در حالت کلی، میدان مغناطیسی ناشی از صفحه بی‌نهایت به چگالی جریان صفحه‌ای k $\quad \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_n$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

شدت میدان مغناطیسی ناشی از خط کواکسیال به طول بی‌نهایت

four possible regions:

$$0 \le \rho \le a,\ a \le \rho \le b,\ b \le \rho \le b + t,\ \rho \ge b + t$$



$\boxed{0 \le \rho \le a}$

$$\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{enc} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2}\mathbf{a}_z, \qquad d\mathbf{S} = \rho\, d\phi\, d\rho\, \mathbf{a}_z$$

$$I_{enc} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I}{\pi a^2} \iint \rho\, d\phi\, d\rho = \frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2 = \frac{I\rho^2}{a^2}$$

$$H_\phi \int dl = H_\phi 2\pi\rho = \frac{I\rho^2}{a^2}$$

$$H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2}$$

$\boxed{a \le \rho \le b}$

$$\oint_{L_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{enc} = I$$

$$H_\phi 2\pi\rho = I$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

$\boxed{b \le \rho \le b + t}$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\phi \cdot 2\pi\phi = I_{enc}$$

$$I_{enc} = I + \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{J} = -\frac{I}{\pi[(b + t)^2 - b^2]}\mathbf{a}_z$$

$$I_{enc} = I - \frac{I}{\pi[(b + t)^2 - t^2]} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=b}^{\rho} \rho\, d\rho\, d\phi$$

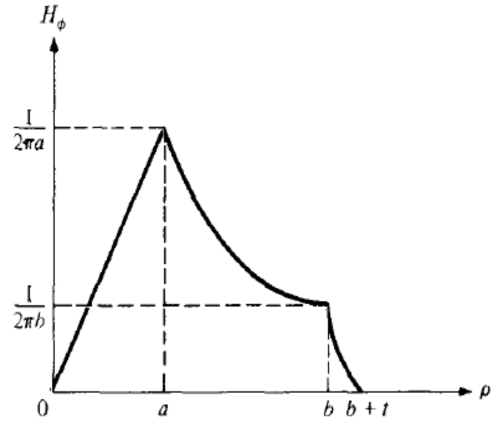
$$= I\left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt}\right]$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt}\right]$$

$\boxed{\rho \ge b + t}$

$$\oint_{L_4} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I - I = 0$$

$$H_\phi = 0$$



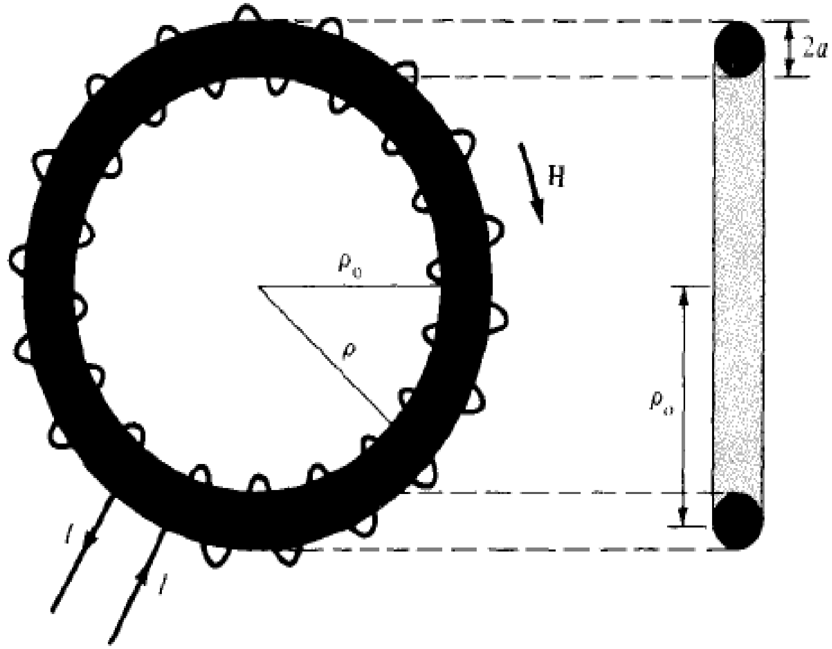
تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

ابعاد یک تروید در شکل زیر نمایش داده شده است. اگر تعداد دور این تروید برابر N و جریان آن برابر I باشد، شدت میدان مغناطیسی را در داخل و خارج آن حساب نمائید.

پاسخ :

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} \rightarrow H \cdot 2\pi\rho = NI$$



$$H = \frac{NI}{2\pi\rho}, \qquad \text{for } \rho_o - a < \rho < \rho_o + a$$

$$H_{\text{approx}} = \frac{NI}{2\pi\rho_o} = \frac{NI}{\ell}$$

Outside the toroid

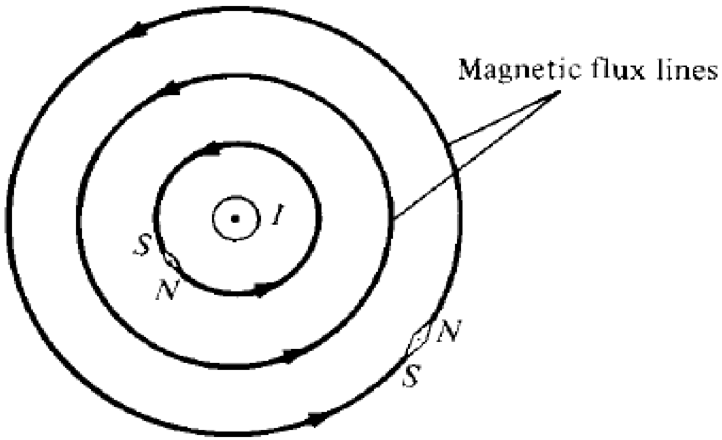
$NI - NI = 0$ and hence $H = 0$.

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

چگالی شار مغناطیسی

چگالی شار مغناطیسی همانند چگالی شار الکتریکی، متناسب با میدان مغناطیسی موجود در فضا می‌باشد:



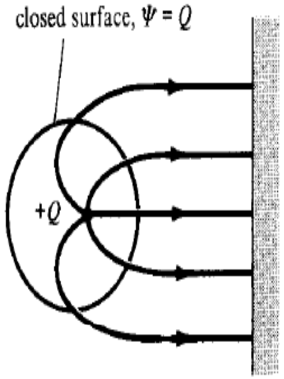
$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$$

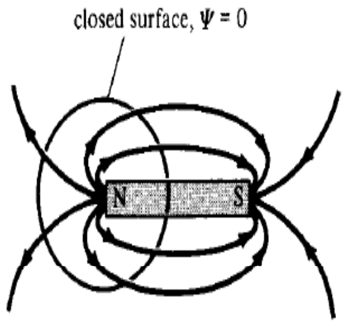
$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$$

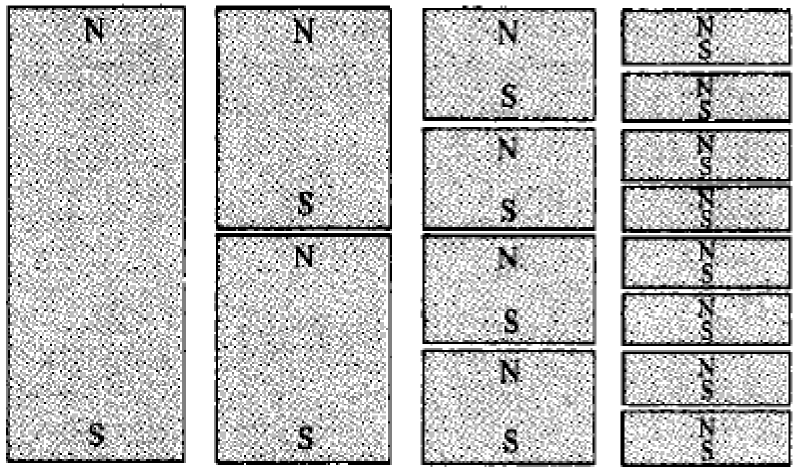
permeability of free space

شار مغناطیسی گذرنده از یک سطح

$$\underbrace{\Psi}_{\text{وبر}} = \int_S \underbrace{\mathbf{B}}_{\frac{\text{وبر}}{\text{متر مربع}}\ (\text{تسلا})} \cdot d\mathbf{S}$$







بار مغناطیسی همواره بصورت بار مثبت و منفی در کنار هم ظاهر می‌شود

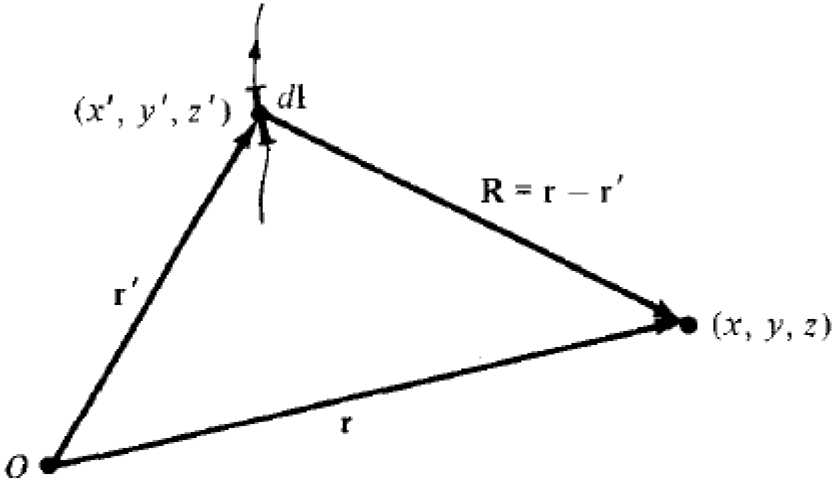
$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla\cdot\mathbf{B}\,dv = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تابع پتانسیل مغناطیسی برداری

$$\left.\begin{array}{r}\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0\\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0\end{array}\right\}\longrightarrow \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

جریان خطی	جریان سطحی	جریان حجمی
$\mathbf{A}=\int_L \frac{\mu_o I\,d\mathbf{l}}{4\pi R}$	$\mathbf{A}=\int_S \frac{\mu_o \mathbf{K}\,dS}{4\pi R}$	$\mathbf{A}=\int_v \frac{\mu_o \mathbf{J}\,dv}{4\pi R}$



$$\mathbf{H}=\int_L \frac{I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \qquad \text{(line current)}$$

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\int_L \frac{I\,d\mathbf{l}'\times\mathbf{R}}{R^3}$$

$$R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{(x-x')\mathbf{a}_x+(y-y')\mathbf{a}_y+(z-z')\mathbf{a}_z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}=-\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3}=-\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\qquad\left(=\frac{\mathbf{a}_R}{R^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{B}=-\frac{\mu_o}{4\pi}\int_L I\,d\mathbf{l}'\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\\ \nabla\times(f\mathbf{F})=f\nabla\times\mathbf{F}+(\nabla f)\times\mathbf{F}\end{array}\right]\longrightarrow \left.\begin{array}{l}d\mathbf{l}'\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{R}\nabla\times d\mathbf{l}'-\nabla\times\left(\frac{d\mathbf{l}'}{R}\right)\\ d\mathbf{l}'\text{ is a function of }(x',y',z'),\ \nabla\times d\mathbf{l}'=0\end{array}\right]\longrightarrow d\mathbf{l}'\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla\times\frac{d\mathbf{l}'}{R}$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\int_L\frac{\mu_o I\,d\mathbf{l}'}{4\pi R}\longrightarrow \mathbf{A}=\int_L\frac{\mu_o I\,d\mathbf{l}'}{4\pi R}$$

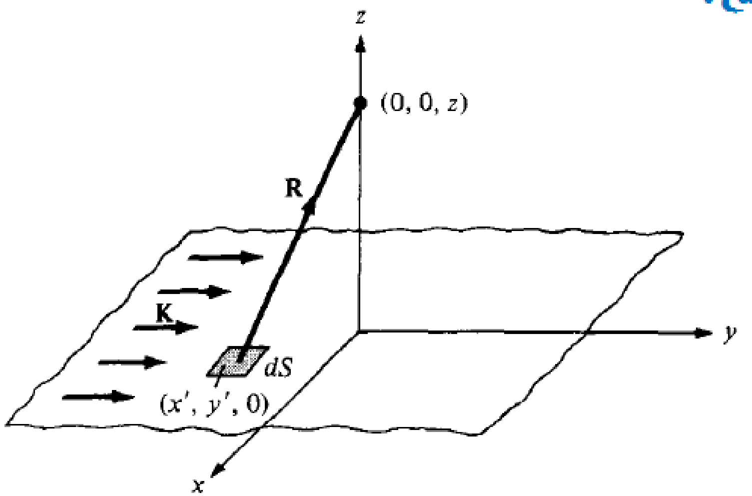
تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

با استفاده از تابع پتانسیل مغناطیسی نشان دهید اگر صفحه $z = 0$ حامل جریان سطح به چگالی $k=k_y a_y$ باشد، شدت میدان مغناطیسی در یک نقطه دلخواه از فضا برابر خواهد بود با :

$$\mathbf{H} = \begin{cases} 1/2\, K_y \mathbf{a}_x, & z > 0 \\ -1/2\, K_y \mathbf{a}_x, & z < 0 \end{cases}$$

پاسخ :



$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_o \mathbf{K}\, dS}{4\pi R}$$

$$\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y,\ dS = dx'\, dy'$$

$$\text{for } z > 0$$

$$R = |\mathbf{R}| = |(0, 0, z) - (x', y', 0)| = [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2}$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_o K_y\, dx'\, dy'\, \mathbf{a}_y}{4\pi[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2}}$$

$$d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial z} d A_y\, \mathbf{a}_x = \frac{\mu_o K_y z\, dx'\, dy'\, \mathbf{a}_x}{4\pi[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'\, dy'}{[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\rho'\, d\phi'\, d\rho'}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_o K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} 2\pi \int_0^{\infty} [(\rho')^2 + z^2]^{-3/2}\, 1/2\, d[(\rho')^2]$$

$$= \frac{\mu_o K_y z \mathbf{a}_x}{2} \left. \frac{-1}{[(\rho')^2 + z^2)^{1/2}} \right|_{\rho'=0}^{\infty}$$

$$= \frac{\mu_o K_y \mathbf{a}_x}{2}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} = \frac{K_y}{2} \mathbf{a}_x, \qquad \text{for } z > 0$$

$$\mathbf{H} = -\frac{K_y}{2} \mathbf{a}_x, \qquad \text{for } z < 0$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

معادلات پواسن در مغناطیس

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

فرض $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_o \nabla \times \mathbf{H}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_o \mathbf{J} \qquad \textit{vector Poisson's equation}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_o J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_o J_y \qquad \textit{scalar Poisson's equations} \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_o J_z \end{aligned}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_o} \int_S \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$$

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

نیروی وارد بر یک ذره باردار

اگر بار Q با سرعت u در میدان مغناطیسی B حرکت کند، بر آن نیرویی وارد می‌شود که مقدار این نیرو برابر است با:

$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad \textit{Lorentz force equation}$$

Newton's second law of motion $\longrightarrow$ $\mathbf{F} = m\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = Q\,(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$

نیروی وارد بر یک المان جریان دار

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{u}$$

$$I\,d\mathbf{l} = \mathbf{K}\,dS = \mathbf{J}\,dv$$

$$I\,d\mathbf{l} = \frac{dQ}{dt}\,d\mathbf{l} = dQ\,\frac{d\mathbf{l}}{dt} = dQ\,\mathbf{u} \longrightarrow I\,d\mathbf{l} = \rho_v \mathbf{u}\,dv = dQ\,\mathbf{u}$$

$$d\mathbf{F} = I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = \oint_L I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

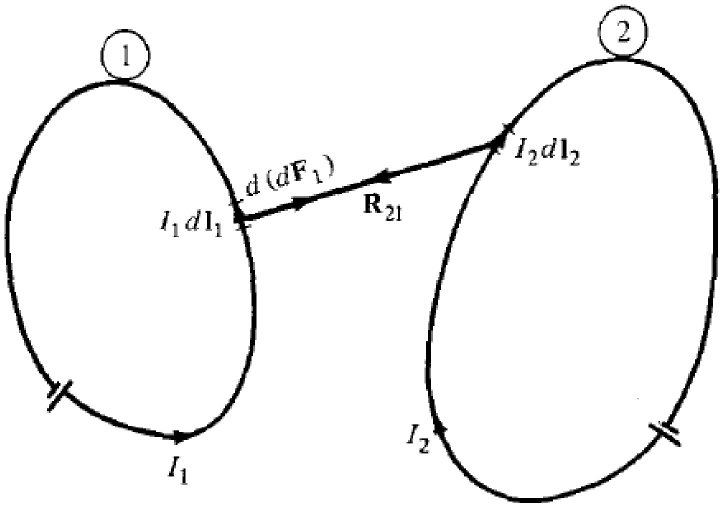
$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{K}\,dS \times \mathbf{B} \quad \text{or} \quad \mathbf{F} = \int_v \mathbf{J}\,dv \times \mathbf{B}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

نیروی متقابل مابین دو المان جریان دار



$d(d\mathbf{F}_1)$ نیروی وارد بر المان $I_1\, d\mathbf{l}_1$ از سیم 1 در اثر میدان مغناطیسی ممان $d\mathbf{B}_2$ در اثر المان $I_2\, d\mathbf{l}_2$ از سیم 2

$$d(d\mathbf{F}_1) = I_1\, d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{B}_2$$

قانون بیوساوار

$$d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2\, d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_{R_{21}}}{4\pi R_{21}^2}$$

$$d(d\mathbf{F}_1) = \frac{\mu_0 I_1\, d\mathbf{l}_1 \times (I_2\, d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_{R_{21}})}{4\pi R_{21}^2}$$

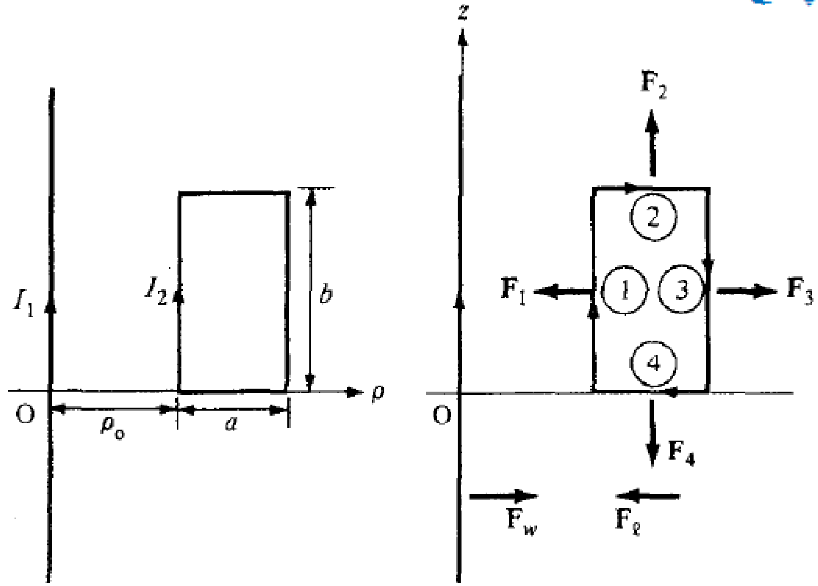
$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{a}_{R_{21}})}{R_{21}^2}$$

مثال

یک سیم مستطیلی که حامل جریان I_2 است مطابق شکل، بصورت موازی با یک یسم طویل که دارای جریان I_1 است، قرار گرفته است. نشان دهید نیروی بین سیم طویل و سیم مستطیلی با رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_o I_1 I_2 b}{2\pi}\left[\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho_o + a}\right]\mathbf{a}_\rho \text{ N}$$

پاسخ:



$$\mathbf{F}_\ell = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = I_2 \oint d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi\rho_o}\mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{F}_1 = I_2 \int d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = I_2 \int_{z=0}^{b} dz\, \mathbf{a}_z \times \frac{\mu_o I_1}{2\pi\rho_o}\mathbf{a}_\phi$$

$$= -\frac{\mu_o I_1 I_2 b}{2\pi\rho_o}\mathbf{a}_\rho \qquad \text{(attractive)}$$

$$\mathbf{F}_3 = I_2 \int d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = I_2 \int_{z=b}^{0} dz\, \mathbf{a}_z \times \frac{\mu_o I_1}{2\pi(\rho_o + a)}\mathbf{a}_\phi$$

$$= \frac{\mu_o I_1 I_2 b}{2\pi(\rho_o + a)}\mathbf{a}_\rho \qquad \text{(repulsive)}$$

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \int_{\rho=\rho_o}^{\rho_o+a} d\rho\, \mathbf{a}_\rho \times \frac{\mu_o I_1\, \mathbf{a}_\phi}{2\pi\rho}$$

$$= \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{\rho_o + a}{\rho_o}\mathbf{a}_z \qquad \text{(parallel)}$$

$$\mathbf{F}_4 = I_2 \int_{\rho=\rho_o+a}^{\rho_o} d\rho\, \mathbf{a}_\rho \times \frac{\mu_o I_1\, \mathbf{a}_\phi}{2\pi\rho}$$

$$= -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{\rho_o + a}{\rho_o}\mathbf{a}_z \qquad \text{(parallel)}$$

$$\mathbf{F}_\ell = \frac{\mu_o I_1 I_2 b}{2\pi}\left[\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho_o + a}\right](-\mathbf{a}_\rho)$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

گشتاور مغناطیسی

گشتاور مغناطیسی متناسب با نیروی چرخاننده‌ای است که بر یک جسم موجود در یک میدان مغناطیسی وارد می‌شود

مقدار گشتاور برابر است با حاصلضرب خارجی نیروی وارد بر محل و بازوی گشتاور که در حقیقت همان فاصله مابین اعمال نیرو و تکیه‌گاه حرکت است.

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = I\int_2^3 d\mathbf{l} \times \mathbf{B} + I\int_4^1 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$= I\int_0^{\ell} dz\,\mathbf{a}_z \times \mathbf{B} + I\int_{\ell}^0 dz\,\mathbf{a}_z \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_0 = 0$$

$$|\mathbf{T}| = |\mathbf{F}_0|\, w \sin\alpha$$

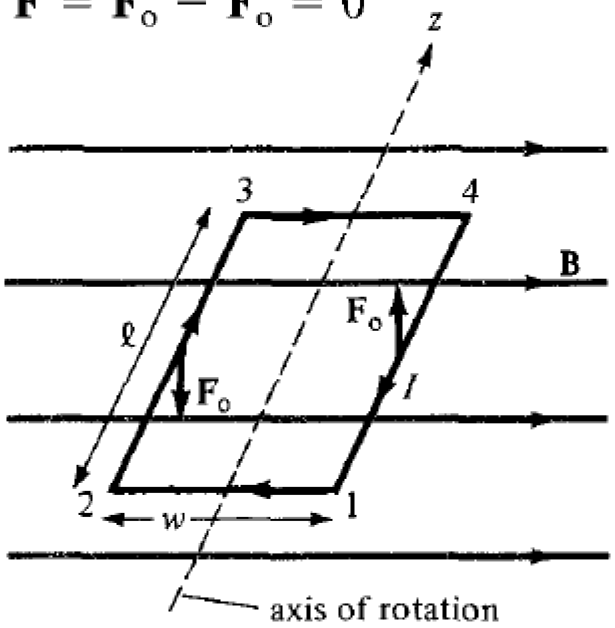
$$T = BI\ell w \sin\alpha$$

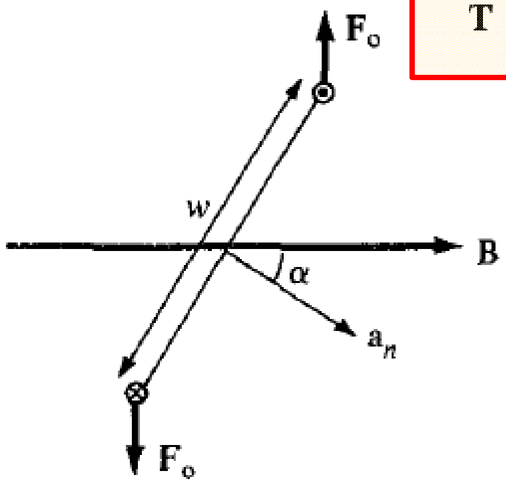
$$T = BIS \sin\alpha$$

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_n$$

ممان دوقطبی مغناطیسی

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$



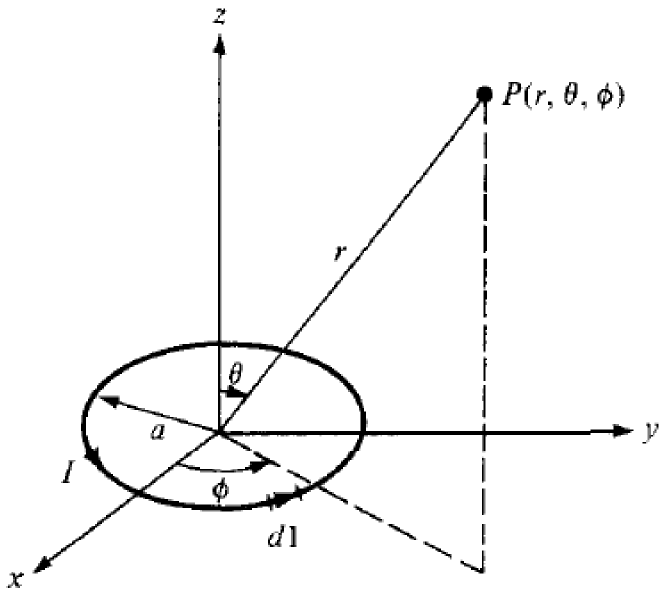


الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دوقطبی مغناطیسی

یک بار مغناطیسی شمال قطب مثبت و منفی و یا یک حلقه جریان کوچک معمولا دوقطبی مغناطیسی نامیده می‌شود



$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}}{r}$$

($r \gg a$, so that the loop appears small at the observation point),
$\mathbf{A}$ has only ϕ-component

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o I \pi a^2 \sin\theta \, \mathbf{a}_\phi}{4\pi r^2}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o \, \mathbf{m} \times \mathbf{a}_r}{4\pi r^2}$$

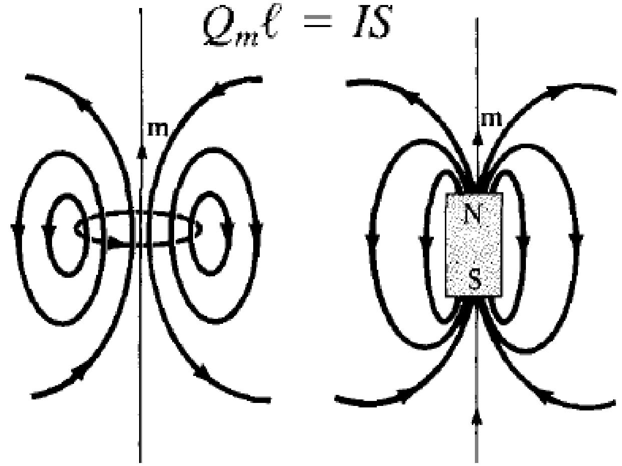
$$\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \sin\theta \, \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o m}{4\pi r^3}(2\cos\theta \, \mathbf{a}_r + \sin\theta \, \mathbf{a}_\theta)$$

$$Q_m \ell = IS$$

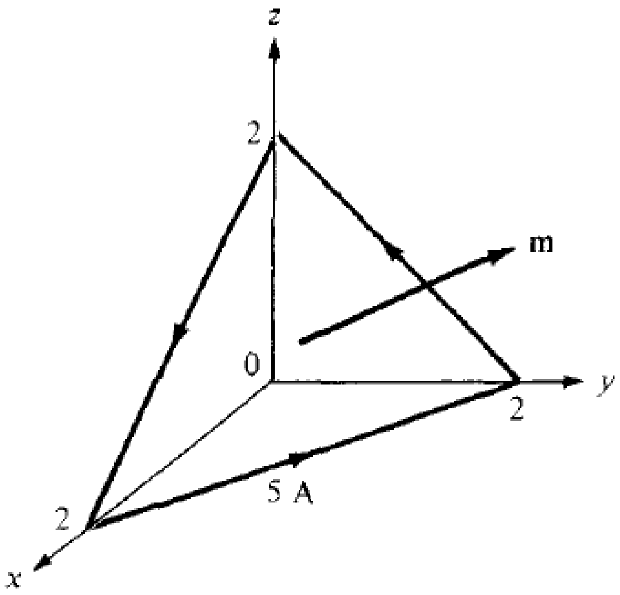


a small current loop with $\mathbf{m} = IS$ a bar magnet with $\mathbf{m} = Q_m \ell$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

ممان مغناطیسی حلقه مثلثی نشان داده شده در شکل زیر را محاسبه کنید.



پاسخ :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$D = -(A^2 + B^2 + C^2)$$

$$(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2) \longrightarrow x + y + z = 2$$

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{a}_n$$

$$S = \text{loop area} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})(2\sqrt{2})\sin 60^\circ$$
$$= 4 \sin 60^\circ$$

$$f(x,y,z) = x + y + z - 2 = 0$$

$$\mathbf{a}_n = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \pm \frac{(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{m} = 5\,(4 \sin 60^\circ)\frac{(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)}{\sqrt{3}}$$
$$= 10(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)\ \mathrm{A \cdot m^2}$$

مثال

حلقه جریان کوچک L_1 با مقدار ممان مغناطیسی $5\mathbf{a}_z$ A/m^2 در مبداء قرار گرفته است. اگر حلقه جریان کوچک دیگری با نام L_2 با مقدار ممان مغناطیسی $3\mathbf{a}_y$ A/m^2 در نقطه $(4, -3, 10)$ قرار گرفته باشد، گشتاور ایجاد شده بر روی L_2 بدست آورید.

پاسخ :

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{m}_2 \times \mathbf{B}_1$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o m_1}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \sin\theta\,\mathbf{a}_\theta)$$

$$\mathbf{m}_2 = 3\mathbf{a}_y = 3\,(\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{a}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi)$$

At $(4, -3, 10)$,

$$r = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\rho}{z} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{-3}{4} \rightarrow \sin\phi = \frac{-3}{5}, \qquad \cos\phi = \frac{4}{5}$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5}{4\pi\, 625\,\sqrt{5}}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\mathbf{a}_r + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{a}_\theta\right) = \frac{10^{-7}}{625}(4\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta)$$

$$\mathbf{m}_2 = 3\left[-\frac{3\mathbf{a}_r}{5\sqrt{5}} - \frac{6\mathbf{a}_\theta}{5\sqrt{5}} + \frac{4\mathbf{a}_\phi}{5}\right]$$

$$\mathbf{T} = \frac{10^{-7}(3)}{625\,(5\sqrt{5})}(-3\mathbf{a}_r - 6\mathbf{a}_\theta + 4\sqrt{5}\mathbf{a}_\phi) \times (4\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\phi)$$
$$= 4.293 \times 10^{-11}(-6\mathbf{a}_r + 38.78\mathbf{a}_\theta + 24\mathbf{a}_\phi)$$
$$= -0.258\mathbf{a}_r + 1.665\mathbf{a}_\theta + 1.03\mathbf{a}_\phi \text{ nN}\cdot\text{m}$$

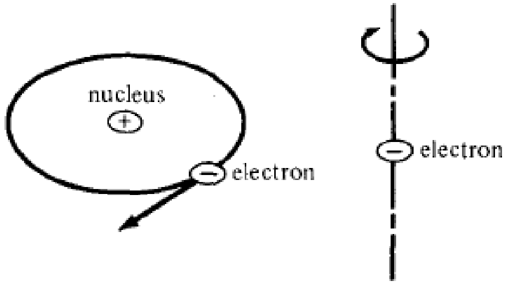
الکترومغناطیس مهندسی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

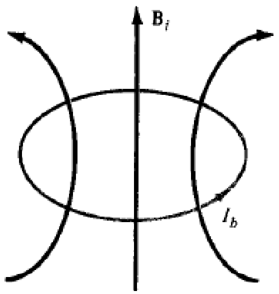
مواد مغناطیسی

در حالت کلی، مواد مغناطیسی بصورت الکترونهایی که هم به دور هسته و هم به دور خود می‌چرخند، در نظر گرفته می‌شود. این مدل همان مدل دو قطبی مغناطیسی است که می‌تواند بصورت یک حلقه جریان کوچک نیز مدل شود.

مغناطیس شدگی M برابر مقدار ممان دو قطبی مغناطیسی در واحد حجم می‌باشد.

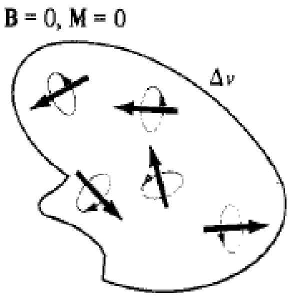


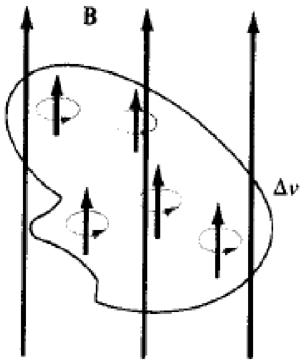
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{m}_k}{\Delta v}$$



$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{a}_r}{4\pi r^2} \\ d\mathbf{m} &= \mathbf{M}\, dv' \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} dv' = \frac{\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} dv'$$

$$\left.\begin{aligned} R &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2} \\ \nabla\left(\frac{1}{R}\right) &= -\frac{(x-x')\mathbf{a}_x + (y-y')\mathbf{a}_y + (z-z')\mathbf{a}_z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \nabla' \frac{1}{R}$$





$$\mathbf{M} \times \nabla' \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \nabla' \times \mathbf{M} - \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R} dv'$$

$$\int_{v'} \nabla' \times \mathbf{F}\, dv' = -\oint_{S'} \mathbf{F} \times d\mathbf{S}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{a}_n}{R} dS' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\mathbf{J}_b\, dv'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{K}_b\, dS'}{R} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K}\, dS}{4\pi R} \qquad \mathbf{A} = \int_v \frac{\mu_0 \mathbf{J}\, dv}{4\pi R} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{a}_n \;\; \boxed{\rho_{ps}} \qquad \mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \;\; \boxed{\rho_{pv}}$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

پرمابلیته و حساسیت مغناطیسی

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$$

In free space, $\mathbf{M} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \text{or} \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_o}\right) = \mathbf{J}_f$$

$\mathbf{J}_f$ is the free current volume density

In a material medium $\mathbf{M} \neq 0$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_o}\right) = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b = \mathbf{J}$$
$$= \nabla \times \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

حساسیت مغناطیسی

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

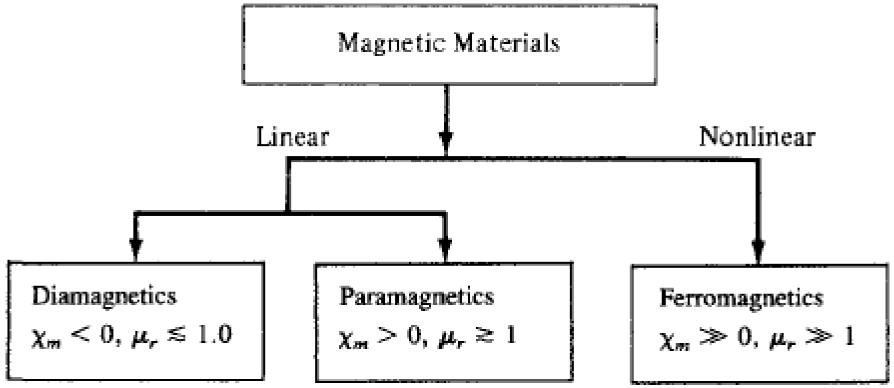
$$\mathbf{B} = \mu_o(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_o \mu_r \mathbf{H}$$

پرمابلیته

$$\mu_r = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_o}$$

پرمابلیته نسبی



Material	μ_r
Diamagnetics	
Bismuth	0.999833
Mercury	0.999968
Silver	0.9999736
Lead	0.9999831
Copper	0.9999906
Water	0.9999912
Hydrogen (s.t.p.)	$\simeq$ 1.0
Paramagnetics	
Oxygen (s.t.p.)	0.999998
Air	1.00000037
Aluminum	1.000021
Tungsten	1.00008
Platinum	1.0003
Manganese	1.001
Ferromagnetics	
Cobalt	250
Nickel	600
Soft iron	5000
Silicon-iron	7000

تهیه و تنظیم: سامان راجی

دسته بندی مواد مغناطیسی

Diamagnetics

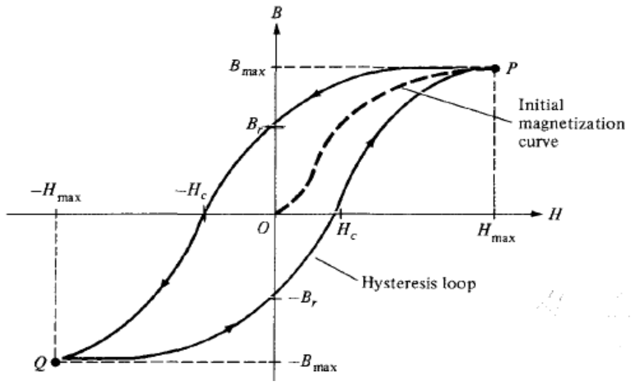
دیا مگنتیک به دسته‌ای از مواد اطلاق می‌شود که در آنها حرکت الکترونها به دور هسته و حرکت چرخشی آنها به دور خودشان اثر همدیگر را خنثی کرده و در نتیجه ممان مغناطیسی ذاتی آنها برابر صفر می‌باشد. این دسته از مواد بطور ضعیف تحت تاثیر میدانهای مغناطیسی قرار می‌گیرند.

Paramagnetics

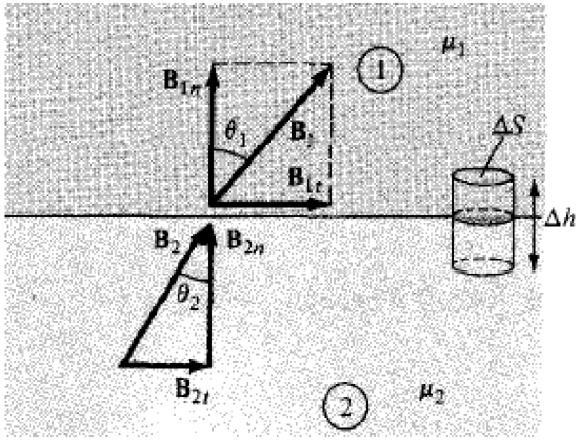
در مواد پارامگنتیک برخلاف مواد دیا مگنتیک، حرکت الکترونها به دور هسته و حرکت چرخشی آنها به دور خودشان اثر همدیگر را بطور کامل خنثی نکرده و در نتیجه ممان مغناطیسی آنها صفر نمی‌باشد. این دسته از مواد بر خلاف دیامگنتیکها وابستگی شدیدی به حرارت دارند.

Ferromagnetics

مواد فرومگنتیک موادی هستند که اولا به شدت تحت تاثیر میدانهای مغناطیسی قرار می‌گیرند. ثانیا اثر میدان مغناطیسی را حتی پس از دور کردن منبع مغناطیسی حفظ می‌کنند. این دسته از مواد اثر فرومغناطیسی خود را در اثر بالا رفتن دما از یک حد بیشتر از دست می‌دهند. اثر فرو مغناطیسی این دسته دارای اثر غیر خطی است. بعبارت دیگر ضریب پرمابیلیته این مواد دارای یک منحنی غیر خطی مطابق شکل زیر است که سبب بوجود آمدن پس ماند مغناطیسی در این مواد می‌شود.



شرایط مرزی مغناطیسی



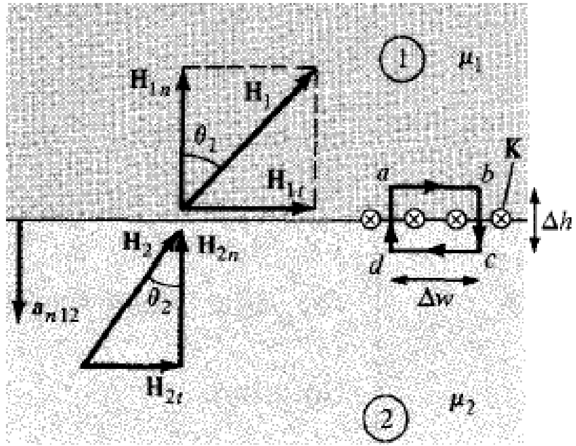
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$\Delta h \to 0$$

$$B_{1n}\,\Delta S - B_{2n}\,\Delta S = 0$$

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n} \quad \text{or} \quad \mu_1 \mathbf{H}_{1n} = \mu_2 \mathbf{H}_{2n}$$



$$K \cdot \Delta w = H_{1t} \cdot \Delta w + H_{1n} \cdot \frac{\Delta h}{2} + H_{2n} \cdot \frac{\Delta h}{2}$$

$$- H_{2t} \cdot \Delta w - H_{2n} \cdot \frac{\Delta h}{2} - H_{1n} \cdot \frac{\Delta h}{2}$$

$$\Delta h \to 0$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = K$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t} \quad \text{or} \quad \frac{\mathbf{B}_{1t}}{\mu_1} = \frac{\mathbf{B}_{2t}}{\mu_2}$$

تهیه و تنظیم:
سامان راجی

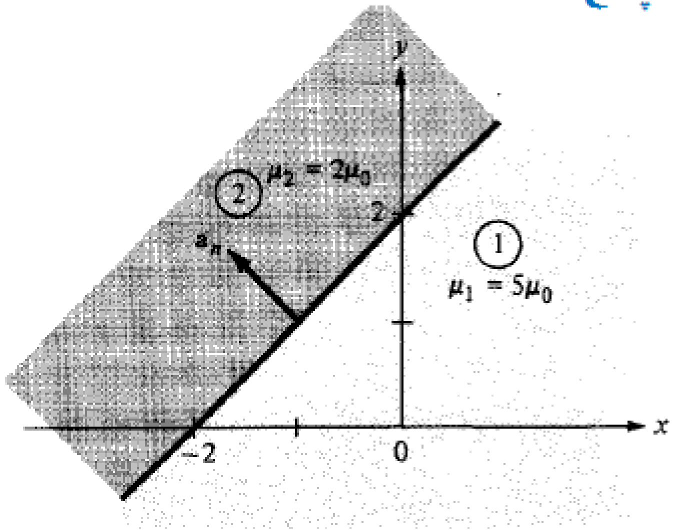
مثال

مطابق شکل، شدت میدان مغناطیسی در ناحیه $y - x - 2 \le 0$ با معادله $\mathbf{H}_1 = -2\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ مشخص شده است. با توجه به مشخصات داده شده، ممان مغناطیسی و چگالی شار مغناطیسی در محیط ۱ و همچنین شدت میدان مغناطیسی و چگالی شار مغناطیسی در محیط ۲ را بیابید.

پاسخ :

$$y - x - 2 = 0$$

$y - x - 2 \ge 0$ $\boxed{2}$ $\qquad$ $y - x - 2 \le 0$ $\boxed{1}$



$$\mathbf{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_x}{\sqrt{2}}$$

(a)
$$\mathbf{M}_1 = \chi_{m1}\mathbf{H}_1 = (\mu_{r1} - 1)\,\mathbf{H}_1 = (5 - 1)(-2, 6, 4)$$
$$= -8\mathbf{a}_x + 24\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1\mathbf{H}_1 = \mu_o\mu_{r1}\mathbf{H}_1 = 4\pi \times 10^{-7}(5)(-2, 6, 4)$$
$$= -12.57\mathbf{a}_x + 37.7\mathbf{a}_y + 25.13\mathbf{a}_z\ \mu\text{Wb/m}^2$$

(b)
$$\mathbf{H}_{1n} = (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{a}_n)\mathbf{a}_n = \left[(-2, 6, 4) \cdot \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}}\right]\frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}}$$
$$= -4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{1n} + \mathbf{H}_{1t}$$

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_{1n} = (-2, 6, 4) - (-4, 4, 0)$$
$$= 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H}_{2t} = \mathbf{H}_{1t} = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n} \rightarrow \mu_2\mathbf{H}_{2n} = \mu_1\mathbf{H}_{1n}$$

$$\mathbf{H}_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\mathbf{H}_{1n} = \frac{5}{2}(-4\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y) = -10\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2n} + \mathbf{H}_{2t} = -8\mathbf{a}_x + 12\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_2\mathbf{H}_2 = \mu_o\mu_{r2}\mathbf{H}_2 = (4\pi \times 10^{-7})(2)(-8, 12, 4)$$
$$= -20.11\mathbf{a}_x + 30.16\mathbf{a}_y + 10.05\mathbf{a}_z\ \mu\text{Wb/m}^2$$

اندوکتانس

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = N\Psi \\ \lambda \propto I \\ \lambda = LI\end{array}\right] \Rightarrow L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I}$$

شار پیوندی

اندوکتانس خودی

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow L = \frac{2W_m}{I^2}$$

$$\Psi_{12} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}$$

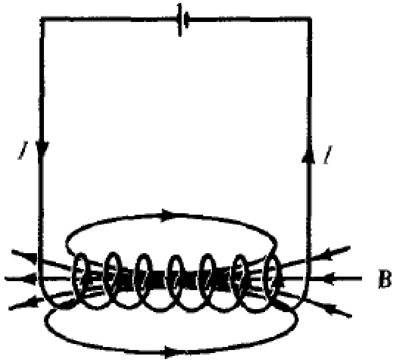
$$\lambda_{12} = N_1\Psi_{12}$$

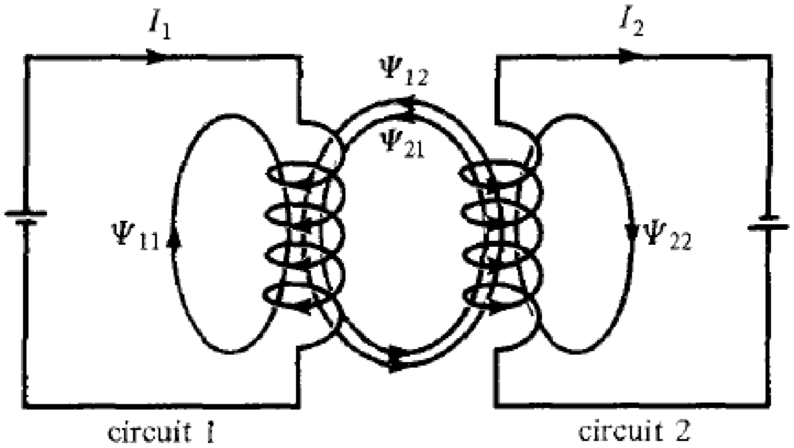
$$M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_2} = \frac{N_1\Psi_{12}}{I_2} \qquad L_1 = \frac{\lambda_{11}}{I_1} = \frac{N_1\Psi_1}{I_1}$$

اندوکتانس متقابل $M_{12} = M_{21}$

$$M_{21} = \frac{\lambda_{21}}{I_1} = \frac{N_2\Psi_{21}}{I_1} \qquad L_2 = \frac{\lambda_{22}}{I_2} = \frac{N_2\Psi_2}{I_2}$$

$$W_m = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \pm M_{12}I_1I_2$$

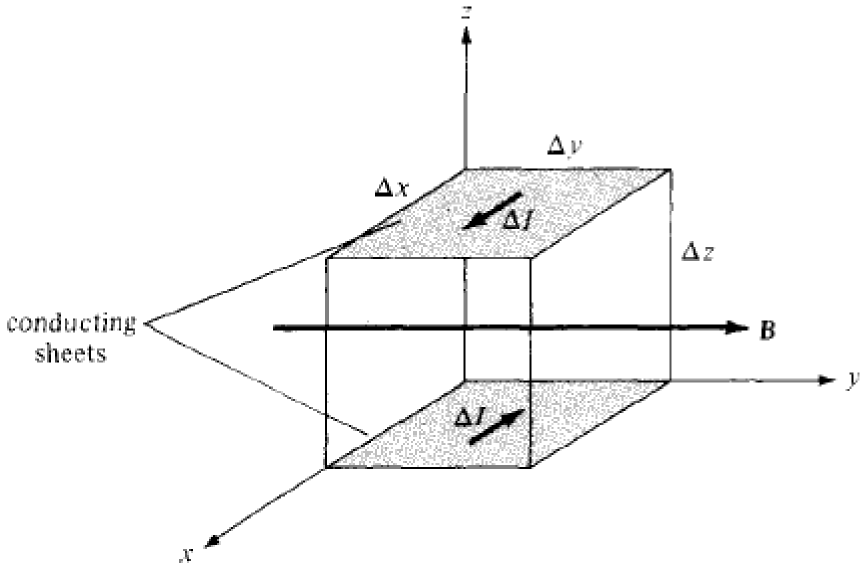




- دستگاه مختصات مناسب را در نظر بگیرید
- فرض کنید جریان گذرنده از سیم‌پیچ I می‌باشد.
- با استفاده از قانون بیوساوار، شدت میدان مغناطیسی و به تبع آن شار مغناطیسی گذرنده از سطح مقطع سیم پیچ را بدست آورید.
- با استفاده از فرمول $L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I}$ اندوکتانس سیم پیچ را محاسبه کنید.

تهیه و تنظیم: سامان راجی

انرژی میدان مغناطیسی



$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\Delta L = \frac{\Delta \Psi}{\Delta I} = \frac{\mu H \, \Delta x \, \Delta z}{\Delta I}$$

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \Delta L \, \Delta I^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 \, \Delta v$$

چگالی انرژی مغناطیسی

$$w_m = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta W_m}{\Delta v} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{B^2}{2\mu}$$

$$W_m = \int w_m \, dv$$

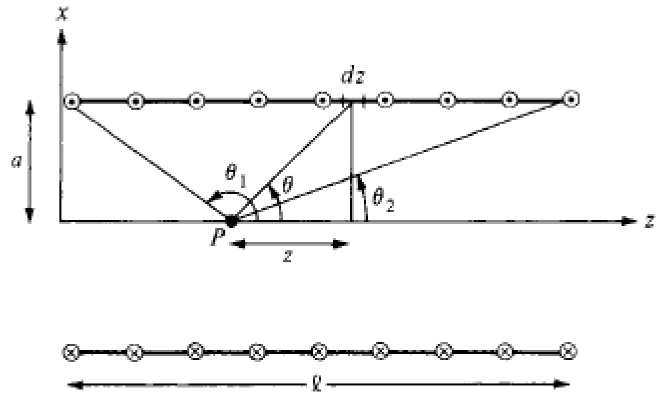
$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv = \frac{1}{2} \int \mu H^2 \, dv$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

اندوکتانس خودی یک سلونوئید با طول بی‌نهایت را بدست آورید.

پاسخ :



$$dH_z = \frac{I\,dl\,a^2}{2[a^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{Ia^2 n\,dz}{2[a^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$dl = n\,dz = (N/\ell)\,dz$$

$$\tan\theta = a/z$$

$$dz = -a\,\mathrm{cosec}^2\theta\,d\theta = -\frac{[z^2 + a^2]^{3/2}}{a^2}\sin\theta\,d\theta$$

$$dH_z = -\frac{nI}{2}\sin\theta\,d\theta$$

$$H_z = -\frac{nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta$$

$$\mathbf{H} = \frac{nI}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\,\mathbf{a}_z$$

$$n = N/\ell \;\longrightarrow\; \mathbf{H} = \frac{NI}{2\ell}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\,\mathbf{a}_z$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\ell/2}{[a^2 + \ell^2/4]^{1/2}} = -\cos\theta_1$$

$$\mathbf{H} = \frac{In\ell}{2[a^2 + \ell^2/4]^{1/2}}\,\mathbf{a}_z$$

If $\ell \gg a$ or $\theta_2 \simeq 0°$, $\theta_1 \simeq 180°$,

$$\mathbf{H} = nI\mathbf{a}_z = \frac{NI}{\ell}\,\mathbf{a}_z$$

$$B = \mu H = \mu In$$

$$\Psi = BS = \mu InS$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\ell} = n\Psi = \mu n^2 IS$$

شار پیوندی در واحد طول

$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\lambda'}{I} = \mu n^2 S$$

$$L' = \mu n^2 S \quad \mathrm{H/m}$$

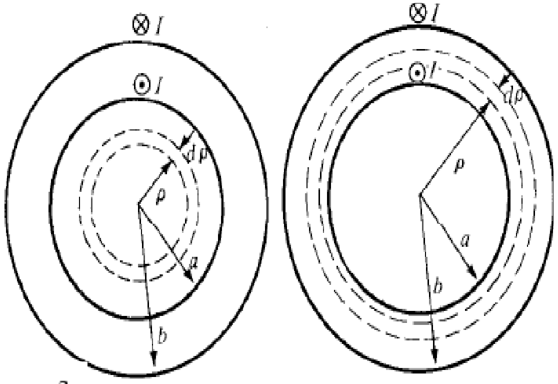
تهیه و تنظیم: سامان راجی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مثال

اندوکتانس خودی یک کابل کواکسیال به طول بی‌نهایت و شعاع داخلی a و شعاع خارجی b را بدست آورید.

پاسخ:



$$0 \le \rho \le a$$

$$\oint_{L_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{J} = \frac{I}{\pi a^2}\,\mathbf{a}_z, \qquad d\mathbf{S} = \rho\, d\phi\, d\rho\, \mathbf{a}_z$$

$$I_{\text{enc}} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I}{\pi a^2}\iint \rho\, d\phi\, d\rho = \frac{I}{\pi a^2}\pi\rho^2 = \frac{I\rho^2}{a^2}$$

$$H_\phi \int dl = H_\phi\, 2\pi\rho = \frac{I\rho^2}{a^2} \qquad H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2}$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu I \rho}{2\pi a^2}\,\mathbf{a}_\phi$$

$$d\Psi_1 = B_1\, d\rho\, dz = \frac{\mu I \rho}{2\pi a^2}\, d\rho\, dz$$

$$d\lambda_1 = d\Psi_1 \cdot \frac{I_{\text{enc}}}{I} = d\Psi_1 \cdot \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2}$$

$$d\lambda_1 = \frac{\mu I \rho\, d\rho\, dz}{2\pi a^2} \cdot \frac{\rho^2}{a^2}$$

$$\lambda_1 = \int_{\rho=0}^{a}\int_{z=0}^{\ell} \frac{\mu I \rho^3\, d\rho\, dz}{2\pi a^4} = \frac{\mu I \ell}{8\pi}$$

$$L_{\text{in}} = \frac{\lambda_1}{I} = \frac{\mu\ell}{8\pi} \qquad L'_{\text{in}} = \frac{L_{\text{in}}}{\ell} = \frac{\mu}{8\pi}$$

$$a \le \rho \le b$$

$$\oint_{L_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} = I$$

$$H_\phi 2\pi\rho = I$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\,\mathbf{a}_\phi$$

$$d\Psi_2 = B_2\, d\rho\, dz = \frac{\mu I}{2\pi\rho}\, d\rho\, dz$$

$$\lambda_2 = \Psi_2 = \int_{\rho=a}^{b}\int_{z=0}^{\ell} \frac{\mu I\, d\rho\, dz}{2\pi\rho} = \frac{\mu I \ell}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$L_{\text{ext}} = \frac{\lambda_2}{I} = \frac{\mu\ell}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

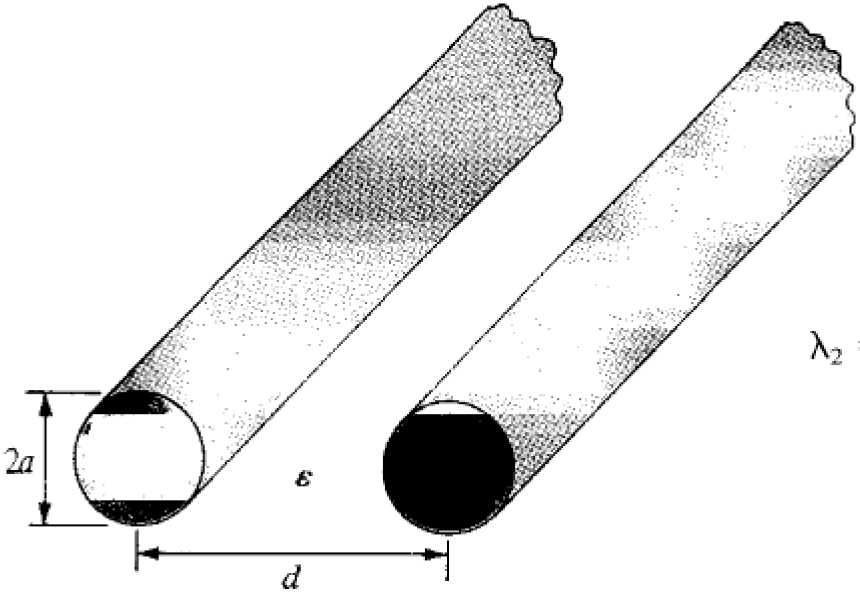
$$L = L_{\text{in}} + L_{\text{ext}} = \frac{\mu\ell}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right]$$

$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right]$$

مثال

اندوکتانس واحد طول یک خط انتقال دو سیمه به طول بی‌نهایت و شعاع a و فاصله جدایی d را بدست آورید.

پاسخ :



$$\lambda_1 = \frac{\mu I \ell}{8\pi}$$

$$\lambda_2 = \Psi_2 = \int_{\rho=a}^{d-a} \int_{z=0}^{\ell} \frac{\mu I}{2\pi\rho}\, d\rho\, dz = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\mu I \ell}{8\pi} + \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$\lambda = 2(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\mu I \ell}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln \frac{d-a}{a}\right] = LI$$

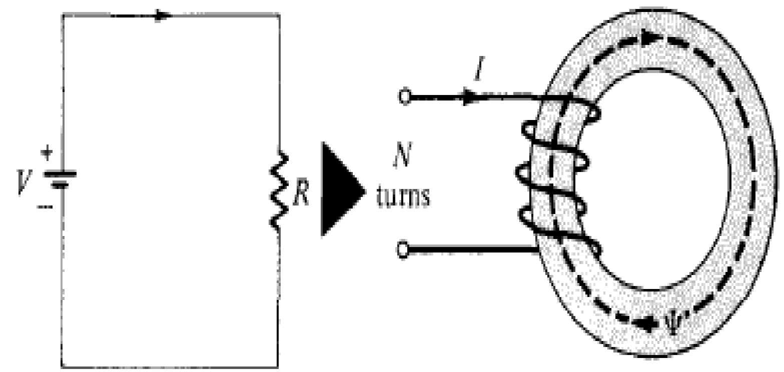
$$L' = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a}\right]$$

تهیه و تنظیم: سامان راجی

مدارهای مغناطیسی

مفهوم مدارهای مغناطیسی که بر پایه حل مسائل مغناطیسی بنا شده است، برای تحلیل قطعات مغناطیسی مانند موتورها، ژنراتورها، ترانسفورماتورها و رله‌ها بکار گرفته می‌شود.با در نظرگیری پارامترهای معادل بین مدارهای الکتریکی و مغناطیسی طبق جدول زیر، امکان تحلیل اینگونه مدارها فراهم می‌شود.

Electric	Magnetic
Conductivity σ	Permeability μ
Field intensity E	Field intensity H
Current $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	Magnetic flux $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Current density $J = \dfrac{I}{S} = \sigma E$	Flux density $B = \dfrac{\Psi}{S} = \mu H$
Electromotive force (emf) V	Magnetomotive force (mmf) $\mathcal{F}$
Resistance R	Reluctance $\mathcal{R}$
Conductance $G = \dfrac{1}{R}$	Permeance $\mathcal{P} = \dfrac{1}{\mathcal{R}}$
Ohm's law $R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{\ell}{\sigma S}$	Ohm's law $\mathcal{R} = \dfrac{\mathcal{F}}{\Psi} = \dfrac{\ell}{\mu S}$
or $V = E\ell = IR$	or $\mathcal{F} = H\ell = \Psi\mathcal{R} = NI$
Kirchoff's laws:	Kirchhoff's laws:
$\Sigma I = 0$	$\Sigma \Psi = 0$
$\Sigma V - \Sigma RI = 0$	$\Sigma \mathcal{F} - \Sigma \mathcal{R}\Psi = 0$



$$\mathcal{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

نیروی محرکه مغناطیسی

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$$

مقاومت مغناطیسی (رلوکتانس)

$$\mathcal{F} = \Psi\mathcal{R}$$

افت میدان مغناطیسی (معادل قانون اهم)

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \cdots = \Psi_n$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \cdots + \mathcal{F}_n$$

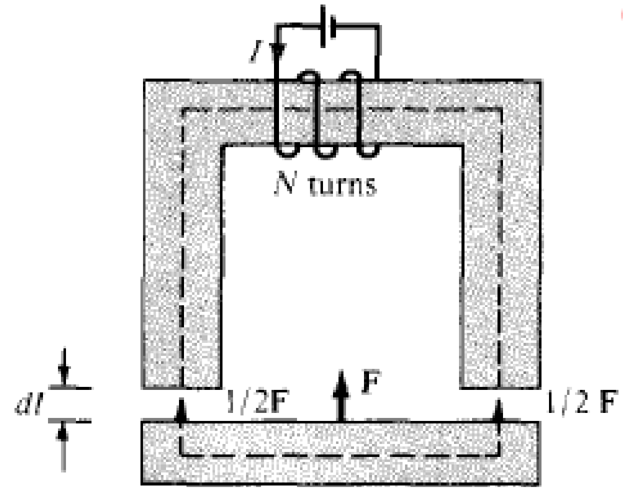
عناصر سری

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \cdots + \Psi_n$$
$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \cdots = \mathcal{F}_n$$

عناصر موازی

تهیه و تنظیم: سامان راجی

نیرو مابین دو قطعه مغناطیسی



$$B_{1n} = B_{2n}$$

میدان مغناطیسی فاصله هوایی — میدان مغناطیسی درون آهن

$$W_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dv = \frac{1}{2}\int \mu H^2\,dv \;\Longrightarrow\; -F\,dl = dW_m = 2\left[\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}S\,dl\right]$$

$$F = -2\left(\frac{B^2 S}{2\mu_0}\right)$$

نیروی مغناطیسی در جهت کاهش فاصله هوایی

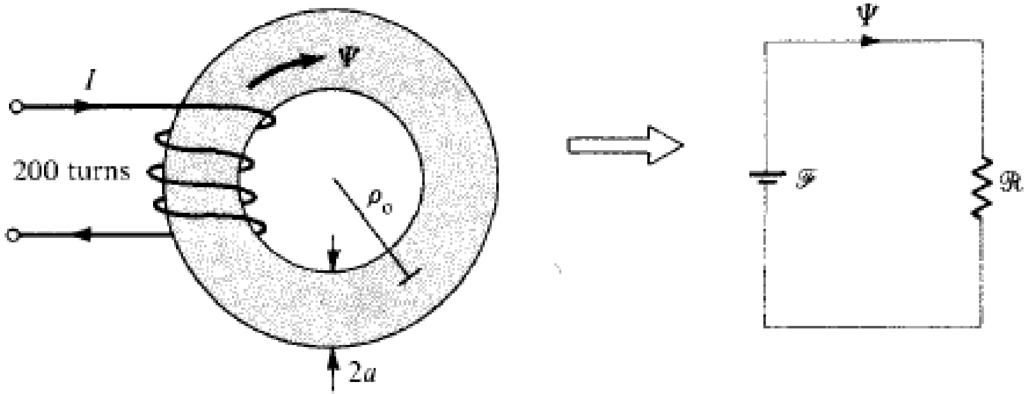
$$F = -\frac{B^2 S}{2\mu_0}$$

$$p = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}BH$$

مثال

ترویدِ نشان داده شده در شکل دارای شعاع مرکزی $\rho_o = 10\ \text{cm}$ و شعاع داخلی $a = 1\ \text{cm}$ می‌باشد. اگر جنس هسته بکار رفته در آن از فلزی با $\mu = 1000\,\mu_o$ باشد، و سیم‌پیچ بکاررفته در آن دارای ۲۰۰ دور باشد، مقدار جریان لازم برای سیم‌پیچ برای تولید ۰/۵ میلی وبر در هسته چقدر است.

پاسخ :



تحلیل میدانی

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}} \rightarrow H\cdot 2\pi\rho = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho}, \qquad \text{for } \rho_o - a < \rho < \rho_o + a$$

$$H_{\text{approx}} = \frac{NI}{2\pi\rho_o} = \frac{NI}{\ell}$$

$$B = \frac{\mu NI}{\ell} = \frac{\mu_o\mu_r NI}{2\pi\rho_o}$$

$$\Psi = BS = \frac{\mu_o\mu_r NI\,\pi a^2}{2\pi\rho_o}$$

$$I = \frac{2\rho_o\Psi}{\mu_o\mu_r Na^2} = \frac{2(10\times10^{-2})(0.5\times10^{-3})}{4\pi\times10^{-7}(1000)(200)(1\times10^{-4})}$$

$$= \frac{100}{8\pi} \quad = 3.979\ \text{A}$$

تحلیل مداری

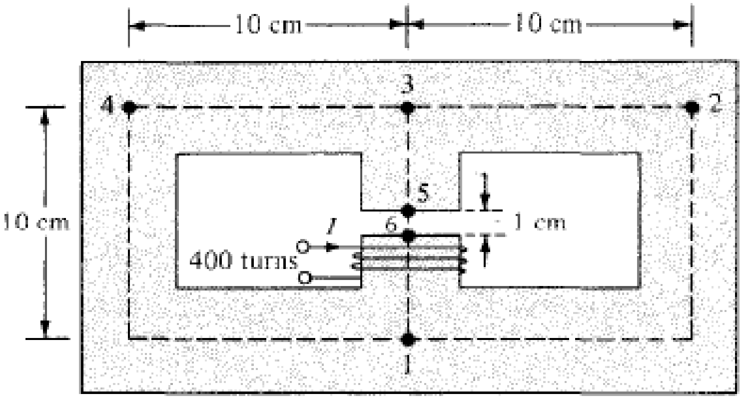
$$\mathcal{F} = NI = \Psi\mathcal{R} = \Psi\frac{\ell}{\mu S} = \Psi\frac{2\pi\rho_o}{\mu_o\mu_r\pi a^2}$$

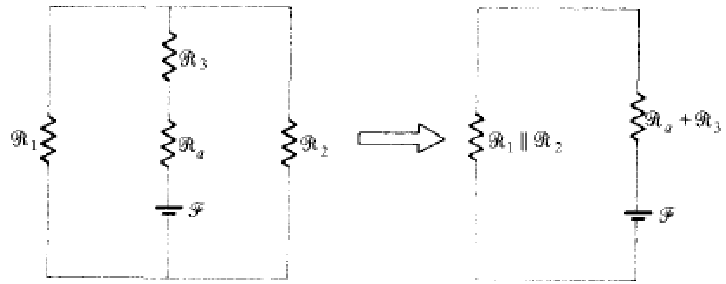
$$I = \frac{2\rho_o\Psi}{\mu_o\mu_r Na^2} = 3.979\ A$$

مثال

در مدار مغناطیسی نشان داده شده در شکل زیر، جریان لازم برای سیم پیچ برای تولید چگالی شار مغناطیسی $1.5\ \mathrm{Wb/m^2}$ را بدست آورید. فرض کنید $\mu = 50\mu_0$ و سطح مقطع تمامی شاخه‌ها برابر ۱۰ سانتیمتر مربع است.

پاسخ :





$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \frac{\ell}{\mu_0\mu_r S} = \frac{30 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(50)(10 \times 10^{-4})} = \frac{3 \times 10^8}{20\pi}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{9 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(50)(10 \times 10^{-4})} = \frac{0.9 \times 10^8}{20\pi}$$

$$\mathcal{R}_a = \frac{1 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(1)(10 \times 10^{-4})} = \frac{5 \times 10^8}{20\pi}$$

$$\mathcal{R}_1 \| \mathcal{R}_2 = \frac{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{R}_1}{2} = \frac{1.5 \times 10^8}{20\pi}$$

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_a + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_1 \| \mathcal{R}_2 = \frac{7.4 \times 10^8}{20\pi}$$

$$\mathcal{F} = NI = \Psi_a R_T$$

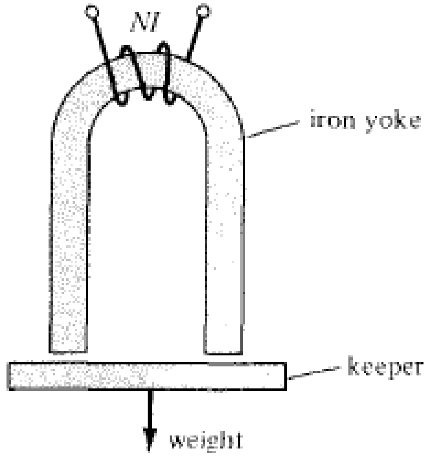
$$\Psi_a = \Psi = B_a S$$

$$I = \frac{B_a S \mathcal{R}_T}{N} = \frac{1.5 \times 10 \times 10^{-4} \times 7.4 \times 10^8}{400 \times 20\pi} = 44.16\ \mathrm{A}$$

مثال

یک شاخه مغناطیسی U شکل جهت برداشتن بار ۴۰۰ کیلوگرمی بطوری طراحی شده است که اولا جنس هسته آن $\mu_r = 3000$ و سطح مقطع آن $40cm^2$ و طول متوسط آن برابر 50cm است. اگر طول شکافهای مابین هسته مغناطیسی و بار 0.1mm باشد، تعداد دورهای لازم سیم‌پیچ به شرط وجود جریان یک آمپری در انها جهت برداشتن این بار ۴۰۰ کیلوگرمی را محاسبه کنید.

پاسخ :



$$\mathcal{F} = NI = \Psi(\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_i)$$

$$\mathcal{R}_a = \frac{\ell_a}{\mu S} = \frac{2 \times 0.1 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 40 \times 10^{-4}} = \frac{6 \times 10^6}{48\pi}$$

$$\mathcal{R}_i = \frac{\ell_i}{\mu_o \mu_r S} = \frac{50 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 3000 \times 40 \times 10^{-4}} = \frac{5 \times 10^6}{48\pi}$$

$$\mathcal{F}_a = \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_i}\mathcal{F} = \frac{6}{6+5}NI = \frac{6}{11}NI$$

$$F = 2\frac{(B_a^2 S)}{2\mu_o} = mg$$

$$B_a^2 = \frac{mg\mu_o}{S} = \frac{400 \times 9.8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{40 \times 10^{-4}}$$

$$B_a = 1.11 \text{ Wb/m}^2$$

$$\mathcal{F}_a = H_a \ell_a = \frac{B_a \ell_a}{\mu_o}$$

$$N = \frac{11}{6}\frac{B_a \ell_a}{\mu_o I} = \frac{11 \times 1.11 \times 0.1 \times 10^{-3}}{6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}$$

$$N = 162$$