

انتشارات از شما:

✓ ۱۱ جزوه کلاس را یاد بگیرید. ← مثل کوی خود جزوه حل کنید تا بر روی مانده حل کنید.

✓ ۱۲ مثل کوی کندر ← حل کنید ۱۰ تا حل کنید.

✓ ۱۳ رفرنس کوی ← مورد به آن بپردازید.

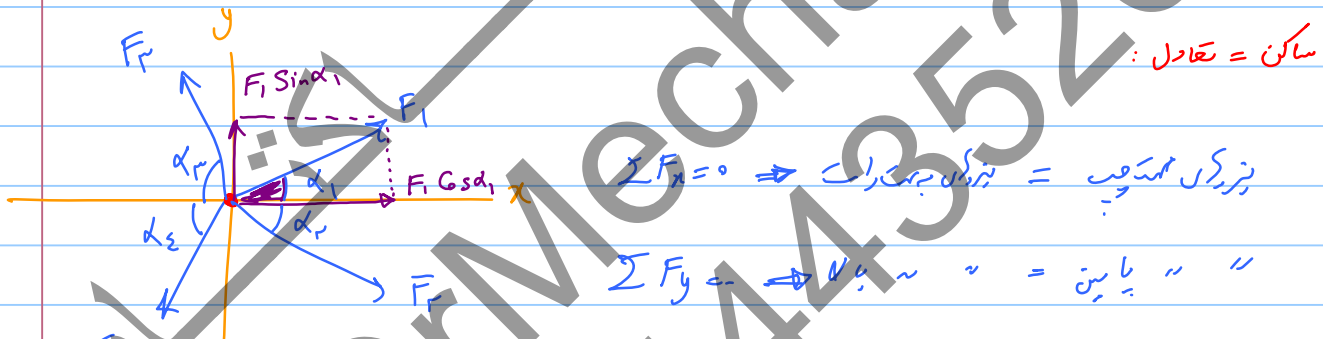
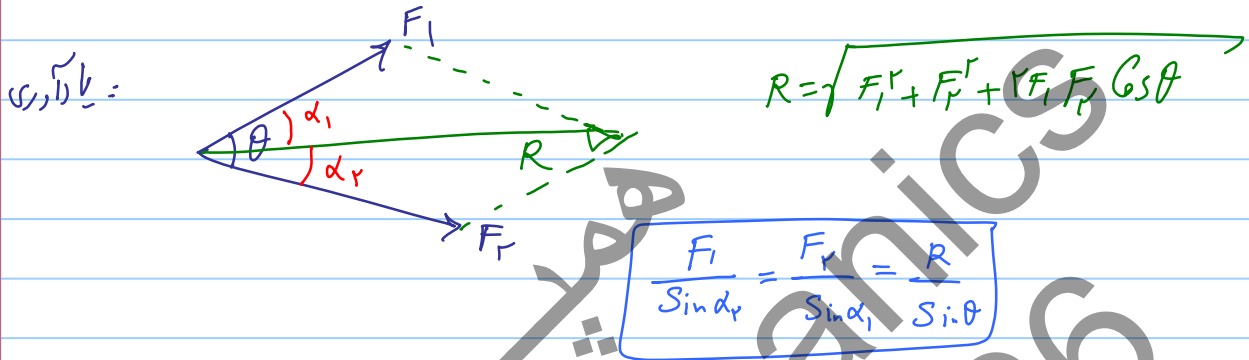
✓ ۱۴ مثل رفرنس کوی حاصل کنید.



\* یک جسم در حال تعادل و معادله‌های آن:

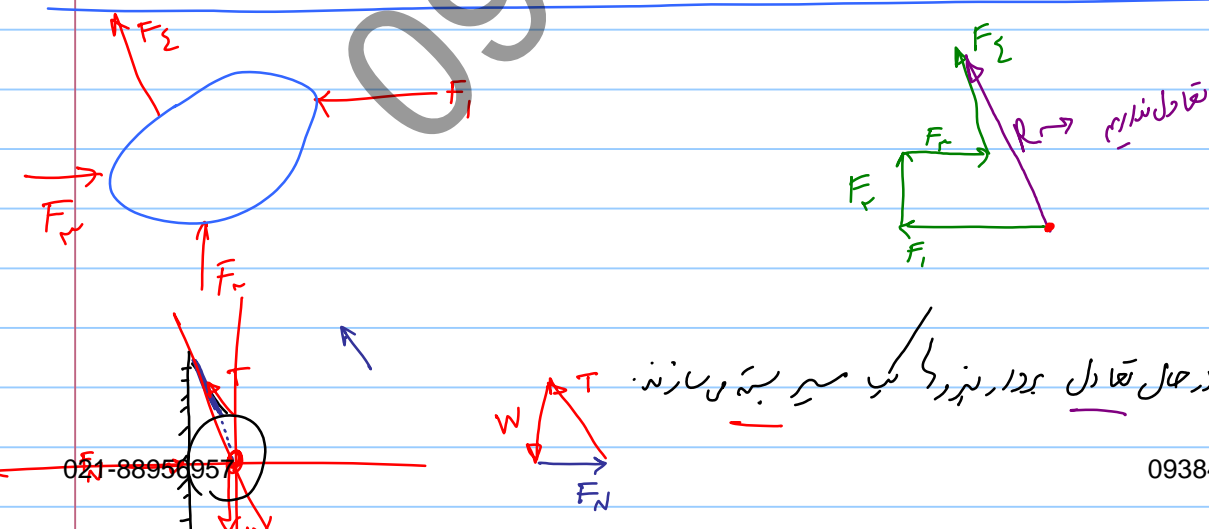
$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{حالت انتقال} \\ \text{(مجاورین شود)} \end{array}$$

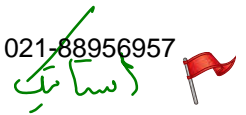
$$\left. \begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{حالت دوران} \\ \text{(مجاورین شود)} \end{array}$$



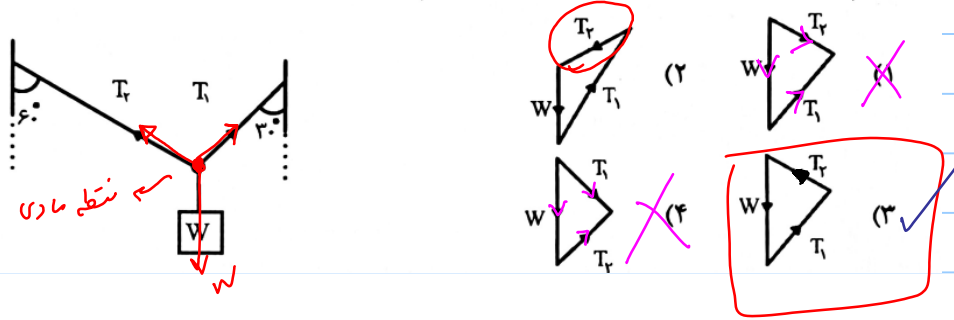
(x)  $F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 = F_r \cos \alpha_r + F_z \cos \alpha_z$

(y)  $F_1 \sin \alpha_1 + F_r \sin \alpha_r = F_r \sin \alpha_r + F_z \sin \alpha_z$



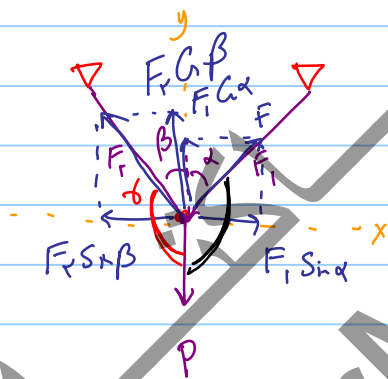


۴۹- کدام یک از مثلث‌های زیر نمایانگر نیروهای سیستم نشان داده شده می‌باشند؟ (مهندس مکانیک ۷۱)



مکتب: اثر چند نیروی از یک نقطه می‌گذرد ← جمع نیازی به رسم در نیست.

مثال: نیروی عمودی  $F_r$  را با  $F_1$  و  $F_2$  رابطه آورده.



$$F_1 \sin \alpha = F_2 \sin \beta \rightarrow F_2 = F_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$P = F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta$$

$$\Rightarrow P = F_1 \left( \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta} \right) = F_1 \left( \frac{\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} \right)$$

زاویه بین نیروی معلوم و دیگر مجهول

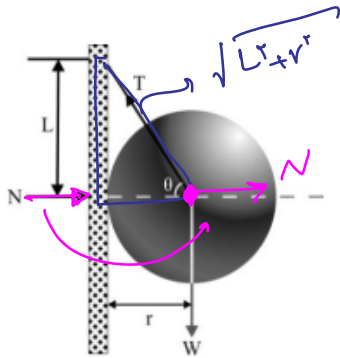
$$F_1 = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot P$$

$$F_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} P$$

زاویه بین دو مجهول

$$\text{نیروی معلوم} = \frac{\sin(\text{زاویه بین دو مجهول})}{\sin(\text{زاویه بین نیروی معلوم و دیگر مجهول})}$$

6 - کره یکنواختی به وزن  $w$  و شعاع  $r$  به وسیله طنابی مطابق شکل به دیوار بدون اصطکاکی متصل شده است. فاصله نقطه اتصال از مرکز کره  $L$  است. کشش طناب کدام است؟

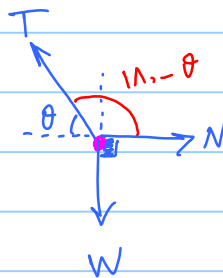


$$\frac{w(L^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{L} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$w \frac{r}{L} \quad (1)$$

$$\frac{w}{L(L^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

$$\frac{wL}{(r^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$



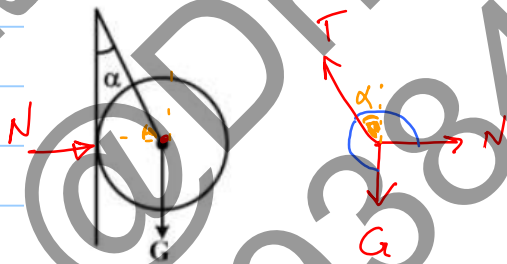
نگرش: برقرار بودن در راستای عمود بر جدار.

$$\sin \theta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$$

$$T = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(180^\circ - \theta)} W$$

$$T = \frac{W}{\sin \theta} = \frac{W}{\frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}} = \frac{(L^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} W}{L}$$

۷۳ - گوی شکل زیر توسط یک کابل آویزان شده و همان گونه که ملاحظه می شود به دیوار تکیه داده است. نیروی عمود بر سطح از طرف دیوار به گوی چه میزان است؟ (وزن گوی  $G$  و زاویه کابل با دیوار  $\alpha$  است.) در ۹۸°



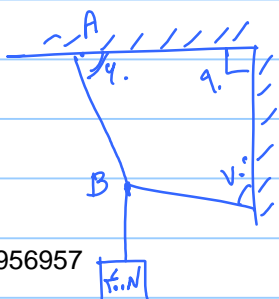
$$G \sin \alpha \quad (1)$$

$$G \cos \alpha \quad (2)$$

$$G \tan \alpha \quad (3) \quad \checkmark$$

$$G \cot \alpha \quad (4)$$

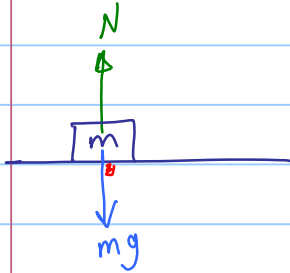
$$N = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ + \alpha)} G = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} G = \tan \alpha \cdot G$$



تیرین:  $F_{AB} = ?$

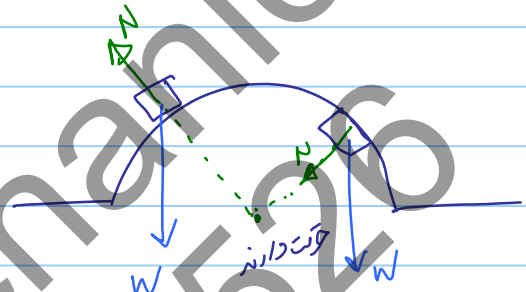
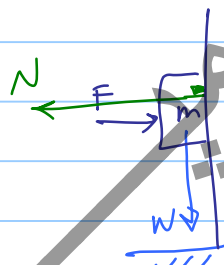
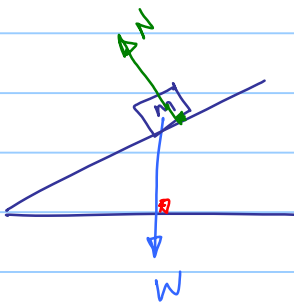
نوسیم دیگر هم آزاد بنظر: نیروی دایره صورت مجزا از سیستم جبهه کن و دیگری وارد آن در رسم می کنی.

نیروهای محسم:

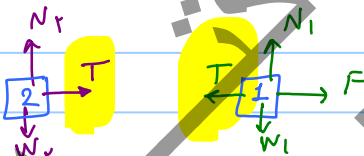


(۱) نیروی وزن:  $W = mg$  (عمودی سطح زمین است).  
۹.۸۱  $g$   $kg$   $m$   $(N)$  وزن  $(N)$

(۲) نیروی عمودی سطح:  $N \perp F_N$ : عمودی سطحی که جسم روی آن قرار دارد.



(۳) نیروی کشش طناب (رخی، کابل، زنجیر و...)  $T =$   
که نیروی کششی است.



نکته: ۱ اگر طناب جرم نداشته باشد،  $T$  همه جای آن یکسان است.

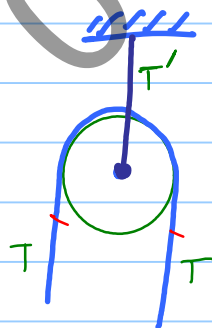
(۲) ... داشته ... می توان است

(۳) به ازای تعداد طناب  $k$ ،  $T$  داریم.



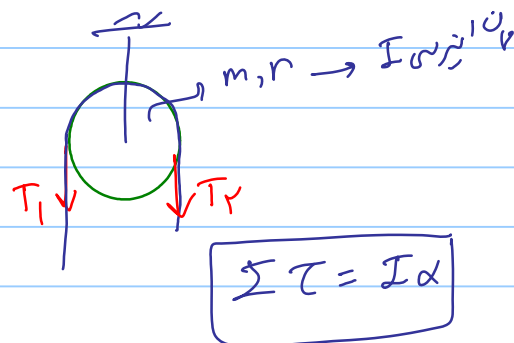
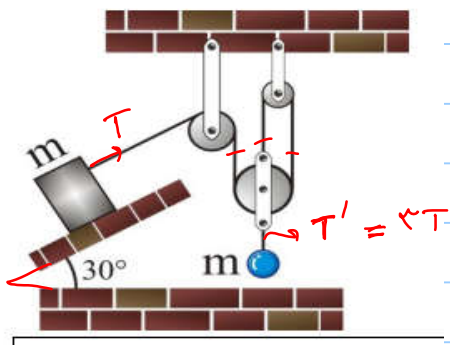
(۴) اگر مرکز جرم نداشته باشد

و از اصطکاک بین طناب و مرکز صرف نظر کنیم



$$T' = 2T$$

نیرو کشش در دو طرف مرکز یکسان است.



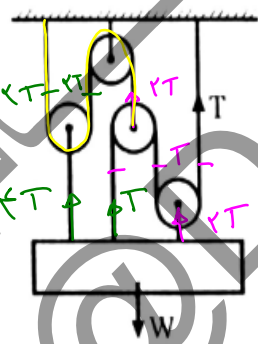
تذکره: اگر فزیب اصطکاک بین طناب و قرقره  $\mu$  باشد:



$T_1 = T_2 e^{\mu \theta} \rightarrow T_1 > T_2$  (در جهت دورانی)

$T_2 = T_1 e^{\mu \theta} \rightarrow T_2 > T_1$

۲- در شکل زیر نیروی کشش  $T$  کابل عبارتست از (قرقره‌ها بدون اصطکاک می‌باشند) (مهندسی مکانیک ۸۴)



$\frac{W}{3} (2)$

$\frac{W}{9} (4)$

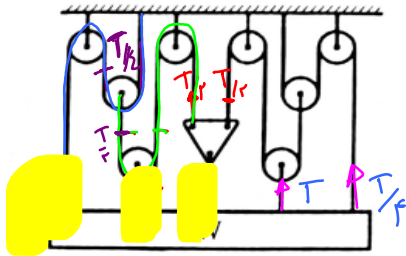
$\frac{W}{5} (1)$

$\frac{W}{9} (3)$

$5T = W \Rightarrow T = \frac{W}{5}$

(مهندسی مکانیک ۸۳)

۶- مقدار نیروی کششی  $T$  بر حسب وزن وزنه ( $W$ ) کدام است؟



$$T = \frac{W}{8} \quad (1)$$

$$T = \frac{W}{5} \quad (2)$$

$$T = \frac{2}{5} W \quad (3)$$

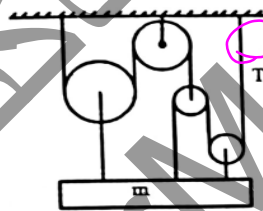
$$T = \frac{2}{7} W \quad (4)$$

$$2\left(\frac{T}{2} + T\right) + T = W \Rightarrow \frac{T}{2} + 3T = W$$

$$\frac{7}{2}T = W \Rightarrow T = \frac{2}{7}W$$

۳۴- در شکل مقابل برای مجموعه قرقره‌ها و کابلی که جرم  $m$  را تحمل می‌کند، مقدار  $T$  کشش کابل برابر

(مهندسی مکانیک ۷۶)



ست با:

$$\frac{mg}{5} \quad (1)$$

$$\frac{2mg}{5} \quad (2)$$

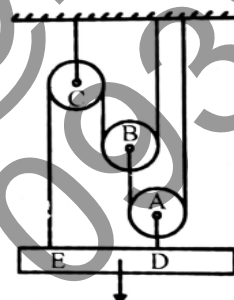
$$\frac{mg}{3} \quad (3)$$

$$\frac{mg}{4} \quad (4)$$

۵۹- وزنه ۱۰۰۰ نیوتن توسط یک سری قرقره و طناب مطابق شکل آویزان شده است. در صورتی که از

(مهندسی مکانیک ۶۹)

اصطکاک محور قرقره‌ها بتوان صرف‌نظر نمود، کشش طناب  $AD$  برابر است با:



۱۰۰۰ نیوتن

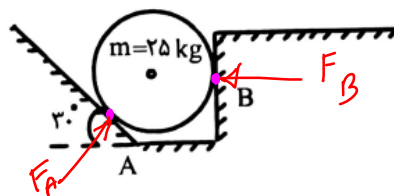
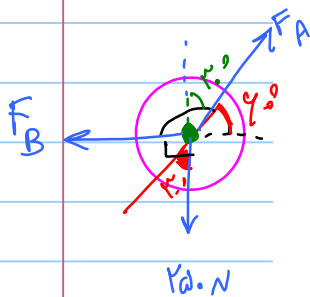
$$۷۵۰ \text{ نیوتن} \quad (1)$$

$$۸۰۰ \text{ نیوتن} \quad (2)$$

$$۵۰۰ \text{ نیوتن} \quad (3)$$

$$\text{هیچکدام} \quad (4)$$

۳۲۷ در شکل مقابل عکس‌العمل  $A$  و  $B$  را به دست آورید.  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  و سطوح  $A$  و  $B$  بدون اصطکاک می‌باشند. (مهلتس متلاویز ۱۷۷)



$$F_A = \frac{500}{\sqrt{3}} N, \quad F_B = \frac{250}{\sqrt{3}} N \quad (2) \quad F_A = \frac{125}{\sqrt{3}} N, \quad F_B = \frac{250}{\sqrt{3}} N \quad (1)$$

$$F_A = \frac{250}{\sqrt{3}} N, \quad F_B = \frac{125}{\sqrt{3}} N \quad (4) \quad F_A = \frac{250}{\sqrt{3}} N, \quad F_B = \frac{500}{\sqrt{3}} N \quad (3)$$

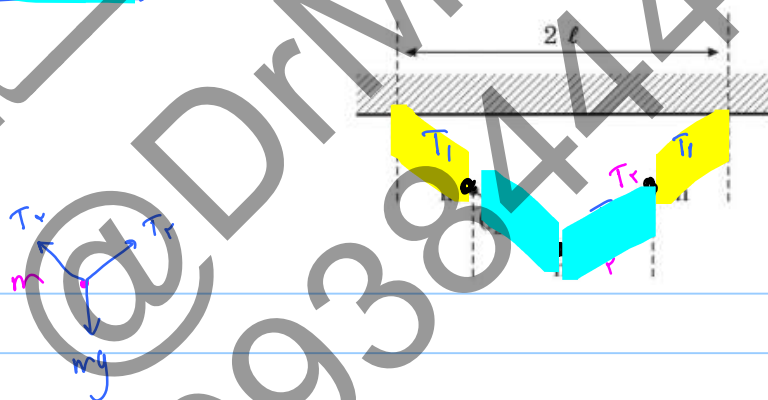
$$F_A = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - 30^\circ)} \times 250 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 250 = \frac{500}{\sqrt{3}} N$$

$\downarrow \cos 30^\circ$

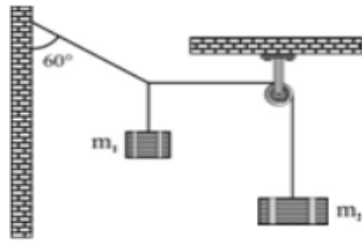
$\downarrow \sin 40^\circ$

$$F_B = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} \times 250 = \left(\frac{1/2}{1}\right) \times 250 = \frac{250}{2} N$$

14 - سه جرم را با نخ‌های بدون جرم به صورت شکل نگه داشته‌ایم. رابطه بین  $\theta_1$  و  $\theta_2$  را به دست آورید.



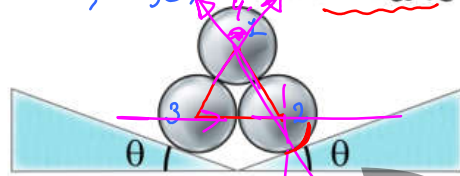




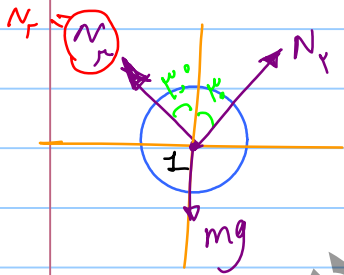
- (1)  $\frac{1}{2}$
- (2)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (3)  $\sqrt{3}$
- (4) 2

11 - سه استوانه همگن و مشابه مطابق شکل روی یکدیگر قرار گرفته‌اند. مقدار مینیمم زاویه‌ای که سیستم در حال سکون باشد عبارت است از: (سطح بدون اصطکاک است)  $\theta_{min}$

عمودی سطح  $N$  یا  $F_N$



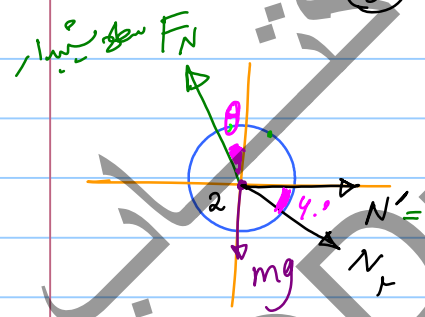
- (1)  $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{6}$
- (2)  $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{9}$
- (3)  $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{18}$
- (4)  $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{24}$



نکته: به دلیل تقارن (همان‌اندازه رگین استوانه‌ها) و سکون سیستم  $N_p = N_{p2}$

(a)  $N_p \sin \theta = N_p \sin \theta \Rightarrow N_p = N_{p2}$

(b)  $2 N_p \cos \theta = mg \Rightarrow N_p = \frac{mg}{\sqrt{3}}$



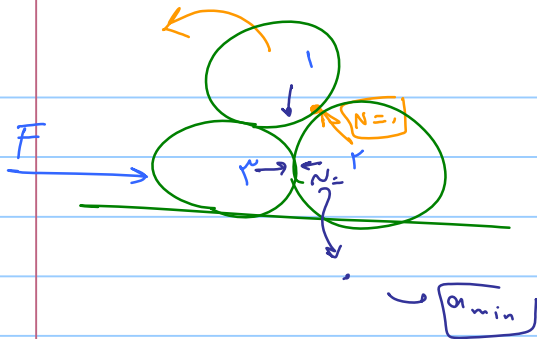
در  $\theta_{min}$  در آنست که هم‌اندازه رگین استوانه‌ها را لمس می‌کند.

(x)  $N_p \cos \theta = F_N \sin \theta$

(y)  $mg + N_p \sin \theta = F_N \cos \theta$

$$\tan \theta = \frac{N_p \cos \theta}{mg + N_p \sin \theta} = \frac{\frac{mg}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{mg(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$N = \dots$   
 $a_{max} = ?$

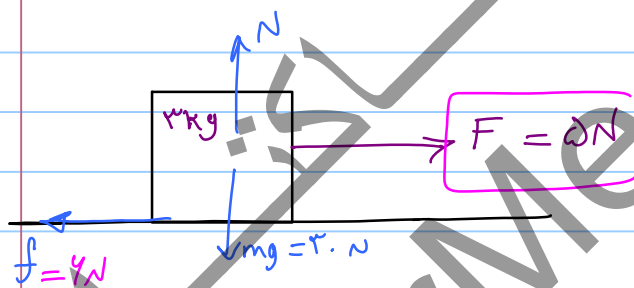
نیروی اصطکاک: در برابر حرکت مقاومت می کند.  
 جنبش  $\leftarrow$  اصطکاک جنبشی  $\leftarrow$   $f_k = \mu_k N$   
 ایستایی  $\leftarrow$  اصطکاک سکون  $\leftarrow$   $f_s = \mu_s N$

$\mu_k < \mu_s$

$\mu_k$ : ضریب اصطکاک جنبشی (لغزشی)

$\mu_s$ : ضریب اصطکاک ایستایی

مثال: در شکل مشابه نیروی اصطکاک چندرالت؟ ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )



$\mu_s = 0.2$  و  $\mu_k = 0.15$

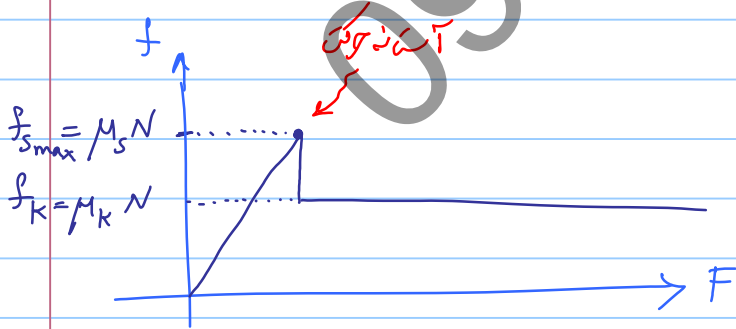
$mg = N \Rightarrow N = 30N$

$f = \mu_s N = 0.2 \times 30 = 6N$   $\leftarrow$   $F = 5N \Rightarrow a = 0$   $\leftarrow$  جسم ساکن است

$f_k = \mu_k N = 0.15 \times 30 = 4.5N$

$f = 5N$

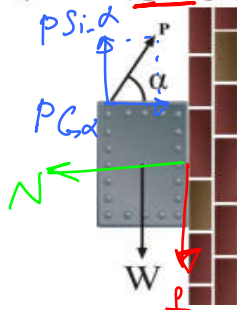
f	F
1	1
2	2
...	...
4	4
4.5	5



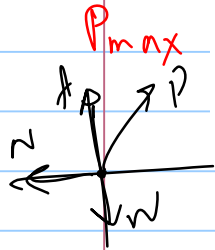


$P_{min}$   $P_{max}$

12 - با توجه به شکل مقابل، نسبت بیشترین مقدار  $P$  به کمترین آن با فرض اینکه جسم در تعادل باشد، کدام است؟ ارشد ۸۴



آسه شیب به بالا



$$\tan \alpha = \frac{\tan \alpha + \mu}{1 - \mu \tan \alpha} \quad (2)$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan \alpha - \mu}{1 + \mu \tan \alpha} \quad (4)$$

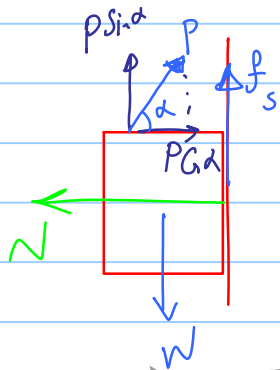
$$\begin{aligned} (1) & \frac{\tan \alpha + \mu}{\tan \alpha - \mu} \\ (3) & \frac{\mu \tan \alpha + 1}{\mu \tan \alpha - 1} \end{aligned}$$

$$(x) N = P \cos \alpha$$

$$(y) P \sin \alpha = W + f_s \Rightarrow P \sin \alpha = W + \mu P \cos \alpha$$

$$f_s = \mu N$$

$$P_{max} = \frac{W}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}$$



آسه شیب به پایین

$P_{min}$

$$N = P \cos \alpha$$

$$P \sin \alpha + f_s = W \Rightarrow P_{min} = \frac{W}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}$$

$$\frac{P_{max}}{P_{min}} = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha + \mu}{\tan \alpha - \mu}$$

نکته

$$\text{if } \mu = 0 \Rightarrow f_s = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{P_{max}}{P_{min}} = 1$$

✓ رد گزینه

لے درستی پارامتری صادر است.

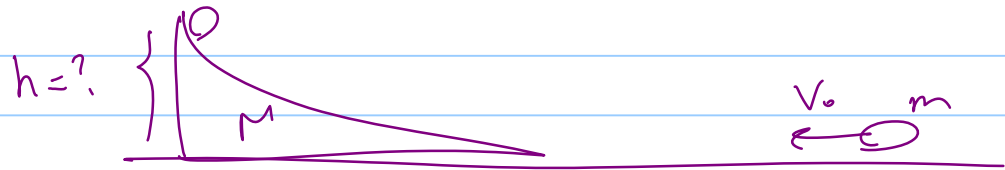
(۱) کی حالت خاص انتخاب کن.

(۲) از حالت خاص نتیجه گیری

(۳) نتیجه را در گزینه آلود کن

استاندارد

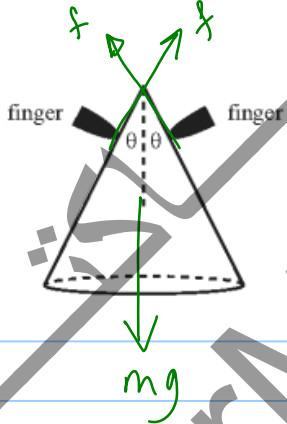
حالت حل کنید.



$M \rightarrow \infty \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$

ایمین

10 - با دو انگشت یک مخروط به جرم  $m$  را نگه داشته ایم. ضریب اصطکاک بین انگشت و مخروط  $\mu$  است. زاویه ی رأس مخروط  $2\theta$  می باشد. کمترین نیروی هر انگشت چقدر باشد تا مخروط ساکن باشد؟



(1)  $\frac{mg}{\mu \cos \theta + \sin \theta}$

(2)  $\frac{mg}{\mu \cos \theta - \sin \theta}$

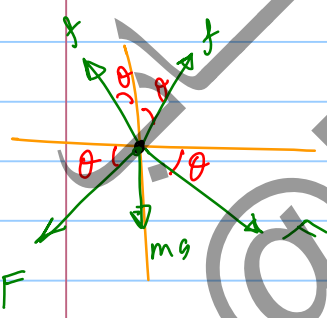
(3)  $\frac{mg}{2(\mu \cos \theta + \sin \theta)}$

(4)  $\frac{mg}{2(\mu \cos \theta - \sin \theta)}$

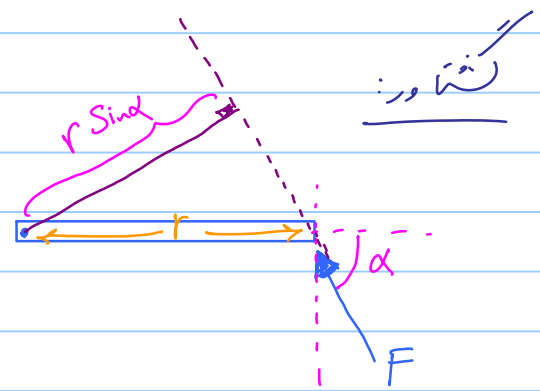
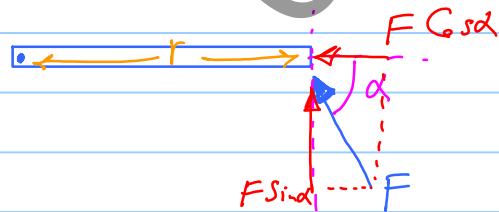
(y)  $2F \cos \theta = 2F \sin \theta + mg$

$2F(\mu \cos \theta - \sin \theta) = mg$

$F = \frac{mg}{2(\mu \cos \theta - \sin \theta)}$



$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin \theta$



$M = (F \sin \alpha) r$

$M = F (r \sin \alpha)$

نکته : اگر نیروی خودشی یا امدادشی از یک نقطه نگاه نگذرد در ندارد.

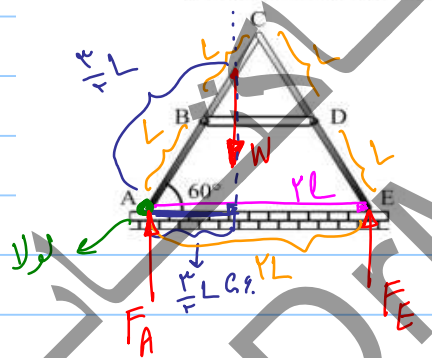
نکته : اگر نیروها همه از یک نقطه بگذرند ، گشتاور لازم نیست.

نکته : برای بزرگ کردن در را را حول نقطه ای می نویسیم که مجهولات بیشتری از آن نقطه می گذرد.

تعداد بارها :  $\sum F = 0 \rightarrow \sum M = 0$

$\sum (\text{گشتاورهای یابد معکورد}) = \sum (\text{گشتاورهای سا معکورد})$

36 - نردبان دو طرفه ABCDE ( AC = CE = 2BC ) وزنش قابل چشم پوشی است. شخصی به وزن W در نقطه O (وسط BC) قرار گرفته و مجموعه در حال تعادل است. اگر اصطکاک سطح های تماس ناچیز باشد، اندازه نیروهای وارد از کف زمین به نردبان کدام است؟ (  $F_A$  اندازه نیروی وارد بر نردبان در نقطه A،  $F_E$  اندازه نیروی وارد بر آن در نقطه E است)



$F_E = \frac{W}{4}; F_A = \frac{3}{4}W$  (2)  $F_E = \frac{3}{8}W; F_A = \frac{5}{8}W$  (1)

~~$F_E = \frac{W}{2}; F_A = \frac{W}{2}$~~  (4)  $F_E = \frac{W}{3}; F_A = \frac{2}{3}W$  (3)

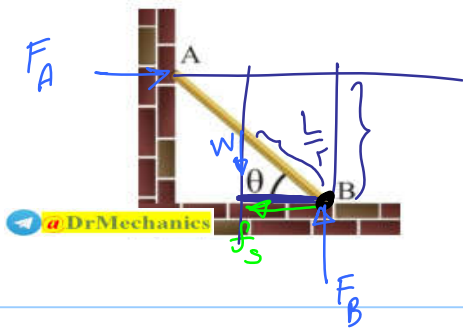
$F_A + F_E = W \Rightarrow F_A = \frac{5}{8}W$

باز معکورد = سا معکورد  $\Rightarrow \sum M_A = 0$  گشته در

$W(\frac{3}{4}L \cos 40^\circ) = F_E (2L) \Rightarrow F_E = \frac{3}{8}W$

روش دوم : دتا گشته در ← نقطه A - نقطه E

32 - وزن میله AB مساوی 50kg می باشد. دیوار عمودی صیقلی و بدون اصطکاک و زمین دارای ضریب اصطکاک استاتیکی  $\mu_s = 0.3$  می باشد. حداقل زاویه  $\theta$  را که این میله نلغزد، کدام است؟



$$\tan \theta = \frac{10}{3} \quad (2)$$

$$\tan \theta = \frac{5}{3} \quad (1)$$

$$\tan \theta = \frac{10}{7} \quad (4)$$

$$\tan \theta = \frac{5}{6} \quad (3)$$

طول میله =  $l$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow W \left( \frac{L}{2} \cos \theta \right) = F_A (L \sin \theta) \Rightarrow F_A = \frac{W}{2} \cot \theta$$

نیرو:  $F_B = W$

$$f_s = \mu F_B$$

$$f_s = 0.3 W$$

$$F_A = 0.3 W \Rightarrow 0.3 W = \frac{W}{2} \cot \theta$$

امن  $\Rightarrow F_A = f_s$

$$\tan \theta = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

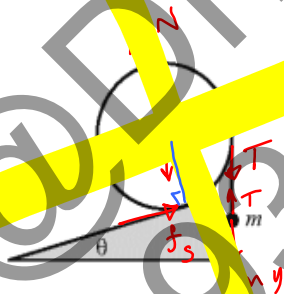
33 - ریسمانی سبک به دور استوانه‌ای یکنواختی به جرم M بسته شده. استوانه روی سطح شیب‌دار ساکنی به شیب  $\theta$  قرار دارد و جرم m از آن آویزان است. ضریب اصطکاک بین استوانه و سطح شیب‌دار آن قدر هست که مانع لغزش استوانه روی سطح شود. در حالت تعادل m بر حسب M و  $\theta$  برابر کدام گزینه است؟

$$\frac{M}{1 - \tan \theta} \quad (2)$$

$$\frac{M}{1 - \sin \theta} \tan \theta \quad (1)$$

$$\frac{M \sin \theta}{1 - \sin \theta} \quad (4)$$

$$\frac{M}{1 + \sin \theta} \quad (3)$$



$$T = mg$$

$$f_s = mg$$

شرط تعادل (M):  $T A = f_s R \Rightarrow T = f_s r$

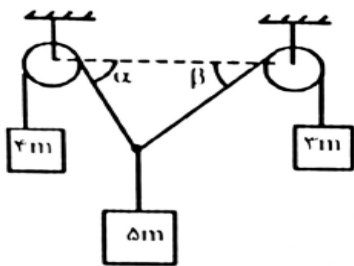
نیرو:  $Mg \sin \theta + T \sin \theta = f_s$

$$Mg \sin \theta + mg \sin \theta = mg \Rightarrow mg (1 - \sin \theta) = Mg \sin \theta$$

$$m = \frac{M \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

۹- سه وزنه به کمک سه ریسمان سبک و دو قرقره‌ی کوچک به یکدیگر متصل شده‌اند و در وضعیت تعادل

(مهلتی مکالمیک ۸۷)



قرار گرفته‌اند. زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  برابرند با:

(۱)  $\beta = 36/9^\circ$  ,  $\alpha = 53/1^\circ$

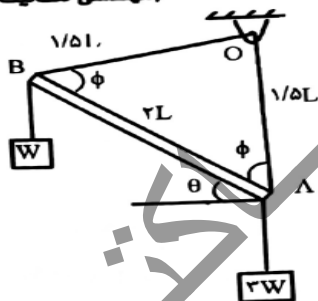
(۲)  $\beta = 53/1^\circ$  ,  $\alpha = 36/9^\circ$

(۳)  $\beta = 51/4^\circ$  ,  $\alpha = 38/6^\circ$

(۴)  $\beta = 38/6^\circ$  ,  $\alpha = 51/4^\circ$

۱۰- میله سبک AB توسط سیم‌های OA و OB به تکیه‌گاه O وصل شده است. طول میله 2L و هر یک از سیم‌ها 1/5L می‌باشد. وزنه‌های 3W و W مطابق شکل از A و B آویخته شده‌اند. زاویه تمایل میله نسبت به افق ( $\theta$ ) در حالت تعادل تقریباً چند درجه است؟

(مهلتی مکالمیک ۸۱)



(۱)  $\theta = 24^\circ$

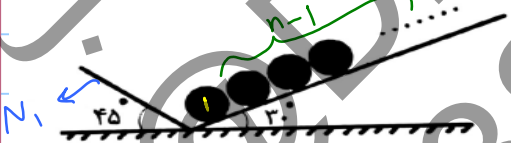
(۲)  $\theta = 46^\circ$

(۳)  $\theta = 11^\circ$

(۴)  $\theta = 17^\circ$

۱۴- مشخص کنید در شکل زیر، چند ساچمه یکسان را می‌توان به دنبال هم چید بدون آنکه هیچ یک از ساچمه‌ها از جای خود بلند شوند؟ (اصطکاک بین کلیه سطوح قابل اغماض است.)

(مهلتی مکالمیک ۸۱)



تعداد ساچمه‌ها:  $n = 6$

(۱) ۷

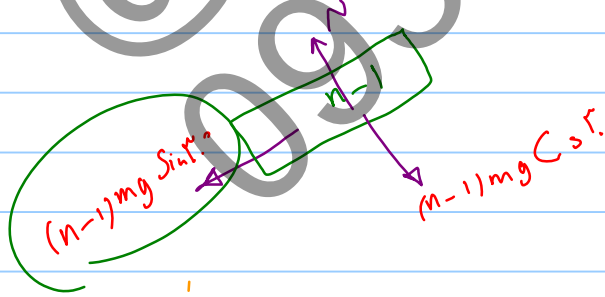
(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۴

در آسانسور حرکت نکنیم با سطح

شیبدار  $N_1 = 0$  قطع می‌شود پس



$$N_1 \sin 45^\circ = (n-1)mg \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

$$N_1 \cos 45^\circ = mg + (n-1)mg \sin 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{(n-1) \sin^2 \alpha}{1 + (n-1) \sin^2 \alpha} \Rightarrow (n-1) \frac{\sqrt{3}}{\epsilon} = 1 + (n-1) \frac{1}{\epsilon}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\epsilon} n - \frac{\sqrt{3}}{\epsilon} = 1 + \frac{n}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow n \left( \frac{\sqrt{3}}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \right) = 1 - \frac{1}{\epsilon} + \frac{\sqrt{3}}{\epsilon}$$

$$\frac{n(\sqrt{3}-1)}{\epsilon} = \frac{\epsilon-1+\sqrt{3}}{\epsilon} \Rightarrow n = \frac{\epsilon+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \xrightarrow{\sqrt{3} \approx 1.7} n = \frac{\epsilon+1.7}{1.7-1} = \frac{\epsilon+1.7}{0.7} \approx 9.7$$

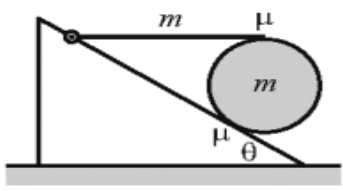
$$n = 9$$

یا رخ باید عدد صحیح باشد پس



یک سر میله‌ای به جرم  $M$  به سطح شیب‌داری با زاویه شیب  $\theta$  لولا شده و انتهای دیگر آن بر روی استوانه‌ای به جرم  $m$  تکیه دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میله با استوانه و استوانه با سطح شیب‌دار،  $\mu_s$  باشد، کمترین مقدار  $\mu_s$  چقدر باشد تا استوانه از روی سطح پایین نیاید؟ (دو سر میله هم تراز است)

فصل ۳



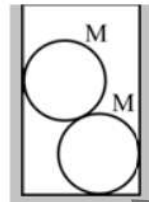
$$\mu_{s \min} = \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \tan \frac{\theta}{2} \quad (1)$$

$$\mu_{s \min} = \tan \theta \quad (2)$$

$$\mu_{s \min} = \tan \frac{\theta}{2} \quad (3)$$

$$\mu_{s \min} = \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \tan \theta \quad (4)$$

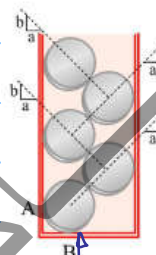
27 - دو توپ فولادی به جرم‌های مساوی  $M$  و شعاع‌های  $P$  درون لوله‌ای عمودی به شعاع  $\frac{3}{2}R$  جای دارند. نیروی تماس را به ترتیب در ته و دیواره استوانه را از راست به چپ مشخص کنید؟



$$\frac{\sqrt{3}}{3} Mg, Mg \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} Mg, Mg \quad (1)$$

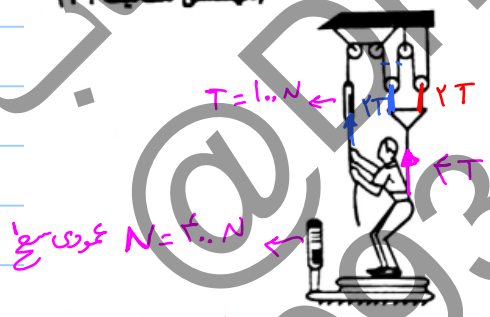
$$\frac{\sqrt{3}}{3} Mg, 2Mg \quad (4) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} Mg, 2Mg \quad (3)$$

۷۴. سکه‌های زیر، در ظرف صاف پلاستیکی قرار دارند، اگر وزن هر سکه برابر  $W$  باشد، نسبت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی سکه پایینی یعنی  $\frac{N_A}{N_B}$ ، برابر کدام است؟ (از اصطکاک سطوح صرف نظر شود). *ارزش ۹۲*



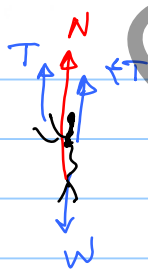
- (۱)  $\frac{5b}{4a}$
- (۲)  $\frac{4b}{5a}$
- (۳)  $\frac{5a}{4b}$
- (۴)  $\frac{4a}{5b}$

۲۶ - در شکل روبرو نیروسنج  $B$  مقدار  $100N$  و ترازوی  $A$  عدد  $400N$  را نشان می‌دهد. وزن شخص بر حسب  $kg$  کدام گزینه است؟  $(g = 10 m/s^2)$



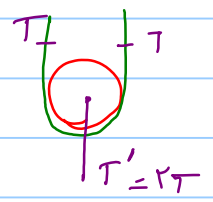
- (۱) ۵۰
- (۲) ۶۰
- (۳) ۸۰
- (۴) ۹۰

نکته: ترازو  $N$  نیروی عمودی سطح را نشان می‌دهد.

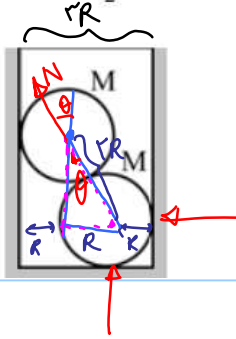


$$4T + T + N = W \Rightarrow W = 5T + N$$

$$\Rightarrow W = 900N \Rightarrow m = 90 kg$$



27 - دو توپ فولادی به جرم‌های مساوی  $M$  و شعاع‌های  $R$  درون لوله‌ای عمودی به شعاع  $\frac{3}{2}R$  جای دارند. نیروی تماس را به ترتیب در ته و دیواره استوانه را از راست به چپ مشخص کنید؟

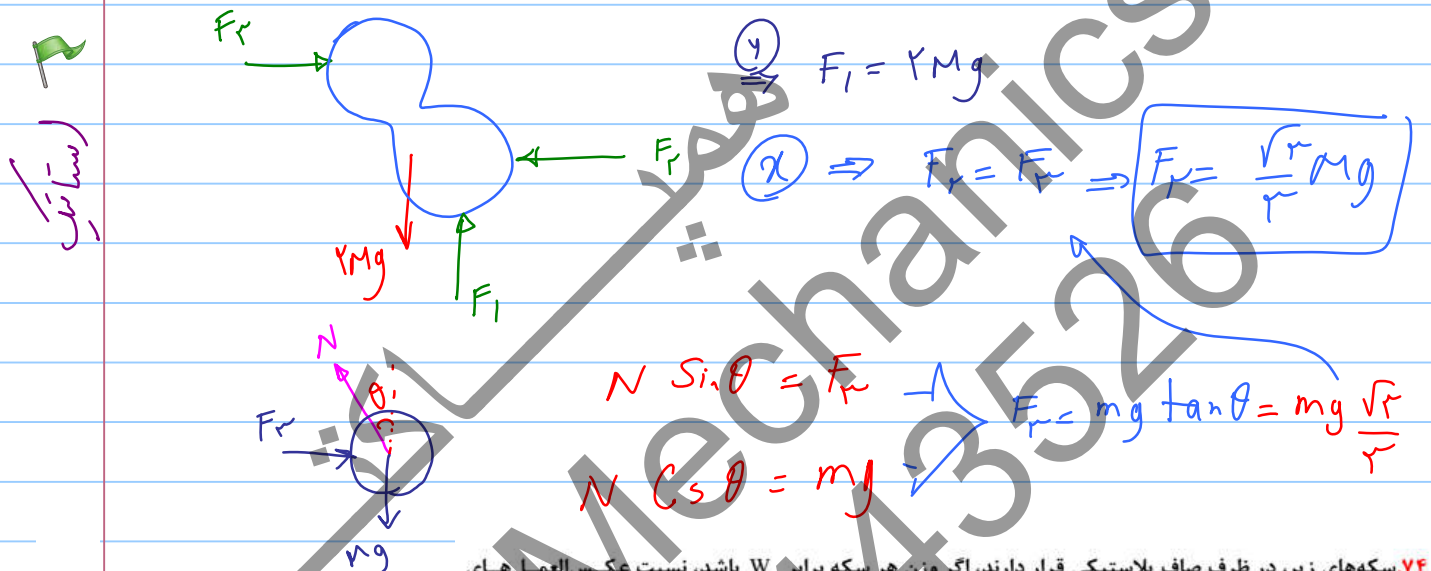


$\sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $\theta = 45^\circ$

~~$\frac{\sqrt{3}}{3} Mg, Mg$  (2)~~  
 $\frac{\sqrt{3}}{3} Mg, 2Mg$  (4)

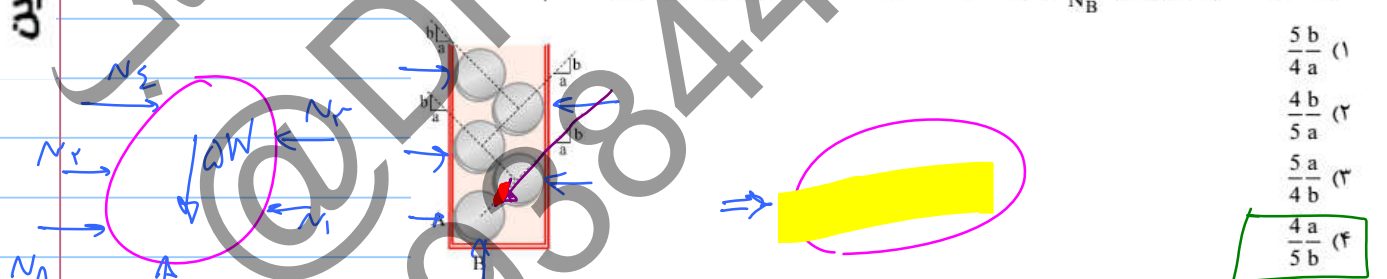
~~$\frac{\sqrt{3}}{2} Mg, Mg$  (1)~~  
 $\frac{\sqrt{3}}{2} Mg, 2Mg$  (3)

\* خدایم که راست جسم در نظریه کشیم

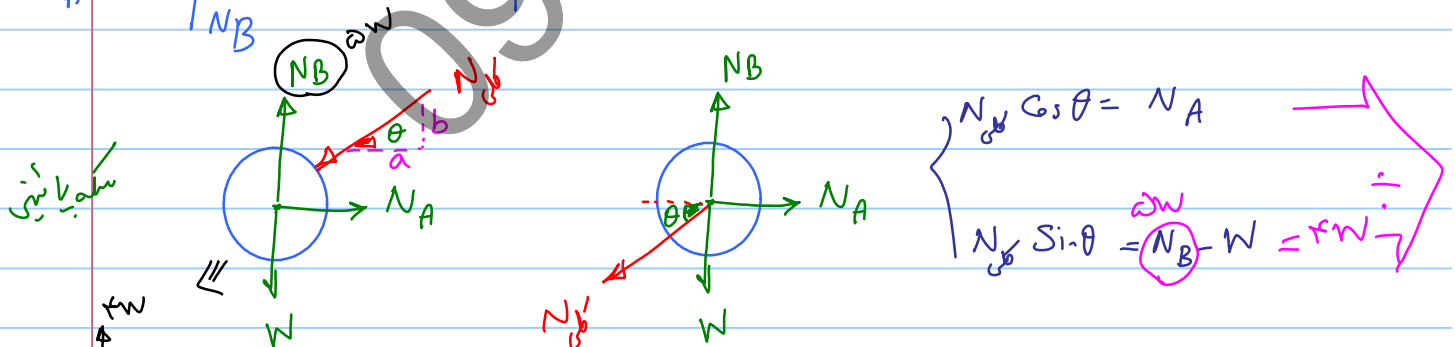


۲۴. سکه‌های زیر، در ظرف صاف پلاستیکی قرار دارند. اگر وزن هر سکه برابر  $W$  باشد، نسبت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی سکه پایینی یعنی  $\frac{N_A}{N_B}$  برابر کدام است؟ (از اصطکاک سطوح صرف نظر شود).

لیمین



- (۱)  $\frac{5b}{4a}$
- (۲)  $\frac{4b}{5a}$
- (۳)  $\frac{5a}{4b}$
- (۴)  $\frac{4a}{5b}$



$\tan \theta = \frac{N_A}{fW} \Rightarrow N_A = fW \tan \theta = fW \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{N_A}{N_B} = \frac{f a}{b}$

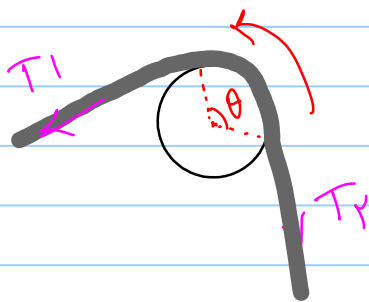


کلمه. اگر بین قرقره و طناب اصطکاک داشته باشیم، نیروی کشش طرفین طناب نسبت به

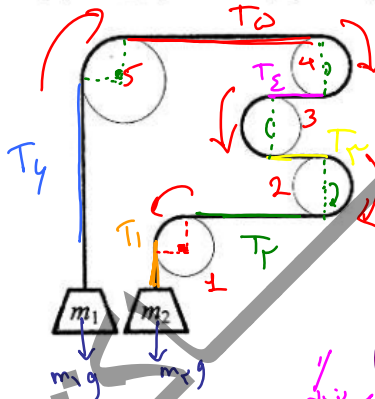
$$T_1 = T_2 e^{\mu \theta}$$

$\mu$ : ضریب اصطکاک

$\theta$ : زاویه خاک بین طناب و قرقره



۷۱- در شکل زیر طناب بر روی پولی‌های نشان داده شده می‌لغزد. اگر  $\frac{m_2}{m_1} = e^3$  باشد، ضریب اصطکاک بین طناب و



$$\frac{m_2}{m_1} = e^3$$

$$m_2 > m_1$$

پولی‌ها کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{\pi}$
- (۲)  $\frac{2}{4\pi}$
- (۳)  $\frac{2\pi}{4}$
- (۴)  $\frac{4}{\pi}$

$$T_1 = m_2 g$$

$$T_4 = m_1 g$$

$$T_1 = T_2 e^{\mu \theta}$$

(سایت)

$$T_1 = T_2 e^{\frac{\mu \pi}{2}} \Rightarrow m_2 g = T_2 e^{\frac{\mu \pi}{2}}$$

$$T_2 = T_3 e^{\mu \pi} \Rightarrow m_2 g = (m_1 g e^{\mu \pi} \times e^{\mu \pi} \times e^{\mu \pi} \times e^{\mu \pi}) e^{\frac{\mu \pi}{2}}$$

$$T_3 = T_4 e^{\mu \pi} \Rightarrow m_2 g = m_1 g e^{\mu(4\pi)}$$

$$T_4 = T_0 e^{\mu \pi} \Rightarrow m_2 g = m_1 g e^{\mu(4\pi)}$$

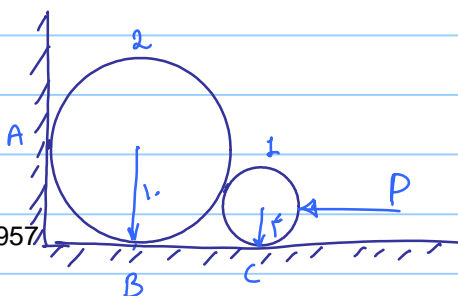
$$T_0 = T_1 e^{\frac{\mu \pi}{2}} \Rightarrow T_0 = m_2 g e^{\frac{\mu \pi}{2}}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = e^3 \Rightarrow e^3 = e^{\mu(4\pi)} \Rightarrow 3 = \mu(4\pi)$$

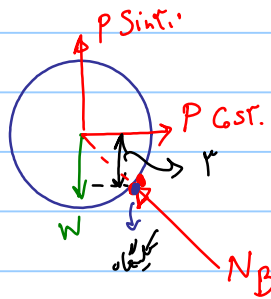
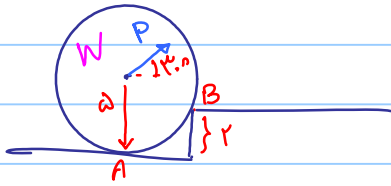
$$\Rightarrow \mu = \frac{3}{4\pi}$$

لیجین

نکته: در آستانه بلغندگی از زمین بلند نشود!  
 حداکثر نیروی P مقدار برابر با جسم ۲ از زمین بلند نشود!



مثال: نیرو  $P$  را طوری تعیین کن که استوانه از زمین بلند شود.



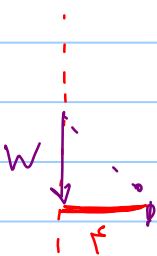
①  
②

روش اول: نیرو

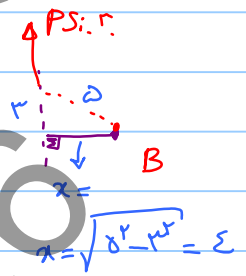
$\sum M_B = 0 \rightarrow$  پاد ساعتگرد = ساعتگرد

$$(P \cos 30^\circ)(r) + P \sin 30^\circ(r) = W(r)$$

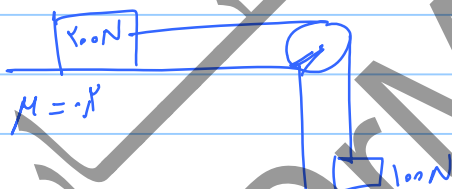
$$P \left( \frac{\sqrt{3}r}{2} + r \right) = Wr \Rightarrow P = \frac{W}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}$$

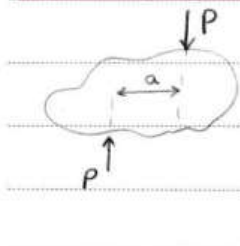


روش دوم: گشتاور



سوال: ضرب اصطکاک بین طناب و قرقره را در نظر بگیر.





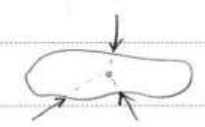
کویل اثر نیرو مادی و موازی به فاصله  $a$  داریم،  
موازی حاصل کشاور این نیرو نیست به هر نقطه دلخواه ما است و  
جنس از یک نیرو دور آن یکی نیرو بجوینم به دست می آید.

15



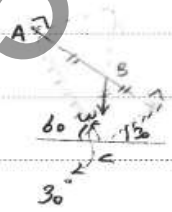
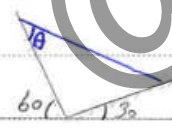
استاد

عوض سه نیروی  
الزبه عمودی 3 نیرو وارد شود، برای اینکه جسم در تعادل باشد باید سه نیرو متقارب باشند.  
یعنی امتداد 3 نیرو از یک نقطه گذرد و در آن جسم در تعادل می باشد.



لیمنین

EX.  $\theta = ?$  باشد تا جسم در تعادل باشد و از دیوارها سر نخورد. (وزن مسئله به است)  
(امکانک = 0)



حل:  
4 ضلعی به تمام زوایا 90 است و مستطیل  
در مستطیل قطرها هم برابر و نصف می کنند  
بین مثلث  $ABC$  متاهل الساعتی می شود پس  
زاویه  $\theta$  هم  $30^\circ$  می شود.

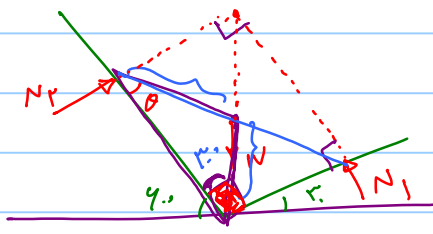
چهارضلع = مستطیل ← هرگز جسم = محل تا سطح حرکت

قطر که حد تراشفت می کنند

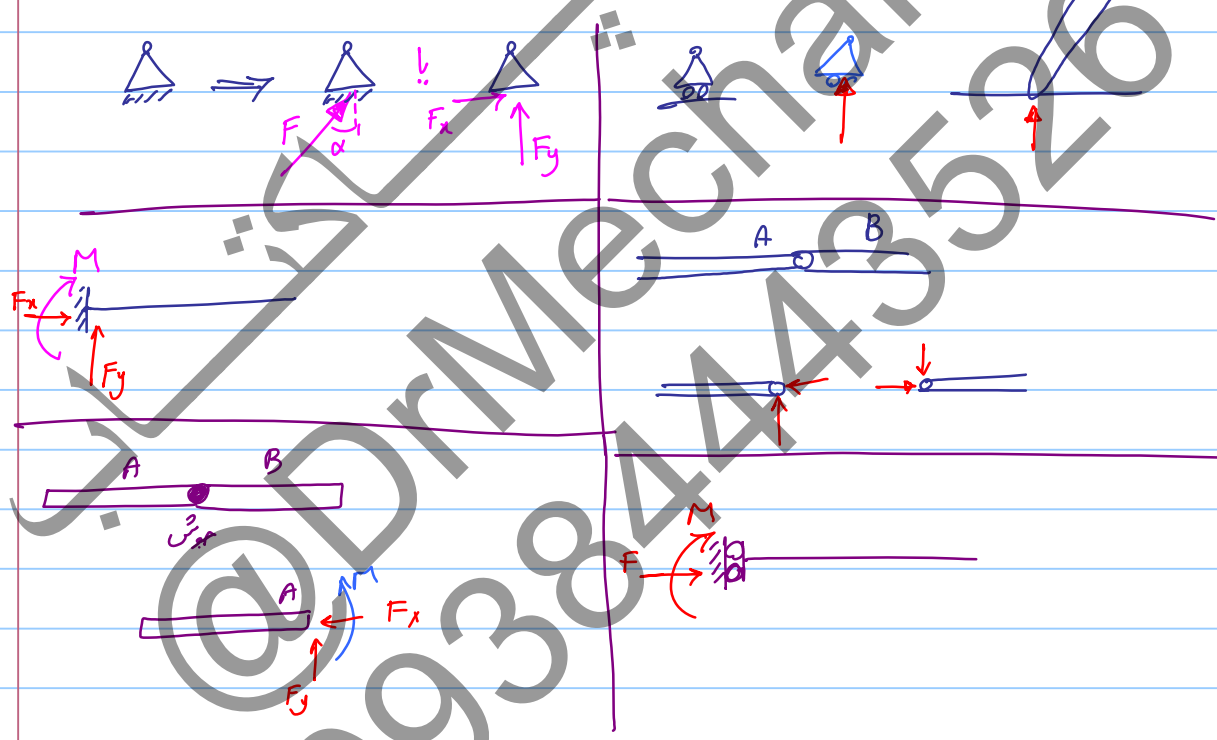
$\theta = 30^\circ$

نکته:

اساتیک

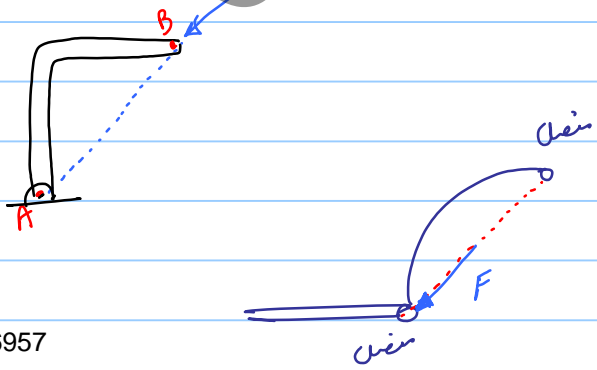


لیجین

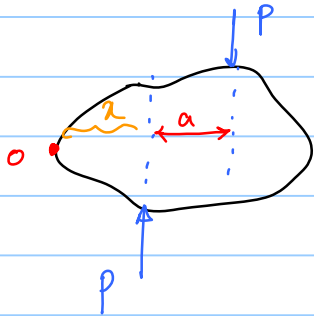


نکته: عضو دوتیرجی

آئر مفصل - مفصل بود.



نکته: کویل: دو نیروی مساوی و موازی و مخالف جهت که در فاصله  $a$  از هم قرار دارند.



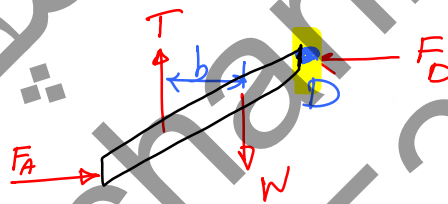
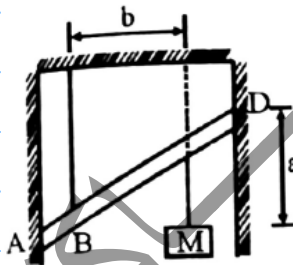
گشتاور =  $Pa$

$\sum M_O = P(a+x) - Px = Pa$

بدون اصطلاح

مثال: میله سبیل که جرم  $m$  از آن آویزان است، توسط یک طناب بین دو دیوار قرار دارد. کدام تکیه نیروی تکیه  $A$  را

نشان می دهد؟ (از هر تکیه ۱۰)



- $\frac{b}{a} mg$  (۱ ✓)
- $mg$  (۲)
- $\frac{a}{b} mg$  (۳)
- ۰ (۴)

(استاد مکانیک)

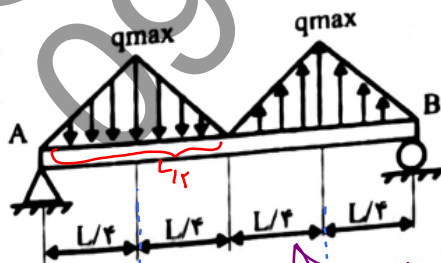
لیمین

$T = W$  (کویل)

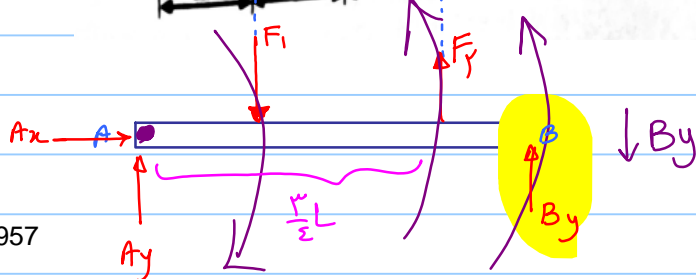
$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_A a = Wb \Rightarrow F_A = \frac{b}{a} mg$

۲۳- نیروی تکیه گاه B کدام است؟

(میانگین مکانیک ۷۹)



- صفر (۱)
- $\frac{1}{2} q_{max} L$  (۲)
- $\frac{1}{4} q_{max} L$  (۳)
- $\frac{1}{8} q_{max} L$  (۴ ✓)



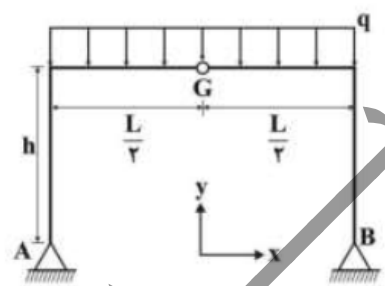
$A_x = 0$

$$F_1 = \frac{1}{2} (q_{max} \times \frac{L}{2}) \rightarrow \sum M_A = 0 \Rightarrow F_1 \times \frac{L}{2} = F_2 (\frac{3}{4}L) + B_y (L)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} (q_{max} \times \frac{L}{2}) \rightarrow \frac{1}{2} q \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} q \frac{L}{2} \times \frac{3}{4} + B_y$$

$$B_y = \frac{qL}{14} - \frac{3qL}{14} = -\frac{2qL}{14} \Rightarrow |B_y| = \frac{qL}{7}$$

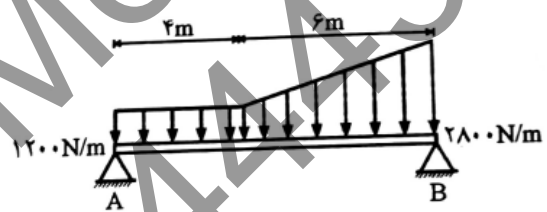
ساختار



۷۲- مؤلفه نیروی بین تگ در جهت y، کدام است؟ (q بار در واحد طول است). *ارشد ۹۷*

- (۱) صفر
- (۲)  $\frac{qL}{8}$
- (۳)  $\frac{qL}{4}$
- (۴)  $\frac{qL}{2}$

۶۶- بارهای متمرکز معادل در A و B را در شکل نشان داده شده به دست آورید. (مهندس مکانیک آزاد ۸۳)



$\begin{cases} R_B = 9840\text{ N} \\ R_A = 6960\text{ N} \end{cases}$ (۲)	$\begin{cases} R_B = 8850\text{ N} \\ R_A = 6960\text{ N} \end{cases}$ (۱)
$\begin{cases} R_B = 1080\text{ N} \\ R_A = 6780\text{ N} \end{cases}$ (۴)	$\begin{cases} R_B = 1020\text{ N} \\ R_A = 8520\text{ N} \end{cases}$ (۳)

تزیین: *مفصل هم*

- نیروها به مفصل وارد می شود. (مفصل - مفصل) نیروها در راستای در مفصل است.

- از وزن میله ها صرف نظر می شود.

- نیروی وارد بر اعضا، کشش یا فشاری است.



روش حل سائل جزایا :

(۱) معادله مفصل :

(۲) معادله برشی (مقطع) : ← بقدر استاده می شود.

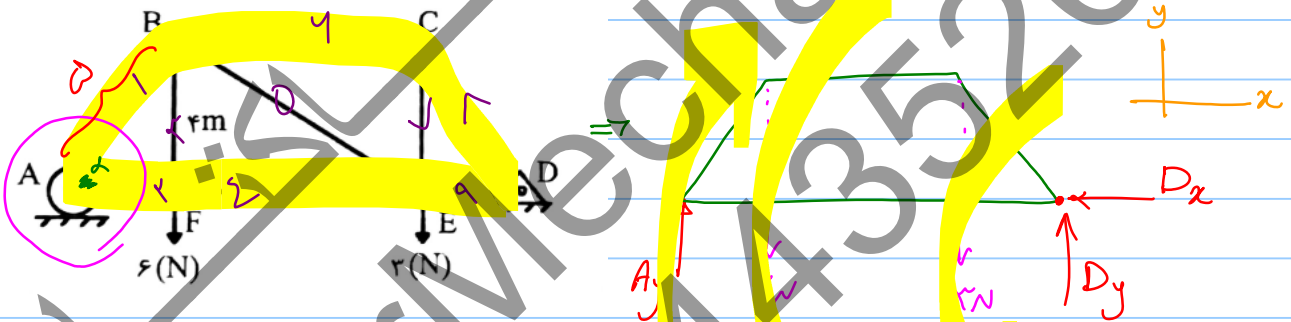
روش معادله مفصل :

- کل جریا را یک جسم در نظر بگیریم. ← نیروها را رسم کنیم

- نیروهای نگه‌دارنده را حساب می‌کنیم.

- از مفصل شروع می‌کنیم تا تمام مجهول داشته باشد.

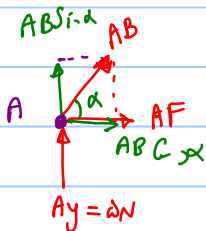
کمی تعداد معادله‌ها کمتر می‌شود تا آن مفصل است.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow A_y(9) = 4 \times 4 + 3 \times 3 \Rightarrow A_y = 2 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + D_y = 4 + 3 \Rightarrow D_y = 4 \text{ N}$$



برای نقطه A می‌رویم : ۲ تا معادله داریم

$$AB \sin \alpha = -A_y \Rightarrow AB \left( \frac{4}{5} \right) = -2 \Rightarrow AB = -\frac{2.5}{4} \text{ N}$$

منتهی شدن دهانه آن است که

عضو AB فشار است.

$$\left( -\frac{2.5}{4} \right) \times \frac{3}{4} = -AF \Rightarrow AF = +\frac{1.8}{4} \text{ N}$$

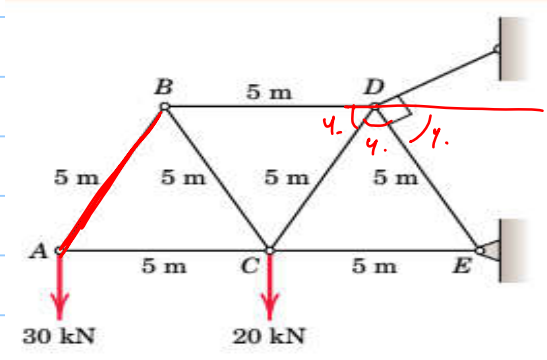
عضو AF کشش است.

استاد میکانیک

لیجین



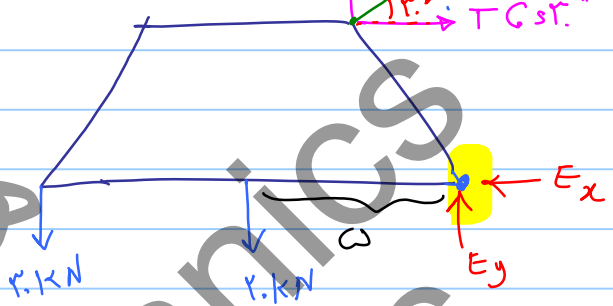
تمرین بقیه عضوها حساب کنید.



مثال: کجی ماهک

...., AC, AB

رستای تیر



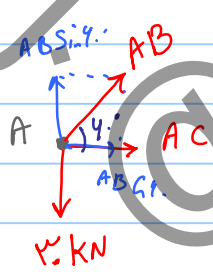
$$\sum M_E = 0$$

$$\Rightarrow T \times 4 = 2 \times 4 + 2 \times 6 \Rightarrow T = 1.0 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T \cos 30^\circ = E_x \Rightarrow E_x = 1.0 \times \sqrt{3} \text{ kN} = 1.732 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T \sin 30^\circ + E_y = 2 + 2 \Rightarrow E_y = 1.0 \text{ kN}$$

لیبین

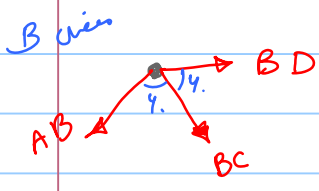


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow AB \cos 45^\circ + AC = 0 \Rightarrow AC = -AB \cos 45^\circ = -1.732 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow AB \sin 45^\circ = 30 \Rightarrow AB = \frac{30}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 42.42 \text{ kN}$$

نشای

تیم



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

تمرین: نیروهای بقیه عضوها حساب کنید.

لقع (نشای یا کشتن)

مفصل :  $j$

پایه :  $R$

عضو :  $m$

حزب معین است.  $m+R = 2j \rightarrow$   
از روش اساتیک نایل حل است.

if  $\left\{ \begin{array}{l} m+R > 2j \rightarrow \text{مشارت صالح} \\ m+R < 2j \rightarrow \text{ناپایدار} \end{array} \right.$

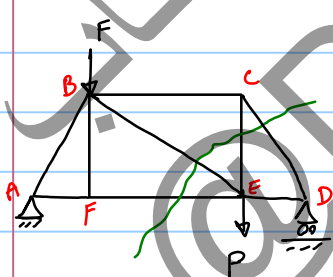
روش برش :

\* عضو را که می‌خواهیم برش بزنیم ، طوری برش بزنیم که ۳ عضو بیشتر قطع (اره) نشود.

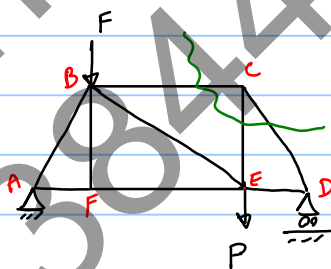
\* برش باید طوری باشد که سه ریزه از یک نقطه نگذرند. (چون حل نمی‌شود!)

\* پس از برش ، برانج شده از برش می‌بینیم که نیرو و پایه کمتر باشد. (عملیات کمتر)

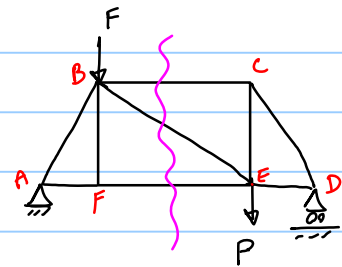
\* عضوهایی که برش خوردند در آنها بیشتر ورسم می‌شود.



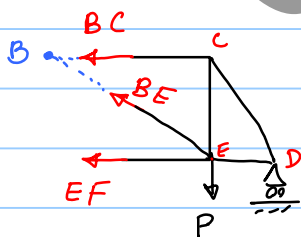
برش نادرست.



برش نادرست



✓ برش درست

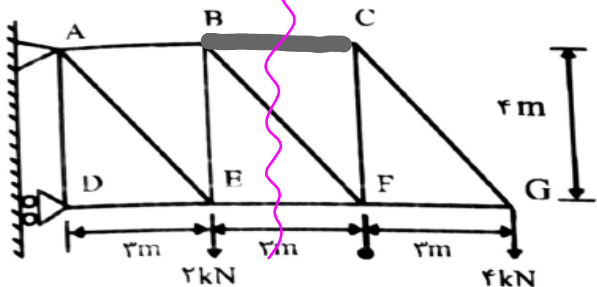


$$\sum M_B = 0 \Rightarrow EF = \checkmark$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow BC = \checkmark$$

(مهندس مکانیک ۷۹)

۷- در خرابی نشان داده شده نیروی وارد بر عضو BC کدام می باشد؟



۲/۵ KN (۱)

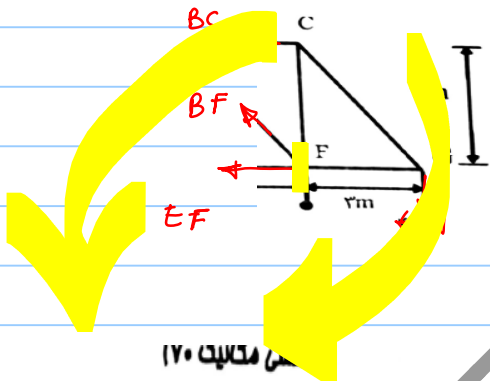
۳ KN (۲ ✓)

۴ KN (۳)

۵ KN (۴)

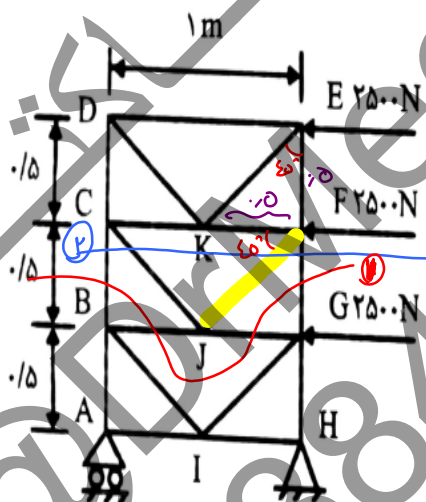
$$\Rightarrow \sum M_F = 0 \Rightarrow BC \times 2 = 4 \times 2$$

$$\Rightarrow BC = 4 \text{ KN}$$



۱۳- نیروی داخلی در عضو FJ را به دست آورید.

(مکانیک ۷۰)



۳۷۵۰ N (۱)

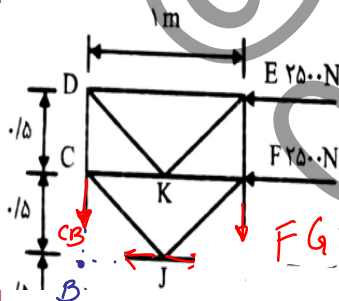
۱۲۵۰ N (۲)

-۲۵۰۰ N (۳)

۴ هیچکدام

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow FG \times 1 = 250 \times 1 + 250 \times 0.5$$

$$\Rightarrow FG = 375 \text{ N}$$



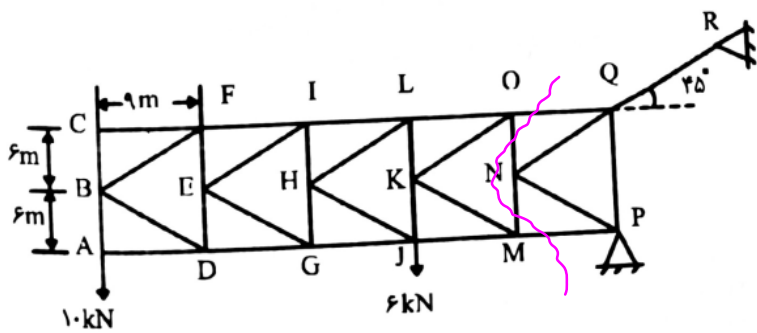
$$\frac{\sqrt{r}}{r} = 0.7$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 250 \times 0.5 = 375 \times 1 + FJ \times 0.5$$

$$FJ = -3025 \text{ N}$$



۱۰- نیروی موجود در عضو  $OQ$  از خرابای شکل زیر برابر است با: (مهندس مکانیک ۷۳)



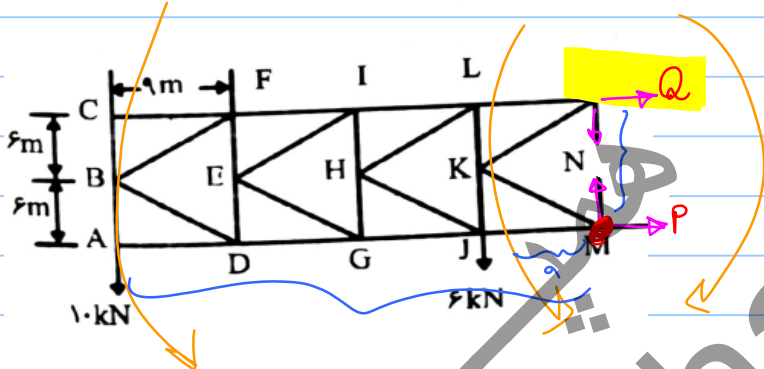
(۱) فشاری - ۳۴/۵ KN

(۲) فشاری - ۳۰ KN

(۳) کششی - ۳۴/۵ KN

(۴) فشاری - ۴/۵ KN

حل:



حدگیر خنثی  $\rightarrow$   $NM$  و  $ON$

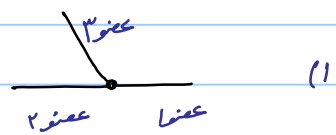
$$\sum M_M = 0 \rightarrow OQ \times 9 = \frac{6}{9} \times 9 + \frac{10}{4} \times 2 \times 9 \Rightarrow OQ = \frac{49}{3} = 34,5 \text{ N}$$

کنتر

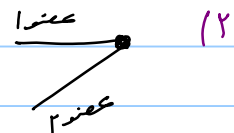
اعضای صفر نیروی: عضوی که نیروی بر آن وارد نمی شود. ( $F=0$ )

✓ نکات عضو صفر نیروی:

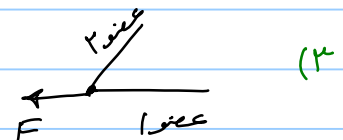
۱. عضو ۳ صفر نیروی است.



۲. عضو ۲ صفر نیروی هستند.

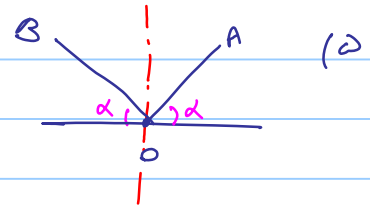


۳. عضو ۲ صفر نیروی است.



اگر شکل از نظر نیروی و هندسی متوازن باشد: لولاً صفر نیروی داریم.

اما یکی نشانه دگری فشاری  $F_{OA} = F_{OB}$



در نت با این جلات رو بر می شویم:

- کدام عضو ... است.

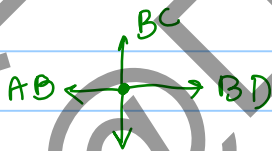
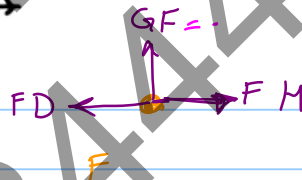
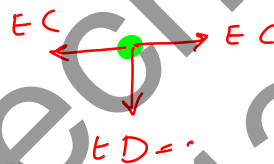
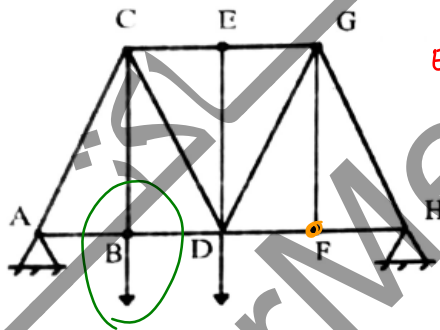
- کدام عضو ... تحمل نمی کند

- کدام عضو ... فقط جهت پایداری نصب شده است.

استاد

لیمین

(محلست مگالیک ۷۶)



(۱) ED, CB, GF

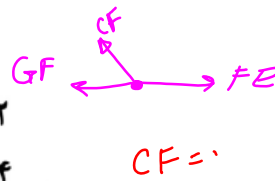
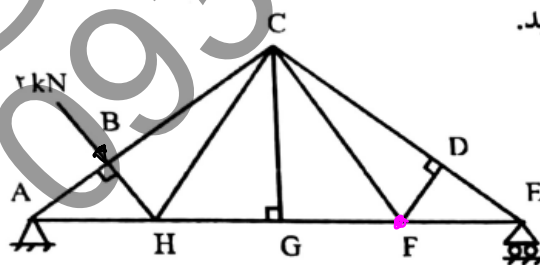
(۲) CB, ED

(۳) CB, GF

(۴) ED, GF ✓

۱۱- کدامیک از عناصر خرابای زیر، نیرویی تحمل نمی کند.

(محلست مگالیک ۷۸)



$\sqrt{2}$  (۲)  
۲ (۴)

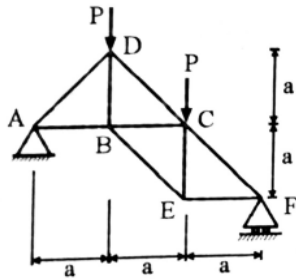
(۱) صفر  
 $\sqrt{3}$  (۳)

۸- نیرو در عضو FC را به دست آورید.



(مهندس مکانیک ۸۳)

۲- مقدار نیرو در عضوهای DC و BE به ترتیب کدام است؟



$F_{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2} P$  ,  $F_{DC} = \sqrt{2} P$  (۱)

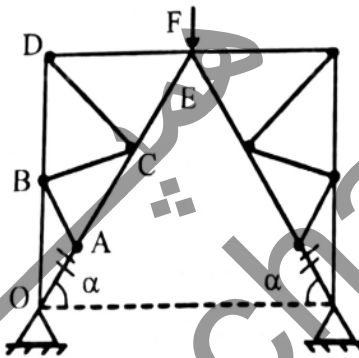
$F_{BE} = \sqrt{2} P$  ,  $F_{DC} = \sqrt{2} P$  (۲)

$F_{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2} P$  ,  $F_{DC} = \frac{\sqrt{3}}{2} P$  (۳)

$F_{BE} = \sqrt{2} P$  ,  $F_{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2} P$  (۴)

۳- خرابی صفحه ای متقارن شکل زیر مفروض است. نیروی داخلی عضوهای نشان داده شده عبارت است از:

(مهندس مکانیک ۸۶)



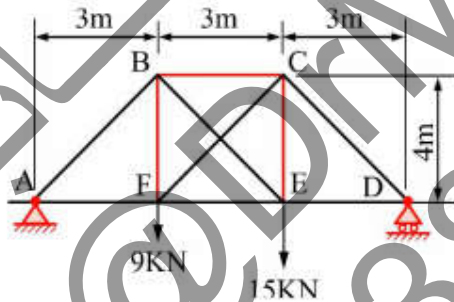
$\frac{2F}{\cos \alpha}$  (۱)

$\frac{F}{2 \cos \alpha}$  (۲)

$\frac{2F}{\sin \alpha}$  (۳)

$\frac{F}{2 \sin \alpha}$  (۴)

۷۵- در خرابی زیر، اعضای CF, BE کابل بوده و بدون تماس با یکدیگر کشش را می توانند تحمل کنند. کابل ..... تحت کشش قرار داشته و عضو AB تحت نیروی ..... کیلو نیوتن قرار دارد.



ار ۹۳

CF فشاری  $\frac{65}{4}$  (۱)

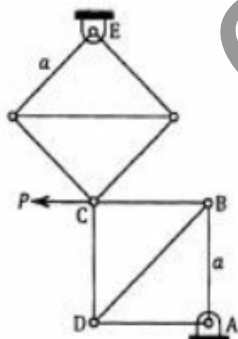
BE فشاری  $\frac{55}{4}$  (۲)

CF کششی  $\frac{55}{4}$  (۳)

BE کششی  $\frac{33}{4}$  (۴)

۷۷- خرابی روبه‌رو، از دو قسمت مربعی مشابه، به طول ضلع a، تشکیل شده است. نیروی عضو AB، چند برابر P، و

ار ۹۴



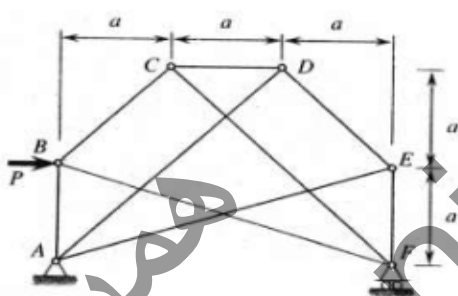
P فشاری (۱)

P کششی (۲)

$\sqrt{2}P$  فشاری (۳)

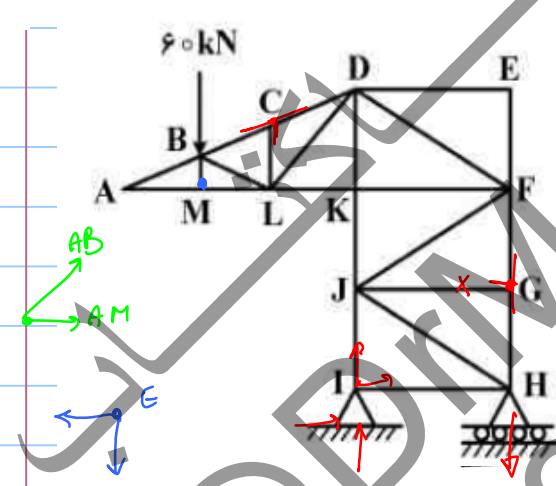
$\sqrt{2}P$  کششی (۴)

۷۵- نیرو در عضو EF در خرابای زیر چند برابر P می باشد؟ *اشتراک ۹۳*



- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴) ۱

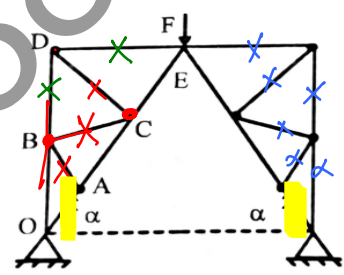
۷۳- در خرابای روبه رو چند عضو صفر نیرویی وجود دارد؟ *اشتراک ۹۴*



- (۱)  $AB = 0$
- (۲)  $CL = 0$
- (۳)  $AM = 0$
- (۴)  $BM = 0$
- (۴)  $DE = 0$
- (۴)  $ML = 0$
- (۴)  $EF = 0$

- (۱) ۶
- (۲) ۷
- (۳) ۸
- (۴) ۹

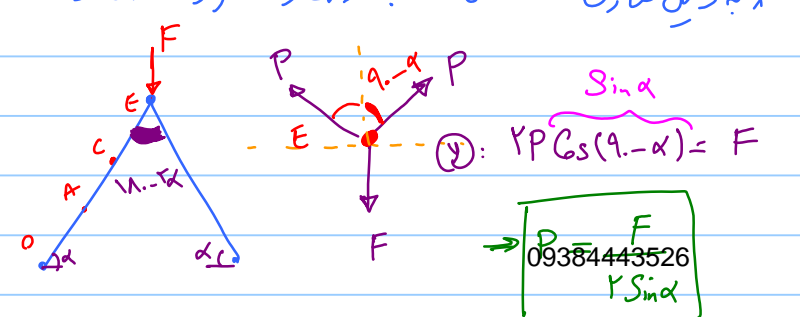
۳- خرابای صفحه ای متقارن شکل زیر مفروض است. نیروی داخلی عضوهای نشان داده شده عبارت است از:



- (۱)  $\frac{2F}{\cos \alpha}$
- (۲)  $\frac{F}{2 \cos \alpha}$
- (۳)  $\frac{2F}{\sin \alpha}$
- (۴)  $\frac{F}{2 \sin \alpha}$

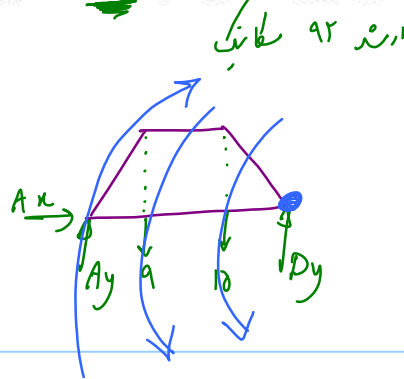
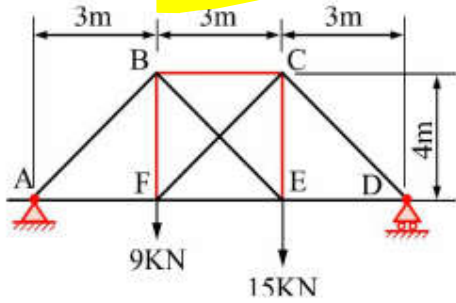
- (A)  $\Rightarrow AB = 0$
- (B)  $\Rightarrow BC = 0$
- (C)  $\Rightarrow CD = 0$
- (D)  $\Rightarrow DF = BD = 0$
- (E)  $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BC = 0 \\ BD = 0 \end{array} \right. \Rightarrow OB = 0$

\* به دلیل تقارن، اعضای متقابل راست و چپ صفر می شوند.





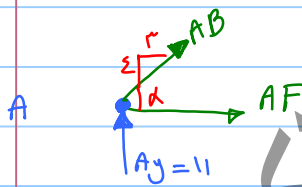
۷۵. در خرابی زیر، اعضای CF, BE کابل بوده و بدون تماس با یکدیگر کشش را می توانستند تحمل کنند. کابل ..... تحت کشش قرار داشته و عضو AB تحت نیروی ..... قرار دارد.



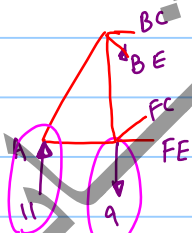
- (۱) فشاری، CF  $\frac{65}{4}$
- (۲) فشاری، BE  $\frac{55}{4}$
- (۳) کششی، CF  $\frac{55}{4}$
- (۴) کششی، BE  $\frac{33}{4}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\sum M_D = 0 \Rightarrow A_y \times 9 = 15 \times 2 + 9 \times 4 \Rightarrow A_y = 11 \text{ kN}$



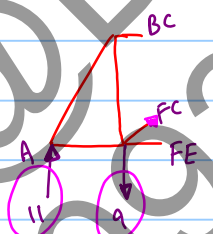
$A_y + AB \sin \alpha = 0 \Rightarrow AB = -\frac{55}{4}$



FC = 0

BE > 0

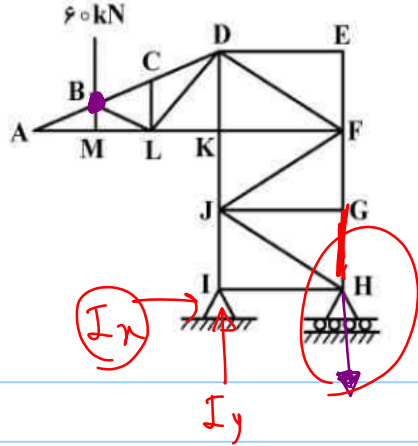
FC و BE



تعداد ندارد

۷۳- در خرابی روبرو چند عضو صفر نیرویی وجود دارد؟

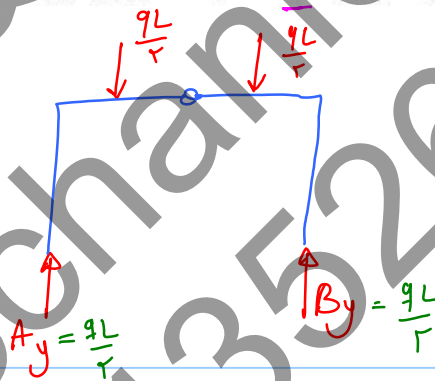
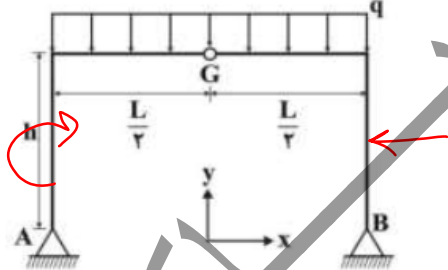
- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)



$\Sigma I \Rightarrow H_y \checkmark$   
 $I_H \neq 0$

۷۲- مؤلفه نیروی بین G در جهت y کدام است؟ (q بار در واحد طول است.)

- صفر (۱) ✓
- $\frac{qL}{2}$  (۲)
- $\frac{qL}{4}$  (۳)
- $\frac{qL}{2}$  (۴)

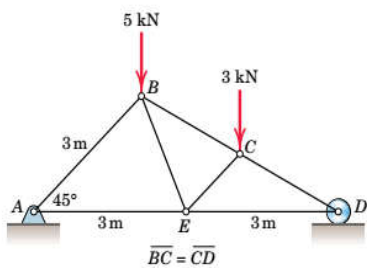


$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y = \frac{9L}{2} \rightarrow A_y = \frac{9L}{2}$

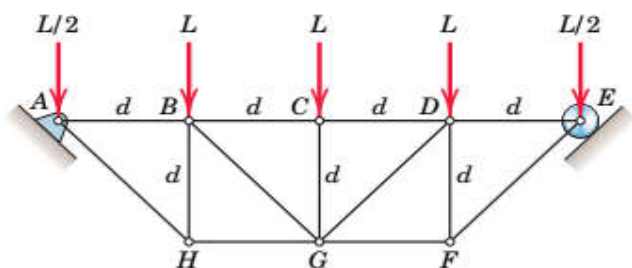
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow G_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow G_x = 0$

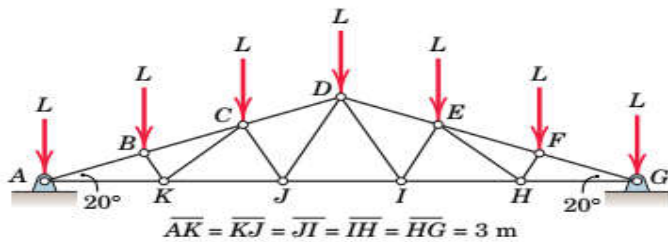
4/7 Determine the forces in members BE and CE of the loaded truss.



4/22 Determine the forces in members AB, CG, and DE of the loaded truss.



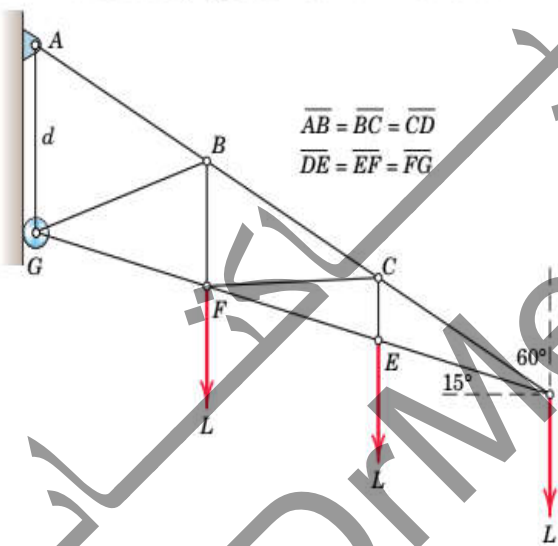
4/26 Determine the forces in members  $EH$  and  $EI$  of the double Fink truss. Neglect any horizontal reactions at the supports and note that joints  $E$  and  $F$  divide  $DG$  into thirds.



Problem 4/26

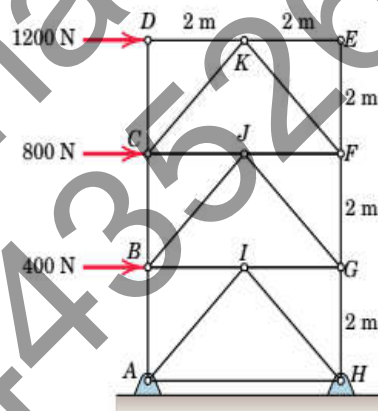
Problem 4/38

4/39 Determine the forces in members  $BC$  and  $CF$  of the loaded truss, repeated here from Prob. 4/19.



Problem 4/39

4/42 Determine the forces in members  $BC$  and  $FG$  of the loaded symmetrical truss. Show that this calculation can be accomplished by using one section and two equations, each of which contains only one of the two unknowns. Are the results affected by the static indeterminacy of the supports at the base?



Problem 4/42

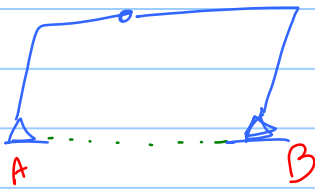
قاب ها :

\* بر خلاف خواب ، در قاب ها ، در هر جایی می توان نیرو وارد کرد.

\* قاب ها ، می تواند گسترده تحمل کند.

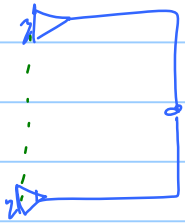
\* بهترین حالت برای گنبد قاب های در عموماً است .

لاه قاب حقای دو عضوی:



۱) ۲ عضو دارد.  
۲) پایه که روی سطح افقی یا قائم دربی استنداند.

اساتیک



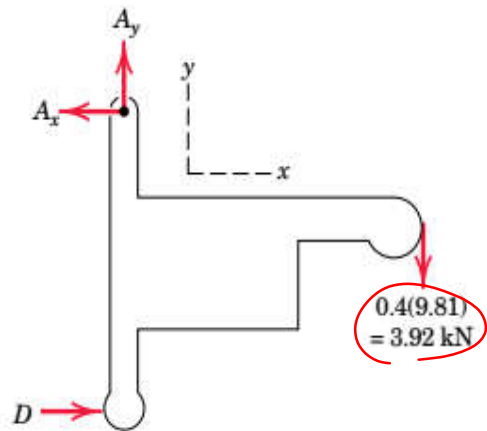
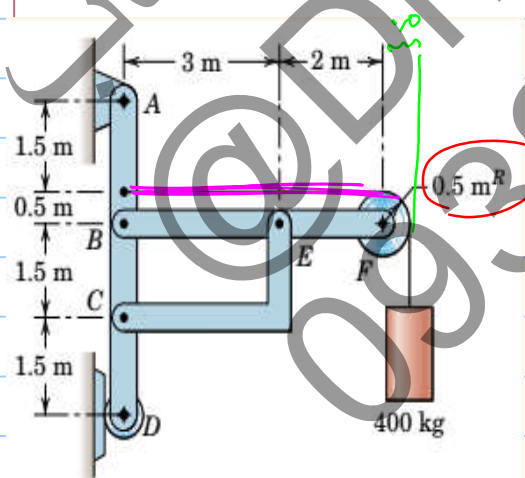
۱) ۲ عضو دارند.  
۲) پایه که با هم اختلاف سطح دارند.



بار حل قاب نوع ۱:

۱) کل قاب را یک جسم (یکبار) در نظر گیری و حول پایه دیگر گشتا در می نویسیم.

۲) عضو مورد نظر سوال را جدا می کنیم و حول مفضل آن گشتا در می نویسیم.

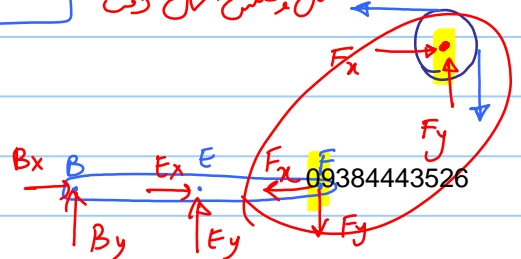


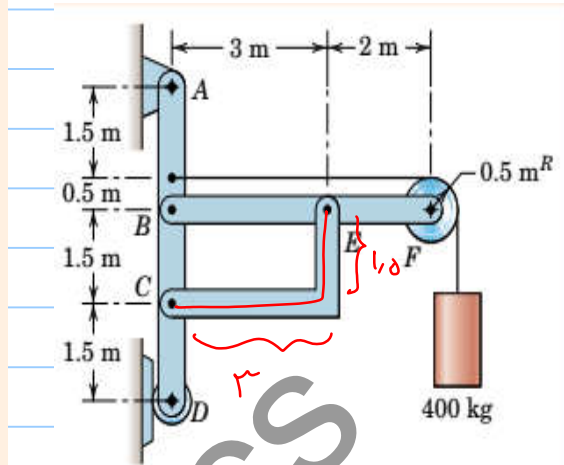
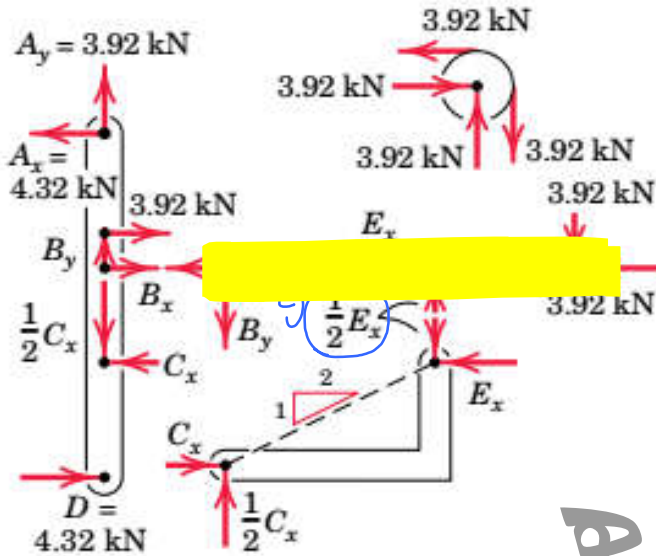
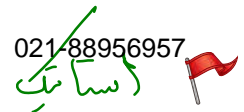
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow D \times 5.0 = 3.92 \times 0 \Rightarrow D = 3.92 \text{ kN}$$

عمل برعکس العمل دقت کنین

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D = A_x \Rightarrow A_x = 3.92 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = F \Rightarrow A_y = 3.92 \text{ kN}$$





استاتیق

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} E_x \times 3 = 3,92 \times 2 \Rightarrow E_x = 12 \text{ kN}$$

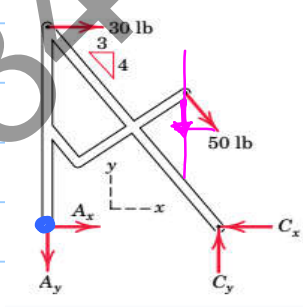
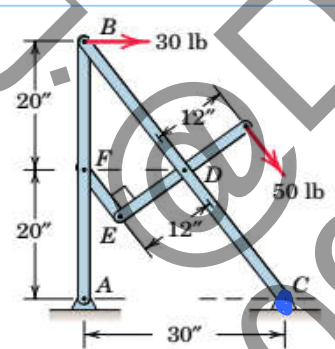
$$E_y = 7,10 \text{ kN}$$

$$E_x = 2 E_y$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x + 3,92 = E_x \Rightarrow B_x = 9,10 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + 3,92 = E_y \Rightarrow B_y = 4,18 \text{ kN}$$

لیمین



نیروهای نقطه D

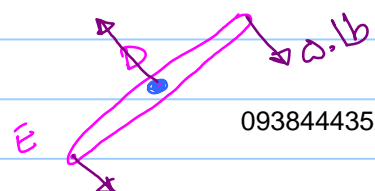
همین، بقیه صورتی را پیدا کنید

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 0 \cdot x + 4 \cdot x = A_y \cdot x \Rightarrow A_y = 4 \cdot 10$$

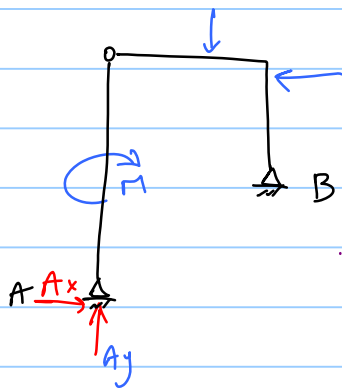
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = A_y + 4 \cdot x \Rightarrow C_y = 10 \cdot 10$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 0 \cdot x + 12 = E_x \cdot 12 \Rightarrow E = 0 \cdot 10$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 0 \cdot x + 12 = D \cdot 12 \Rightarrow D = 1 \cdot 10$$



قاب نوع دوم :

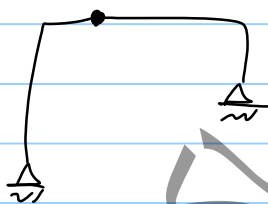


حالت اول: اگر یکی از نودهای نیروی بزرگه گاه از مفصل عبور کند.

(تکلیف گاه درین امتداد هستند)

\* عضوی که نیروی بزرگه گاه است از مفصل عبور کند و جدا کردن و نیروها آن را رسم کنی.

گستا در مراحل مفصل نویسیم.



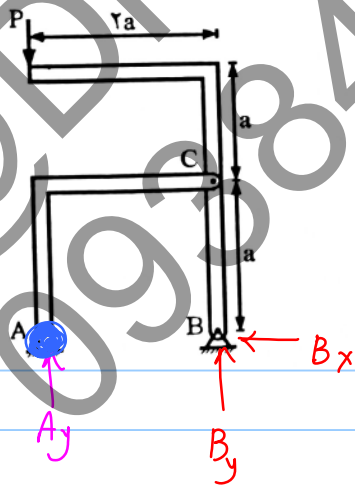
حالت ۲: نیروی بزرگه گاه از مفصل عبور نمی کند.

روش قاب را در نظر می گیریم. سه گانه می نویسیم. ① معادله

\* عضوی که سوراخ خواسته جدا می کن ← ① معادله

معمولا ۲ معادله ۲ مجهول می رسد.

(مهندسی مکانیک ۱۷۵)



۳۵- در قاب شکل زیر عکس العمل قائم مفصل C، چند P است؟

$$\sum M_A = 0$$

$$\Rightarrow B_y(2a) = 0 \Rightarrow B_y = 0$$

$$\sqrt{2} (1)$$

$$\frac{1}{2} (2)$$

$$1 (3)$$

$$2 (4)$$

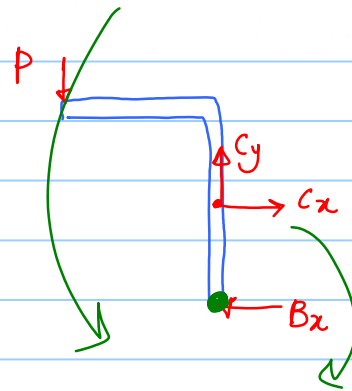
امتداد نیروی P و نیروی Bx از A می گذرد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = 1P$$

$$\sum M_B = 0$$

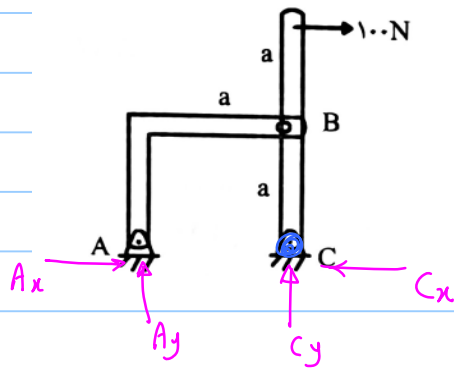
$$P(2a) = C_x a$$

$$C_x = 2P$$



(محلصی مکانیک ۶۹)

۶۱- نیروی وارد بر تکیه گاه A در قاب نشان داده شده برابر است با:



$$\sum M_C = 0$$

$$A_y a = 100 \times 2a$$

$$A_y = 200$$

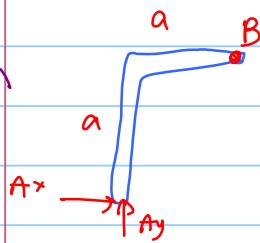
۱۰۰N (۱)

۲۰۰N (۲)

۲۴۲N (۳)

۲۸۲N (۴) ✓

استاد



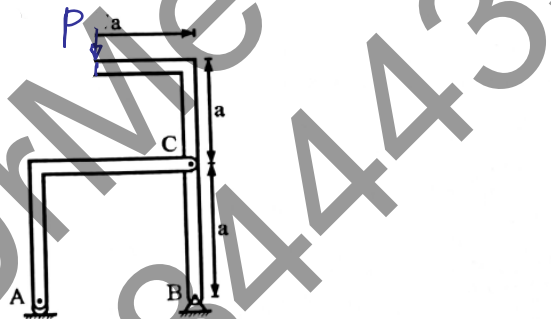
$$\Rightarrow A_x a = A_y a \Rightarrow A_x = 200$$

$$A = \sqrt{200^2 + 200^2} = 200\sqrt{2} = 200 \times 1.41 = 282N$$

تقریب

(محلصی مکانیک ۱۷۵)

۳۵- در قاب شکل زیر عکس العمل قائم مفصل C، چند P است؟

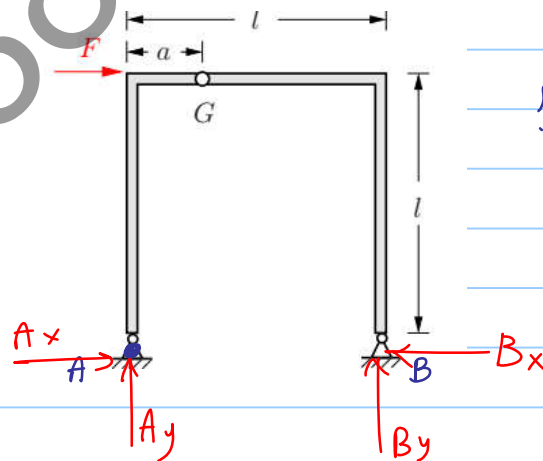


- √۲ (۱)
- ۱/۲ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

لیجین

**Problem 5.29** Determine the position of the hinge G, such that the value of the maximal bending moment is minimal.

Depict the bending moment diagram for that case.



مثال: نیروی عکس العمل در G = !

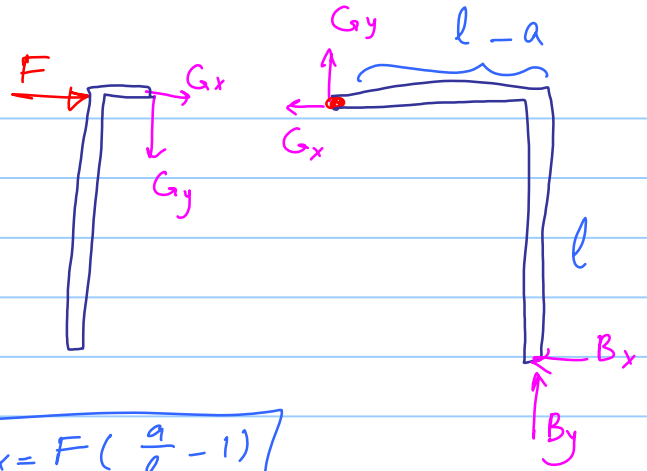
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \times l = F l \Rightarrow B_y = F$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y l = F l \Rightarrow A_y = F$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow B_x l = B_y (l - a)$$

$$\Rightarrow B_x = F \left( \frac{l-a}{l} \right)$$

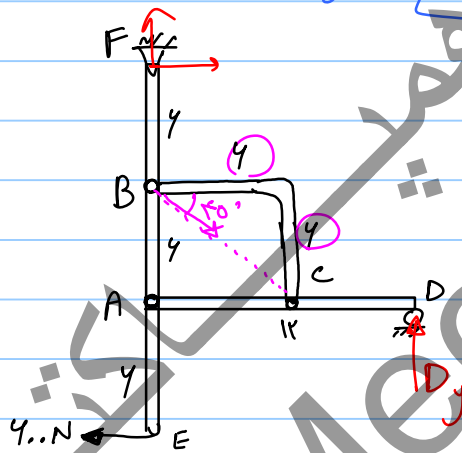
$$B_x = F \left( 1 - \frac{a}{l} \right)$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow G_x = -B_x \Rightarrow G_x = F \left( \frac{a}{l} - 1 \right)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow G_y = -B_y \Rightarrow G_y = -F$$

استاتیکی

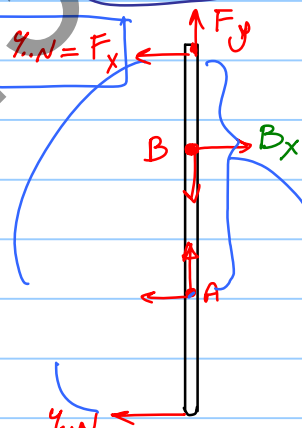


کمانه منبر در بین B را سه سطح آوریم

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 4 \cdot x \cdot 4 = D_y \cdot x$$

$$D_y = 4 \cdot 4 = 16 \text{ N}$$

$$4 \cdot 4 = F_x$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4 \cdot x \cdot 4 = B_x \cdot x + 4 \cdot x \cdot 4$$

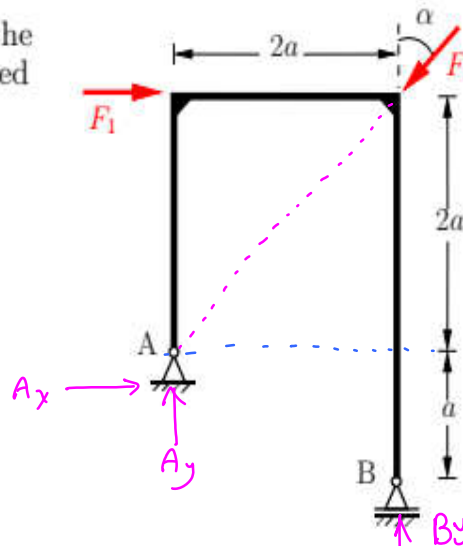
$$B_x = 4 \cdot 4 = 16 \text{ N}$$

$$B = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 18.2 \text{ N}$$

ایمین

**Problem 3.6** Determine the support reactions for the depicted frame.

Given:  $F_1 = 2000 \text{ N}$ ,  
 $F_2 = 3000\sqrt{2} \text{ N}$ ,  
 $\alpha = 45^\circ$ ,  
 $a = 5 \text{ m}$ .



مثال: بخش العمل تکنیک ۶

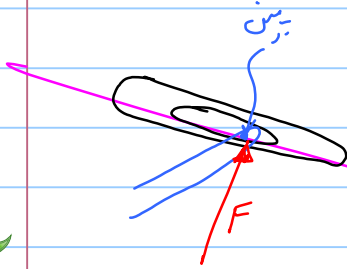


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_1 (2a) = B_y \times 2a \Rightarrow \boxed{B_y = F_1} \Rightarrow B_y = 2000 \text{ N}$$

$$\textcircled{x}: F_1 + A_x = F_r \cos \alpha \Rightarrow \boxed{A_x = F_r \cos \alpha - F_1} \Rightarrow A_x = 2000 \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2000 = 1000 \text{ N}$$

$$\textcircled{y}: A_y + B_y = F_r \sin \alpha \Rightarrow \boxed{A_y = F_r \sin \alpha - B_y} \Rightarrow A_y = 2000 \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2000 = 1000 \text{ N}$$

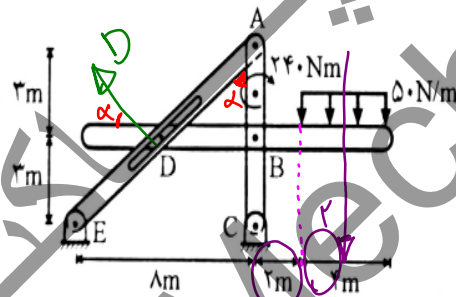
کتابه در اتصال داخل شیار باید نیرو عمود بر شیار رسم شود.



استاتیسی

(مهندسی مکانیک ۱۴)

۵- در شکل زیر عکس العمل در بین B عبارتست از:

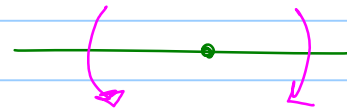
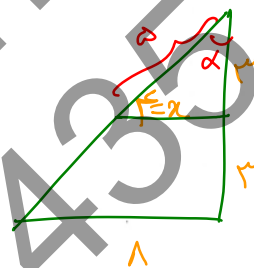


۴۰۰ N (۱)

۴۸۰/۷ N (۲)

۳۳۳/۳ N (۳)

**۴۲۷/۲ N (۴)**



ایمین

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow D \sin \alpha \times f = 200 \times f \Rightarrow D = 200 \times \frac{2}{1} = 400 \text{ N}$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= D \cos \alpha = 400 \times \frac{3}{5} = 240 \text{ N} \\ D_y &= D \sin \alpha = 400 \times \frac{4}{5} = 320 \text{ N} \end{aligned} \right\}$$

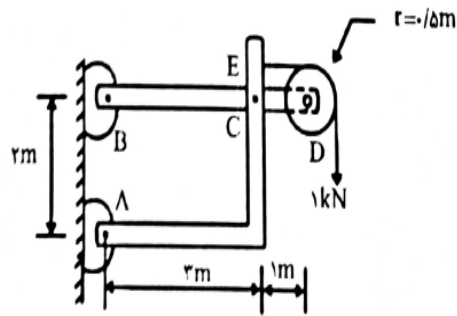
$$\textcircled{x}: B_x = D \cos \alpha \Rightarrow \boxed{B_x = 240 \text{ N}}$$

$$B = \sqrt{240^2 + 320^2} = 400 \text{ N}$$

$$\textcircled{y}: B_y + 200 + D_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -520 \text{ N}}$$

(مهندس مکانیک ۷۸)

۲۶- نیروی وارد به پین را به دست آورید.



(۱)  $C_x = 2000\text{ N}$  و  $C_y = 1500\text{ N}$

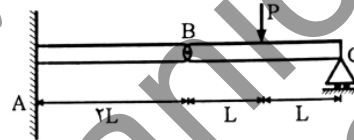
(۲)  $C_x = 3200\text{ N}$  و  $C_y = 3500\text{ N}$

(۳)  $C_x = 3250\text{ N}$  و  $C_y = \frac{4000}{3}\text{ N}$

(۴)  $C_x = 4000\text{ N}$  و  $C_y = 2500\text{ N}$

(مهندس مکانیک ۸۴)

۴- گشتاور وارد بر نقطه A در شکل مقابل را بدست آورید؟



(۴)  $\frac{PL}{3}$

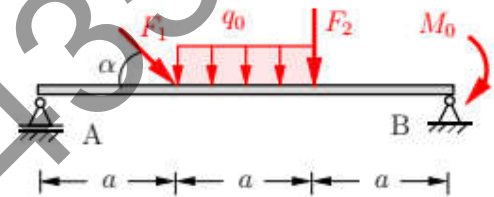
(۳)  $3PL$

(۲)  $2PL$

(۱)  $PL$

**Problem 3.2** Determine the support reactions for the depicted system.

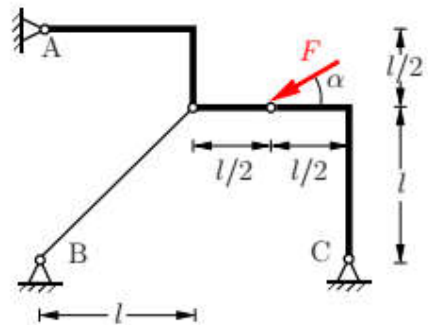
Given:  $F_1 = 2\text{ kN}$ ,  $F_2 = 3\text{ kN}$ ,  
 $\alpha = 1\text{ m}$ ,  $M_0 = 4\text{ kNm}$ ,  
 $q_0 = 5\text{ kN/m}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

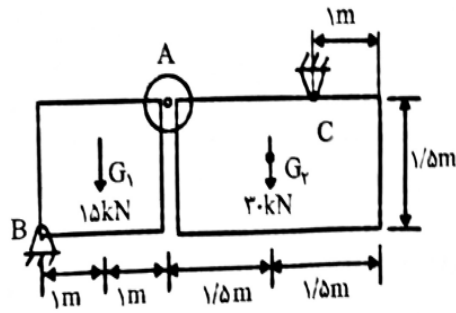


لیمنین

**Problem 3.7** Determine the support reactions for the depicted frame.

Given:  $\alpha = 30^\circ$





$$A_y = 7/5 \text{ KN} \quad A_x = 20 \text{ KN} \quad (2) \quad A_y = 5 \text{ KN} \quad A_x = 15 \text{ KN} \quad (1)$$

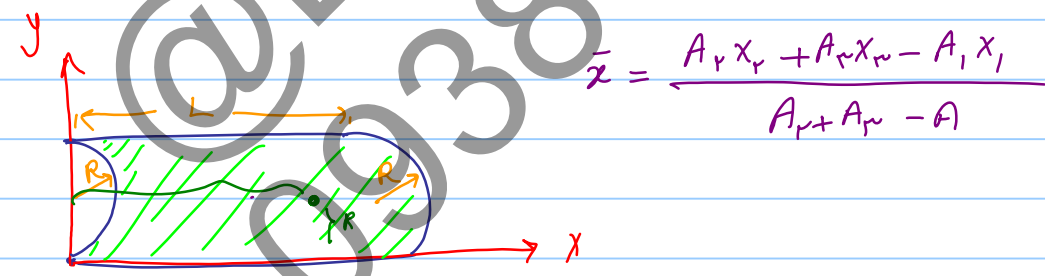
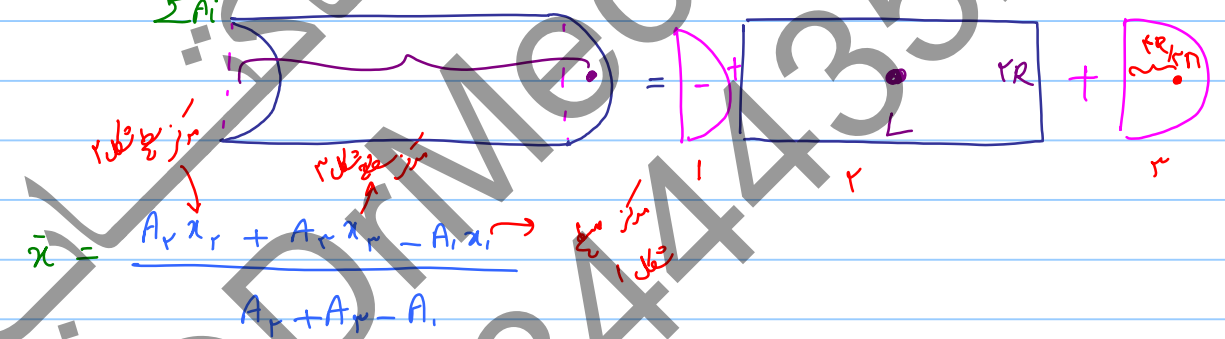
$$A_y = 15 \text{ KN} \quad A_x = 20 \text{ KN} \quad (4) \quad A_y = 12 \text{ KN} \quad A_x = 22 \text{ KN} \quad (3)$$

مرکز سطح - مرکز جرم - مرکز ثقل  
 $\bar{x} \leq x_{cm}$

① شکل برابر مجموع یا تفاضل چند شکل ساده باشد:

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$



$$\bar{x} = \frac{2LR \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2} \pi R^2 \left(\frac{FR}{\pi} + L\right) - \frac{1}{4} \pi R^2 \left(\frac{FR}{\pi}\right)}{2LR + \frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{1}{4} \pi R^2} = \frac{L^2 R + \frac{\pi R^2 L}{2}}{2LR}$$

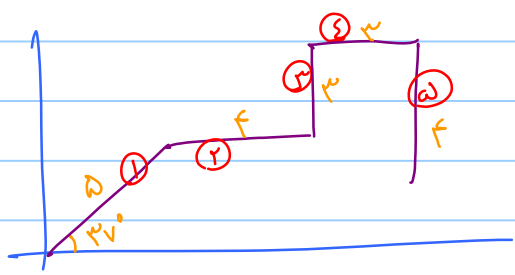
$$\bar{x} = \frac{L + \frac{\pi R}{2}}{2} = \frac{2L + \pi R}{4}$$

نتیجه:  $\frac{FR}{\pi}$

$\bar{y} = R$

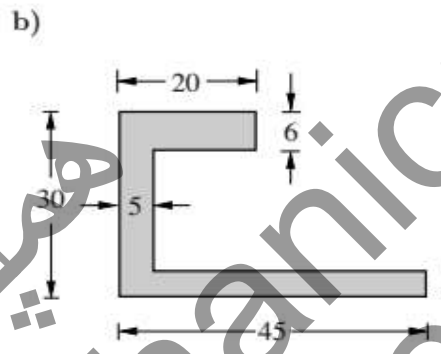
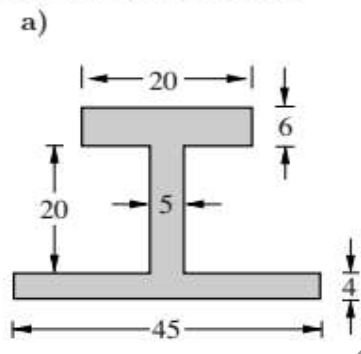


طول  
↓  
$$\bar{x} = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i}$$



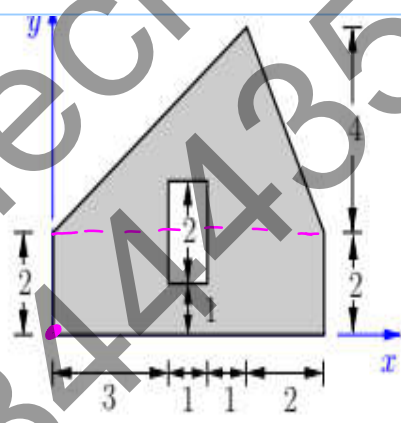
اساتید

**Problem 2.3** Locate the centroids of the depicted profiles. The measurements are given in mm.



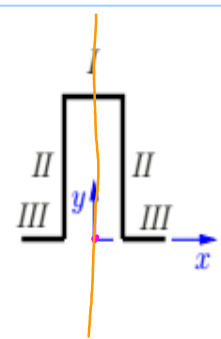
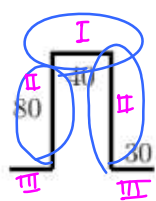
لیمنین

**Problem 2.4** Locate the centroid of the depicted area with a rectangular cutout. The measurements are given in cm.



**Problem 2.5** A wire with constant thickness is deformed into the depicted figure. The measurements are given in mm.

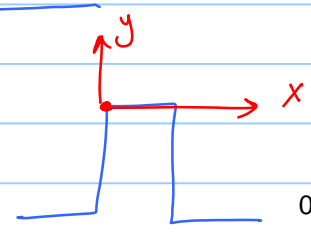
Locate the centroid.



۴۰... ۸۰... ۳۰...  

$$y_c = \frac{\sum y_i L_i}{\sum L_i} = \frac{40 \times 10 + (10 \times 40) + 2 \times 30 \times 40}{2 \times 40 + 2 \times 80 + 30}$$

$$= \frac{9400}{170}$$

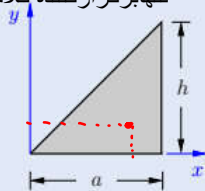


مربع

### Location of Centroids

#### Areas

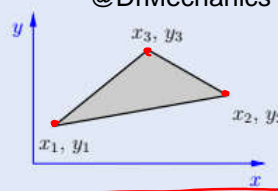
triangle



$$x_c = \frac{2}{3} a$$

$$y_c = \frac{1}{3} h$$

$$A = \frac{1}{2} ah$$

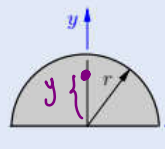


$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

نیم دایره

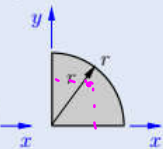


$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{4}{3\pi} r$$

$$A = \frac{\pi}{2} r^2$$

ربع دایره

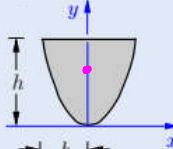


$$x = \frac{4}{3\pi} r$$

$$y = \frac{4}{3\pi} r$$

$$A = \frac{\pi}{4} r^2$$

پاره‌ای

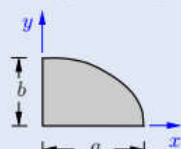


$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{3}{8} h$$

$$A = \frac{4}{3} bh$$

quarter ellipse



$$x_c = \frac{4}{3\pi} a$$

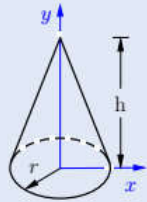
$$y_c = \frac{4}{3\pi} b$$

$$A = \frac{\pi}{4} ab$$

این چهارم بعضی

#### Volumes

cone

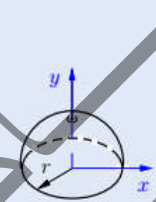


$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{1}{4} h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

hemisphere



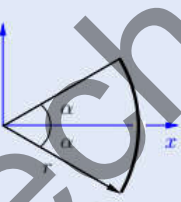
$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{3}{8} r$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^3$$

#### Line

circular arc

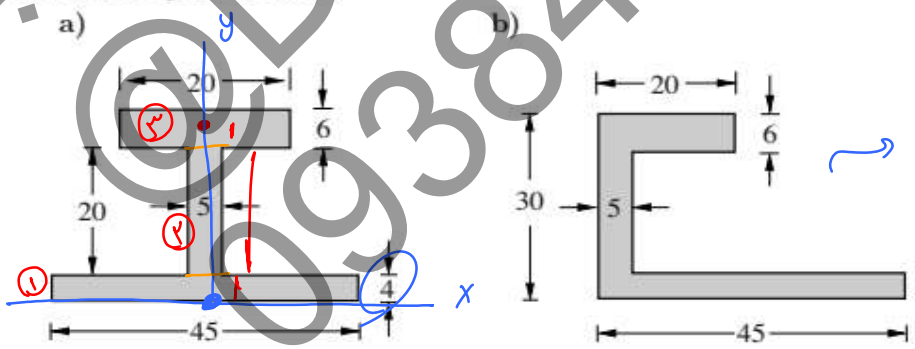


$$x_c = \frac{\sin \alpha}{\alpha} r$$

$$y_c = 0$$

$$l = 2 \alpha r$$

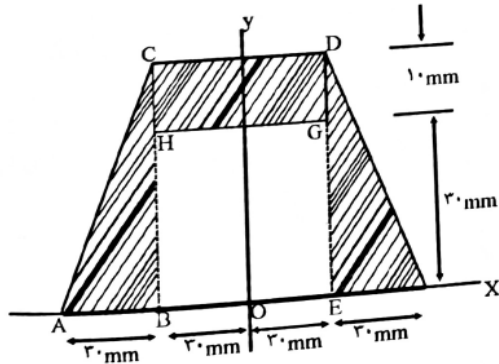
**Problem 2.3** Locate the centroids of the depicted profiles. The measurements are given in mm.



اولی :  $x_{cm} = 0$

$$y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{20 \times 45 \times 6 + 15 \times (45 \times 4) + 27 \times (20 \times 4)}{60 \times 6 + 0 \times 4 + 7 \times 4} = \dots$$

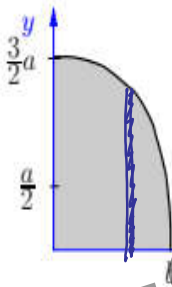
۳- کدام گزینه، مرکز هندسی سطح نشان داده شده در شکل زیر را مشخص می‌کند؟ (مهندسی مکانیک ۸۱)



- (۱)  $(0.20) mm$
- (۲)  $(0.20/5) mm$
- (۳)  $(0.21/5) mm$
- (۴)  $(60.22/5) mm$

مثال: محضات مرکز سطح سهمی مقابل رابرت آرپی (مخزات)

معادله سهمی:  $y = -\alpha x^2 + \beta$



$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ y = \frac{3}{2}a \end{array} \right\} \rightarrow \frac{3}{2}a = \beta$$

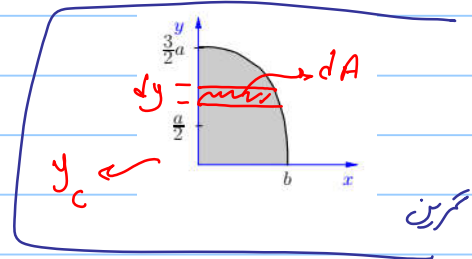
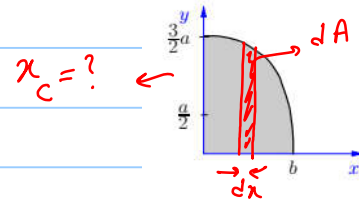
$$\left. \begin{array}{l} x=b \\ y=0 \end{array} \right\} \rightarrow 0 = -\alpha(b)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)$$

$$\alpha = \frac{3a}{2b^2}$$

$$y = -\frac{3a}{2b^2} x^2 + \frac{3}{2}a$$

$$x_c = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy}$$

$$= \frac{\int_0^b x y dx}{\int_0^b y dx} = \frac{\int_0^b x \left(-\frac{3a}{2b^2} x^2 + \frac{3}{2}a\right) dx}{\int_0^b \left(-\frac{3a}{2b^2} x^2 + \frac{3}{2}a\right) dx}$$



$$= \frac{\frac{3a}{2b^2} \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2} a x \frac{x^2}{2} \Big|_0^b}{-\frac{3a}{2b^2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} a x \Big|_0^b} = \frac{\frac{3ab^4}{8} + \frac{3}{4} ab^3}{-\frac{1}{2} ab + \frac{3}{2} ab} = \frac{\frac{3}{4} ab^3}{ab} = \frac{3}{4} b$$

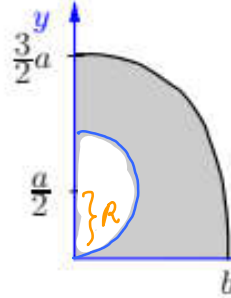
$$x_c = \frac{\int x dA}{\int dA}; \quad y_c = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

لیمبین

اساتیک



تمرین:

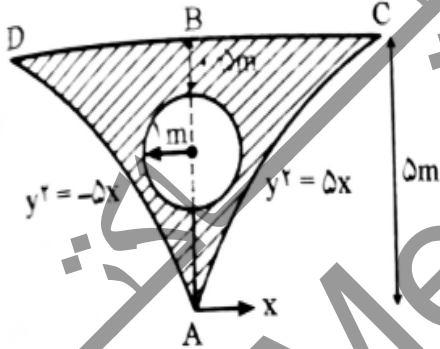


تمرین:

بسیار به - منی

$$\bar{X}_c = \bar{x}_{\text{منی}} - \bar{x}_{\text{دایره}} = \frac{3}{8}b - \frac{4}{3\pi}a$$

(مهندسی مکانیک ۸۴)



۱- مرکز سطح شکل مقابل را بدست آورید؟ قطر دایره ۲m است.

(۱)  $3/52 m$

(۲)  $2/93 m$

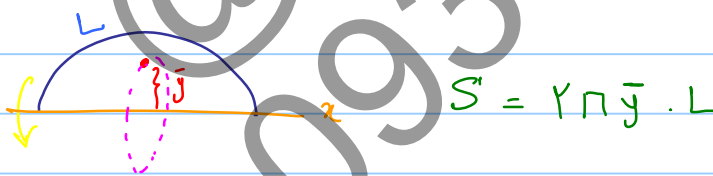
(۳)  $3/8 m$

(۴)  $4/20 m$

قضیه پاپوس،

اول: مساحت حادث از دوران یک منحنی حول یک محور برابر است با حاصلضرب طول منحنی در مسافتی که مرکز ثقل

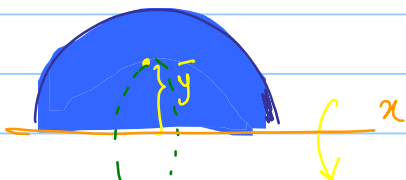
برای دوران طی می‌کند.



$$S = 2\pi \bar{y} \cdot L$$

دوم: حجم حادث از دوران کامل یک منحنی حول یک محور برابر است با: حاصلضرب مساحت منحنی در مسافتی

که مرکز ثقل منحنی برای دوران طی می‌کند.



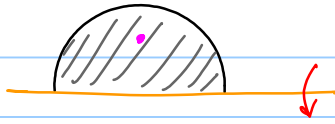
$$V = 2\pi \bar{y} \cdot A$$

لیمنین

رسانا



صغیرترین بار

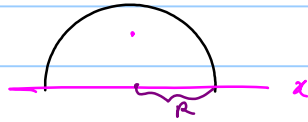


$$v = 2\pi \bar{y} \cdot A$$

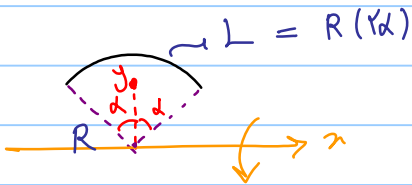
$$\frac{1}{2} \pi R^2 = 2\pi \bar{y} \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 \Rightarrow \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$



کانتر بارهای



$$S = 2\pi \bar{y} \cdot L \Rightarrow 4\pi R^2 = 2\pi \bar{y} \cdot \pi R \Rightarrow \bar{y} = \frac{2R}{\pi}$$



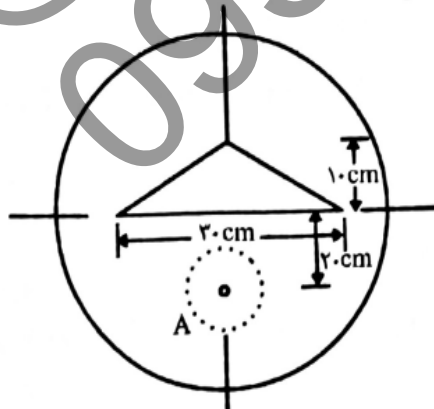
مثال: مرکز سطح قطاع متساوی الساقین

$$v = 2\pi \bar{y} \cdot A \Rightarrow \int \pi R^2 \sin \alpha = 2\pi \bar{y} \cdot \pi R^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \Rightarrow \bar{y} =$$

$$A = 2\pi \bar{y} \cdot L \Rightarrow \int \pi R^2 \sin \alpha = 2\pi \bar{y} \cdot R(2\alpha) \Rightarrow \bar{y} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

$$\frac{2\pi}{2\alpha} = \frac{\pi R^2}{\alpha}$$

۹- از ورق دایره ای شکلی به قطر ۶۰ سانتی متر یک مثلث متساوی الساقین به قاعده ۳۰ سانتی متر و ارتفاع ۱۰ سانتی متر را بریده ایم، قطر سوراخ دیگر را که مرکز آن در نقطه A به فاصله ۲۰ سانتی متر از مرکز دایره اصلی است بیابید به طوری که مرکز ثقل همان مرکز دایره اصلی باشد. (مهندسی مکانیک ۶۹)



(۱) ۳/۴۲ سانتی متر

(۲) ۴/۶۴ سانتی متر

(۳) ۵/۶۴ سانتی متر

(۴) ۷/۲۴ سانتی متر



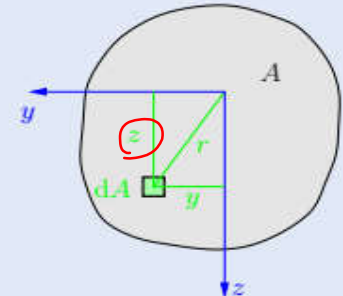
معادله انبریسی:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int_A yz dA$$

$$I_p = I_y + I_z = \int_A r^2 dA$$



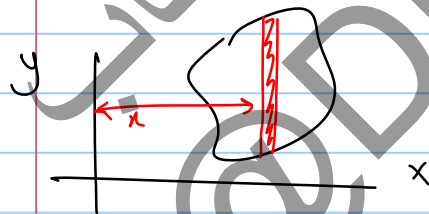
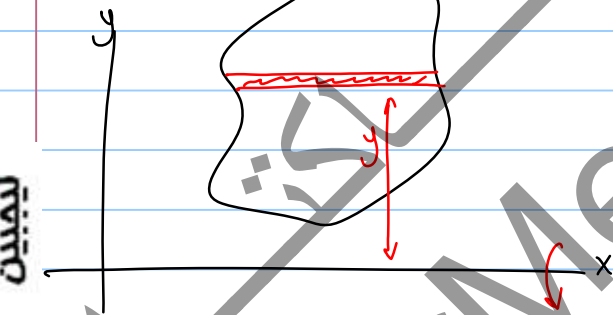
استاد

$$I_y = \int z^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 dA$$

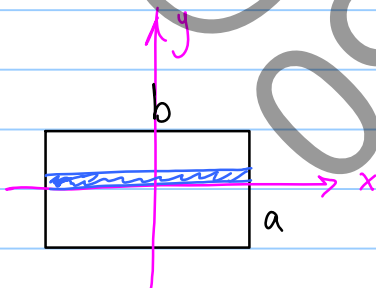
نکته:

لیمبین

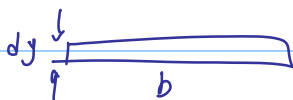


$$I_y = \int x^2 dA$$

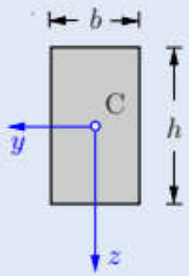
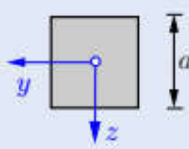
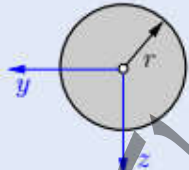
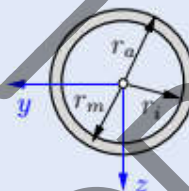
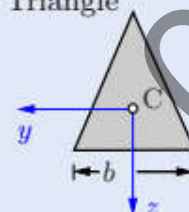
مثال:



$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-a/2}^{+a/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-a/2}^{+a/2} = \frac{1}{12} a^3 b$$



حفظ کنید

<p>Rectangle مستطیل</p> 	$I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad r_{gy} = \frac{\sqrt{3}}{6}h,$ $I_z = \frac{hb^3}{12}, \quad r_{gz} = \frac{\sqrt{3}}{6}b,$ $I_{yz} = 0,$ $I_p = I_y + I_z = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2).$
<p>Square مربع</p> 	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}, \quad r_{gy} = r_{gz} = \frac{\sqrt{3}}{6}a,$ $I_p = \frac{a^4}{6}.$
<p>Circle دایره</p> 	$I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}, \quad r_{gy} = r_{gz} = \frac{r}{2},$ $I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad r_{gp} = \frac{\sqrt{2}}{2}r.$
<p>(Thin-walled) Circular Ring چهارنژاد</p> 	$I_y = I_z = \frac{\pi}{4}(r_a^4 - r_i^4), \quad r_{gy} = r_{gz} = \frac{1}{2}\sqrt{r_a^2 + r_i^2},$ $I_p = 2I_y, \quad r_{gp} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{r_a^2 + r_i^2},$ <p>with <math>t = r_a - r_i</math> and <math>r_m = (r_a + r_i)/2</math> follows for the thin-walled profile (<math>t \ll r_m</math>)</p> $I_y = I_z \approx \pi r_m^3 t, \quad r_{gy} = r_{gz} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}r_m.$ <p>صفاقت درق درفاس باسوع قابل مزنظرات</p>
<p>Isosceles Triangle مثلث</p> 	$I_y = \frac{bh^3}{36}, \quad r_{gy} = \frac{h}{3\sqrt{2}},$ $I_z = \frac{hb^3}{48}, \quad r_{gz} = \frac{b}{2\sqrt{6}}.$

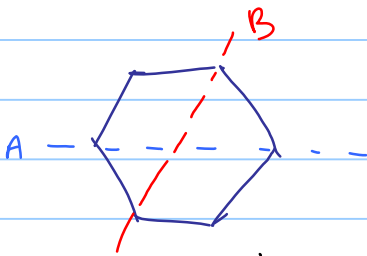
استاد

لیجین

ی



نکته: در چندضلعی منتظم (مستطیل)  $I_A = I_B$  از مرکز بگذرد، این است.



$I_A = I_B$

$I_A = I_B$

نکته: همان حول محور  $x$  و  $y$  را داریم.  $I_x$  و  $I_y$  به صورت زیر بدست می آید:

$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta$

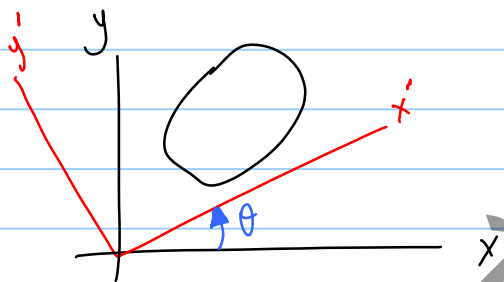
$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta$

$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$

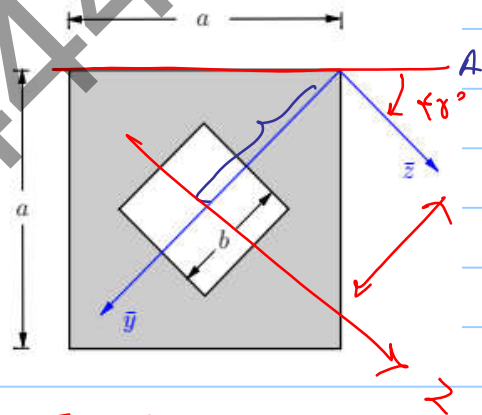
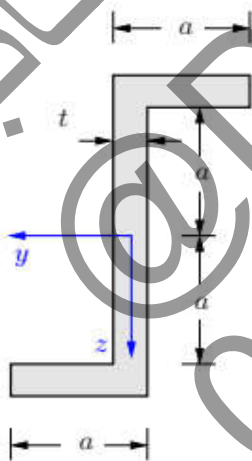
در جهت مثبت  $\theta$  (پاراسنتز)

$\theta$ : زاویه بین  $x$  و  $x'$  از  $x$  به  $x'$  حرکت می کنیم.

خلاف (اسنتز)  $\theta < 0$



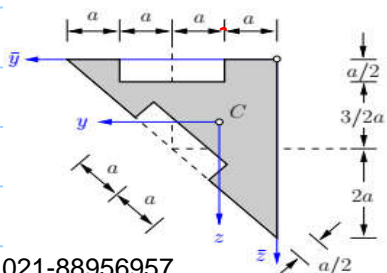
لیمین



$I_{x'} = ?$

مربع بزرگ: حول  $A$  دوران می آید

مربع کوچک: حول  $Z$  دوران می آید



شعاع ژیراسیون:

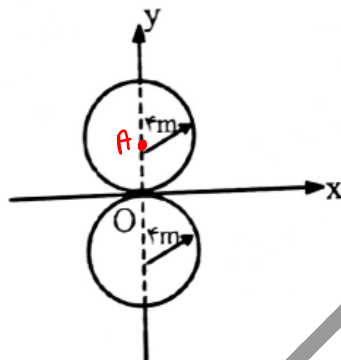
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad ; \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad ; \quad r_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

ل حول محور x  
ل حول محور y  
ل مبدأ

۲- شعاع ژیراسیون قطبی سطح مرکب مقابل را نسبت به مبدأ O به دست آورید. (باید توجه داشت که J)

(مهندس مکانیک ۸۶)

ممان اینرسی قطبی دایره برابر است با:



$$J = \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$J_o = \frac{1}{2} \pi r^2 + (\pi r^2) r^2 = \frac{3}{2} \pi r^2$$

$$J = 2(J_o) = 3\pi r^2$$

$$r_o = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{3\pi r^2}{2\pi r^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} r = \sqrt{\frac{3}{2}} \times 2$$

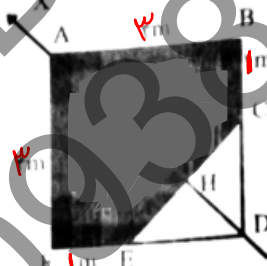
$$4 \sqrt{\frac{1}{2}} m \quad (1)$$

$$3 \sqrt{\frac{3}{2}} m \quad (2)$$

$$4 \sqrt{\frac{3}{2}} m \quad (3)$$

$$5 \sqrt{\frac{1}{2}} m \quad (4)$$

۴- ممان اینرسی شکل زیر در قسمت هاشور خورده حول محور X چقدر است؟ (مهندس مکانیک ۸۱)



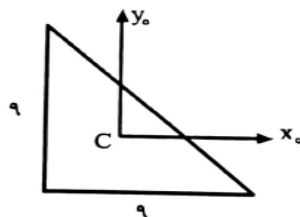
$$21/33 \quad (2)$$

$$28/3 \quad (1)$$

$$16/48 \quad (4)$$

$$17/96 \quad (3)$$

۱۲- مطلوب است تعیین ممان  $I_x, y$  در شکل داده شده در صورتی که C مرکز سطح باشد. (مهندس مکانیک آزاد ۸۶)



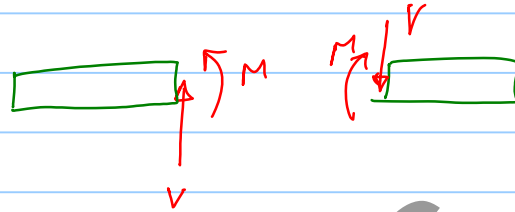
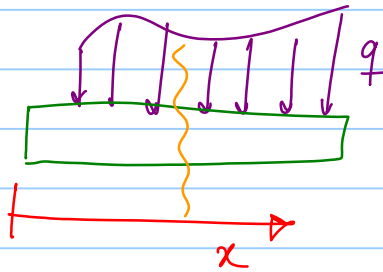
$$-182/25 \quad (1)$$

$$182/25 \quad (2)$$

$$-91/125 \quad (3)$$

تئیر:

هدف: رسم نیروی برش و گشتاور خمشی



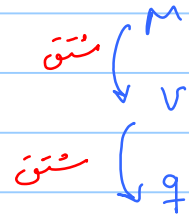
قرار داد: اگر سمت چپ را مثبت:

مان در جهت ساعتگرد ← مثبت  
مان به یار ساعتگرد ← منفی

نیرو به سمت بالا ← مثبت  
نیرو به پایین ← منفی

اگر سمت راست را انتخاب کردیم ← علامت براد احوالی بالا برعکس می شود.

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad ; \quad \frac{dM}{dx} = V \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q$$



لیجنین

loading	بارگذاری	V diagram	نمودار V	M diagram	مان
$q = 0$		const.	ثابت	linear	خطی
$q = \text{const.}$		linear	خطی	parabola	پارهولی
$q = \text{linear}$		parabola	پارهولی	cubic parabola	درجه ۳
jump of q		kink	پاره	continuous	
concentrated force		jump	پرش	kink	

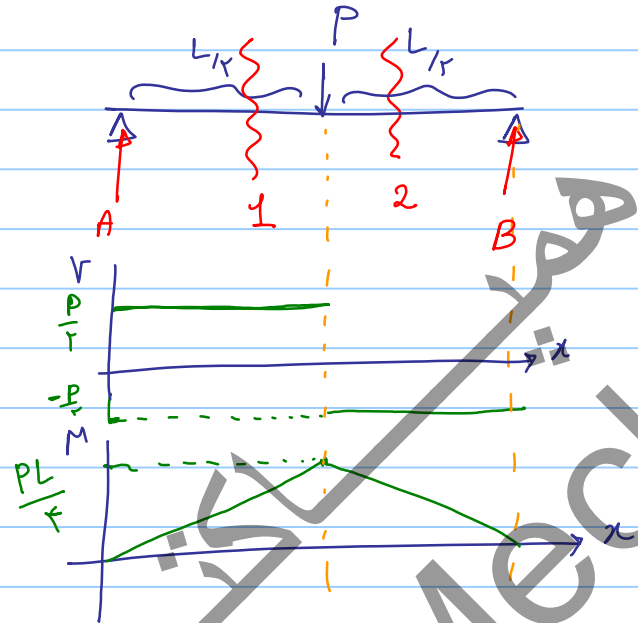
hinged support		$(V \neq 0), M = 0$
free end		$V = 0, M = 0$
clamped support		$(V \neq 0), (M \neq 0)$
parallel motion		$V = 0, (M \neq 0)$
sliding sleeve		$(V \neq 0), (M \neq 0)$

DrMechanics



اینها آزاد  
نیستند

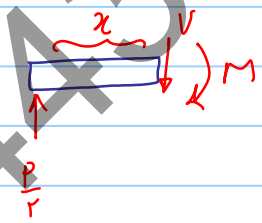
استاتیکی



$$\begin{cases} A = \frac{P}{r} \\ B = \frac{P}{r} \end{cases}$$

①  $\begin{cases} V = \frac{P}{r} \\ M = \frac{P}{r}x \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

②  $\begin{cases} V = -\frac{P}{r} \\ M = \frac{P}{r}x - (P(x - \frac{L}{2})) \end{cases} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$



ایمین

(مهندسی مکانیک ۸۷)

۳- برای تیر شکل مقابل مطلوب است رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی

$$\sum M_A = 0$$

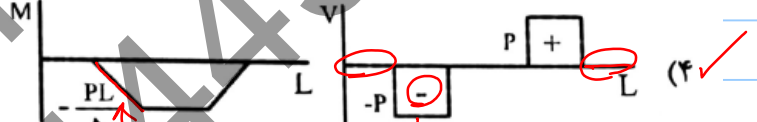
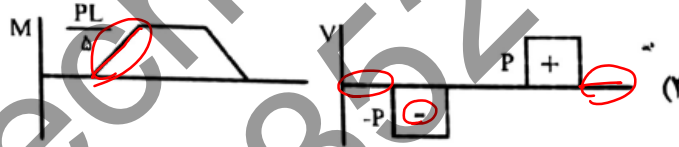
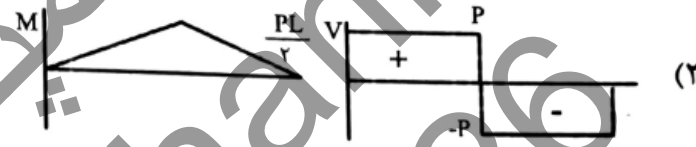
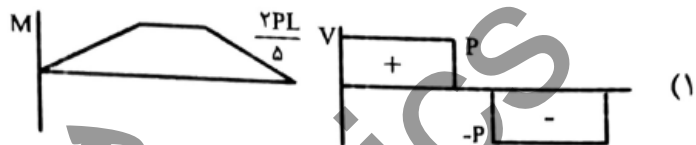
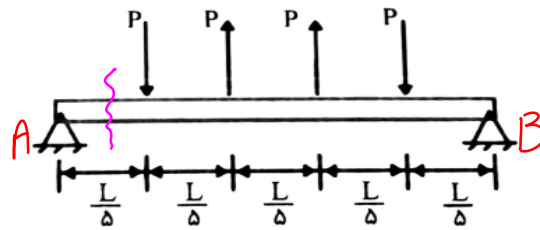
$$B(L) + P\left(\frac{3}{5}L\right) + P\left(\frac{2}{5}L\right) = P\left(\frac{L}{5}\right) + P\left(\frac{4}{5}L\right)$$

$$\rightarrow B = 0$$

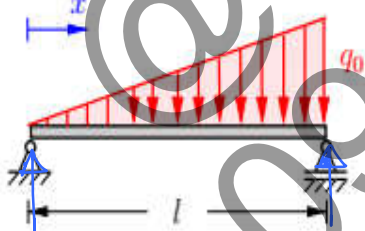
$$\sum F_y = 0 \rightarrow A = 0$$

$$A = 0 \downarrow V$$

$$V = 0$$



ایمین



q ← خطی (درجه یک) ← V درجه ۲ است ← M درجه ۳ است

$$q = \left(\frac{x}{l}\right) q_0$$

$$V(x) = - \int q \, dx$$

$$V(x) = - \int \frac{x}{l} q_0 \, dx = -q_0 \frac{x^2}{2l} + C_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} M(0) = 0 \\ M(l) = 0 \end{array} \right.$$

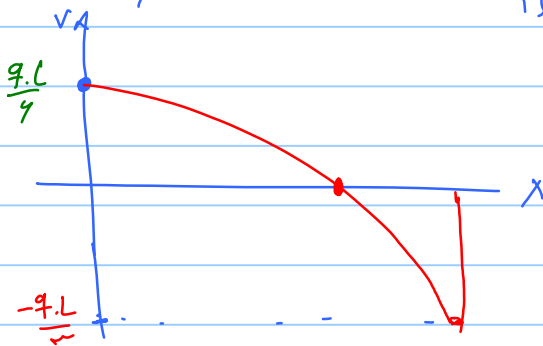


۹۹/۱۱/۱۸

لبین

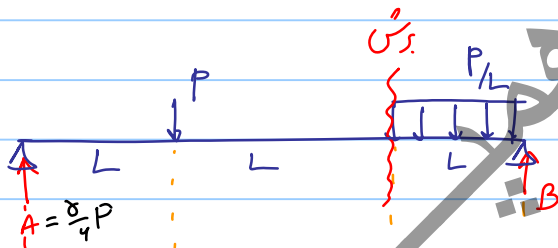
استادیک 

$$C_1 = \frac{q \cdot l}{4} \rightarrow V(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2l} + \frac{q \cdot l}{4} \rightarrow$$

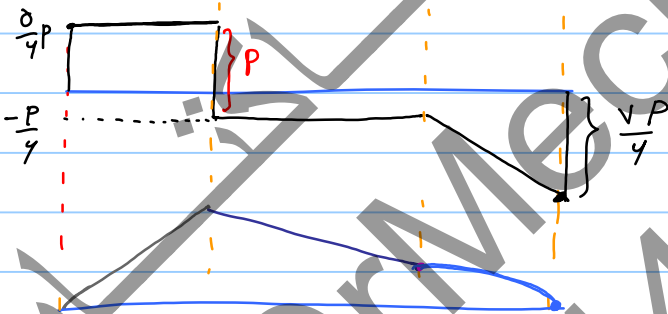


$$\begin{cases} x=0 \rightarrow V = \frac{q \cdot L}{4} \\ x=l \rightarrow V = -\frac{q \cdot L}{4} \end{cases}$$

استادیک



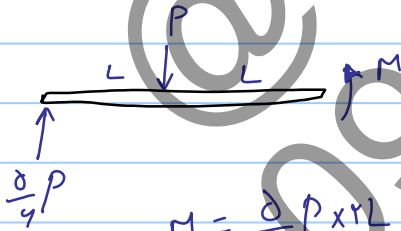
$$\begin{cases} A = \frac{\delta}{4} P \\ B = \frac{V}{4} P \end{cases}$$



$$\sum M_A = 0$$

$$B(rL) = PL + P \frac{\delta}{r} L$$

$$B = \frac{P}{r} + \frac{\delta}{4} P = \frac{V}{4} P$$

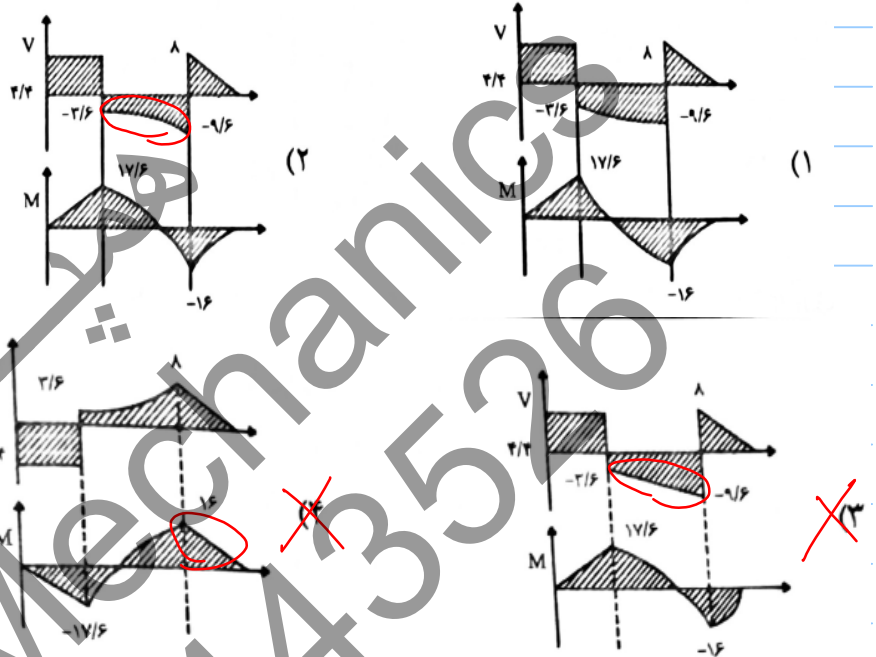
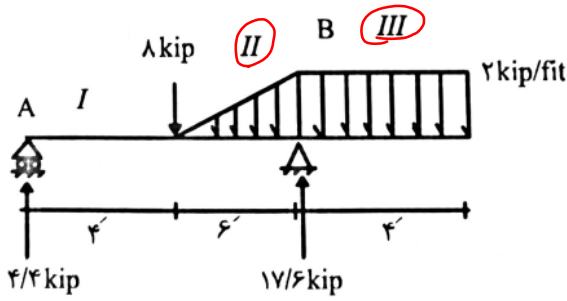


$$M = \frac{\delta}{4} P \times 2L - PL = \frac{\delta}{4} PL$$

(مهلهی مگانیک ۷۶)

۷- نمودار نیروهای برشی و لنگر خمشی تیر شکل مقابل به کدام صورت است؟

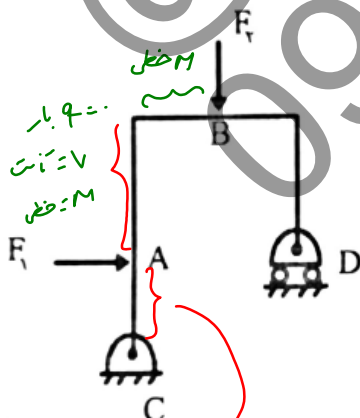
II:  $q \leftarrow$  خطی  $\leftarrow$   $V$  سسی  
 III:  $q$  ثابت  $\leftarrow$   $M$  سسی



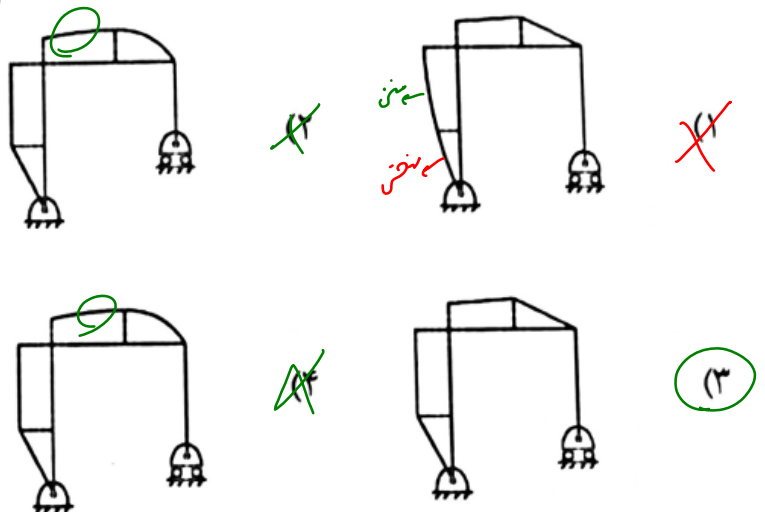
۹:  $V$  یا  $M$  باید مثبت در نظر گرفته شود

(مهلهی مگانیک ۷۶)

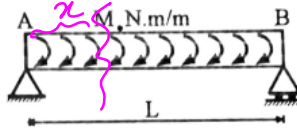
۶- منحنی لنگر خمشی برای شکل داده شده کدام است؟



$90^\circ \leftarrow$  ثابت  $\leftarrow$   $M$  خطی



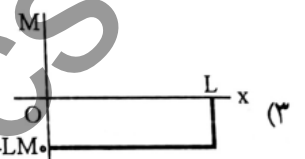
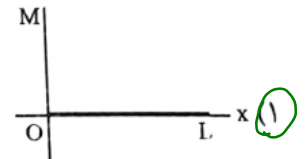
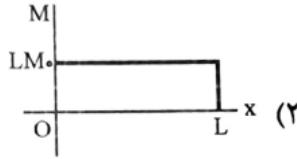
۱- با توجه به تیر در شکل مقابل نمودار گشتاور خمشی کدام است؟ (بارگذاری عبارتست از لنگر توزیع شده با شدت یکنواخت  $M_0$ )



بررسی م:  $\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y = m_0$

$M(x) = -m_0 \cdot x + m_0 \cdot x = 0$

M در هر نقطه از صفر است.



در طول تیر بار گشتاور ندارم  $A_y = -M_0$



$\frac{dM}{dx} = V + m = -m_0 + m_0 = 0$

نکته:  $\frac{dM}{dx} = V + m$ ,  $\frac{dV}{dx} = -q$

لحظه گشتاور گشتاور در تیر

گشتاور Max:

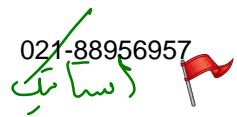
① اگر نیروی برشی گشتاور بود به اندازه‌اش بار گشتاور حساب می‌کنیم اگر علامت برشی در اول و آخر بارگذاری هم علامت

باشد، در آنجا Max اتان نمائند.

اگر هم علامت نباشد، به آنجا Max اتان نمائند.

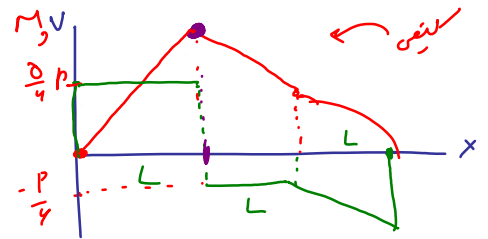
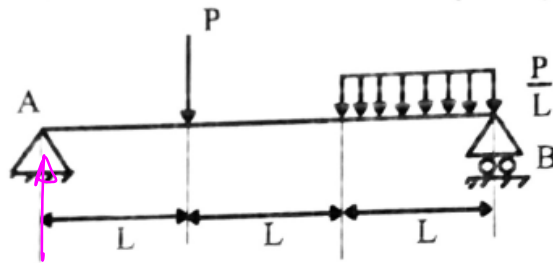
② زیر بار منفرد یا منفرد یکج شود.

③ جایی که  $V=0$  است  $\leftarrow$  Max می‌شود.



۱۱- در شکل زیر بیشینه لنگر خمشی برابر است با:

(مهندسی مکانیک ۶۹)



$\frac{6}{5} PL$  (۴)

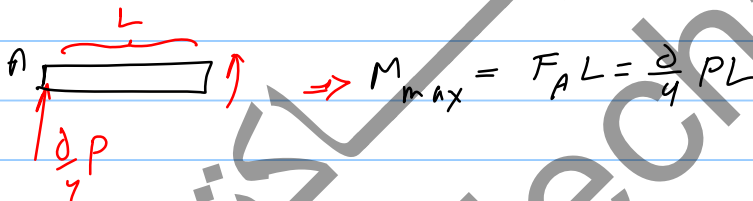
$\frac{5}{6} PL$  (۳)

$\frac{3}{4} PL$  (۲)

$\frac{2}{3} PL$  (۱)

$\sum M_B = 0 \Rightarrow A(3L) = P(2L) + P(\frac{L}{2}) \Rightarrow A = \frac{5}{4} P$

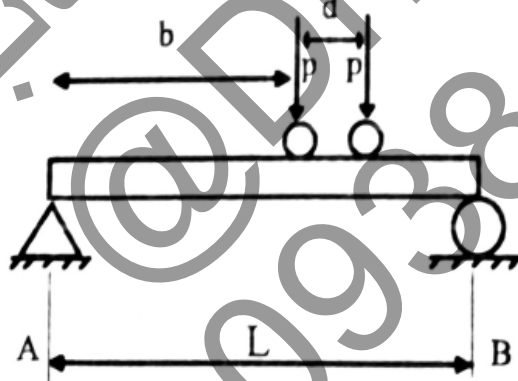
موزا، M به طور کلی رسم کردیم، M\_max در زیر رسم کردیم نشان می‌اند.



۱۳- در شکل دو چرخ متحرک به فاصله  $d = 6m$  بر روی یک تیر به طول  $L = 24m$  را ملاحظه می‌کنید.

در صورتی که هر یک از چرخ‌های نیروی  $P = 3kN$  را بر روی تیر وارد نماید، مطلوب است میزان ممان

(مهندسی مکانیک ۶۷)



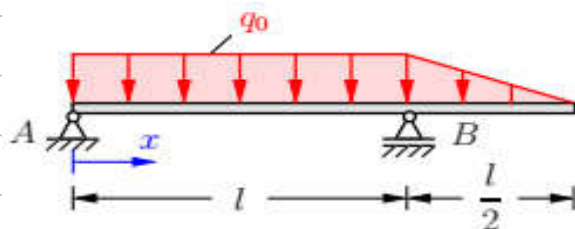
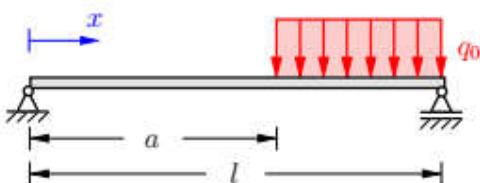
خمشی ماکزیمم در تیر فوق:

$27kN.m$  (۱)

$28/8kN.m$  (۲)

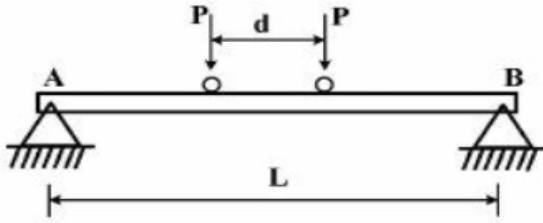
$28/2kN.m$  (۳)

$27/6kN.m$  (۴)



صورتی که هر یک از چرخ‌ها نیروی  $P = 2kN$  را بر روی تیر وارد نماید. میزان ممان خمشی ماکزیمم در تیر چند

کیلو نیوتن متر است؟ *ار 94*

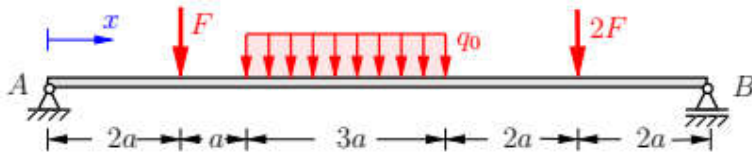


(1) 27

(2) 27/6

(3) 28

(4) 28/6



مختار  $M, V$

$M_{max} = ?$

✓ کار مجازی: ← اصل کار مجازی را با تعادل می‌شود حل کرد.

✓ کار مجازی در حال تعادل است.

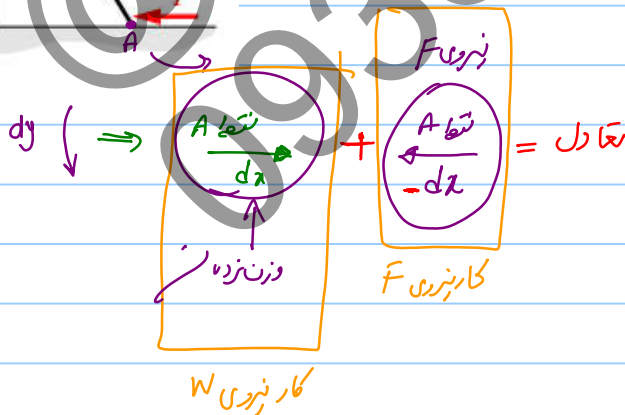
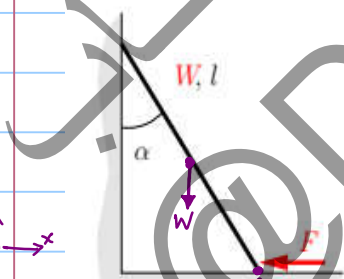
✓ جمع جبری همه کارهای مجازی انجام شده روی سیستم باید صفر شود.

✓ کار مجازی: کاری است که در صورت وقوع یک تغییر وضعیت مجازی بسیار کوچک در برقراری سیستم توسط آن

نیست یا کمتر انجام شود.

✓ تغییر وضعیت: هرگز انداختن حنبل  $(dx)$  یا  $(dy)$  و یا زانو  $d\theta$  به سبب.

$\sum W_i = 0$   
 $\delta U_i = 0$  تغییر انرژی

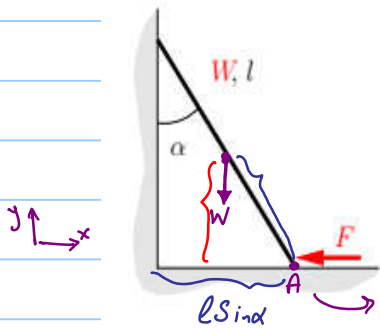


$\sum W_i = 0$

مثال: نیروی باریک به وزن  $W$  و طول  $l$  مطابق شکل به سطوح صاف

کنده داده شده است.  $F$  را طوری بدست آورید تا نزدیک در

زاد به  $\alpha$  در تعادل باشد.

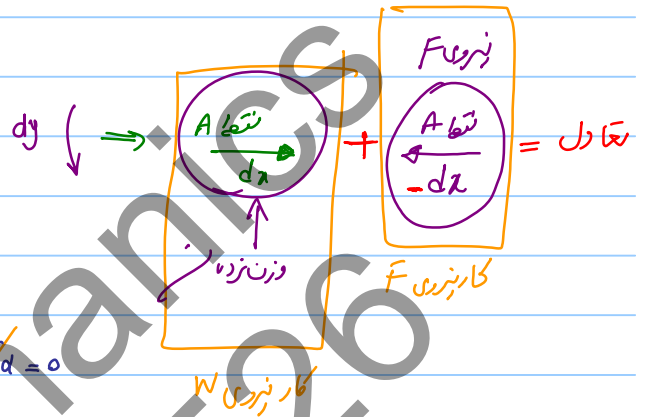


(F):  $x_F = l \sin \alpha \xrightarrow{\text{متن}} \delta x_F = l \cos \alpha \delta \alpha$

(W):  $y_W = \frac{l}{2} \cos \alpha \xrightarrow{\text{متن}} \delta y_W = -\frac{l}{2} \sin \alpha \delta \alpha$

$\sum W_i = 0 \Rightarrow F l \cos \alpha \delta \alpha - W \frac{l}{2} \sin \alpha \delta \alpha = 0$

$\Rightarrow F = \frac{W}{2} \tan \alpha$



لیبین

چند نکته:

۱) نیروهای کنده ما در مصل به صورت کار انجام نمی دهند چون این نقاط ثابت اند.

۲) در مصل های مصل کنده جسم به سید کار انجام نمی شود.

۳) نیروی فنر  $F = k \Delta x$ .  $k$ : ثابت فنر و  $\Delta x$ : تغییر طول نسبت به طول آزاد

$U_e = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$  انرژی پتانسیل کششی (ذره شده) فنر:

۴) اگر فنر فنر پیش باشد (©): با جوشن درست به هم کشید فنر پیش در آن اعلام شود

انرژی پتانسیل داریم:  $T = k \Delta \theta$   
زاویه جوشن فنر  $\Delta \theta$  ثابت فنر

$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2} k (\Delta \theta)^2 = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$



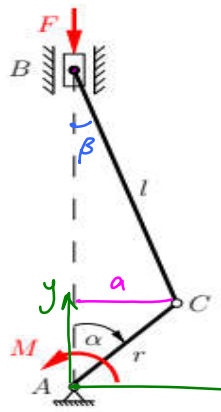
مسئله:  $M = ?$

نیروی  $F$ :  $f = r \cos \alpha + l \cos \beta$

تغییر  $\delta f = -r \sin \alpha \delta \alpha - l \sin \beta \delta \beta$

سیستم  $M$   $\delta \alpha$   $\rightarrow$   $\delta \alpha$   $\rightarrow$   $\delta \alpha$

$\sum W_i = 0 \Rightarrow M \delta \alpha = F \cdot \delta f$



$a = l \sin \beta = r \sin \alpha \Rightarrow \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha \rightarrow \cos \beta \delta \beta = \frac{r}{l} \cos \alpha \delta \alpha$

$\Rightarrow \delta \beta = \frac{r}{l} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \delta \alpha \Rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \alpha\right)^2}$

$M = Fr \sin \alpha \left(1 + \frac{r \cos \alpha}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha}}\right)$

1) جابجایی 1  $\rightarrow$   $\delta \alpha$   $\rightarrow$   $\delta \alpha$

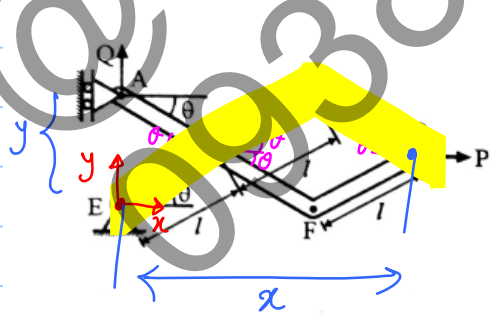
2) جابجایی 2  $\rightarrow$   $\delta \beta$   $\rightarrow$   $\delta \beta$

$F_1 = F_2$  (جابجایی 1)  $F_1 = F_2$  (جابجایی 2)

نتیجه

1- با توجه به شکل مقابل، کدام رابطه بین  $P$  و  $Q$  برقرار است؟

(محل های مکانیک ۸۳)



$Q = \frac{2}{3} \tan \theta P$  (1)

$Q = \frac{2}{3} \tan \theta P$  (2 ✓)

$Q = \frac{2}{3} \tan \theta P$  (3)

$Q = \frac{2}{3} \tan \theta P$  (4)

نقطه D:  $x = 2l \cos \theta \rightarrow \delta x = -2l \sin \theta \delta \theta \xrightarrow{xP}$

نقطه A:  $y = 2l \sin \theta \rightarrow \delta y = 2l \cos \theta \delta \theta \xrightarrow{xQ}$

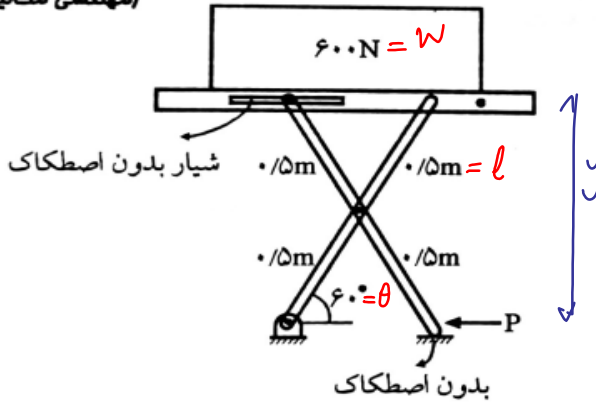
$Q(2l \cos \theta) = P(2l \sin \theta)$

$Q = \frac{2}{3} P \tan \theta$

در آسانسور

۲- با صرف نظر از اصطکاک، نیروی  $P$  لازم برای بالا بردن وزنه  $600$  (ششصد) نیوتنی کدام است؟ (بر حسب نیوتن  $(N)$ )

(مهندسی مکانیک ۸۳)



- (۱)  $P = 400$
- (۲)  $P = 200$
- (۳)  $P = 400\sqrt{3}$
- (۴)  $P = 200\sqrt{3}$  ✓

W:  $y = 2l \sin \theta \rightarrow \delta y = 2l \cos \theta \delta \theta \xrightarrow{x^W}$   
 P:  $x = 2l \cos \theta \rightarrow \delta x = -2l \sin \theta \delta \theta \xrightarrow{P}$

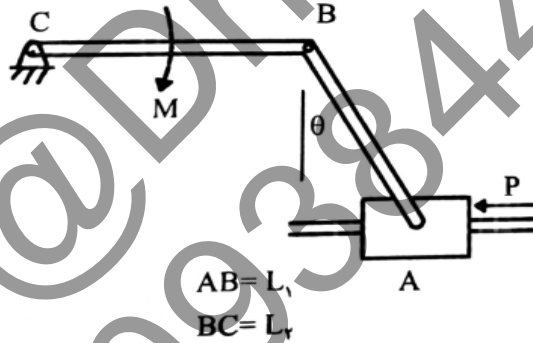
مجموعه = 0  $\Rightarrow 2l \cos \theta W = 2l \sin \theta P$

$\Rightarrow P = W \cot \theta \rightarrow P = 600 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 200\sqrt{3} \text{ N}$

گزینه ۴

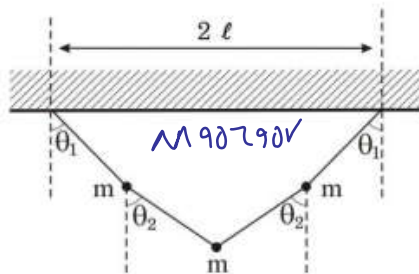
۳- نیروی  $P$  به لغزنده  $A$  روی خط افقی وارد شده است، با توجه به گشتاور  $M$  اگر مجموعه در حالتی که میله  $BC$  افقی است به حالت تعادل رسیده باشد، با صرف نظر از وزن میله و اصطکاک، مطلوب است زاویه  $\theta$  در حالت تعادل:

(مهندسی مکانیک ۸۱)



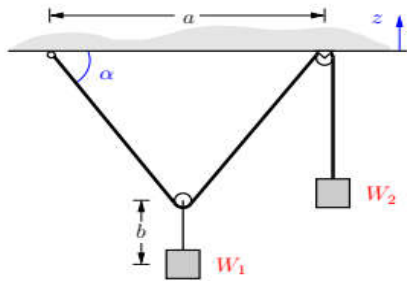
- (۱)  $\theta = \tan^{-1} \frac{PL_1}{M}$
- (۲)  $\theta = \cos^{-1} \frac{M}{PL_1}$
- (۳)  $\theta = \sin^{-1} \frac{L_1}{L_2}$
- (۴)  $\theta = \sin^{-1} \frac{PL_1}{M}$

۱۴ - سه جرم را با نخ‌های بدون جرم به صورت شکل نگه داشته‌ایم. رابطه بین  $\theta_1$  و  $\theta_2$  را به دست آورید. (همه طول‌ها  $l$  است).



با کار مجازی





تمرین: سطح در تعادل است. مطلوب است  $\alpha = ?$

(کارمیزی و تعادل)

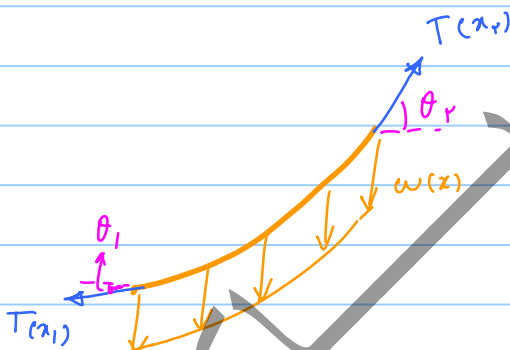
کابل:

- کابل اجزای ارتباط دهنده هستند.

- کابل در سطح بیرونی فشار تحمل می کنند.

- از وزن کابل عرض نظر نمی شود.

- نیروی یکسان در طول کابل اعمال می شود.

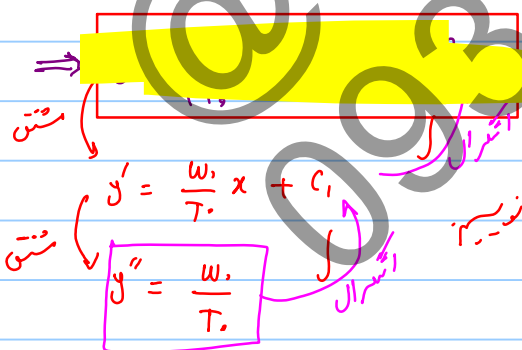


مولفه افقی کشش:  $T(x_1) \cos \theta_1 = T(x_2) \cos \theta_2 = T_0 \Rightarrow$  تعادل افقی

کشش  $T(x) \cos \theta = T_0 =$  ثابت

$$y = \frac{1}{T_0} \int \int w(x) dx + C_1 x + C_2$$

معادله شکل هندسی کابل به صورت زیر می شود:



$w$ : یکدخت: ←

\*  $C_1, C_2$  از شرایط مرزی کابل به دست می آید.

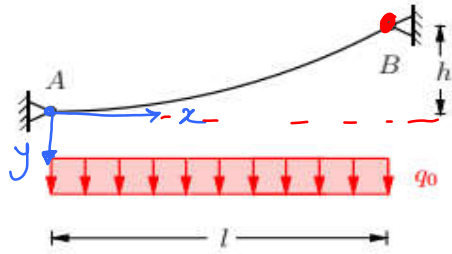
در بار ننداره غیر یکدخت با شیب  $\theta$  ، در انتهای گیری  $\theta$  را در  $\theta$  می نویسیم.

$$S = T_0 \sqrt{1 + (y')^2}$$

مکته }  $T_0$ : مولفه افقی کشش  
          }  $S$ : نیروی کشش



مثال: در شکل مقابل کابل متراشیده بتونی



شیب در نقطه A = 0

در نقطه A کاملاً افقی است. معلوم است:

الف - نیروی کشش افقی کابل =  $T_0$

ب - حداکثر عمق نیروی کشش در کابل

$$y'' = -\frac{q_0}{T_0}$$

$$y'(x) = -\frac{q_0}{T_0} x + C_1$$

$$y(x) = -\frac{q_0}{2T_0} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y(l) = -h \Rightarrow -h = -\frac{q_0 \cdot l^2}{2T_0} \Rightarrow h = \frac{q_0 \cdot l^2}{2T_0}$$

$$T_0 = \frac{q_0 \cdot l^2}{2h}$$

شرایط مرزی:  
 $y = 0 \leftarrow x = 0$   
 $y = -h \leftarrow x = l$   
 شیب در A:  $y' = 0 \leftarrow x = 0$

اعمال شرایط مرزی:

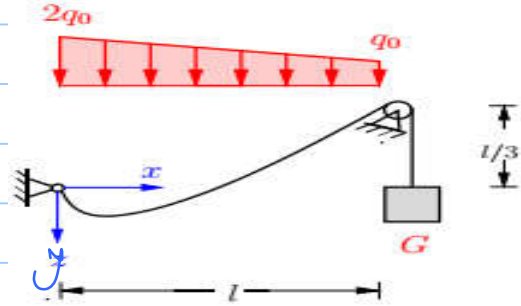
لیمین

$$S = T_0 \sqrt{1 + y'^2} = \frac{q_0 \cdot l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h x}{l}\right)^2}$$

بزرگترین کشش کابل در  $x = l$  اتفاق می افتد: **نقطه B**

$$S_{max} = \frac{q_0 \cdot l^2}{2h} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{l}\right)^2}$$

$q(x) = q_0 \left(-\frac{x}{l} + 1\right)$  ←  $q$  مساوی



مثال:

$$y'' = \frac{q(x)}{T_0} = -\frac{q_0}{T_0} \left(-\frac{x}{l} + 1\right)$$

$\int \rightarrow y' = -\frac{q_0 l}{T_0} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)\right] + C_1$

$\int \rightarrow y = -\frac{q_0 l^2}{6} \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] + C_1 x + C_2$

شرط مرزی:  $\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ y(l) = -\frac{l}{3} \rightarrow C_1 = -\frac{1}{3} + \frac{5}{4} \frac{q_0 l}{T_0} \end{cases}$

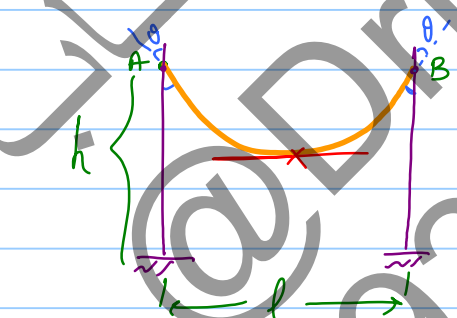
۱۸۹۵۷۹۵۷

واکنش

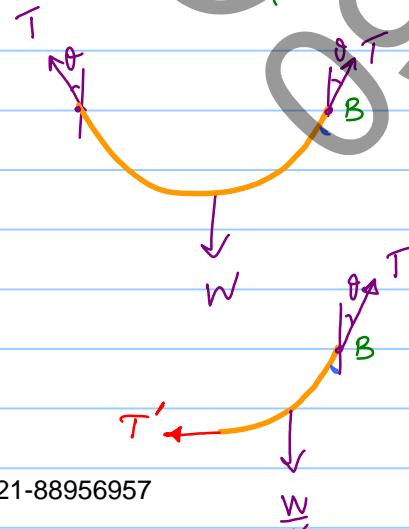
جایگاه  $\rightarrow y(x) = \frac{-q_0 l^2}{6} \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{5}{4} \left(\frac{x}{l}\right)\right] - \frac{1}{3} x \rightarrow T_0, S_0, \dots$

لبین

مثال: کابل بوزن  $w$  از وسط هم ارتفاع آویزان است. پستوها کج در وسط کابل کدام است؟



رشی اول:  $S \rightarrow S\left(\frac{l}{4}\right)$   $\lambda = \frac{l}{4}$  مثال کابل



$(1) \Rightarrow 2T \cos \theta = W \Rightarrow T = \frac{W}{2 \cos \theta}$

$(2) \Rightarrow T \sin \theta = T' \Rightarrow \frac{W}{2 \cos \theta} \times \sin \theta = T' \Rightarrow T' = \frac{W}{2} \tan \theta$

کانال تلگرام ویژه دانشجویان (مکانیک)



Admin: @hamrah\_10

رسانه

لینک

همیشه با ما  
@DrMechanics  
09384443526

ہیڈ آف ایڈیٹری  
@DrMechanics  
09384443526