به نام خدا

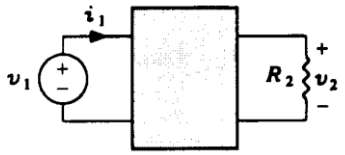
نام و نام‌خانوادگی: شماره دانشجویی:

امتحان میان‌ترم درس: مدارهای الکتریکی ۲ تاریخ: ۱۳۹۷/۰۲/۰۵ مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه

در جدول زیر چیزی ننویسید.

سوال ۱	سوال ۲	سوال ۳	سوال ۴	جمع
۳۰	۲۶	۳۱	۱۳	۱۰۰

سوال ۱: در شکل ۱ شبکه N از تعدادی مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. به ازای دو مقدار R_2 اندازه‌گیری‌های زیر بدست آمده است. مقدار $\hat{v}_2$ را بدست آورید.



شکل ۱: مثال سوال ۱

fig16

$$R_2 = 5\,\Omega : v_1 = 4\,V, \quad i_1 = 2\,A, \quad v_2 = 3\,V.$$

$$\hat{R}_2 = 8\,\Omega : \hat{v}_1 = 7\,V, \quad \hat{i}_1 = 3\,A, \quad \hat{v}_2 = ?\,V.$$

پاسخ: رابطه بین ولتاژ، جریان و مقدار مقاومت را می‌دانیم، پس داریم: $\hat{v}_2 = \hat{R}_2\hat{i}_2$ یا $v_2 = R_2 i_2$
در نتیجه می‌توانیم از قضیه تلگان استفاده کنیم و به جای i_2 و $\hat{i}_2$ مقادیرشان را جایگزین کنیم:

$$\sum_{k=1}^{2} v_k\hat{i}_k = \sum_{k=1}^{2} \hat{v}_k i_k \Rightarrow v_1 \times (-\hat{i}_1) + v_2 \times \hat{i}_2 = \hat{v}_1 \times (-i_1) + \hat{v}_2 \times i_2$$

$$\Rightarrow 4 \times (-3) + 3 \times \frac{\hat{v}_2}{8} = 7 \times (-2) + \hat{v}_2 \times \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow -12 + \frac{3\hat{v}_2}{8} = -14 + \frac{3\hat{v}_2}{5} \Rightarrow \hat{v}_2 = \frac{80}{9}$$

سوال ۲: ماتریس تلاقی مختصر شده گره با شاخه یک گراف به صورت زیر داده شده است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

الف- گراف مربوط را رسم کنید. (تعداد شاخه‌ها و گره‌ها مشخص شوند.)

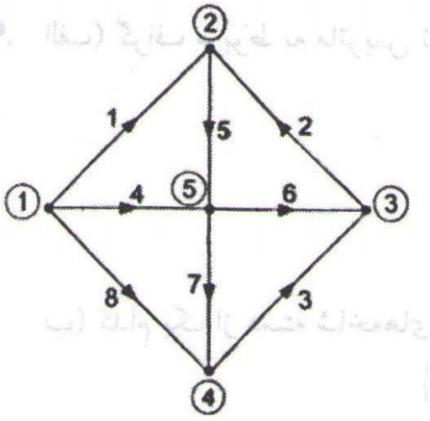
ب- از دسته شاخه‌های داده شده زیر کدام یک کات‌ست تشکیل می‌دهند:

$$\{1,3,4,7,5\}, \{1,3,4,7\}, \{1,4,6,7\}, \{4,5,6,3,8\}, \{2,4,5,8\}, \{1,3,5,6\}.$$

ج- معادلات KCL مربوط به کات‌ست‌ها را بنویسید.

پاسخ: تعداد گره‌ها ۵ و تعداد شاخه‌ها ۸ است. ابتدا از روی ماتریس تلاقی مختصر شده، ماتریس مجاورت گراف را بدست می‌آوریم. به این ترتیب که یک سطر به آن اضافه می‌کنیم و در هر ستون، درایه سطر اضافه شده را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که جمع کل درایه‌های موجود در آن ستون صفر شود (هر شاخه از یک گره خارج به یک گره وارد می‌شود). سپس از روی ماتریس مجاورت، گراف مربوطه را بدست می‌آوریم:

$$A_a = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$



شکل ۲: شکل مربوط به پاسخ سوال دوم

الف- fig5

ب- $\{۱,۳,۵,۶\}, \{۲,۴,۵,۸\}, \{۴,۵,۶,۳,۸\}, \{۱,۳,۴,۷\}$.

ج-

$$\{۱,۳,۴,۷\} \Rightarrow -j_۱ - j_۳ - j_۴ + j_۷ = ۰$$

$$\{۴,۵,۶,۳,۸\} \Rightarrow -j_۴ - j_۵ + j_۶ - j_۸ + j_۳ = ۰$$

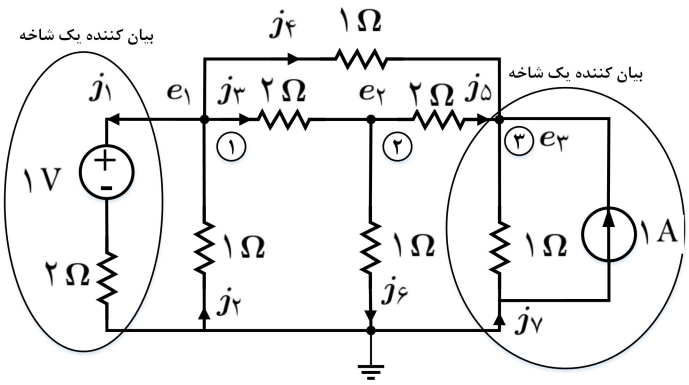
$$\{۲,۴,۵,۸\} \Rightarrow j_۲ - j_۵ - j_۸ - j_۴ = ۰$$

$$\{۱,۳,۵,۶\} \Rightarrow j_۱ - j_۵ + j_۶ + j_۳ = ۰$$

سوال ۳: در مدار شکل ۳ معادلات گره را به فرم ماتریسی نمایش دهید و ولتاژ گره ۱ را تعیین نمایید.

حل: در این مدار داریم:

$$n = n_t - ۱ = ۴ - ۱ = ۳, \quad b = ۷$$



شکل ۳: شبکه سوال ۳

fig21

ماتریس‌های مورد نیاز:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۳\times۷} \quad G=\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۷\times۷}$$

$$v_s=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۷\times۱} \quad j_s=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}_{۷\times۱} \quad A^T=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۷\times۳}$$

$$Y_n=AGA^T=\begin{bmatrix} ۳ & -۰/۵ & -۱ \\ -۰/۵ & ۲ & -۰/۵ \\ -۱ & -۰/۵ & ۲/۵ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad i_s=AGv_s-Aj_s=\begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۱}$$

$$\Rightarrow Y_n e=i_s \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & -۰/۵ & -۱ \\ -۰/۵ & ۲ & -۰/۵ \\ -۱ & -۰/۵ & ۲/۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \\ e_۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

برای حل معادلات گره و بدست آوردن ولتاژ گره‌ها از روش کرامر استفاده می‌کنیم:

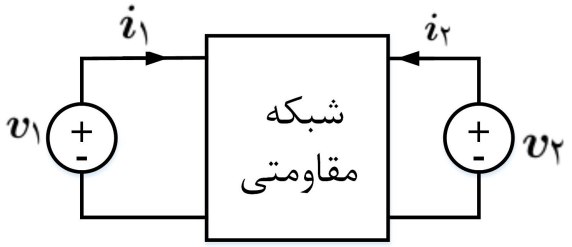
$$e_۱=\frac{\begin{vmatrix} ۰/۵ & -۰/۵ & -۱ \\ ۰ & ۲ & -۰/۵ \\ ۱ & -۰/۵ & ۲/۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳ & -۰/۵ & -۱ \\ -۰/۵ & ۲ & -۰/۵ \\ -۱ & -۰/۵ & ۲/۵ \end{vmatrix}}=\frac{۴/۶۲۵}{۱۱/۱۲۵}=۰/۴۲$$

سوال ۴: در شبک مقاومتی خطی تغییرناپذیر با زمان شکل ۴، اطلاعات زیر داده شده است:

$$\text{آزمایش اول}\begin{cases} v_۱(t)=۳۰t, \quad v_۲(t)=۰ \\ i_۱(t)=۵t, \quad i_۲(t)=۳t \end{cases}$$

$$\text{آزمایش دوم}\begin{cases} \hat{v}_۱(t)=۳۰t+۶۰, \quad \hat{v}_۲(t)=۶۰t+۱۵ \\ \hat{i}_۱(t)=? \end{cases}$$

مطلوبست محاسبه $\hat{i}_۱(t)$.



شکل ۴: شکل مربوط به سوال ۴

fig9

حل:

$$v_1(-\hat{i}_1) + v_2(-\hat{i}_2) = \hat{v}_1(-i_1) + \hat{v}_2(-i_2) \Rightarrow$$

$$30t \times (-\hat{i}_1) + 0 = (30t + 60) \times (-5t) + (60t + 15) \times (-3t) \Rightarrow$$

$$-30\hat{i}_1 = -150t^2 - 300t - 180t^2 - 45t \Rightarrow$$

$$-30\hat{i}_1 = -330t - 345 \Rightarrow \hat{i}_1(t) = 11t + 11.5$$