

(۱۶۴) توابع مختلط

۷.۳. تمرینات

۱- با توجه به تعریف مشتق نقاطی را که هریک از توابع زیر دارای مشتق هستند و یا دارای مشتق نیستند مشخص کنید.

$$a) f(z) = z|z|^2$$

$$b) f(z) = \operatorname{Re}z + \operatorname{Im}z$$

۲- نقاطی را که هریک از توابع زیر مشتق پذیر، تحلیلی و یا غیر تحلیلی هستند مشخص کنید.

$$a) f(z) = z^2$$

$$b) f(z) = i|z|^2$$

$$c) f(z) = \frac{\operatorname{Re}z}{\operatorname{Im}z}$$

$$d) f(z) = (1+i)(x-y)^2$$

$$e) f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$$

$$f) f(z) = \operatorname{Arg}z$$

۳- آیا توابع زیر همساز هستند؟ در صورت همساز بودن، توابع مزدوج همساز آنها را بیابید و تابع تحلیلی متناظر با آنها را به صورت تابعی از z بنویسید.

$$a) u = e^x \cos y$$

$$b) u = (x^2 - y^2)^2$$

$$c) u = x^2 - 3xy^2$$

$$d) u = x^2 - y^2 - 2x + 3y$$

$$e) u = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$f) u = 2xy$$

۴- a و b را طوری بیابید که هریک از توابع زیر همساز باشند و مزدوج همساز آنها را بیابید.

$$a) u = e^{ax} \cos by$$

$$b) u = \cos ax \cosh by$$

۵- هرگاه D مجموعه همه z هایی باشد که $|z| < 1$ یا $|z-2| < 1$ آنگاه D همبند نیست.

۱۰.۳. تمرینات

۱. نقش هریک از منحنیهای زیر را با نگاشت $w=z^2$ بیابید.

d) $y^2=x^2+1$ c) $y=1+x$ b) $x=3$ a) $y=-x$

۲. نقش هریک از نواحی زیر را با نگاشت $w=z^2$ بیابید:

c) $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$ b) $0 \leq y \leq 1$ a) $|z| > 2$

۳. نقش هریک از منحنیهای زیر را با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید:

c) $0 < x < 1, 0 < y < 1$ b) $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$ a) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$

۴. نقش هریک از نواحی زیر را با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

d) $|z - 3i| = 3$ c) $x = 1$ b) $y = x - 1$ a) $|z + 1| = 1$

۵. نقش ناحیه $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ را با هریک از نگاشتهای زیر بیابید:

e) $w=z^2$ **d) $w=-iz^2$** c) $w=iz^2$ b) $w=z^2$ a) $w=iz$

۶. تبدیل مویبوسی بیابید که

a. سه نقطه ۰، ۱ و ۲ را بر روی ۱، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ بنگارد.

$-iz$ و ۰ و i را بر روی ۰ و -1 و ∞ بنگارد.

c. $z=0$ یک نقطه ثابت آن باشد.

d. ناحیه $|z| \leq 1$ را بر روی $|w| \leq 1$ طوری بنگارد که $z = \frac{i}{4}$ بر روی $w=0$ نگاشته شود.

e. ناحیه $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ را به روی قرص یک $|w|=1$ بنگارد.

f. نقاط $-i$ و i نقاط ثابت آن باشند.

۷. نشان دهید که تبدیل $w=iz+i$ نیم صفحه $x > 0$ را به روی نیم صفحه $v > 1$ می نگارد.

۸. نقش ناحیه $|z| > 1$ را با تبدیل $w=(1-i)z$ بیابید.

۹. نقش هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را با تبدیل $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

۱۰. ثابت کنید که اگر مبداء مختصات نقطه ثابت یک تبدیل دوخطی باشد آنگاه آن تبدیل را می توان به صورت $w = \frac{z}{cz+d}$ نوشت.

۱۱. نشان دهید که با تبدیل $w = \frac{z-2}{z}$ قرص $|z-1| \leq 1$ به روی نیم صفحه $\operatorname{Re} w \leq 0$ نگاشته می شود.

۱۲. نقش هریک از نواحی زیر را با تبدیل $w=e^z$ بیابید.

a) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $-1 < x < 1$

b) $0 < y < 1$, $0 < x < 2$

c) $0 < y < \frac{\pi}{4}$, $-3 < x < -2$

d) $0 \leq y \leq \pi$, $x \geq 0$

e) $-\pi \leq y \leq \pi$, $-1 \leq x \leq 3$

۱۳. نقشهای هریک از نواحی زیر را با نگاشت $w = \sin z$ بیابید.

a) $0 < y < 2$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$

$$g. \tan^{-1}z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$$

۲۳. کلیه ریشه‌های معادله $\sin z = \cosh 4$ را بیابید.

۲۴. کلیه ریشه‌های معادله $\cos z = 2$ را بیابید.

فصل چهارم (۲۴۱)

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = i \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta = \begin{cases} 0; & n \neq 1 \\ 2\pi i; & n = 1 \end{cases}$$

۷.۴. تمرینات

۱. مطلوب است محاسبه $\int_c f(z) dz$ که در آن

$f(z) = \operatorname{Re} z$, c سهمی $y = x^2$ از $z = 0$ تا $z = 1+i$

(b) $f(z) = |z|^2$, c دایره واحد

(c) $f(z) = \cos z$ روی خط راست از $1-i$ تا $1+i$

(d) $f(z) = \operatorname{Im}(z^2)$ از صفر تا $2+4i$ در طول یک پاره خط

۲. هرگاه $|f(z)| \leq M$ و منحنی c به طول L باشد آنگاه $|\int_c f(z) dz| \leq ML$

فصل چهارم (۲۴۳)

۱۲. مطلوب است محاسبه $\oint_c f(z) dz$ که در آن

(a) $f(z) = \frac{2 \sin z}{z^2 - z}$ و c مرز مستطیلی بارنوس $\frac{1}{2} \pm i$ و $-\frac{1}{2} \pm i$

(b) $f(z) = \frac{\tan z}{z-i}$ و c مرز لوزی بارنوس -1 و 1 و $2i$ و $-2i$ است.

۱۶. هر یک از توابع زیر را در حول مبدأ مختصات به صورت سری لوران بسط دهید

$$c) \frac{\sin h\pi z}{z^r}$$

$$b) z \cos \frac{1}{z}$$

$$a) \frac{e^{rz}}{z^r}$$

$$f) z^r \cos h \frac{1}{z}$$

$$e) \frac{z-1}{z^r-z^r}$$

$$d) \frac{1}{z^r+z^r}$$

۱۷. بسط لوران هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده به دست آورید.

$$b) \frac{1}{z^r+1}; z_0=i$$

$$a) \frac{e^z}{(z-1)^r}; z_0=1$$

$$d) \frac{\sin z}{(z-1/4)^r}; z_0=\frac{\pi}{4}$$

$$c) \frac{z+1+i}{(z+i)^r}; z_0=-i$$

۲۲. مطلوب است محاسبه مانده هر یک از توابع زیر در نقاط تکین آنها

$$a) \frac{1}{1-e^z}$$

$$b) \frac{z}{z^r-1}$$

$$c) \frac{6-4z}{z^r+3z^r}$$

$$d) \frac{1}{(z^r-1)^r}$$

$$e) \frac{z+2}{(z+1)(z^r+16)}$$

$$f) \frac{-z^r-22z+8}{z^r-5z^r+4z}$$

۲۳. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرالهای زیر

$$c) \oint_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{z^r} dz$$

$$b) \oint_{|z|=1} \tan z dz$$

$$a) \oint_{|z|=1} z \cot z dz$$

$$e) \int_{|z|=1} \frac{1}{z^r+5z^r+6z^r} dz$$

$$d) \int_{|z|=1} \frac{z+1}{z^r-2z^r} dz$$

$$g) \int_{|z|=1} \frac{z^r-3z^r+1}{(2z+1)(z^r+4)} dz$$

$$f) \int_{|z|=1} \frac{6z^r-4z+1}{(z-2)(1+4z^r)} dz$$

$$|z|=r \quad z = \rho z' + \rho z$$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{\cos \frac{z}{2}}$$

۲۴. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرالهای زیر

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{17-18\cos x} dx$$

$$b) \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{1}{3}\cos\theta}$$

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

$$f) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos 2\theta} d\theta$$

$$e) \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta} d\theta$$

$$d) \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta} d\theta$$

فصل چهارم (۲۴۷)

۲۶. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرالهای زیر

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2} dx$$

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

$$e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$$