پاسخ کتاب کار و تمرین

■ مجموعه تمرینات

۱- الف) به عدد ۱ نزدیک می‌شود. دنبالهٔ تفاضلات را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} ۱ - ۰/۹ = ۰/۱ \\ ۱ - ۰/۹۹ = ۰/۰۱ \\ ۱ - ۰/۹۹۹ = ۰/۰۰۱ \\ \cdots \end{cases}$$

چون عناصر دنبالهٔ تفاضلات به عدد صفر نزدیک می‌شوند پس عناصر دنبالهٔ a_n به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

ب) حدس می‌زنیم به عدد ۳ نزدیک می‌شوند. دنبالهٔ تفاضلات را تشکیل می‌دهیم.

$$۰/۱ \ , ۰/۰۱ \ , ۰/۰۰۱ \ , \cdots$$

دنبالهٔ تفاضلات به عدد صفر نزدیک می‌شود پس حدس ما صحیح است.

پ)

$$c_n: ۳/۸ \ , ۳/۹۸ \ , ۳/۹۹۸ \ , \cdots$$

این دنباله به صفر نزدیک می‌شود پس دنبالهٔ c_n به ۴ نزدیک می‌شود.

۲- با تقسیم عدد ۷ بر ۳۰ دنبالهٔ خارج قسمت‌ها را می‌نویسیم:

$$۰/۲ \ , ۰/۲۳ \ , ۰/۲۳۳ \ , ۰/۲۳۳۳ \ , \cdots$$

دنبالهٔ تفاضل جملات دنبالهٔ فوق را از عدد $\frac{۷}{۳۰}$ تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{۷}{۳۰} - ۰/۲ \ , \ \frac{۷}{۳۰} - ۰/۲۳ \ , \ \frac{۷}{۳۰} - ۰/۲۳۳ \ , \ \cdots$$

$$\frac{۱}{۳۰} \ , \frac{۱}{۳۰۰} \ , \frac{۱}{۳۰۰۰} \ , \frac{۱}{۳۰۰۰۰} \ , \cdots$$

عناصر دنبالهٔ تفاضلات به عدد صفر نزدیک می‌شوند پس عناصر دنبالهٔ اولیه به عدد $\frac{۷}{۳۰}$ نزدیک می‌شوند.

۳- صورت عناصر دنباله، عدد فرد و مخرج آن‌ها عدد زوج هستند و می‌توان نوشت:

$$a_n = \frac{۲n-۱}{۲n}$$

عناصر این دنباله به عدد ۱ نزدیک می‌شوند. برای بررسی درستی حدس خود، دنبالهٔ تفاضلات را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{۱}{۲} \ , \frac{۱}{۴} \ , \frac{۱}{۶} \ , \frac{۱}{۸} \ , \cdots$$

عناصر این دنباله به عدد صفر نزدیک می‌شوند پس حدس ما معتبر است.

۴-

$$\begin{cases} ۲x < ۴/۸۶۹۴ \Rightarrow x < ۲/۴۳۴۷ \\ ۷/۳۰۳۸ < ۳x \Rightarrow ۲/۴۳۴۶ < x \end{cases} \Rightarrow ۲/۴۳۴۶ < x < ۲/۴۳۴۷$$

دنبالهٔ تقریبات اعشاری به صورت زیر است:

$$۲/۴ \ , \ ۲/۴۳ \ , \ ۲/۴۳۴ \ , \ ۲/۴۳۴۶ \ , \cdots$$

۵-

$$A = \frac{۸^{۲۰}+۴^{۲۰}}{۸^{۱۰}+۲^{۱۰}} = \frac{(۲^۳)^{۲۰}+(۲^۲)^{۲۰}}{(۲^۳)^{۱۰}+۲^{۱۰}} = \frac{۲^{۶۰}+۲^{۴۰}}{۲^{۳۰}+۲^{۱۰}} = \frac{۲^{۴۰}(۲^{۲۰}+۱)}{۲^{۱۰}(۲^{۲۰}+۱)} = ۲^{۳۰}$$

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[۶]{۲^{۳۰}} = \sqrt[۶]{(۲^۵)^۶} = ۲^۵ = ۳۲$$

۶-

$$A = \sqrt[۶]{۸} = \sqrt[۶]{۲^۳} = \sqrt{\sqrt[۳]{۲^۳}} = \sqrt{۲}$$

$$B = \sqrt[۵]{(-۳۲)^۳} + ۲\sqrt[۳]{۱۲۵} = \sqrt[۵]{((-۲)^۵)^۳} + ۲\sqrt[۳]{۵^۳}$$

$$= \sqrt[۵]{((-۲)^۳)^۵} + ۲(۵) = (-۲)^۳ + ۱۰ = -۸ + ۱۰ = ۲$$

$$C = \sqrt[۵]{-۲^۸} \div \sqrt[۵]{۸} = \sqrt[۵]{\frac{(-۲)^۸}{۸}} = \sqrt[۵]{\frac{(-۲)^۸}{۲^۳}} = \sqrt[۵]{(-۲)^۵} = -۲$$

$$D = \sqrt[۷]{۱۶a^۴} \times \sqrt[۷]{۸a^۳} = \sqrt[۷]{۱۶ \times ۸ \times a^۷} = \sqrt[۷]{۲^۷ \times a^۷} = ۲ \times a = ۲a$$

۷- الف) روشن است که اگر a به توان k برسد a^k است پس به خاطر فرد بودن k ، a ریشهٔ kاُم a^k است و

$$\sqrt[k]{a^k} = a$$

ب) a و a− که به توان k برسند، برابر a^k می‌شوند. از میان a و a− آن یکی که مثبت است، همان |a| است پس ریشهٔ kاُم a^k برابر |a| است. یعنی $\sqrt[k]{a^k} = |a|$ (k زوج است).

۸-

$$\frac{\sqrt{x^۳y}}{\sqrt{z^۳}} = \frac{\sqrt{x^۲} \times \sqrt{xy}}{\sqrt{z^۲} \times \sqrt{z}} = \frac{|x|\sqrt{xy}}{|z|\sqrt{z}}$$

از مقایسهٔ پاسخ با طرف دوم فرض، باید $|x| = -x$ باشد پس x منفی و $|z| = z$ و z مثبت ولی از آن‌جا که $\sqrt{xy}$ بامعنی و x منفی است پس باید y نیز منفی باشد تا عبارت هم بامعنی و هم برقرار باشد.

۹-

الف) $\sqrt{۸۱} = ۹$

اگر $x^۲ = ۸۱$ باشد، آن‌گاه $x = \pm ۹$ است، یعنی ریشه‌های دوم عدد ۸۱ برابر ± ۹ هستند و تنها ریشهٔ مثبت ۸۱ است که برابر $\sqrt{۸۱}$ می‌شود.

شما هم تجربهٔ خود را در سایت مرآت www.meraat.ir بخش صندوق تجربیات به اشتراک بگذارید

ب) $\sqrt[۶]{(۵-\sqrt{۳})^۶} = |۵-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۵$

چون $\sqrt{۳} > ۵$ است پس $\sqrt{۳}-۵ > ۰$ می‌باشد و در نتیجه: $|۵-\sqrt{۳}| = \sqrt{۳}-۵$

پ) $-۲\sqrt[۴]{۳} = -\sqrt[۴]{۲^۴ \times ۳}$

عدد منفی نمی‌تواند وارد رادیکال با فرجهٔ زوج شود.

ت) $\sqrt{۶} \times \sqrt[۵]{۶} = \sqrt[۱۰]{۶^۵} \times \sqrt[۱۰]{۶^۲} = \sqrt[۱۰]{۶^۷}$

ث) $\sqrt{\sqrt[۵]{۶}} = \sqrt[۱۰]{۶}$ در این مورد اشتباهی وجود ندارد.

■ ویژهٔ دانش‌آموزان علاقه‌مند

۱-

$$A = \sqrt[۷]{(\sqrt{۲}+۱)^۴} \times \sqrt[۷]{(۳-۲\sqrt{۲})^۲} = \sqrt[۷]{(\sqrt{۲}+۱)^۴(۳-۲\sqrt{۲})^۲}$$

$$= \sqrt[۷]{(۳+۲\sqrt{۲})^۲(۳-۲\sqrt{۲})^۲} = \sqrt[۷]{(۹-۸)^۲} = \sqrt[۷]{۱^۲} = ۱$$

$$B = \sqrt[۵]{(۲+\sqrt{۵})^۵} + \sqrt[۵]{(۲-\sqrt{۵})^۵} + \sqrt[۵]{-۳۲} = (۲+\sqrt{۵}) + (۲-\sqrt{۵}) + \sqrt[۵]{(-۲)^۵}$$

$$B = ۴ + (-۲) = ۲$$

$$C = \sqrt[۴]{۳+۲\sqrt{۲}} \times \sqrt[۲]{\sqrt{۲}-۱} = \sqrt[۴]{۳+۲\sqrt{۲}} \times \sqrt[۴]{(\sqrt{۲}-۱)^۲}$$

$$= \sqrt[۴]{۳+۲\sqrt{۲}} \times \sqrt[۴]{(۳-۲\sqrt{۲})} = \sqrt[۴]{(۳+۲\sqrt{۳})(۳-۲\sqrt{۲})} = \sqrt[۴]{۹-۸} = ۱$$

$$D = \sqrt{۵+\sqrt{۲۴}} - \sqrt{۵-\sqrt{۲۴}}$$

$$D^۲ = ۵+\sqrt{۲۴}+۵-\sqrt{۲۴} - ۲\sqrt{۵+\sqrt{۲۴}} \times \sqrt{۵-\sqrt{۲۴}}$$

$$D^۲ = ۱۰ - ۲\sqrt{۲۵-۲۴} = ۱۰ - ۲\sqrt{۱} = ۸ \Rightarrow D = \pm\sqrt{۸}$$

چون مقدار $D < ۰$ است پس منفی، غیرقابل قبول و $D = \sqrt{۸}$

$$E = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{2}-1} = -\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

$$= -\sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)^2} \times \sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)^3} = -\sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}-1)^3} = -\sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)^5}$$

$$= -\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^2} \times \sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)} = -\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)}$$

۲-

$$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x^4+2x^2+1} = x^2+1$$

$$\sqrt[5]{\frac{-32}{x^2-\sqrt{x^4+2x^2+1}}} = \sqrt[5]{\frac{-32}{x^2-(x^2+1)}} = \sqrt[5]{\frac{-32}{-1}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

۳-

$$\sqrt[n]{a^n \times b} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b} = |a| \times \sqrt[n]{b} \overset{a\geq 0}{=} a\sqrt[n]{b}$$

۴- حدس می‌زنیم جملات دنباله به صفر نزدیک شوند. برای این کار دنبالهٔ تفاضلات را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \cdots$$

جملات این دنباله اگرچه مرتباً مثبت و منفی می‌شوند ولی از نظر قدر مطلق کوچک می‌شوند و حول صفر تغییر می‌کنند و مرتباً به صفر نزدیک‌تر می‌شوند. پس جملات این دنباله (دنبالهٔ تفاضلات) به صفر نزدیک می‌شود و حدس ما معتبر است.

۵-

$a_1 = 1/2$

$a_2 = a_1 + 5(10)^{-2} = 1/2 + 0/05 = 1/25$

$a_3 = a_2 + 5(10)^{-3} = 1/25 + 0/005 = 1/255$

$\vdots$

دنباله : $1/2, 1/25, 1/255, \cdots$

دنبالهٔ تفاضلات جملات دنباله و عدد $\frac{113}{90}$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\frac{113}{90} - 1/2 = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{113}{90} - 1/25 = \frac{5}{900} = \frac{1}{180}$$

$$\frac{113}{90} - 1/255 = \frac{5}{9000} = \frac{1}{1800}$$

دنبالهٔ تفاضلات : $\frac{1}{18}, \frac{1}{180}, \frac{1}{1800}, \cdots$

جملات دنبالهٔ تفاضلات به صفر نزدیک می‌شود پس جملات دنباله به عدد $\frac{113}{90}$ نزدیک می‌شوند.

■ دورهٔ سریع مطالب

۱- درست ۲- درست

۳- نادرست ۴- درست

۵- نادرست ۶- درست

۷- صفر ۸- a

۹- ۰/۹ ۱۰- $-a^{۲}$

■ آزمون چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ «۳» جملات دنبالهٔ مورد نظر $\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \cdots$ می‌باشد که به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

۲- گزینهٔ «۳»

$$\begin{matrix} ۳x < ۶/۹۳۶۳ \Rightarrow x < ۲/۳۱۲۱ \\ ۳ - x < ۰/۶۸۷۷ \Rightarrow ۲/۳۱۲۳ > x \end{matrix} \Rightarrow ۲/۳۱۲۱ < x < ۲/۳۱۲۳$$

۲/۳ , ۲/۳۱ , ۲/۳۱۲ : دنبالهٔ تقریبات

۳- گزینهٔ «۱»

$$x\sqrt[۳]{x} \times \sqrt[۵]{x^{۳}} = x\sqrt[۱۵]{x^{۵} \times x^{۶}} = x\sqrt[۱۵]{x^{۱۱}} = \sqrt[۳]{۲^{۱۵}} \times \sqrt[۱۵]{\left(\sqrt[۳]{۲^{۱۵}}\right)^{۱۱}}$$

$$= \sqrt[۳]{۲^{۱۵}} \times \sqrt[۳]{\sqrt[۱۵]{\left(\sqrt[۳]{۲^{۱۵}}\right)^{۱۱}}} = \sqrt[۳]{۲^{۱۵}} \times \sqrt[۳]{\sqrt[۳]{\left(\sqrt[۱۵]{۲^{۱۵}}\right)^{۱۱}}} = ۲^{۵} \times \sqrt[۳]{۲^{۱۱}} = ۲^{۶} \times \sqrt[۳]{۲^{۲}} = ۶۴\sqrt[۳]{۴}$$

۴- گزینهٔ «۲»، در تقسیم عدد ۶ بر ۱۱ خارج‌قسمت ۰/۵۴۵۴۵۴ ... می‌شود که تقریباً عدد ۵۴ تکرار می‌گردد. ارقام اعشار در مرتبهٔ فرد عدد ۵ و در مرتبهٔ زوج ۴ تکرار می‌شود. چون ۳۰ عدد زوج است، پس رقم ۴ رقم سی‌اُم اعشار آن خواهد بود.

۵- گزینهٔ «۱»

$$A = \sqrt{۲ + \sqrt{۳}} \times \sqrt[۴]{۷ - ۴\sqrt{۳}} = \sqrt[۴]{\left(۲ + \sqrt{۳}\right)^{۲}} \times \sqrt[۴]{۷ - ۴\sqrt{۳}}$$

$$= \sqrt[۴]{۷ + ۴\sqrt{۳}} \times \sqrt[۴]{۷ - ۴\sqrt{۳}} = \sqrt[۴]{۴۹ - ۴۸} = ۱$$

۶- گزینهٔ «۴»

$$\sqrt{۲} \times \sqrt[۱۲]{۳۲} = \sqrt[۱۲]{۲^{۶}} \times \sqrt[۱۲]{۲^{۵}} = \sqrt[۱۲]{۲^{۱۱}}$$

۷- گزینهٔ «۲»، جملات دنبالهٔ $a_n = (۰/۲)^n$ به عدد صفر نزدیک می‌شود و جملات دنباله‌های گزینه‌های (۱) و (۳) مرتباً افزایش می‌یابند و نامحدود بزرگ می‌شوند. جملهٔ دنبالهٔ گزینهٔ (۴) علاوه بر آن‌که از نظر قدر مطلق بزرگ می‌شوند ولی مرتباً منفی و مثبت خواهند بود و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند.

۸- گزینهٔ «۲»، نمی‌توان عدد منفی را وارد رادیکال یا فرجهٔ زوج کرد.

$$-۲\sqrt[۴]{۲} = -\sqrt[۴]{۲^۴ \times ۲} = -\sqrt[۴]{۲^۵}$$

۹- گزینهٔ «۱»، چون قدر مطلق جملات دنباله برابر صفر است $d = a_{n+۱} - a_n = ۰$ و دنباله یک دنبالهٔ حسابی می‌باشد، پس جملات دنباله همگی برابرند و به عدد $a_۱$ (جملهٔ اول) نزدیک می‌شوند.

۱۰- گزینهٔ «۲»

$$\sqrt[۴]{۱۶a^{۱۲}b^۸} + \sqrt[۵]{۳۲a^{۱۵}b^{۱۰}} = \sqrt[۴]{۲^۴(a^۳)^۴(b^۲)^۴} + \sqrt[۵]{(۲^۵)(a^۳)^۵(b^۲)^۵}$$

$$= ۲|a^۳|b^۲ + ۲a^۳b^۲ \overset{a<۰}{=} -۲a^۳b^۲ + ۲a^۳b^۲ = ۰$$

پاسخ ایستگاه فکر

خیر، هر برگ دو صفحه دارد که شمارهٔ یکی فرد و دیگری زوج است. به این ترتیب مجموع صفحات هر برگ عددی فرد است، در نتیجه مجموع صفحات ۱۳ برگ برابر است با مجموع سیزده تا عدد فرد که نهایتاً عدد به‌دست آمده فرد خواهد شد. به این ترتیب مجموع شمارهٔ صفحات ۱۳۹۰ نمی‌شود.