فصل هشتم

توزیع‌های نمونه‌ای

در فصل‌های پیش نشان دادیم که با داشتن تابع توزیع یک متغیر تصادفی چگونه می‌توان مقدار احتمالات مورد نظر را بدست آورد. اما در عمل در بسیاری از اوقات می‌دانیم که یک متغیر تصادفی (مثلاً بارش باران در طول سال) از چه توزیع پیروی می‌کند اما مشکل اینجاست که مقدار پارامترهای توزیع را نمی‌دانیم. به عنوان مثال تعداد دفعات برنده شدن حساب بانکی یک شخص در طول ۱۰ سال یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای $X \sim B(۱۰ , p)$ می‌باشد. اما p یا همان احتمال برنده شدن حساب را نمی‌دانیم بنابراین برای بدست آوردن آن نیازمند روشهایی هستیم که بتوان پارامترهای مجهول را برآورد نمود در این فصل و فصل‌های بعدی روشهایی را برای این منظور ارایه می‌کنیم.

۸ . ۱ نمونه تصادفی

یک جمعیت آماری را با متغیر تصادفی X و توزیع احتمال $f_X(x)$ در نظر بگیرید. از این جمعیت n عضو را انتخاب می‌کنیم، این n عضو را یک نمونه nتایی گوییم. اولین عضو از نمونه را با $X_۱$ و دومین عضو را با $X_۲$ و به همین ترتیب nامین عضو انتخابی را با X_n نمایش می‌دهیم. به این ترتیب نمونه nتایی به صورت $X_۱ , X_۲ ,..., X_n$ خواهد بود که در آن هر یک از X_i یا خود یک متغیر تصادفی یا همان توزیع $f_X(x)$ می‌باشند. و از آنجا که تعداد اعضای جمعیت آماری نامتناهی یا بسیار زیاد می‌باشد $(N \to \infty)$. در این صورت انتخاب X_i یا مستقل از X_j $(i \neq j)$ می‌باشد. و این یعنی توزیع توام $X_۱$ تا X_n برابر با حاصل ضرب توزیع $X_۱$ تا X_n می‌باشد. حال با توجه به مطالب فوق تعریف نمونه تصادفی را بصورت زیر ارایه می‌کنیم:

تعریف:

گوییم $X_۱ , X_۲ ,..., X_n$ یک نمونه تصادفی از متغیر تصادفی X می‌باشد اگر و فقط اگر تابع احتمال $f(X_۱ , X_۲ ,..., X_n)$ بصورت زیر باشد:

$$f(X_۱ , X_۲ ,..., X_n) = \prod_{i=۱}^{n} f_X(x_i) \qquad \forall\ (x_۱ , x_۲ , \dots , x_n)$$

حال در مثال‌های بعدی نحوه بکارگیری نمونه‌گیری را مشخص می‌کنیم.

مثال ۱: مدیر یک کارخانه کنسروسازی ادعا می‌ند که از هر ۱۰۰۰۰ کنسرو تولید شده تنها ۵ قوطی دارای اشکال می‌باشد، به وضوح برای اثبات ادعای وی نمی‌توانیم تمام قوطی‌ها را بررسی کنیم بنابراین از میان تمام قوطی‌ها ۱۰ قوطی انتخاب می‌کنیم (در این مثال برای سادگی تعداد کمتری نمونه انتخاب کردیم) و آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطلوبست:

الف) تعریف متغیر تصادفی X و نمونه‌های تصادفی x_i $\quad i=۱ , ۲ , \dots , ۱۰$

ب) تابع چگالی احتمال توام نمونه‌های تصادفی x_i .

حل: الف) متغیر تصادفی X را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$X = \begin{cases} ۰ & \text{اگر قوطی سالم باشد} \\ ۱ & \text{اگر قوطي ناسالم باشد} \end{cases}$$

به این ترتیب نمونه‌های تصادفی X_i به این صورت تعریف خواهد شد:

$$X = \begin{cases} ۰ & \text{اگر نمونه } i \text{ ام سالم باشد} \\ ۱ & \text{اگر نمونه } i \text{ ام ناسالم باشد} \end{cases}$$

بنابراین متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p می‌باشد.

نمونه تصادفی عبارتست از $X_۱ , X_۲ ,..., X_n$ که هر یک نیز به نوبه خود دارای توزیع برنولی با همان پارامتر p می‌باشند. یعنی داریم:

$$f_{Xi}(xi) = p^{x_i}(۱-p)^{۱-x_i} \qquad i=۱ , ۲ , \dots , ۱۰$$
$$x_i = ۰ \text{ یا } ۱$$
$$= ۰ \qquad \text{برای سایر مقادیر}$$

ب) از آنجا که نمونه‌ها از بین تعداد زیادی $(۱۰/۰۰۰)$ کنسرو انتخاب می‌شوند بنابراین انتخاب با جایگذاری و بدون جایگذاری تقریباً معادل یکدیگر می‌باشند و می‌توان گفت که X_iها از یکدیگر مستقل می‌باشند. در این صورت تابع چگالی توام X_iها عبارتست از:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \prod_{i=1}^{10} f_X(x_i) = p^{\sum_{i=1}^{10} x_i} (1-p)^{10-\sum_{i=1}^{10} x_i}$$

مثال ۲: می‌دانیم که طول قد دانشجویان یک دانشگاه یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 می‌باشد. اگر به تصادف ۱۰ نفر از دانشجویان انتخاب کنیم و X_1 را طول قد نفر اول و X_2 را طول قد نفر دوم و به همین ترتیب X_{10} را طول قد نفر دهم قرار دهیم. در این صورت مطلوبست:

الف) تابع چگالی احتمال توام X_1 تا X_{10}.

ب) احتمال اینکه قد هر ۱۰ نفر از ۱/۵ متر بیشتر باشد؟

ج) احتمال اینکه هیچ کس قدی بلندتر از ۲ متر نداشته باشد؟

حل: الف) از آنجا که هر یک از X_iها نمونه‌های تصادفی می‌باشند که از یکدیگر مستقل بوده و از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 پیروی می‌کند بنابراین:

$$f(X_1, X_2, \ldots X_n) = \prod_{i=1}^{10} f_X(x_i) = \prod_{1}^{10} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^{10}(2\pi)^5} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ب) احتمال اینکه قد هر ۱۰ نفر از ۱/۵ متر بیشتر باشد برابر است با:

$$p(X_1 > 1/5) = 1 - p(X_1 \le 1/5) = 1 - p\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma} < \frac{1/5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - N_Z\left(Z < \frac{1/5-\mu}{\sigma}\right)$$

برای X_1 تا X_{10} داریم:

$$p(X_1, \ldots, X_{10} > 1/5) = \left(1 - N_Z\left(\frac{1/5-\mu}{\sigma}\right)\right)^{10}$$

ج) مطابق بند (ب) مقدار این احتمال هم برابر است با:

$$p(X_1, \ldots, X_{10} < 2) = \left(N_Z\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right)\right)^{10}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید تابع چگالی توام و نتایج احتمالات به مقادیر μ و σ^2 وابسته می‌باشد. در فصل برآورد نشان می‌دهیم که با برآورد این پارامترها می‌توان مقادیر احتمالات را محاسبه نمود.

۲ . ۸ آماره‌ها

اگر با استفاده از عضوهای یک نمونه تصادفی (مثل X_1 , X_2 , ...) یک تابع بسازیم که به مقادیر مجهول پارامتر وابستگی نداشته باشد به آن تابع یک آماره می‌گوییم.

به این ترتیب اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی باشند توابع زیر همگی آماره می‌باشند:

$$X_2 + X_4 + X_8 \quad , \quad \frac{X_n}{X_1} \quad , \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2$$

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n}(X_i - 2)^2$$

اما توابع زیر بشرطی آماره می‌باشند که مقادیر μ و σ^{2} مجهول نباشند:

$$X_n-\mu \quad , \quad \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i-\mu)^{2} \quad , \quad \frac{X_2-X_1}{2\sigma^{2}} \quad , \quad \frac{X_1-\mu}{\sigma}$$

به عنوان مثال $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ میانگین نمونه تصادفی می‌باشد که یک آماره هم می‌باشد. اما این میانگین با پارامتر μ در جامعه تفاوت می‌کند زیرا میانگین نمونه از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغیر می‌ند اما پارامتر جامعه μ همواره ثابت است.

در استنباط آماری با گرفتن نمونه‌هایی از جامعه و بدست آوردن آماره‌هایی مثل $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ یا $S^{2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^{2}$ می‌خواهیم نتیجه‌گیری‌هایی در مورد پارامترهای جامعه مثا میانگین μ و واریانس σ^{2} داشته باشیم.

حال همانطور که برای یک متغیر تصادفی X مقادیری مثل میانگین، واریانس، kامین گشتاور را معرفی نمودیم برای متغیر تصادفی X نیز این مقادیر را می‌توانیم تعریف کنیم.

مقدار $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ میانگین نمونه گفته می‌شود. به همین ترتیب مقدار $S^{2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^{2}$ نیز مقدار واریانس نمونه و $S=\sqrt{S^{2}}$ نیز مقدار انحراف از معیار نمونه نامیده می‌شود.

Kامین گشتاور نمونه عبارتست از:

$$M_K=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{k} \qquad k=1,2,\ldots$$

توجه کنید که مقادیر $\overline{X}$ و S^{2} یک آماره می‌باشد و در نتیجه خود یک متغیر تصادفی می‌باشد این مطلب برای مقادیر مختلف K در M_K (مثل M_1 ، M_2 ...) نیز برقرار می‌باشد.

مثال ۳: نشان دهید روابط زیر دارای S^{2} برقرار است:

الف)
$$S^{2}=\frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^{2}-n\overline{X}^{2}\right)$$

ب)
$$S^{2}=\frac{n}{n-1}\left(M_2-\overline{X}^{2}\right)$$

حل: الف)

$$S^{2}=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^{2}=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i^{2}-2X_i\overline{X}+\overline{X}^{2})$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{1}^{n}X_i^{2}-2\overline{X}\sum_{1}^{n}X_i+n\overline{X}^{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{1}^{n}X_i^{2}-2\overline{X}(n\overline{X})+n\overline{X}^{2}\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{1}^{n}X_i^{2}-n\overline{X}^{2}\right)$$

ب) بوضوح از بند الف داریم:

$$S^{2}=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{1}^{n}X_i^{2}-n\overline{X}^{2}\right)=\frac{1}{n-1}\times n\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}X_i^{2}-\overline{X}^{2}\right)$$

$$=\frac{n}{n-1}\left(M_2-\overline{X}^{2}\right)$$

در بخش توزیع‌های نمونه‌ای علت بکار بردن $\frac{۱}{n-۱}$ به جای $\frac{۱}{n}$ را در محاسبه $S^۲$ توضیح می‌دهیم.

مثال ۴: در مثال ۲ نتیجه، حاصل از نمونه‌گیری از قد ۱۰ نفر از دانشجویان بصورت زیر می‌باشد:

۱۸۴ , ۱۷۳ , ۱۶۶ , ۱۹۲ , ۱۷۵ , ۱۷۰ , ۱۵۰ , ۱۶۱ , ۱۸۷ , ۱۷۸

مطلوبست:

الف) میانگین و واریانس نمونه.

ب) گشتاور اول و دوم نمونه.

حل: الف)

$$\overline{X} = \frac{۱}{۱۰}\sum_{۱}^{۱۰} X_i = \frac{۱}{۱۰}(۱۷۸+۱۸۷+۱۶۱+۱۵۰+۱۷۰+۱۷۵+۱۹۲+۱۶۶+۱۷۳+۱۸۴) = ۱۷۳/۶$$

برای محاسبه واریانس نمونه از گشتاور اول و دوم استفاده می‌نیم:

$$M_۱ = M_۱ = \frac{۱}{n}\sum_{۱}^{n} X_i = \overline{X} = ۱۷۳/۶$$

$$M_۲ = \frac{۱}{n}\sum_{۱}^{n} {X_i}^۲ = \frac{۱}{۱۰}\sum_{۱}^{۱۰}(X_i)^۲ = \frac{۱}{۱۰}(۱۷۸^۲+۱۸۷^۲+۱۶۱^۲+۱۵۰^۲+۱۷۰^۲$$
$$+۱۷۵^۲+۱۹۲^۲+۱۶۶^۲+۱۷۳^۲+۱۸۴^۲ = ۳۰۲۸۰/۴$$

بنابراین $S^۲$ برابراست با:

$$S^۲ = \frac{n}{n-۱}(M_۲ - \overline{X}^۲) = \frac{۱۰}{۹}(۳۰۲۸۰/۴ - ۱۷۳/۶^۲)$$
$$= \frac{۱۰}{۹}(۱۴۳/۴۴) = ۱۵۹/۳۷$$

انحراف از معیار نمونه:

$$\Rightarrow S = \sqrt{۱۵۹/۳۷} = ۱۲/۶۲$$

۸ . ۳ آماره مرتب، میانه و برد نمونه

نمونه تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ از متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید اگر مقادیر مشاهده شده نمونه تصادفی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم بطوریکه $X_{(۱)} \le X_{(۲)} \le \ldots \le X_{(n)}$ را داشته باشیم در این صورت $X_{(i)}$ را iامین آماره مرتب می‌نامیم. $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ همچنین به $X_{(۱)}$ حداقل مقدار نمونه و به $X_{(n)}$ حداکثر مقدار نمونه گفته می‌شود. میانه نمونه عبارتست از مقدار وسط آماره مرتب به عبارت دقیقتر $m_\circ$ را میانه نمونه در نظر می‌گیریم که بصورت زیر بدست می‌آید:

اگر n فرد باشد $m_\circ = X_{(\frac{n+۱}{۲})}$.

اگر n زوج باشد $= \frac{X(\frac{n}{۲}) + X(\frac{n}{۲}+۱)}{۲}$.

برد نمونه نیز عبارتست از تفاضل بزرگترین آماره مرتب از کوچکترین آماره مرتب که با $R_\circ$ نمایش داده می‌شود. $R_\circ = X_{(n)} - X_{(۱)}$

مثال ۵: نمونه تصادفی مشاهده شده در مثال ۴ را در نظر بگیرید، آماره مرتب، حداقل مقدار نمونه، حداکثر مقدار نمونه، میانه و برد نمونه را بدست بیاورید؟

حل: با مرتب نمودن نمونه‌های مشاهده شده داریم:

$X_{(۱)} = ۱۵۰ \quad , \quad X_{(۲)} = ۱۶۱ \quad , \quad X_{(۳)} = ۱۶۶ \quad , \quad X_{(۴)} = ۱۷۰ \quad , \quad X_{(۵)} = ۱۷۳$

$X_{(۶)} = ۱۷۵ \quad , \quad X_{(۷)} = ۱۷۸ \quad , \quad X_{(۸)} = ۱۸۴ \quad , \quad X_{(۹)} = ۱۸۷ \quad , \quad X_{(۱۰)} = ۱۹۲$

$X_{(۱)} = ۱۵۰$ حداقل مقدار نمونه.

$X_{(۱۰)} = ۱۹۲$ حداکثر مقدار نمونه.

میانه نمونه : $\dfrac{X_{(\frac{۱۰}{۲})} + X_{(\frac{۱۰}{۲}+۱)}}{۲} = \dfrac{X_{(۵)} + X_{(۶)}}{۲} = \dfrac{۱۷۳ + ۱۷۵}{۲} = ۱۷۴$

برد نمونه : $X_{(۱۰)} - X_{(۱)} = ۱۹۲ - ۱۵۰ = ۴۲$

۸-۱۱

۸ . ۴ تابع توزیع نمونه‌ای

برای نمونه تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ و آماره مرتب $X_{(۱)} \le X_{(۲)} \le \ldots \le X_{(n)}$ تابع توزیع نمونه‌ای بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^*(t) = \begin{cases} ۰ & \text{برای} \quad t < X_{(۱)} \\ \dfrac{r}{n} & X_{(r)} \le t < X_{(r+۱)} \qquad (r = ۱, \ \ldots, n) \\ ۱ & t > X_{(n)} \end{cases}$$

۸-۱۲

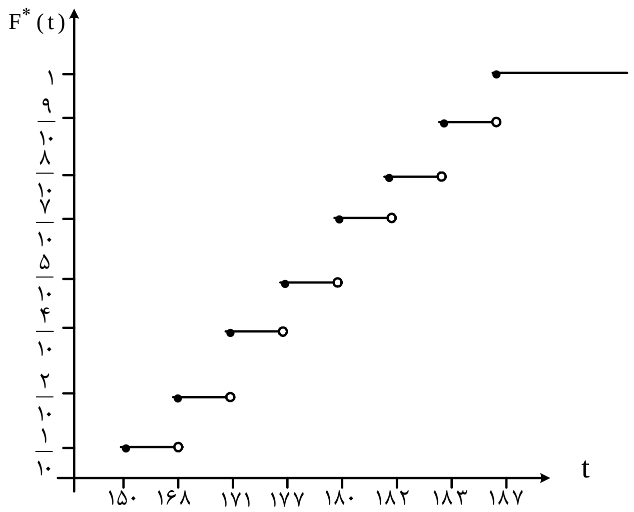
مثال ۶: اگر نمونه‌های مشاهده شد از قد دانشجویان در مثال ۴ بصورت زیر باشد مطلوبست تابع توزیع نمونه‌ای برای نمونه تصادفی مشاهده شده؟

۱۵۰ , ۱۶۸ , ۱۷۱ , ۱۷۱ , ۱۷۷ , ۱۸۰ , ۱۸۰ , ۱۸۲ , ۱۸۳ , ۱۸۷

حل:

$$F^*(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۱۵۰ \\ \dfrac{۱}{۱۰} & ۱۵۰ \le t < ۱۶۸ \\ \dfrac{۲}{۱۰} & ۱۶۸ \le t < ۱۷۱ \\ \dfrac{۴}{۱۰} & ۱۷۱ \le t < ۱۷۷ \\ \dfrac{۵}{۱۰} & ۱۷۷ \le t < ۱۸۰ \\ \dfrac{۷}{۱۰} & ۱۸۰ \le t < ۱۸۲ \\ \dfrac{۸}{۱۰} & ۱۸۲ \le t < ۱۸۳ \\ \dfrac{۹}{۱۰} & ۱۸۳ \le t < ۱۸۷ \\ ۱ & ۱۸۷ \le t \end{cases}$$

نمودار تابع توزیع نمونه‌ای فوق نیز بصورت زیر می‌باشد.



÷

۸-۱۳

۸ . ۵ نامساوی چبی چف

فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد که نحوه توزیع و تابع چگالی آنرا نمی‌دانیم در این صورت برای اظهار نظر در مورد مقادیر احتمال که متغیر تصادفی X قبول می‌کند می‌توانیم از قضیه چبی چف استفاده کنیم. این قضیه بصورت زیر می‌باشد:

اگر X یک متغیر تصادفی باشد و $g(X)$ یک تابع حقیقی غیر منفی از X باشد در این صورت:

$$p[g(X) \ge K] \le \frac{1}{K} E[g(X)] \qquad g(X) \ge 0 \ , \ K > 0$$

با انتخاب $g(X) = (X-\mu_X)^2$ و $k^2 \sigma_X^2$ بجای k داریم:

$$p(X-\mu_X)^2 \ge k^2 \sigma_X^2) \le \frac{1}{k^2 \sigma_X^2} E\left[(X-\mu_X)^2\right]$$

$$p(|X-\mu_X| \ge K\sigma_X) \le \frac{1}{k^2}$$

بنابراین:

$$p(|X-\mu_X| < K\sigma_X) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$$

مقادیر احتمال که توسط قانون چبی چف بدست می‌آیند بسته به مقدار k از دقتهای مختلفی برخوردارند بطوریکه هر چه k بیشتر باشد دقت محاسبه احتمال توسط قانون چبی چف بیشتر است. این مطلب را در مثال زیر نشان می‌دهیم:

مثال ۷: اگر X یک متغیر تصادفی نرمال باشد در این صورت مطلوبست محاسبه احتمال $p(|X-\mu_X| < k\sigma_X)$ با استفاده از توزیع نرمال و قانون چبی چف به ازای مقادیر $k = 1, 2, 3, 4$.

حل: ابتدا مقدار احتمال را برای کتغیر تصادفی نرمال X بدست می‌آوریم:

$$p(|X-\mu_X| < K\sigma_X) = p(-k < \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} < k)$$

$$= N_Z(k) - N_Z(-k) = 2N_Z(k) - 1$$

حال در جدول زیر مقادیر مختلف k را با استفاده از رابطه فوق و قانون چبی چف محاسبه می‌کنیم:

K	$2N_Z(k)-1$	$1-\frac{1}{k^2}$
۱	۰/۶۸۲۶	۰
۲	۰/۹۵۴۶	۰/۷۵
۳	۰/۹۹۷۴	۰/۸۸۸۹
۴	۱/۰۰۰	۰/۹۳۳۴

همانطور که ملاحظه می‌کنید مقادیر بدست آمده برای $k=1,2$ از خطای بالایی برخوردار هستند اما با افزایش k مقدار بدست آمده از قانون چبی چف به مقدار واقعی نزدیک‌تر می‌شود. می‌توان تابع چگالی احتمال را طوری تعریف نمود که به ازای هر مقدار $k \geq 1$ مقدار واقعی احتمال با احتمال بدست آمده از رابطه چبی چف برابر باشد. این حالت را در مثال بعد نشان می‌دهیم:

مثال ۸: فرض کنید تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی گسسته X بصورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{k^2-1}{k^2} \qquad x=0 \text{ برای } \qquad k \geq 1$$

$$= \frac{1}{2k^2} \qquad x=-k\,,\,k \text{ برای }$$

$$= 0 \qquad \text{سایر مقادیر}$$

مطلوبست: الف) محاسبه σ_X , μ_X.

ب) محاسبه احتمال $p(|X-\mu_X| < k\sigma_X)$ به وسیله تابع احتمال و بوسیله قانون چبی چف و مقایسه آندو.

حل: الف)

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{n} f(xi)\, x_i = 0 \times \frac{k^2-1}{k^2} + k\left(\frac{1}{2k^2}\right) + (-k)\left(\frac{1}{2k^2}\right) = 0 + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} = 0$$

$$E\left[X^2\right] = \sum_{1}^{n} x_i^2\, f(x_i) = 0 \times \frac{k^2-1}{k^2} + k^2\left(\frac{1}{2k^2}\right) + (-k)^2\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \sigma_x^2 = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \sigma_x^2 = 1 - 0^2 = 1$$

ب) ابتدا احتمال دقیق را محاسبه می‌کنیم:

$$\mu_X = 0 \qquad \sigma_X = 1$$

$$\Rightarrow p(|X-\mu_X| < k\,\sigma_X) = p(|X| < K)$$

$$p(-k < X < k) = p(X=-k) + p(X=k) = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{k^2}$$

اما طبق قانون چبی چف رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$p(|X-\mu_X| < k\,\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}$$

مقدار $\frac{1}{k^2}$ دقیقاً برابر با احتمال محاسبه شده می‌باشد بنابراین در این حالت مخصوص مقدار دقیق احتمال با مقدار بدست آمده از قانون چبی چف برابر می‌باشد و به عبارتی حالت مساوی در قانون چبی چف رخ می‌دهد.

۸ . ۶ قضیه حد مرکزی

همانطور که قبلاض اشاره کردیم تابع نرمال نقش مهمی در احتمالات بازی می‌کند زیرا اولاً محاسبه احتمال نرمال با استفاده از تابع نرمال استاندارد و جدول مربوط به آن بسیار ساده می‌باشد ثانیاً بسیاری از محاسبات احتمال را همانطور که در فصلهای قبل نشان دادیم تحت شرایط خاصی می‌توان با استفاده از تابع نرمال تقریب زد. حال در اینجا نشان می‌دهیم که اگر متغیرهای تصادفی X_i $(i=1,2,\dots)$ از طکدیگر مستقل باشند و از یک تابع توزیع پیروی کنند، مجموع آنها به سمت تابع نرمال میل می‌کند. در اینجا نمی‌دانیم که متغیرهای تصادفی X_i از چه توزیعی پیروی می‌کند. صورت قضیه حد مرکزی بصورت زطر می‌باشد:

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه نامتناهی X با میانگین μ و σ^2 باشند در این صورت دنباله متغیرهای تصادفی $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad n = 1, 2, \dots$$

که در آن $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ در این صورت اگر $F_{Z_n}(t)$ تابع توزیع متغیرهای تصادفی Z_n به ازای مقدار حقیقی t باشد داریم:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = N_Z(t)$$

که در آن $N_Z(t)$ تابع توزیع نرمال استاندارد می‌باشد.

به عبارت ساده‌تر متغیر تصادفی $Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ وقتی n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند دارای توزیع نرمال استاندارد $N(0, 1)$ می‌باشد. یعنی برای nهای به اندازه کافی بزرگ داریم $F_{Z_n}(t) = N_Z(t)$ اما برای هر مقدار n داریم:

$$F_{\overline{X}_n}(t) = F_{Z_n}\left(\frac{t-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

در نتیجه برای nهای بزرگ:

$$F_{\overline{X}_n}(t) = N_Z\left(\frac{t-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

رابطه فوق به این معنی است که تابع توزیع میانگین تعداد زیادی از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان تقریباً مساوی است با توزیع نرمال استاندارد. به همین دلیل است که تعداد زیادی از قوانین احتمال را بوسیله نرمال تقریب می‌زنند.

۱۷-۸

به عنوان مثال به تقریب دو جمله‌ای به نرمال توجه کنید که در فصل قبل روابط آنرا بصورت زیر نشان دادیم:

$$p(X=x_0) = N\left(\frac{x_0 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{pq}}\right) - N\left(\frac{x_0 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{pq}}\right)$$

می‌دانیم اگر متغیرهای تصادفی برنولی و مستقل $X_1, X_2, \dots, X_n$ را هر یک با پارامتر p در نظر بگیریم در این صورت $Y = \sum_{1}^{n} X_i$ یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامتر n و p می‌باشد حال طبق قضیه حد مرکزی میانگین X_iها به توزیع نرمال میل می‌کند یعنی تابع توزیع $\frac{Y}{n} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i = \overline{X}_n$ وقتی n بزرگ باشد برابر است باک

$$F_{\frac{Y}{n}}(t) = N_Z\left(\frac{t-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

که در آن امید ریاضی $\frac{Y}{n}$ برابر است با $\mu = p$ و واریانس $\frac{Y}{n}$ نیز برابر با $\sigma^{۲} = pq$ می‌باشد حال داریم:

$$F_{\frac{Y}{n}}(t) = N_Z\left(\frac{t-\mu}{\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}}\right) = N_Z\left(\frac{t-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)$$

حال $F_{\frac{Y}{n}}(t)$ را به $F_Y(t)$ تبدیل می‌کنیم:

$$F_Y(t) = F_{\frac{Y}{n}}\left(\frac{t}{n}\right) = N_Z\left(\frac{\frac{t}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) = N_Z\left(\frac{t-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

در نتیجه $F_Y(t) = N_Z\left(\frac{t-np}{\sqrt{npq}}\right)$ که با استفاده از روش ذوذنقه‌ای که در فصل قبل نشان دادیم می‌توان مقدار احتمال $p(X = x_\circ)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$p(X = x_\circ) = N\left(\frac{x_\circ + \frac{۱}{۲} - np}{\sqrt{npq}}\right) - N\left(\frac{x_\circ - \frac{۱}{۲} - np}{\sqrt{npq}}\right)$$