ریاضی عمومی (۱و۲) :

۱۲۱- فرض کنید $z = x + iy$ یک عدد مختلط باشد. مقدار $\ln|z^z|$، کدام است؟

$|z^z| = |e^{z\ln z}| = |e^{(x+iy)(\ln r + i\theta)}| = e^{x\ln r - y\theta}$

$\ln|z^z| = \ln e^{x\ln r - y\theta} = x\ln r - y\theta$ $(r=|z|)$ $(\theta = \arg z)$

۱) $x\ln|z| - y\arg z$
۲) $y\ln|z| + x\arg z$
۳) $x\ln|z| + y\arg z$
۴) $y\ln|z| - x\arg z$

۱۲۲- مقدار $\lim_{n\to\infty} \frac{[x]+[x^2]+\cdots+[x^n]}{x^n}$، به ازای $x > 1$ کدام است؟

$x-1 < [x] \leq x$
$x^2-1 < [x^2] \leq x^2$
$\vdots$
$x^n-1 < [x^n] \leq x^n$

$x+x^2+\cdots+x^n - n < [x]+[x^2]+\cdots+[x^n] \leq x+x^2+\cdots+x^n$

$\frac{x(x^n-1)}{x-1} - n < \S < \frac{x(x^n-1)}{x-1}$ $\div x^n$ $\xrightarrow[n\to\infty]{}$ $\frac{x}{x-1} \leq ? \leq \frac{x}{x-1}$

با عدد گذاری هم میشد به جواب رسید:
$x=1$ و $n=100$ $\Rightarrow \frac{1+1+\cdots+1^{100}}{1^{100}} = \infty$
بازای $x=1$ باید ∞ می‌شود.

۱) صفر
۲) $+\infty$
۳) $\frac{x}{x-1}$
۴) $\frac{x-1}{x}$

۱۲۳- دنبالهٔ $\left\{(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$، به کدام عدد همگرا است؟

$\lim_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = A \xrightarrow{\text{گرفتن } \ln} \ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(2^n+3^n)$

$\ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n+3^n)}{n} \xrightarrow{\text{H.O.P}} \ln A = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2\cdot 2^n + \ln 3\cdot 3^n}{2^n+3^n} = \frac{\ln 3\cdot 3^n}{3^n} = \ln 3 \rightarrow A = 3$

۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{3}{2}$

۱۲۴- ضریب x^2 در بسط مکلورن $\sqrt[3]{1+x}$ کدام است؟

$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)x^n}{n!}$ $\xrightarrow{n=2}$ $\frac{f''(0)x^2}{2!} = -\frac{2}{9}\frac{x^2}{2!} = \left(-\frac{1}{9}\right)x^2$

$y = (1+x)^{1/3}$
$y' = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$
$y'' = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$ $\xrightarrow{x=0}$ $y''(0) = -\frac{2}{9}$

۱) $-\frac{1}{9}$
۲) $\frac{1}{9}$
۳) $-\frac{1}{3}$
۴) $\frac{1}{3}$

Scanned by CamScanner

۱۲۵- طول قوس منحنی $9x^2 - 4y^3 = 0$ از نقطهٔ $(0,0)$ تا نقطهٔ $(3, 2\sqrt{3})$، کدام است؟

$9x^2 = 4y^3 \rightarrow x^2 = \frac{4}{9}y^3 \rightarrow x = \frac{2}{3}y^{3/2} \rightarrow x' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}y^{1/2}$

$x' = y^{1/2}$

$L = \int_0^3 \sqrt{1+x'^2}\,dy = \int_0^3 \sqrt{1+y}\,dy = \frac{2}{3}(1+y)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$

۱) $\frac{13}{3}$
۲) $\frac{14}{3}$
۳) $\frac{16}{3}$
۴) $\frac{17}{3}$

۱۲۶- اگر f و g توابع پیوسته بر $[0,1]$ و مشتق‌پذیر بر $(0,1)$ باشند به‌طوری‌که $f(1) = g(0)$ و $g(1) = f(0)$، آنگاه وجود کدام عدد $c \in (0,1)$ در گزینه‌های زیر قطعی است؟

$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

$g(x) = 1 - x \rightarrow g'(x) = -1$

$x = c \rightarrow f'(c) = -g'(c)$

۱) $f'(c) = 1 + g'(c)$
۲) $f'(c) = 1 - g'(c)$
۳) $f'(c) = g'(c)$
۴) $f'(c) = -g'(c)$

۱۲۷- کدام عبارت در مورد سری $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$، درست است؟

آزمون انتگرال

$\int_1^\infty \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \int_1^\infty \ln(x) - \ln(x+1)\,dx$

جزء جزء

$= x\ln x - x\ln(x+1) - \ln(x+1)\Big|_1^\infty = \infty$

۱) واگرا است.
۲) همگرای مطلق است.
۳) همگرای شرطی است.
۴) همگرا است.

۱۲۸- مقدار $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left[\frac{nx+1}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{nx+n}{n}\right]\right)$، کدام است؟

تعریف انتگرال

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [x + \frac{i}{n}]$

$= \int_0^1 [x+t]\,dt$

$= \int_0^1 (x + [t])dt = \int_0^1 x\,dt = x\Big|_0^1 = x$

۱) x
۲) $[x]$
۳) $x+1$
۴) $[x]+1$

۱۲۹- حجم قسمتی از ناحیهٔ درون استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4$ زیر صفحهٔ $x + y + z = 2$ واقع در یک هشتم اول فضا، کدام است؟

$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2} \int_{z=0}^{2-r\cos\theta-r\sin\theta} dz\,r\,dr\,d\theta$

$= \int_{r=0}^{2} (2r - r^2\cos\theta - r^2\sin\theta)\,dr$

$= r^2 - \frac{r^3}{3}(\cos\theta - \sin\theta)\Big|_{r=0}^{2} = 4 - \frac{8}{3}(\cos\theta - \sin\theta)$

$= \int_0^{\pi/2} (4\theta - \frac{8}{3}\sin\theta + \frac{8}{3}\cos\theta)\,d\theta = 2\pi - 16/3$

جواب صحیح در گزینه‌ها نیست.

۱) $\frac{2}{3}$
۲) 8π
۳) $\frac{4}{3}$
۴) 4π

Scanned by CamScanner

۱۳۰- اگر ناحیهٔ بین منحنی‌های $x=y^2+y^3+1$ و $x=y^2+1$ به ازای $y\in[0,1]$ را حول خط $y=-1$ دوران دهیم، حجم جسم حاصل از دوران کدام است؟

۱) $1/1\pi$

۲) $0/7\pi$

۳) $0/8\pi$

۴) $0/9\pi$

$$V=2\pi\int_a^b|(y-\alpha)(f(y)-g(y))|\,dy$$

$$=2\pi\int_0^1(y+1)(y^2+y^3+1-y^2-1)\,dy=2\pi\int_0^1(y^4+y^3)\,dy=2\pi\left(\frac{y^5}{5}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)=2\pi\times\frac{9}{20}=\frac{9\pi}{10}$$

۱۳۱- منحنی C از محل تلاقی صفحهٔ $z=5$ با بیضی‌گون $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+5)^2}{4}+\frac{(z-5)^2}{9}=1$، حاصل می‌شود. انحنای منحنی C کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{1}{2}$

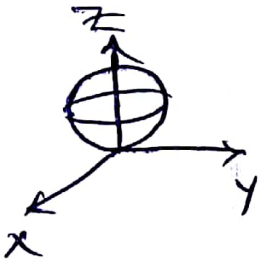
۳) ۲

۴) ۳

$z=5 \longrightarrow (x-1)^2+(y+5)^2=4$ ← دایره‌ای به شعاع ۲

بنابراین انحنا برابر است با $\frac{1}{2}$

۱۳۲- کرهٔ S به شعاع a بالای صفحهٔ xy چنان قرار گرفته که قطر آن بر محور z ها واقع است. همچنین کرهٔ S در مبدأ مختصات بر صفحهٔ xy مماس است. معادلهٔ این کره در مختصات کروی کدام است؟ (ϕ زاویه بین شعاع ρ و جهت مثبت محور z است.)



۱) $\rho=a\sin\phi$

۲) $\rho=a\cos\phi$

۳) $\rho=2a\sin\phi$

۴) $\rho=2a\cos\phi$

$$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$$

$$\text{کروی} \longrightarrow \underbrace{r^2\sin^2\phi\cos^2\theta+r^2\sin^2\phi\sin^2\theta}_{r^2\sin^2\phi}+r^2\cos^2\phi-2r\cos\phi\,a=0$$

$$\longrightarrow r^2-2r\cos\phi\,a=0\longrightarrow r(r-2\cos\phi\,a)=0$$

$r=0$ یا $\boxed{r=2a\cos\phi}$

۱۳۳- اگر $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\vec{\nabla}.\vec{r}=3$

۲) $\vec{\nabla}\times\vec{r}=\vec{0}$

۳) $\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}=2$

۴) $\vec{\nabla}(\ln|\vec{r}|)=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}$

$$div\vec{r}=\vec{\nabla}.\vec{r}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=(1+1+1)=3$$ ✓ نرمینه ۱

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}=Cor\,\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x&y&z\end{vmatrix}=(0,0,0)$$ ✓ نرمینه ۲

یادآوری: $div\left(\frac{\vec{r}}{r^n}\right)=(3-n)r^n$ $\begin{cases}\text{نرمینه ۱ } n=0\longrightarrow div(\vec{r})=3r^0=3\ \checkmark\\ \text{نرمینه ۳ } n=3\longrightarrow div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=0r^3=0\ \times\end{cases}$

Scanned by CamScanner

۱۳۴- اگر $\cos^2 x+\cos^2 y+\sin^2 z=\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}-z$ باشد، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطهٔ $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

$\frac{\partial}{\partial x}$ $-2\cos x\sin x+2\sin z\cos z\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial x}$ عروضه‌ای $\rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial x}$ $\rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}$

$\frac{\partial}{\partial y}$ $-2\cos y\sin y+2\sin z\cos z\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial y}$ عروضه‌ای $\rightarrow -1+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial y}$ $\rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۵- معادلهٔ خط قائم بر سطح $3x^2+\tan^{-1}(2z)=e^y+1$ در نقطهٔ $(1,\ln 2,0)$، کدام است؟

بردار $\vec{\nabla f}=(6x,-e^y,\frac{2}{1+4z^2})$ نقطه $(6,-2,2)$

معادله خط $\frac{x-1}{6}=\frac{y-\ln 2}{-2}=\frac{z-0}{2}$ $\times 6$ $\rightarrow x-1=-3y+3\ln 2=3z$

۱) $z=x-1, z+y=\ln 2$
۲) $z=2x-2, z+y=\ln 2$
۳) $2z=x-1, z+y=\ln 2$
۴) $3z=2x-2, z+y=\ln 2$

۱۳۶- اگر A ناحیهٔ محصور به منحنی‌های $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=4x$ باشد، مقدار $\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$، کدام است؟

$r^2=4r\cos\theta$ $r^2=2r\cos\theta$
$r=4\cos\theta$ $r=2\cos\theta$

قطبی $=2\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=2\cos\theta}^{4\cos\theta}\frac{r\,dr\,d\theta}{r}=2\int_{\theta=0}^{\pi/2}2\cos\theta\,d\theta=4\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}=4$

۱) ۲
۲) 2π
۳) ۴
۴) 4π

۱۳۷- فرض کنید S بخشی از سطح بیضی‌گون به معادلهٔ $4x^2+4y^2+z^2=5$ باشد که در ناحیهٔ $z\geq 1$ قرار دارد و $\vec{n}$ بردار یکهٔ قائم برونسو بر S باشد. برای میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=2xz\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$، مقدار شار $\iint \vec{F}.\vec{n}ds$، کدام است؟

با قضیه دیورژانس به جوابی که در تشریحی گرفتیم می‌رسیم.

$4x^2+4y^2+z^2=5 \rightarrow \iint_S F.n\,ds=2\pi$

$z\geq 1 \rightarrow \iint_{S_2} F.n\,ds=-\pi$ $\xrightarrow{\text{حل}} 2\pi-(-\pi)=3\pi$

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) π
۳) 2π
۴) 3π

۱۳۸- اگر c مسیر دایره‌ای شکل $x^2+y^2=2x$ در جهت ساعتگرد باشد، حاصل $\oint_c (y\cos x+2xe^y+y)dx+(\sin x+x^2e^y+2y)dy$، کدام است؟

P Q

بردن $\int P\,dx+Q\,dy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dA$

$=\iint(\cos x+2xe^y-\cos x-2xe^y-1)\,dA$

$=-\iint dA$ جهت ساعتگرد $=\iint dA$

$x^2+y^2=2x \rightarrow (x-1)^2+y^2=1$ دایره‌ای به شعاع ۱

$=\pi(1)^2=\pi$

۱) π
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) $-\frac{\pi}{2}$
۴) $-\pi$

Scanned by CamScanner

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه‌برهمی

۱۳۹- مساحت بخشی از رویهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ که درون استوانهٔ $y^2+z^2+2z=0$ قرار دارد، کدام است؟

$g: x^2+y^2+z^2-4=0 \rightarrow dS=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot k|}=\frac{|2x,2y,2z|}{2z}dA$

$=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2z}=\frac{2}{z}dA$

$\iint dS=\iint\frac{2}{z}dA=\iint\frac{2\,dA}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ حل با مختصات قطبی

$y+(z+1)^2=1$

۱) 8π

۲) $8\pi-8$

۳) $8\pi-12$

۴) $8\pi-16$

۱۴۰- فرض کنید D ناحیهٔ درون استوانهٔ $x^2+y^2=1$ زیر مخروط $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ بالای صفحهٔ xy باشد. مقدار $\iiint_D x^2dxdydz$ کدام است؟

$\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^4\cos^2\theta\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{5}\cos^2\theta\,d\theta$ $\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$

$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{5}(2\pi)$

۱) $\frac{\pi}{5}$

۲) $\frac{2\pi}{5}$

۳) $\frac{\pi}{10}$

۴) $\frac{3\pi}{10}$

Scanned by CamScanner