سوالات امتحان تئوری سوم نام : علی نام خانوادگی : ...	باشگاه دانش پژوهان جوان	المپیاد: فیزیک زمان پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه تاریخ آزمون: ۹۳/۵/۲۹ ۴ مساله در ۵ صفحه است.

تذکر:

۱- مشخصات خود به هیچ وجه روی برگه های پاسخنامه ننویسید.

۲- جهت پاسخ گویی از لاک غلط گیر یا مداد استفاده ننمایید.

۳- پاسخ هر سوال را با خط خوانا در برگه پاسخنامه مخصوص به خود بنویسید.

مساله ۱) سطحی افقی بی نهایت طویلی را در نظر بگیرید که با سرعت افقی ثابت u در جهت $\hat{x}$ در حال حرکت است. شتاب گرانش به سمت پایین، در جهت $-\hat{y}$، و مقدار آن g است. جسمی از ارتفاع h_0 بالای سطح، از حالت سکون رها می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی سطح با جسم را μ فرض کنید. زمان هر برخورد جسم با سطح را ناچیز فرض کنید با این فرض می‌توان از اثر نیروی وزن در زمان برخورد صرف نظر کرد. در هر برخورد، سرعت جسم در راستای عمود بر سطح تغییر جهت می‌دهد و اندازه‌ی آن در مقدار ثابت e ضرب می‌شود. سرعت عمودی جسم درست پس از برخورد n ام را با v_{y_n} و سرعت افقی جسم درست پس از برخورد n ام را با v_{x_n} نمایش می‌دهیم.

الف) v_{y_n} را به دست آورید. (۱ نمره)

فرض کنید به ازای برخوردهای با شماره ی n که $n < N$، جسم در تمام مدت زمان برخورد روی سطح می‌لغزد و به ازای برخوردهای با شماره‌ی $n > N$ روی سطح نمی‌لغزد. محاسبات بخش های «ب»، «پ» و «ت» را به ازای $n < N$ انجام دهید.

ب) v_{x_n} را بر حسب μ، g، h_0، e و n به دست آورید. (۴ نمره)

پ) Δx_n مسافت افقی طی شده توسط جسم را بین دو برخورد n ام و $n+1$ ام حساب کنید. (۱ نمره)

ت) کل مسافت افقی طی شده توسط جسم را تا لحظه‌ی برخورد n ام به دست آورید. (۱ نمره)

طرح از آقای اخترایچیان

ث) مقدار N را حساب کنید. (۱/۵ نمره)

ح) کل مسافت افقی طی شده توسط جسم را تا لحظه‌ی برخورد n ام به ازای $n > N$ به دست آورید. (۱/۵ نمره)

ادامه سوالات در صفحه بعد

مسئله) ۲

محفظه‌ای به حجم V در نظر بگیرید که با دریچه‌ای با مساحت کوچک A_c با محیطی با دمای ثابت T_c و فشار ثابت P_c و با دریچه‌ی دیگری با مساحت کوچک A_o با محیطی با دمای ثابت T_o و فشار ثابت P_o در ارتباط است. ذرات درون محفظه و دو محیط، ذراتی نقطه‌ای به جرم m هستند که با برهم کنشی با دیگر ذرات ندارن و سرعت های آن‌ها از توزیع ماکسول پیروی می‌کند. فشار و دمای محفظه را به ترتیب با P_R و T_R نمایش می‌دهیم.

الف) $\frac{dN_R}{dt}$، آهنگ زمانی تغییر تعداد ذرات درون محفظه را بیابید. (۱ نمره)

ب) متوسط انرژی جنبشی ذرات وارد شده به محفظه از دریچه‌ی به مساحت A_c را بیابید. (۱ نمره)

پ) $\frac{dE_R}{dt}$، آهنگ تغییر انرژی ذرات درون محفظه را محاسبه کنید. (۱ نمره)

پ) $\frac{dT_R}{dt}$، آهنگ تغییر دمای محفظه را بیابید. (۲ نمره)

ت) $\frac{dP_R}{dt}$، آهنگ تغییر فشار محفظه را محاسبه کنید. (۲ نمره)

ث) دما و فشار تعادلی محفظه را بر حسب A_c، T_c، P_c، A_o، T_o، P_o به دست آورید. (۲ نمره)

ج) مقدار عددی فشار و دمای تعادلی محفظه را به ازای مقادیر زیر به دست آورید. (۱ نمره)

$$P_o = 1\,atm\,,\quad T_o = 310\,K\,,\quad A_o = 0.2\,m^2,\quad P_c - P_o = 200\,Pa,$$
$$T_c = 280\,K,\quad A_c = 0.5\,m^2$$

طرح از آقای اختراجیان

ادامه سوالات در صفحه بعد

مسئله) ۳

ظرفی مجهز به یک پیستون شامل n مول گاز ایده‌آل در نظر بگیرید. پیستون را با سرعت ثابت u بیرون می‌کشیم. فرض کنید سرعت پیستون آنقدر کم است که گاز داخل ظرف همواره در حالت تعادل باقی می‌ماند و نیز با وجود متحرک بودن پیستون، تابع توزیع ذرات گاز همواره به صورت

$$P(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \quad \times 4\pi v^2$$

خواهد بود. جرم هر یک از ذرات گاز m است. اگر برخورد ذرات گاز به پیستون متحرک را کاملاً کشسان در نظر بگیریم

آ) فشار وارد بر پیستون متحرک از سوی گاز داخل ظرف را در وضعیتی که دمای گاز T و حجم ظرف V است تا مرتبه‌ی دوم $u/\bar{v}$ ($\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi m}$) محاسبه کنید. (۷ نمره)

ب) از آنجا که حرکت پیستون کند است تعادل ترمودینامیکی در نقاط مختلف ظرف همواره برقرار است. ظرفیت گرمایی مولی گاز در حجم ثابت را C_v در نظر بگیرید و رابطه‌ای بین دما و حجم در یک تحول بی‌دررو در این ظرف به دست آورید. (۳ نمره)

در صورت نیاز:

$$x^2 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} - \frac{1}{2\alpha}\frac{d}{dx}(x e^{-\alpha x^2})$$

$$\frac{d}{dx}\ln(ax^2+bx+c) = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x_0 - x_0^3/3 + \cdots) & x_0 \ll 1 \\ 1 - \frac{e^{-x_0^2}}{x_0\sqrt{\pi}}(1 - 1/2x_0^2 + \cdots) & x_0 \gg 1 \end{cases}$$

طرح از دکتر سعادت

ادامه سوالات در صفحه بعد

مسئله) ۴

برای پاسخ به این مساله به هیچ اطلاعات الکترومغناطیسی‌ای نیاز ندارید.

قانون کولن نیروی وارد بر باری ساکن، از سوی بار ساکن دیگری را مشخص می‌کند. می‌خواهیم نیروی الکتریکی وارد بر باری ساکن از سوی باری متحرک را به‌دست آوریم.

فرض کنید ذره‌ای با بار q (ذره‌ی اول) در مکان $\mathbf{r}$ ثابت است. ذره‌ای بار Q (ذره‌ی دوم) روی مسیری مشخص و از پیش تعیین‌شده‌ای حرکت می‌کند که آن را با $\mathbf{r}'(t)$ نشان می‌دهیم. ذره‌ی دوم برای تاثیر گذاشتن بر روی ذره‌ی اول، در فضا موج الکترومغناطیسی ایجاد می‌کند. این موج با سرعت نور(c) حرکت می‌کند. بنابر معادلات ماکسول، برای حساب کردن تاثیر ذره‌ی دوم بر اول در لحظه‌ی t باید ببینیم موج به وجود آمده از بار دوم در چه لحظه‌ای مثل t_r در لحظه‌ی t به بار اول می‌رسد. از آنجا که سرعت این موج ثابت است می‌توان برای این **زمان تاخیری**، t_r، معادله‌ای ساده نوشت:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t_r)| = c(t - t_r) \qquad t > t_r \qquad (۱)$$

این رابطه می‌گوید که اگر ذره‌ی دوم در زمان تاخیری t_r که در مکان $\mathbf{r}'(t_r)$ است یک موج با سرعت c بفرستد، در لحظه‌ی t به ذره‌ی اول می‌رسد که در مکان $\mathbf{r}$ است.

فرض کنید ذره‌ی دوم روی دایره‌ای به شعاع a و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. مرکز دایره را مبدا مختصات و صفحه‌ی دوران را xy می‌گیریم. در ابتدا ($t = ۰$) بار در $(a, ۰, ۰)$ است. می‌خواهیم نیروی وارد از طرف این بار بر باری که روی محور z است را حساب کنیم.

الف) (۱ نمره) مختصات بار اول را $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ بگیرید. با استفاده از معادله‌ی (۱) زمان تاخیری، t_r، را حساب کنید.

پاسخ قسمت الف) خود را $t.$ بنامید و از این پس برای ساده‌نویسی و عدم تکرار از آن استفاده کنید.

بردار سرعت ذره‌ی دوم را با $\mathbf{v}'(t)$ نشان می‌دهیم.

تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t_r) \qquad (۲)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰} \frac{Qqc}{Rc - \mathbf{R}.\mathbf{v}'(t_r)} \qquad (۳)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}'(t_r)}{c^۲} \Phi(\mathbf{r}, t) \qquad (۴)$$

که در آن ثابت $\varepsilon_۰$ همان ثابتی است که در قانون کولن وجود دارد.

ادامه سوالات در صفحه بعد

ادامه مسئله ۴)

ب) (۲.۵ نمره) $\Phi(0,0,z,t)$ و $\mathbf{A}(0,0,z,t)$ را برای آنچه در قسمت الف) به دست آوردید حساب کنید. پاسخ را تا حد امکان ساده کنید.

نیروی الکتریکی وارد بر ذره‌ی اول چنین به دست می‌آید:

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \tag{۵}$$

ج) (۱ نمره) با استفاده از قسمت ب) نیروی الکتریکی وارد بر ذره‌ی اول در راستای z را حساب کنید.

حال می‌خواهیم بار اول را در نزدیکی‌های محور z بگذاریم. فرض کنید $\sqrt{x^2+y^2} \ll z, a$ است. شما هم‌چنان می‌توانید برای سادگی از t. استفاده کنید.

د) (۱.۵ نمره) مختصات بار اول را $\mathbf{r} = (x,y,z)$ بگیرید. زمان تاخیری، t_r، را تا اولین رتبه‌ی ناصفر از x و y حساب کنید.

ه) (۶ نمره) $\Phi(x,y,z,t)$ و $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ را برای آنچه در قسمت د) به دست آوردید تا اولین رتبه‌ی ناصفر از x و y حساب کنید. پاسخ را تا حد امکان ساده کنید.

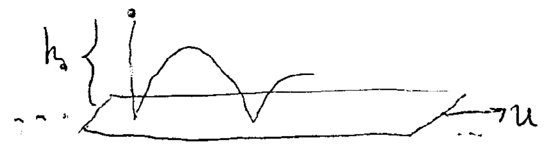
و) (۳ نمره) با استفاده از قسمت ه) مولفه‌های x و y نیروی وارد بر ذره (F_x و F_y) در مکان $(0,0,z)$ را حساب کنید. پاسخ را تا حد امکان ساده کنید.

طرح از ایمان مهیایه

« موفق باشید».

مسئله ① آزمون سوم :

الف) $v_0 = \sqrt{2gh_0} \Rightarrow v_{y_1} = e\sqrt{2gh_0}$



علت پایستگی انرژی و ثابت بودن سرعت افقی در طول پرواز بین دو برخورد متوالی

سرعت عمودی قبل برخورد $n+1$ ، منفی مقدار آن پس از برخورد n ام است

$$\Rightarrow v_{y_{n+1}} = e\, v_{y_n} \Rightarrow v_{y_n} = e^{n-1} v_{y_1} \Rightarrow \boxed{v_{y_n} = e^n \sqrt{2gh_0}}$$

ب) $v_{x_{n-1}} \leftarrow$ سرعت درست قبل برخورد n

$$\Delta P_x = m v_{x_n} - m v_{x_{n-1}} = \int_{\text{برخورد}} F_x dt = \mu \int N dt$$

$$\Delta P_y = m v_{y_n} - m(-v_{y_{n-1}}) = \int N dt \Rightarrow \frac{1}{m}\int N dt = v_{y_n} + v_{y_{n-1}} = e^{n-1}\sqrt{2gh_0}\,(1+e)$$

$$\Rightarrow v_{x_n} - v_{x_{n-1}} = \mu(1+e)\, e^{n-1}\sqrt{2gh_0}$$

$$\xrightarrow{v_{x_0}=0} v_{x_n} - v_{x_0} = \sum_{i=1}^{n} (v_{x_i} - v_{x_{i-1}}) = \mu(1+e)\sqrt{2gh_0} \sum_{i=1}^{n} e^{i-1} = \mu(1+e)\sqrt{2gh_0}\left(\frac{1-e^n}{1-e}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow v_{x_n} = \mu\sqrt{2gh_0} \times \left(\frac{1+e}{1-e}\right)(1-e^n)}$$

ج) $g T_n = v_{y_n} - (-v_{y_n}) = 2 v_{y_n} \Rightarrow T_n = \frac{2\sqrt{2gh_0}}{g} e^n$

زمان برخورد n و $n+1$

$$\Rightarrow \Delta x_n = v_{x_n} T_n = \boxed{4\mu h_0 \left(\frac{1+e}{1-e}\right) e^n (1-e^n)}$$

د) $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i = 4\mu h_0 \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} e^i - \sum_{i=1}^{n-1} (e^2)^n\right) =$

$$= 4\mu h_0 \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\left(\frac{1-e^n}{1-e} - 1 - \frac{1-e^{2n}}{1-e^2} + 1\right) = 4\mu h_0 \frac{1}{(1-e)^2}\left(1 - e^n + e - e^{n+1} - 1 + e^{2n}\right) =$$

$$= 4\mu h_0 \frac{e}{(1-e)^2}\left[1 - e^{n-1} - e^n(1 - e^{n-1})\right] = \boxed{4\mu h_0\, e \frac{(1-e^{n-1})(1-e^n)}{(1-e)^2}}$$

ث) $v_{x_{N-1}} < u < v_{x_N}$

$$\Rightarrow \mu\sqrt{2gh_0}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)(1-e^{N-1}) < u < \mu\sqrt{2gh_0}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)(1-e^{N})$$

$$\Rightarrow 1-e^{N-1} < \frac{u}{\mu\sqrt{2gh_0}}\left(\frac{1-e}{1+e}\right) < 1-e^{N} \Rightarrow e^{N} < 1-\frac{u}{\mu\sqrt{2gh_0}}\left(\frac{1-e}{1+e}\right) < e^{N-1}$$

$$\cancel{\Rightarrow N < \log_e\left\{1-\frac{u}{\mu\sqrt{2gh_0}}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)\right\} < \ldots}$$

$$\Rightarrow N\ln e < \ln\left\{1-\frac{u}{\mu\sqrt{2gh_0}}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)\right\} < N-1\ \ln e$$

$$\xRightarrow{\ln e<0} \boxed{N = 1+\left[\frac{\ln\left\{1-\frac{u}{\mu\sqrt{2gh_0}}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)\right\}}{\ln e}\right]}$$

(جزء صحیح)

ج) $x_N = 4\mu h_0 e\,\frac{(1-e^{N-1})(1-e^{N})}{(1-e)^2}$

$$n>N:\quad \Delta x_n = uT_n = \frac{2u\sqrt{2gh_0}}{g}e^{n}$$

$$\Rightarrow x_n = x_N + \sum_{i=N}^{n-1}\Delta x_i = x_N + \frac{2u\sqrt{2gh_0}}{g}\left(\sum_{i=1}^{n-1}e^{i} - \sum_{i=1}^{N-1}e^{i}\right) =$$

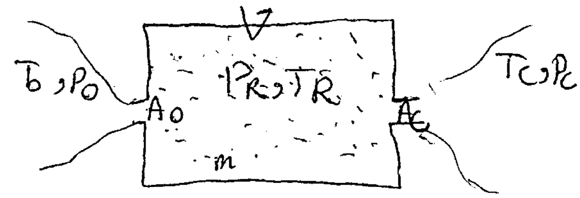
$$= x_N + \frac{2u\sqrt{2gh_0}}{g}\left(\frac{1-e^{n}}{1-e} - \frac{1-e^{N}}{1-e}\right)$$

$$\xRightarrow{n>N} \boxed{x_n = 4h_0\left\{\mu e\,\frac{(1-e^{N-1})(1-e^{N})}{(1-e)^2} + \sqrt{\frac{u^2}{2gh_0}}\left(\frac{e^{N}-e^{n}}{1-e}\right)\right\}}$$

مسئله ② آزمون سوم :

الف)

$$-dN^{v}_{R\to C} = \int_{r=0}^{vdt}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{N}{V}P(v)\,dv \times \frac{A_C\cos\theta}{4\pi}\times \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr \quad , \quad P(v)=4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT_R}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT_R}}$$



$$\Rightarrow \frac{dN_{R\to C}}{dt} = \frac{-A_C\sqrt{k}}{V\sqrt{2\pi m}} N_R\sqrt{T_R}$$

$$\frac{N_R}{V} = \frac{P_R}{kT_R} \Rightarrow \frac{dN_{R\to C}}{dt} = \frac{-A_C}{\sqrt{2\pi m}}\cdot\frac{P_R}{\sqrt{kT_R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dt} = \frac{A_C}{\sqrt{2\pi m}}\cdot\frac{P_C}{\sqrt{kT_C}} + \frac{A_0}{\sqrt{2\pi m}}\cdot\frac{P_0}{\sqrt{kT_0}} - \frac{(A_0+A_C)}{\sqrt{2\pi m}}\cdot\frac{P_R}{\sqrt{kT_R}}}$$

ب)

$$-dE_{R\to C} = \int_{v=0}^{\infty}\int_{r=0}^{vdt}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{N_R}{V}\cdot P(v)\,dv \times \frac{A_C\cos\theta}{4\pi}\times\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)\times \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{R\to C}}{dt} = \frac{-A_C k^{3/2}\sqrt{2}}{V\sqrt{\pi m}} N_R T_R^{3/2} = \frac{-\sqrt{2}A_C}{\sqrt{\pi m}} P_R\sqrt{kT_R}$$

$$\Rightarrow \bar{E}_{R\to C} = \frac{dE_{R\to C}}{dN_{R\to C}} = \boxed{2kT_R}$$

ج-۱)

$$\boxed{\frac{dE_R}{dt} = \frac{2A_C}{\sqrt{2\pi m}}P_C\sqrt{kT_C} + \frac{2A_0}{\sqrt{2\pi m}}P_0\sqrt{kT_0} - \frac{2(A_0+A_C)}{\sqrt{2\pi m}}P_R\sqrt{kT_R}}$$

ج-۲)

$$E_R = \frac{3}{2}N_R kT_R \Rightarrow \frac{dE_R}{dt} = \frac{3}{2}kT_R\frac{dN_R}{dt} + \frac{3}{2}N_R k\frac{dT_R}{dt} \quad , \quad N_R = \frac{P_R V}{kT_R}$$

$$\Rightarrow \frac{4A_C}{3\sqrt{2\pi m}}P_C\sqrt{kT_C} + \frac{4A_0}{3\sqrt{2\pi m}}P_0\sqrt{kT_0} - \frac{4(A_0+A_C)}{3\sqrt{2\pi m}}P_R\sqrt{kT_R}$$

$$= \frac{A_C}{\sqrt{2\pi m}}P_C\frac{kT_R}{\sqrt{kT_C}} + \frac{A_0}{\sqrt{2\pi m}}P_0\frac{kT_R}{\sqrt{kT_C}} - \frac{(A_0+A_C)}{\sqrt{2\pi m}}\sqrt{kT_R} + P_R V\frac{1}{T_R}\frac{dT_R}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT_R}{dt} = \frac{A_C}{\sqrt{2\pi m}}\cdot\frac{P_C}{\sqrt{kT_C}}\cdot\frac{T_R}{P_R V}\cdot\left(\frac{4}{3}kT_C - kT_R\right) + \frac{A_0}{\sqrt{2\pi m}}\cdot\frac{P_0}{\sqrt{kT_0}}\cdot\frac{T_R}{P_R V}\left(\frac{4}{3}kT_0 - kT_R\right) - \frac{(A_0+A_C)}{3\sqrt{2\pi m}}\cdot\frac{T_R\sqrt{kT_R}}{V}}$$

د)

$$E_R = \frac{3}{2}P_R V \Rightarrow \frac{dE_R}{dt} = \frac{3}{2}V\frac{dP_R}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP_R}{dt} = \frac{4A_C}{3V\sqrt{2\pi m}}P_C\sqrt{kT_C} + \frac{4A_0}{3V\sqrt{2\pi m}}P_0\sqrt{kT_0} - \frac{4(A_0+A_C)}{3V\sqrt{2\pi m}}P_R\sqrt{kT_R}}$$

ث) $\left(\frac{dT_R}{dt}=0 \quad , \frac{dP_R}{dt}=0\right)$ یا $\left(\frac{dN_R}{dt}=0 \quad , \frac{dE_R}{dt}=0\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A_C P_C}{\sqrt{T_C}} + \dfrac{A_O P_O}{\sqrt{T_O}} = \dfrac{(A_O + A_C) P_R}{\sqrt{T_R}} \\ A_C P_C \sqrt{T_C} + A_O P_O \sqrt{T_O} = (A_O + A_C) P_R \sqrt{T_R} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \boxed{T_R = \dfrac{A_C P_C \sqrt{T_C} + A_O P_O \sqrt{T_O}}{\dfrac{A_C P_C}{\sqrt{T_C}} + \dfrac{A_O P_O}{\sqrt{T_O}}}}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب}} \boxed{P_R = \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{A_C P_C}{\sqrt{T_C}} + \dfrac{A_O P_O}{\sqrt{T_O}}\right)\left(A_C P_C \sqrt{T_C} + A_O P_O \sqrt{T_O}\right)}}{(A_O + A_C)}}$$

ج) $T_O = 300\ K \quad , T_C = 280\ K \quad , A_O = 0.2\ m^2 \quad , A_C = 0.5\ m^2 \quad , P_O = 101.3\ KPa \quad , P_C = 101.5\ KPa$

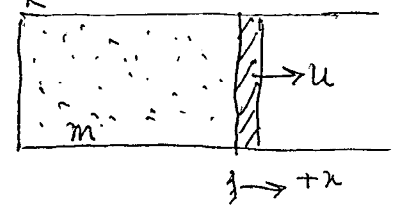
$\Rightarrow A_C P_C = 50.75\ N \quad , A_O P_O = 20.26\ N$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{T_R = 288\ K} \\ \boxed{P_R = 101.47\ kPa} \end{cases}$$

مسئله ۴ (3) آزمون سوم :

آ) $P(v_x)\,dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}\, e^{\frac{-mv_x^2}{2KT}}\, dv_x$

$N = \frac{R}{K} n$



$$P A\,dt = \int_{v_x = u}^{+\infty} A(v_x - u)\,dt \times \frac{nR}{KV} \times 2m(v_x - u) \times P(v_x)\,dv_x$$

$$\left(v = \sqrt{\frac{mv_x^2}{2KT}}\right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{2nmR}{KV}\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}} \int_u^{\infty} (v_x - u)^2 e^{\frac{-mv_x^2}{2KT}}\, dv_x = \frac{2nmR}{KV}\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}} \times \left(\frac{2KT}{m}\right)^{3/2} \times \int_{v=\sqrt{\frac{mu^2}{2KT}}}^{\infty} \left(v - \sqrt{\frac{mu^2}{2KT}}\right)^2 e^{-v^2}\, dv$$

$$\Rightarrow P = \frac{4nRT}{\sqrt{\pi}\, V} \int_{\sqrt{\frac{mu^2}{2KT}}}^{\infty} \left(v - \sqrt{\frac{mu^2}{2KT}}\right)^2 e^{-v^2}\, dv \qquad \epsilon := \sqrt{\frac{mu^2}{2KT}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{4nRT}{\sqrt{\pi} V} \int_{\epsilon}^{\infty} (v - \epsilon)^2 e^{-v^2}\, dv = \frac{4nRT}{\sqrt{\pi} V}\left[\int_0^{\infty} (v-\epsilon)^2 e^{-v^2}\, dv - \int_0^{\epsilon} (v - \epsilon)^2 e^{-v^2}\, dv\right]$$

(تا مرتبه دوم ϵ) $\int_0^{\epsilon} \underbrace{(v-\epsilon)^2}_{\text{مرتبه دوم}} e^{-v^2}\, dv \;=\!=\!=\; \int_0^{\epsilon} \underbrace{(v-\epsilon)^2}_{\text{مرتبه دو}} \underbrace{dv}_{\text{مرتبه ۱}} = 0$

$$\Rightarrow P^{(2)} = \frac{4nRT}{\sqrt{\pi}\, V}\left[\underbrace{\int_0^{\infty} v^2 e^{-v^2}\, dv}_{\sqrt{\pi}/4} - 2\epsilon \int_0^{\infty} v e^{-v^2}\, dv + \epsilon^2 \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-v^2}\, dv}_{\sqrt{\pi}/2}\right]$$

$$\Rightarrow P = \frac{nRT}{V}\left[1 + 2\epsilon^2 - \frac{4\epsilon}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-v^2}\, d(v^2)}_{1}\right] = \boxed{\frac{nRT}{V}\left[1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{mu^2}{2KT}} + \frac{mu^2}{KT}\right]}$$

ب) $U = \frac{3}{2} nRT \Rightarrow dU = \frac{3}{2} nR\, dT = -P\, dV$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} dT = -\frac{dV}{V}\left[T - \sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\sqrt{T} + \frac{mu^2}{K}\right]$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T - \sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\sqrt{T} + \frac{mu^2}{K}} = \frac{2\sqrt{T}\, d\sqrt{T}}{\sqrt{T}^2 - \left(\sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\right)\sqrt{T} + \left(\frac{mu^2}{K}\right)} = \frac{d\left[\sqrt{T}^2 - \left(\sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\right)\sqrt{T} + \left(\frac{mu^2}{K}\right)\right] + \sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\, d\sqrt{T}}{\left[\sqrt{T}^2 - \left(\sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\right)\sqrt{T} + \left(\frac{mu^2}{K}\right)\right]}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-2/3} = \ln\left(\frac{T - \sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\sqrt{T} + \frac{mu^2}{K}}{T_0 - \sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\sqrt{T_0} + \frac{mu^2}{K}}\right) + \sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{mu^2}{K}}\sqrt{1 - 2/\pi}} \times \left\{\tan^{-1} \frac{\sqrt{T} - \sqrt{\frac{2mu^2}{\pi K}}}{\sqrt{\frac{mu^2}{K}}\sqrt{1 - 2/\pi}} \Bigg|_{T_0}^{T}\right\}$$

$$\boxed{\Rightarrow \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-2/3} = \left(\frac{T - \sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\sqrt{T} + \frac{mu^2}{K}}{T_0 - \sqrt{\frac{8mu^2}{\pi K}}\sqrt{T_0} + \frac{mu^2}{K}}\right) \times \exp\left\{\sqrt{\frac{8}{\pi - 2}}\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{T} - \sqrt{\frac{2mu^2}{\pi K}}}{\sqrt{\frac{2mu^2}{\pi K}}\sqrt{\pi/2 - 1}} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{T_0} - \sqrt{\frac{2mu^2}{\pi K}}}{\sqrt{\frac{2mu^2}{\pi K}}\sqrt{\pi/2 - 1}}\right)\right\}}$$

مسئله 4 آزمون سوم :

الف) $\vec{r}'(t_r) = a\cos(\omega t_r)\hat{x} + a\sin(\omega t_r)\hat{y}$

$\vec{r} = z\hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{r}-\vec{r}'(t_r) = z\hat{z} - a\cos(\omega t_r)\hat{x} - a\sin(\omega t_r)\hat{y} \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'(t_r)| = \sqrt{z^2+a^2} = c(t-t_r)$$

$$\Rightarrow \boxed{t_r(t) = t - \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{c}}$$

ب) $\vec{v}'(t_r) = a\omega\left(-\sin\omega t_r\,\hat{x} + \cos\omega t_r\,\hat{y}\right)$

$$\Rightarrow \vec{R}\cdot\vec{V}'(t_r) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(0,0,z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{R} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{\sqrt{a^2+z^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(0,0,z,t) = \frac{Qq\,a\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2\sqrt{a^2+z^2}}\left(-\sin\omega t_0\,\hat{x} + \cos\omega t_0\,\hat{y}\right)}$$

ج) $$\left.\begin{cases} \nabla\Phi\cdot\hat{z} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qqz}{[a^2+z^2]^{3/2}} \\ \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\hat{z} = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow F_z = -\nabla\Phi = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqz}{[a^2+z^2]^{3/2}}}$$

د) $\vec{r} = (x,y,z) \Rightarrow \vec{r}-\vec{r}'(t_r) = \left(x - a\cos\omega t_r,\ y - a\sin\omega t_r,\ z\right) = \vec{R}$

$$\Rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2+a^2-2ax\cos\omega t_r - 2ay\sin\omega t_r} \overset{\text{دور میدان}}{=} \sqrt{a^2+z^2}\left(1 - \frac{ax\cos\omega t_r + ay\sin\omega t_r}{a^2+z^2}\right) = c(t-t_r)$$

$$t_r = t_0 + t_1 \Rightarrow -ct_1 = -\sqrt{a^2+z^2}\,\frac{ax\cos\omega t_0 + ay\sin\omega t_0}{a^2+z^2} \Rightarrow t_1 = \frac{x\cos\omega t_0 + y\sin\omega t_0}{c\sqrt{a^2+z^2}}\,a$$

$$\Rightarrow \boxed{t_r = t_0 + \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\cdot\frac{x\cos\omega t_0 + y\sin\omega t_0}{c}}$$

ه) $\vec{R}\cdot\vec{v}'(t_r) = -a\omega x\sin\omega t_0 + a\omega y\cos\omega t_0$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{\sqrt{a^2+z^2}}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{ax\cos\omega t_0 + ay\sin\omega t_0}{a^2+z^2} + \dfrac{a\omega x\sin\omega t_0 - a\omega y\cos\omega t_0}{c\sqrt{a^2+z^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(x,y,z,t) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\left(1 + \frac{ax\cos\omega t_0 + ay\sin\omega t_0}{a^2+z^2} + \frac{-a\omega x\sin\omega t_0 + a\omega y\cos\omega t_0}{c\sqrt{a^2+z^2}}\right)}$$

$$\vec{v}'(t_1) = -a\omega\sin(\omega t_0+\omega t_1)\hat{x} + a\omega\cos(\omega t_0+\omega t_1)\hat{y} = \left(-a\omega\sin\omega t_0\,\hat{x} + a\omega\cos\omega t_0\,\hat{y}\right) - a\omega^2 t_1\cos\omega t_0\,\hat{x} - a\omega^2 t_1\sin\omega t_0\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(x,y,z,t) = \frac{Qqa\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2\sqrt{a^2+z^2}}\Big\{\left(-\sin\omega t_0\,\hat{x}+\cos\omega t_0\,\hat{y}\right) - \frac{a\omega\cos\omega t_0}{\sqrt{a^2+z^2}}\left(\frac{x\cos\omega t_0+y\sin\omega t_0}{c}\right)\hat{x} - \frac{a\omega\sin\omega t_0}{\sqrt{a^2+z^2}}\left(\frac{x\cos\omega t_0+y\sin\omega t_0}{c}\right)\hat{y}$$

$$+\frac{ax\cos\omega t_0+ay\sin\omega t_0}{a^2+z^2}\left(-\sin\omega t_0\,\hat{x}+\cos\omega t_0\,\hat{y}\right) + \frac{-a\omega x\sin\omega t_0+a\omega y\cos\omega t_0}{c\sqrt{a^2+z^2}}\left(-\sin\omega t_0\,\hat{x}+\cos\omega t_0\,\hat{y}\right)\Big\}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{Qqa\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2\sqrt{a^2+z^2}}\boxed{\begin{pmatrix} -\sin\omega t_0 - \frac{a\omega x}{c\sqrt{a^2+z^2}}\cos(2\omega t_0) - \frac{a\omega y}{c\sqrt{a^2+z^2}}\sin(2\omega t_0) - \frac{ax}{2(a^2+z^2)}\sin(2\omega t_0) - \frac{ay}{2(a^2+z^2)}(1-\cos 2\omega t_0) \\ \cos\omega t_0 - \frac{a\omega x}{c\sqrt{a^2+z^2}}\sin(2\omega t_0) - \frac{a\omega y}{c\sqrt{a^2+z^2}}\cos(2\omega t_0) + \frac{ay}{2(a^2+z^2)}\sin(2\omega t_0) + \frac{ax}{2(a^2+z^2)}(1+\cos 2\omega t_0) \end{pmatrix}}$$

9)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\left(\dfrac{a\cos\omega t_0}{a^2+z^2} - \dfrac{a\omega\sin\omega t_0}{c\sqrt{a^2+z^2}}\right) = \dfrac{Qqa}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)}\left(\dfrac{\cos\omega t_0}{\sqrt{a^2+z^2}} - \dfrac{\omega}{c}\sin\omega t_0\right) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\left(\dfrac{a\sin\omega t_0}{a^2+z^2} + \dfrac{a\omega\cos\omega t_0}{c\sqrt{a^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{x,y=0} = \frac{Qqa\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2\sqrt{a^2+z^2}}\begin{pmatrix} -\cos\omega t_0 \\ -\sin\omega t_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \boxed{\frac{Qqa}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\begin{pmatrix} \frac{\omega\sin\omega t_0}{c\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{\cos\omega t_0}{a^2+z^2} + \frac{\omega^2\cos\omega t_0}{c^2} \\ -\frac{\omega\cos\omega t_0}{c\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{\sin\omega t_0}{a^2+z^2} + \frac{\omega^2\sin\omega t_0}{c^2} \end{pmatrix}}$$