فصل اول
اصول اساسی شمارش

سید ناصر رضوی
e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir
۱۳۸۵

معرفی

- کتاب
  - عنوان :ریاضیات گسسته و ترکیباتی (ویرایش چهارم)
  - نویسنده: رالف پی. گریمالدی
- سرفصل مطالب
  - اصول اساسی شمارش(۱)
  - مبانی منطق(۲)
  - نظریه مجموعه ها(۳)
  - روابط و توابع: برخورد اول(۵)
  - روابط و توابع: برخورد دوم(۷)
  - نظریه گراف و درخت ها(۱۱ و ۱۲و ۱۳)
  - توابع مولد و روابط بازگشتی(۹ و۱۰)

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۱ قوانین جمع و ضرب
- مسأله ⟵ تجزیه ⟵ ترکیب

قانون جمع :
- هرگاه اولین کار به m طریق و
- دومین کار به n طریق قابل انجام بوده و
- هر دو کار همزمان قابل انجام نباشند،
- آنگاه انجام هر یک از آنها به $m+n$ طریق میسر می باشد.

مثال ۱-۱.

۴۰ کتاب جامعه شناسی

۵۰ کتاب علوم انسانی

برای انتخاب یک کتاب: ۴۰+۵۰ انتخاب

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۱ قوانین ضرب و جمع

حالت کلی قانون جمع

اشیاء	۱	۲	۳	...	k
روشهای انتخاب	m_1	m_2	m_3	...	m_k
انتخاب یک شیء:	$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k$				

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

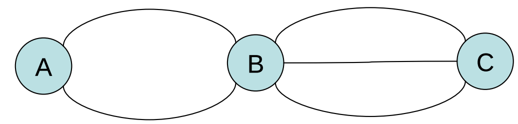
۱-۱ قوانین جمع و ضرب

قانون ضرب : (اصل انتخاب): هرگاه کاری را بتوان به دو مرحله چنان تقسیم نمود که:

– اولین مرحله به m طریق و
– دومین مرحله به n طریق قابل انجام بوده،
– آنگاه انجام کل کار به mn طریق میسر می باشد.

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

• مثال: به چند طریق می توان از شهر A به شهر C رفت؟



$$2 * 3$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۱ قوانین جمع و ضرب

مثال ۱-۶. پلاک اتومبیل: ۲ حرف انگلیسی، چهار رقم

(الف) تکرار حروف و ارقام مجاز نمی باشد

$$26 * 25 * 10 * 9 * 8 * 7 = 3,276,000$$

(ب) تکرار حروف و ارقام مجاز می باشد

$$26 * 26 * 10 * 10 * 10 * 10 = 6,760,000$$

(ج) مانند (ب) فقط حروف صدادار(A,E,I,O,U) و ارقام زوج مجاز می باشند

$$5^2 * 5^4$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۱ قوانین جمع و ضرب

مثال. تعداد متغیرهای زبان بیسیک: یک حرف یا یک حرف و یک رقم

$$26 + 26 * 10$$

قانون جمع

قانون ضرب

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

مثال ۱-۸: به چند طریق از بین شش نوع کلوچه، هشت نوع ساندویچ و پنج نوع نوشیدنی (قهوه، چای، شیرکاکائو، کوکاکولا و آب پرتغال)می توان یک کلوچه و یک نوشیدنی داغ یا یک ساندویچ و یک نوشیدنی سرد انتخاب نمود؟

یک کلوچه و یک نوشیدنی داغ $6 * 2 = 12$

یک ساندویچ و یک نوشیدنی سرد $8 * 3 = 24$

$12 + 24 = 36$

ترکیب اصل جمع و ضرب

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۲ جایگشت ها (permutation)

مثال ۱-۹: به چند طریق می توان از میان ۱۰ دانشجو، ۵ دانشجو را انتخاب و برای گرفتن عکس در یک ردیف قرار داد؟

۱۰ * ۹ * ۸ * ۷ * ۶

موضع اول، موضع دوم، موضع سوم، موضع چهارم، موضع پنجم

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

تعریف۱-۱: به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، n فاکتوریل $(n!)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$0! = 1,$

$n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1), \text{ for } n \geq 1.$

سرعت رشد $n!$:

- $10! = 3{,}628{,}800$ (تعداد ثانیه ها در شش هفته)
- $11!$ (تعداد ثانیه ها در یک سال)
- $12!$ (تعداد ثانیه ها در ۱۲ سال)
- $13!$ (بیش از تعداد ثانیه ها در یک قرن)

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۲ جایگشت ها

تعریف ۱-۲: یک گردایه مرکب از n شیء متمایز در دسترس است. هر آرایش خطی از این اشیاء را یک **جایگشت** از این گردایه می نامیم.

مثلا سه حرف a و b و c را به شش طریق می توان جایگشت داد

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

به طور کلی: تعداد جایگشتهای r شیء از n شیء متمایز برابر است با:

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}=P(n,r)$$

و اگر تکرار مجاز باشد، برابر است با n^r

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۲ جایگشت ها

مثال ۱-۱۰ : جایگشت های computer برابر !8

جایگشت های computer با اندازه 5

P(8, 5)= 8!/3! = 6,720

مثال ۱-۱۱ : جایگشت های BALL

4!/2! = 12

مثال ۱-۱۲ : جایگشت های PEPPER

6!/(2!3!)= 60

مثال ۱-۱۳ : جایگشت های MASSASAUGA

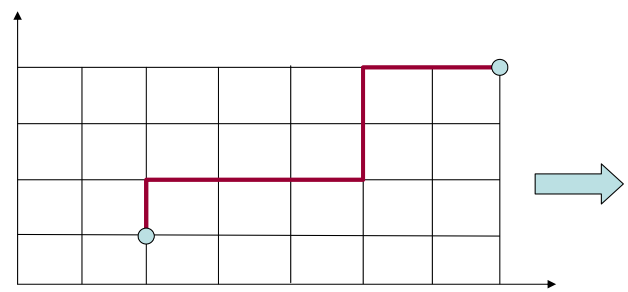
10!/(3!4!)= 25,200

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۲ جایگشت ها

مثال ۱-۱۴ : تعداد مسیرهای مانهاتانی (در هر حرکت تنها می توانیم به سمت راست R و یا به سمت بالا U برویم) از (2, 1) به (7, 4) برابر است با تعداد جایگشت های RRRRRUUU

8! / (5!3!) = 56



URRRUURR

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

برهان ترکیباتی

مثال ۱-۱۵: هرگاه n و k اعداد صحیح و مثبتی باشند و $n = 2k$ ، ثابت کنید $n! / 2^k$ یک عدد صحیح می باشد.

اثبات. نمادهای زیر را در نظر بگیرید:

$x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_k, x_k$

تعداد جایگشت های این n نماد، عددی صحیح و برابر است با:

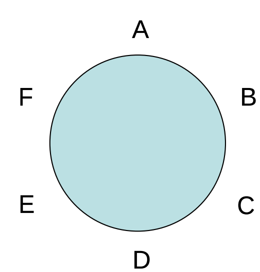
عدد صحیح می باشد $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{n!}{\underbrace{2!2!\ldots2!}_{k}}} = \dfrac{n!}{2^k}$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

جایگشت چرخشی

مثال ۱ -۱۶: تعداد جایگشت های چرخشی شش نفر دور یک میز گرد (جایگشتهایی که از دوران یکدیگر حاصل می شوند، یکسان محسوب می شوند)

ABCDEF= BCDEFA=CDEFAB=DEFABC= EFABCD=FABCDE



6!/6 = 5! = 120

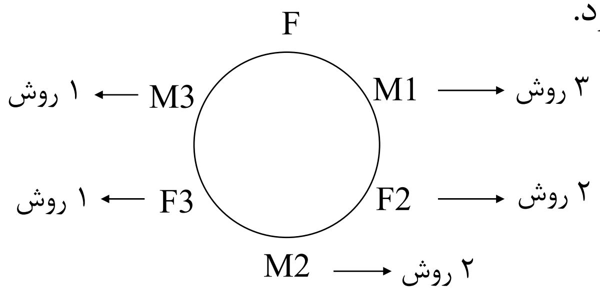
در حالت کلی:

$n! / n = (n - 1)!$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

جایگشت چرخشی

مثال ۱-۱۷: سه زوج دور یک میز گرد به صورت یک در میان زن و مرد.



تعداد کل روشهای ممکن = 3 * 2 * 2 * 1 * 1

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

تمرین های ۱-۱و ۱-۲

- ۱۰
- ۱۱
- ۱۹
- ۲۴
- ۲۶
- ۲۷
- ۲۸
- ۲۹
- ۳۳
- ۳۷

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دوجمله ای

انتخاب سه کارت از یک دسته کارت ۵۲ تایی بدون جایگذاری:

الف-ترتیب انتخاب ها مهم است

$P(52, 3) = 52 * 51 * 50$

ب- ترتیب انتخاب ها مهم نیست

$P(52, 3) / 3! = C(52, 3)$

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \le r \le n$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

در هر مسأله شمارش اهمیت **ترتیب** باید مشخص باشد. هرگاه ترتیب مهم باشد به جایگشت ها و آرایش ها و قانون ضرب فکر می کنیم، و وقتی ترتیب مهم نیست، ترکیبات می توانند در حل مسأله نقش کلیدی داشته باشند.

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۱۹:

الف- هفت سوال از ده سوال

$C(10, 7) = 10! / (7!3!) = 120$

ب- سه سوال از پنج سوال اول و چهار سوال از پنج سوال آخر

$C(5, 3) * C(5, 4) = 10 * 5 = 50$

ج- حداقل سه سوال از پنج سوال اول

$C(5, 3)C(5, 4) + C(5, 4)C(5, 3) + C(5, 5)C(5, 2) = 50 + 50 + 10 = 110$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۲۱: از یک کلاس ۳۶ نفری ۴ تیم ۹ نفری

روش اول: ترکیب

$C(36, 9)*C(27, 9)*C(18, 9)*C(9, 9)$

روش دوم: جایگشت

S1, S2, S3, …, S35, S36

برای انتخاب چهار تیم A و B و C و D باید نه A و نه B و نه C و نه D را در ۳۶ محل توزیع کنیم

$36!/(9!9!9!9!)$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۲۲: TALLAHASSEE

الف-تعداد جایگشت ها

$11!/(3!2!2!2!1!1!)=831,600$

ب- چند تا از این جایگشت ها بدون A های مجاور می باشند؟

تعداد جایگشت های بدون A

$8!/(2!2!2!1!1!)=5040$

حال هر یک از سه A را می توان در هر یک از ۹ مکان زیر قرارداد

E E S T L L S H

$C(9, 3)= 84$

در نتیجه تعداد جایگشت ها بدون A های مجاور برابر است با:

$5040 * 84 = 423,360$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نماد سیگما (Σ)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

مثال:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{i=1}^{n} i^3 = ?$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نماد سیگما (Σ)

$$c\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i \text{ (constant can move out)}$$

$$\text{But, not } i\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} ia_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نماد سیگما (Σ)

$$\sum_{i=1}^{n}(2n-1)(n+2) = n(2n-1)(n+2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(i+2) = \sum_{i=1}^{n}(2i^2+3i-2) =$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i - 2\sum_{i=1}^{n} 1$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نماد سیگما (Σ)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n} b_j(a_1 + a_2 + \cdots + a_j) =$$

$$a_1b_1 + (a_1+a_2)b_2 + \cdots + b_n\sum_{i=1}^{n} a_i$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نماد پی(Π)

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} ca_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \neq \prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۲۳:

الفبا: مجموعه محدود از عناصر ساده و غیر قابل تجزیه $\{0, 1, 2\}$

رشته: هر دنباله متناهی از عناصر الفبا مانند ۱۰۲، ۲۲۰۱، ۱۰۱۲۰،...

زبان: مجموعه ای از رشته ها مانند $\{00,101,0012,12101\}$

تعداد رشته های به طول k روی الفبای n عنصری: n^k

اگر $x=x_1x_2x_3\dots x_n$ آنگاه وزن رشته x را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$wt(x)= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

مثلا $wt(1200)=1+2+0+0=3$ و $wt(22)=2+2=4$

حال می خواهیم در بین ۳^۱۰ رشته به طول ۱۰ تعداد رشته ها با وزن زوج را محاسبه کنیم

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ادامه مثال ۱-۲۳

پاسخ: تعداد یک ها باید زوج باشد $(i=0,2,4,6,8,10)$ بنابراین شش حالت مختلف داریم:

در هر یک از این شش حالت به تعداد i یک داریم و به تعداد $10-i$ صفر و دو داریم

تعداد رشته ها به طول ۱۰ با i عدد یک :

$$\binom{10}{i}2^{10-i}, i = 0,2,4,6,8,10$$

تعداد کل رشته ها با وزن زوج:

$$\sum_{n=0}^{5}\binom{10}{2n}2^{10-2n}$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

شمارش بیش از حد (over counting)

مثال ۱-۲۴: انتخاب ۵ کارت از ۵۲ کارت با حداقل یک گشنیز

استدلال ۱) انتخاب ۵ کارت بدون گشنیز:

C(39, 5)

انتخاب ۵ کارت با حداقل یک گشنیز:

C(52, 5) - C(39, 5) = 2,023,203

استدلال ۲) کارت اول از بین گشنیزها و ۴ کارت دیگر را از بین ۵۱ کارت باقیمانده:

C(13, 1) * C(51, 4) = 3,248,700

چه چیزی غلط است؟

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

شمارش بیش از حد (over counting)

در استدلال ۲ موارد یکسان زیر، متمایز در نظر گرفته شده اند:

3♣	J♠	7♥	K♣	5♣
5♣	J♠	7♥	K♣	3♣
K♣	J♠	7♥	3♣	5♣

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

شمارش بیش از حد (over counting)

استدلال ۲ :محاسبه صحیح به صورت زیر می باشد

$$\sum_{i=1}^{5}\binom{13}{i}\binom{39}{5-i} = 2{,}023{,}203$$

i = تعداد گشنیزهای انتخاب شده و

$5\text{-}i$ = تعداد کارت های غیر گشنیز

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

قضیه ۱-۱: **قضیه دو جمله ای**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۲۵:

محاسبه ضریب x^5y^2 در بسط $(x+y)^7$

$C(7, 5) = C(7, 2) = 21$

محاسبه ضریب a^5b^2 در بسط $(2a - 3b)^7$

$C(7, 5) * (2)^5 * (-3)^2 = 6048$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

نتیجه ۱-۱ از قضیه دو جمله ای:

الف- $(x = y = 1)$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ب- $(x = -1, y = 1)$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 2^n$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

قضیه ۱-۲: قضیه چند جمله ای

به ازای اعداد صحیح و مثبت n و t ، ضریب $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \cdots x_t^{n_t}$ در بسط $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ برابر است با

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}, n_1+n_2+\ldots+n_t=n$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۳ ترکیبات: قضیه دو جمله ای

مثال ۱-۲۶:

ضریب $a^2b^3c^2d^5$ را در بسط $(a+2b-3c+2d+5)^{16}$:

$$\frac{16!}{2!3!2!5!4!}(1)^2(2)^3(-3)^2(2)^5(5)^4$$

تمرینات ۱-۳: تمرین ۴، ۱۰، ۱۱، ۲۲، ۱۳، ۲۹و ۳۴ حل شوند

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۴ ترکیبات با تکرار:توزیع

مثال ۱-۲۷: هفت دانشجو – هرکدام یک چیزبرگر، ساندویچ سوسیس، ساندویچ کالباس، یا ساندویچ ماهی می خرند.به چند طریق این خرید می تواند صورت گرفته باشد؟

first	*second*	*third*	*fourth*
xxx	xxxx		
xx	x	x	xxx
	xxxx	xxx	

$$\frac{10!}{7!3!} = \binom{4+7-1}{7}$$

برای x برای |

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۴ ترکیبات با تکرار:توزیع

به طور کلی وقتی بخواهیم r شیء را از n شیء متمایز با تکرار انتخاب کنیم، تعداد انتخاب ها برابر است با:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۴ ترکیبات با تکرار: توزیع

مثال ۱-۲۹: توزیع ۱۰۰۰تومان میان ۴ نفر (در واحد ۱۰۰)

الف- بدون محدودیت $\binom{4+10-1}{10}$

ب- هر شخص لا اقل ۱۰۰ تومان $\binom{4+6-1}{6}$

ج- هر شخص لااقل ۱۰۰ تومان و علی حداقل ۵۰۰ تومان

$$\binom{4+2-1}{2}=\binom{3+2-1}{2}+\binom{3+1-1}{1}+\binom{3+0-1}{0}$$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۴ ترکیبات با تکرار:توزیع

مثال ۱-۳۱: یک پیغام=۱۲ کاراکتر متفاوت + ۴۵ فضای خالی

و بین هر دو کاراکتر متوالی حداقل سه فضای خالی موجود است

$$(12!)\binom{11+12-1}{12}$$

تعداد جایگشتهای ۱۲ کاراکتر مختلف

تعداد مکانهای بین ۱۲ کاراکتر

تعداد فضاهای خالی باقیمانده

45- 11 * 3=12

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۴ ترکیبات با تکرار:توزیع

مثال ۱-۳۲: تعیین تمام جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

به طوریکه تمام جوابها غیر منفی باشند $x_i \geq 0$

تعبیر: توزیع ۷ عدد سکه میان ۴ کودک

پاسخ:

C(4+7-1, 7)=120

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۱-۴ ترکیبات با تکرار:توزیع

نکته: تمام موارد زیر هم ارز می باشند:

الف- تعداد جواب های صحیح معادله زیر

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r,\ x_i\geq 0,\ 1\leq i\leq n$$

ب- تعداد انتخاب های r شیء از n شیء متمایز با تکرار

ج- تعداد روشهایی که می توان r شیء یکسان را در n مکان متمایز توزیع نمود

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار:توزیع

مثال ۱-۳۴: تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی نامعادله زیر

$$x_1+x_2+\cdots+x_6<10?$$

که برابر با معادله زیر می باشد

$$x_1+x_2+\cdots+x_6+x_7=10,\ 0\le x_i,\ 1\le i\le 6,\ 0<x_7$$

تعبیر:می خواهیم ۱۰ سکه را میان ۷ نفر تقسیم کنیم به طوریکه نفر هفتم حداقل یک سکه داشته باشد

=

می خواهیم ۹ سکه را میان ۷ نفر تقسیم کنیم

C(7+9-1, 9) = 5005

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار:توزیع

مثال ۱-۳۶: تعداد طرقی که می توان عدد n را به صورت مجموعی از اعداد صحیح مثبت نوشت که در آن ترتیب عملوندهای جمع مهم باشد (تعداد ترکیبات عدد n).

4 = 3+1 = 1+3 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1

برای عدد ۴ ، هشت ترکیب وجود دارد

اگر ترتیب مهم نباشد فقط ۵ ترکیب وجود دارد

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار:توزیع – تعداد ترکیبات عدد ۷

$w_1+w_2=7, w_i>0$

$x_1+x_2=5, x_i\ge 0$ $\qquad \binom{2+5-1}{5} \longleftarrow$ جمع ۲ عدد

$x_1+x_2+x_3=4$ $\qquad \binom{3+4-1}{4} \longleftarrow$ جمع ۳ عدد

$x_1+x_2+x_3+x_4=3$ $\qquad \binom{4+3-1}{3} \longleftarrow$ جمع ۴ عدد

$\vdots$

پاسخ: $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}=2^6$

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

۴-۱ ترکیبات با تکرار:توزیع

مثال ۱-۳۷: در قطعه برنامه زیر چند بار فرمان writeln اجرا می شود؟

```
for i:=1 to 20 do
   for j:=1 to i do
      for k:=1 to j do
         writeln (i * j + k);
```

$1\le k\le j\le i\le 20$ تعبیر : انتخاب ۳ عدد از ۲۰ عدد با تکرار

C(20+3-1, 3) = C(22, 3) = 1540

تمرینات ۱-۴: تمرین ۲و ۳و ۴و ۷و ۱۲و ۱۳و ۱۹و ۲۰و ۲۲ حل شوند

فصل ۱: اصول اساسی شمارش

Summary select or order ***r*** objects from ***n*** distinct objects

order is relevant	repetitions are allowed	type of result	formula
YES	NO	permutation	$P(n,r) = n!/(n-r)!$, $0 \le r \le n$
YES	YES	arrangement	$n^r, n, r \ge 0$
NO	NO	combination	$C(n,r) = n!/[r!(n-r)!]$ $0 \le r \le n$
NO	YES	combination with repetition	$\binom{n+r-1}{r}$

www.txt.ir

www.txt.ir

فصل دوم
مبانی منطق

سید ناصر رضوی
e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir
۱۳۸۵

فصل۲. منطق

۲-۱ رابط های اولیه و جداول درستی

منطق: به مجموعه قواعدی که بتوان به کمک آنها اعتبار یک استدلال را تعیین نمود منطق می گوییم.

گزاره: جمله ای خبری که یا **درست** و یا **نادرست** باشد- نه هر دو.

مثال:

مارگارت میچل کتاب برباد رفته را نوشته است.

۲ + ۳ = ۵

جملات زیر گزاره نمی باشند:

چه هوای خوبی! (جمله ندایی)

بلند شو تمرین هایت را انجام بده. (جمله امری)

www.txt.ir

فصل۲. منطق

۲-۱ رابط های اولیه و جداول درستی

گزاره ساده: گزاره ایست که قابل تجزیه به گزاره های ساده تر نبوده و مستقلا دارای ارزش درست یا نادرست باشد.

گزاره مرکب: از ترکیب گزاره های ساده بوسیله **رابط های منطقی** و یا **نقیض** بدست می آید.

رابط های منطقی:

ترکیب عطفی(AND): $p \wedge q$

ترکیب فصلی (OR): $p \vee q$

یای انحصاری (exclusive or): $p \oplus q$

ترکیب شرطی: $p \rightarrow q$ (اگر p آنگاه q)

ترکیب دو شرطی: $p \leftrightarrow q$ (p اگر و فقط اگر q) یا (p iff q)

www.txt.ir

فصل۲. منطق

۲-۱ رابط های اولیه و جداول درستی

"عدد x یک عدد صحیح است" گزاره نمی باشد، زیرا **ارزش درستی** آن را تا زمانیکه به x مقداری نسبت داده نشود، نمی توان تعیین نمود.

منطق مرتبه اول (First Order Logic) و منطق گزاره ای

فصل۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی

جداول درستی

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

فصل۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی

مثال ۱-۲.

s: هومن به پیاده روی می رود.

t: ماه می درخشد.

u: هوا برفیست.

$$(t \wedge \neg u) \to s$$

هرگاه ماه بدرخشد و هوا برفی نباشد، آنگاه هومن به پیاده روی می رود.

$$t \to (\neg u \to s)$$

هرگاه ماه بدرخشد، آنگاه اگر هوا برفی نباشد، هومن به پیاده روی می رود.

فصل۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی

گزاره همیشه درست (راستگو، تاتولوژی): یک گزاره مرکب که به ازاء تمام ترکیبات ارزشی گزاره های ساده تشکیل دهنده آن همواره ارزش آن برابر درست باشد.

$$p \to (p \vee q)$$

گزاره همیشه نادرست (تناقض): یک گزاره مرکب که به ازاء تمام ترکیبات ارزشی گزاره های ساده تشکیل دهنده آن همواره ارزش آن برابر نادرست باشد.

$$p \wedge (\neg p \wedge q)$$

فصل۲. منطق

۱-۲ رابط های اولیه و جداول درستی

استدلال معتبر:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

مفروضات نتیجه

هرگاه یکی از مفروضات نادرست باشد، آنگاه مستقل از ارزش q، استلزام فوق درست می باشد.در نتیجه هرگاه با مفروضاتی که همگی دارای ارزش درست باشند شروع کنیم و دریابیم که تحت این شرایط q نیز دارای ارزش درست می باشد، آنگاه استلزام

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

یک تاتولوژی می باشد و ما یک **استدلال معتبر** داریم.

فصل۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۷:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$s_1 \Leftrightarrow s_2$

تعریف ۲-۲: **هم ارزی منطقی**

فصل۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

$$(p \to q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$$
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$
$$(p \oplus q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$$
$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

نتیجه: - رابط استلزام را می توان بر حسب نقیض و ترکیب فصلی نوشت.

- ترکیب دو شرطی را نیز می توان برحسب نقیض، ترکیب فصلی و ترکیب عطفی نوشت.
- بنابراین همواره می توانیم رابط های $\to$ و $\leftrightarrow$ را از گزاره های مرکب حذف کنیم .

بنابراین AND یا OR و NOT باهم یک مجموعه تابعی کامل را می سازند.

فصل۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۸: قوانین دمورگان

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

p و q می توانند هر گزاره مرکبی باشند.

فصل۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

۱. حذف نقیض مضاعف

$$(1) \neg\neg p \Leftrightarrow p$$

۲. قوانین دمورگان

$$(2) \neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

۳. قوانین جا بجایی

$$(3) p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$
$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

٤. قوانین شرکت پذیری

$$(4) p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$
$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

۵. قوانین توزیع پذیری $(5)\, p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

۶. قوانین خودتوانی $(6)\, p\vee p\Leftrightarrow p,\ p\wedge p\Leftrightarrow p$

۷. قوانین همانی $(7)\, p\vee F_0\Leftrightarrow p,\ p\wedge T_0\Leftrightarrow p$

۸. قوانین معکوس $(8)\, p\vee\neg p\Leftrightarrow T_0,\ p\wedge\neg p\Leftrightarrow F_0$

۹. قوانین تسلط $(9)\, p\vee T_0\Leftrightarrow T_0,\ p\wedge F_0\Leftrightarrow F_0$

۱۰. قوانین جذب $(10)\, p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p,\ p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

تعریف ۲-۳. اگر s گزاره ای باشد که شامل هیچ رابط منطقی غیر از ترکیب عطفی و فصلی نباشد، آنگاه **دوگان** s که با s^d نشان داده می شود گزاره ایست که از s و با جایگزینی AND و OR به جای یکدیگر و نیز T و F به جای یکدیگر حاصل می شود.

مثال: $s:(p\wedge\neg q)\vee(r\wedge T_0),\ s^d:(p\vee\neg q)\wedge(r\vee F_0)$

دوگان $p\rightarrow q$ برابر است با: $(\neg p\vee q)^d\Leftrightarrow\neg p\wedge q$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

قضیه ۲-۱ (اصل دوگانی). فرض می کنیم که گزاره های s و t شامل رابط های منطقی غیر از $\wedge$ و $\vee$ نباشند.در این صورت هرگاه $s\Leftrightarrow t$ آنگاه $s^d\Leftrightarrow t^d$.

قانون اول جایگزینی (جایگزینی هر رخداد p با گزاره دیگری مانند q)

مثال ۲-۱۰. $P:\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$ یک تاتولوژی است، حال اگر تمام p ها را درآن با $r\wedge s$ جایگزین کنیم، گزاره حاصل بازهم یک تاتولوژی می باشد.

$$P_1:\neg[(r\wedge s)\vee q]\leftrightarrow[\neg(r\wedge s)\wedge\neg q]$$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

قانون دوم جایگزینی

مثال ۲-۱۱.

$P:(p\rightarrow q)\rightarrow r$

$P_1:(\neg p\vee q)\rightarrow r$

چون $(p\rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)$ بنابراین $P\Leftrightarrow P_1$

مثال ۲-۱۲. گزاره مرکب $(p\vee q)\rightarrow r$ را نقیض و سپس ساده کنید.

$$\neg[(p\vee q)\rightarrow r]\Leftrightarrow\neg[\neg(p\vee q)\vee r]\Leftrightarrow$$
$$\neg[(\neg p\wedge\neg q)\vee r]\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q)\wedge\neg r\Leftrightarrow$$
$$(p\vee q)\wedge\neg r$$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۱۳. نقیض گزاره زیر را بدست آورید:

" اگر هاله به کنار دریا برود، آنگاه الهام پول خریدهای او را می پردازد"

جواب:

چون $\neg(p \to q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

بنابراین نقیض جمله بالا به شکل زیر است:

"هاله به کنار دریا می رود ولی الهام پول خریدهای او را نمی پردازد"

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

مثال ۲-۱۵.

عکس نقیض

معکوس

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

عکس

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

کارآیی دو قطعه برنامه زیر را مقایسه کنید.

```
x:=4;
for i:=1 to 10 do
  begin
    x:=x-1;
    y:=x+3*i;
    if ((x>0) and (y>0)) then
      writeln('The value of the sum x+y is', x+y)
  end;
```

تعداد مقایسه ها:

– سمت چپ ۲۰ بار

– سمت راست ۱۳= ۳+ ۱۰ بار

```
.
.
.
if x>0 then
  if y>0 then
    …
```

$$(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$$

فصل ۲. منطق

۲-۲ هم ارزی منطقی: قوانین منطق

ساده سازی گزاره های مرکب

مثال ۲-۱۶.

$(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$ دمورگان

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ نقیض مضاعف

$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q)$ توزیع پذیری

$\Leftrightarrow p \vee F_0 \Leftrightarrow p$ همانی

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

استدلال زیر

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

یک استدلال معتبر است اگر و فقط اگر استلزام زیر

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

یک گزاره همیشه درست (تاتولوژی) باشد.

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۱۹.

p: هومن درس می خواند. q: هومن تنیس بازی می کند.

r: هومن در درس ریاضی گسسته قبول می شود.

مفروضات:

p_1: اگر هومن درس بخواند، آنگاه در درس ریاضی گسسته قبول می شود.

p_2: اگر هومن تنیس بازی نکند، آنگاه درس می خواند.

p_3: هومن در درس ریاضی گسسته قبول نمی شود.

حال می خواهیم تعیین کنیم آیا استدلال $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$ معتبر است یا خیر.

$$p_1 : p \to r,\ p_2 : \neg q \to p,\ p_3 : \neg r$$

$$\therefore (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q \Leftrightarrow$$

$$\boxed{[(p \to r) \wedge (\neg q \to p) \wedge \neg r] \to q}$$

تاتولوژی

(اسلاید بعد)

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

p	q	r	$p \to r$	$\neg q \to p$	$\neg r$	$[(p \to r) \wedge (\neg q \to p) \wedge \neg r] \to q$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۰.

p_1				p_2	q	
p	r	s	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \to s$	$r \to s$	$[p \wedge ((p \wedge r) \to s)] \to (r \to s)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

تعریف ۲-۴. هرگاه p و q دوگزاره دلخواه باشند به طوریکه $p \to q$ یک گزاره همیشه درست (تاتولوژی) باشد، آنگاه می گوییم p به طور منطقی مستلزم q می باشد و این وضعیت را به صورت زیر می نویسیم:

$$p \Rightarrow q$$

$p \Rightarrow q$ به معنای آن است که $p \to q$ یک تاتولوژی می باشد.

$p \Leftrightarrow q$ به معنای آن است که $p \leftrightarrow q$ یک تاتولوژی می باشد.

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

قوانین استنتاج: برای تعیین اعتبار و یا عدم اعتبار یک استدلال بدون نیاز به ساختن جدول درستی استفاده می شوند.

نکته: تعداد سطرهای یک جدول درستی برای n متغیرگزاره ای برابر 2^n می باشد. مثلا اگر $n = 10$ آنگاه جدول درستی دارای ۱۰۲۴ سطر خواهد بود.

مثال ۲-۲۲. قانون **قیاس استثنایی** یا **تفکیک**(Modus Ponens)

$$[p \wedge (p \to q)] \to q \qquad \begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۳. قانون **قیاس** (Syllogism)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore\ p \to r \end{array} \qquad [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

مثال ۲-۲۴.

هاله کیک می پزد.

اگر هاله کیک بپزد، آنگاه پیانو تمرین نمی کند.

اگر هاله پیانو تمرین نکند، آنگاه پدرش برای او اتومبیل نخواهد خرید.

بنابراین، پدر هاله برای او اتومبیل نخواهد خرید.

$$\begin{array}{l} p \\ p \to \neg q \\ \neg q \to \neg r \\ \hline \therefore\ \neg r \end{array}$$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۵. **قانون استنتاج روش انکار** (Modus Tollens)

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p \qquad \begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore\ \neg p \end{array}$$

مثال:

اگر هاله رئیس انجمن بانوان شده باشد، آنگاه الهام عضو انجمن خواهد شد.

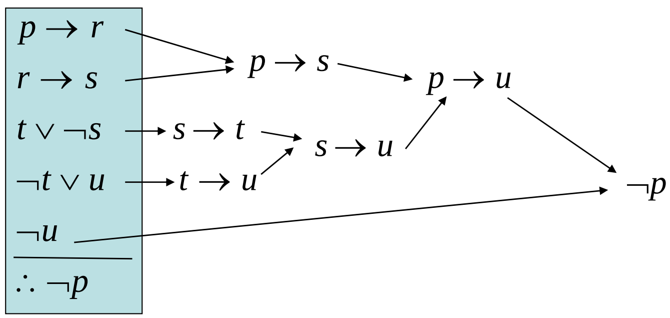
الهام عضو انجمن نشده است.

بنابراین، هاله رئیس انجمن بانوان نشده است.

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

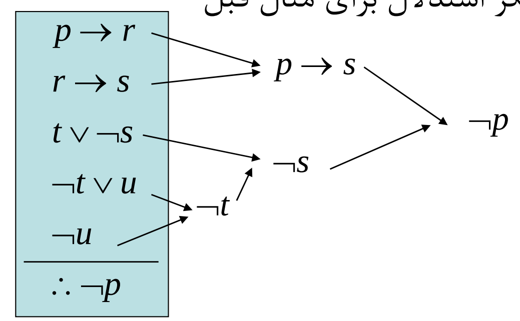
مثال:



فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال: روش دیگر استدلال برای مثال قبل



فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

سفسطه (Fallacy)

(۱) اگر مارگارت تاچر رئیس جمهور امریکا باشد، آنگاه حداقل ۳۵ ساله می باشد.
(۲) مارگارت تاچر حداقل ۳۵ ساله می باشد.
(۳) بنابراین، مارگارت تاچر رئیس جمهور امریکا می باشد.

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

سفسطه

(۱) اگر ۶ = ۳ + ۲ ، آنگاه ۶ = ۴ + ۲.
(۲) ۶ ≠ ۳ + ۲.
(۳) بنابراین، ۶ ≠ ۴ + ۲.

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۶. ***قاعده عطف***

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

مثال ۲-۲۷. ***قاعده قیاس فصلی*** (رزولوشن)

(۱) کیف پول هومن در جیب او و یا روی میز است. $\quad p \vee q$

(۲) کیف پول هومن در جیب او نیست. $\quad \neg p$

(۳) ؟ $\quad \therefore q$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۸. قاعده تناقض (برهان خلف)

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow F_0 \\ \hline \therefore p \end{array}$$

اثبات بوسیله تناقض:

برای اثبات $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$

اثبات می کنیم $\neg((p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q) \rightarrow F_0 \Leftrightarrow$

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow F_0$

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow$$
$$\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow$$
$$p \wedge \neg q$$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۲۹. اثبات گزاره های شرطی

$$\begin{array}{llll} p \rightarrow r & \longrightarrow \neg r \rightarrow \neg p & & \\ \neg p \rightarrow q & & \neg r \rightarrow q & \\ q \rightarrow s & & & \neg r \rightarrow s \\ \hline \therefore \neg r \rightarrow s & & & \end{array}$$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۳۰.

$$\begin{array}{lllll} p \rightarrow q & \longrightarrow q & & & \\ q \rightarrow (r \wedge s) & & r, s & & \\ \neg r \vee (\neg t \vee u) & & & \neg t \vee u & \\ p \wedge t & \longrightarrow p, t & & & \\ \hline \therefore u & & & & u \end{array}$$

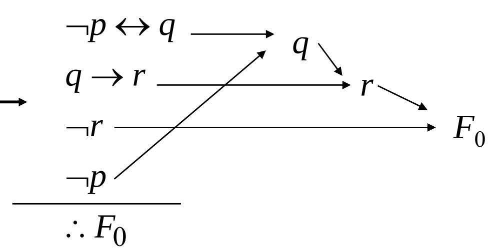
روش منظم و سیستماتیکی برای اثبات وجود ندارد به جز روش جدول درستی (2^n)

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۳۲. اثبات بوسیله تناقض (برهان خلف)

$$\begin{array}{l} \neg p \leftrightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \neg r \\ \hline \therefore p \end{array}$$



فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

اثبات نتایج شرطی:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \rightarrow r \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ q \\ \hline \therefore r \end{array}$$

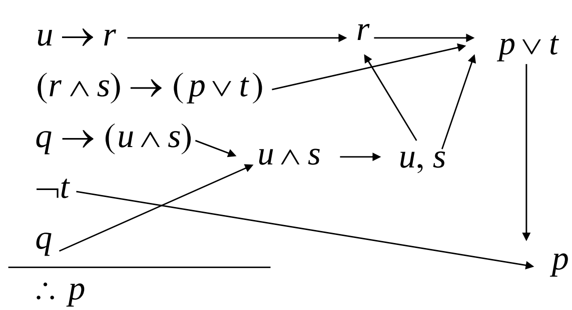
$$\begin{aligned} & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \Leftrightarrow\ & \neg p \vee (q \rightarrow r) \\ \Leftrightarrow\ & \neg p \vee (\neg q \vee r) \\ \Leftrightarrow\ & (\neg p \vee \neg q) \vee r \\ \Leftrightarrow\ & \neg(p \wedge q) \vee r \\ \Leftrightarrow\ & (p \wedge q) \rightarrow r \end{aligned}$$

فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

مثال ۲-۳۳.

$$\begin{array}{l} u \rightarrow r \\ (r \wedge s) \rightarrow (p \vee t) \\ q \rightarrow (u \wedge s) \\ \neg t \\ \hline \therefore q \rightarrow p \end{array}$$



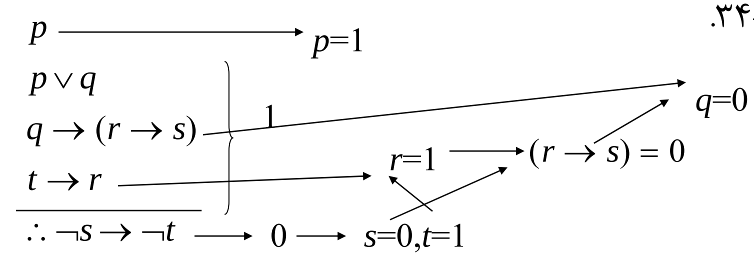
فصل ۲. منطق

۲-۳ استلزام منطقی: قوانین استنتاج

سوال: چگونه اثبات کنیم که یک استدلال نا معتبر است؟

جواب: فقط کافی است که یک مثال نقض بیابیم.

مثال ۲-۳۴.



فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

تعریف ۲-۵. هر جمله خبری یک *گزاره باز* است اگر:

(۱) شامل یک یا چند **متغیر** بوده، و

(۲) یک گزاره نباشد، ولی

(۳) وقتی متغیرهای آن با **مقادیر مجاز** جایگزین شوند، به یک گزاره تبدیل شود.

عالم سخن

مثال: عدد $x+2$ یک عدد صحیح زوج است.

$x=y$، $x>y$، $x<y$ ...

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

نمادگذاری:

$p(x)$: عدد $x+2$ یک عدد صحیح زوج است.

$q(x,y)$: اعداد y-2، $x-y$ و $x+2y$ اعداد صحیح زوج هستند.

$p(5)$: نادرست، $p(6)$: درست، $q(4, 2)$:درست، $q(3, 4)$: نادرست

بنابراین:

بازاء برخی از مقادیر x ، $p(x)$ درست و نقیض آن نادرست است.

بازاء برخی از مقادیر x و y، $q(x, y)$ درست و نقیض آن نادرست است.

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

سور وجودی: برای برخی از مقادیر x: $\exists x p(x)$

سور عمومی: برای تمام مقادیر x: $\forall x p(x)$

x در $p(x)$: **متغیر آزاد**

x در $\exists x p(x)$ **متغیر مقید**. بنابراین $\exists x p(x)$ یا درست است و یا نادرست.

www.txt.ir

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۳۶. عالم سخن: اعداد حقیقی

$p(x): x \geq 0$

$q(x): x^2 \geq 0$

$r(x): x^2 - 3x - 4 = 0$

$s(x): x^2 - 3 > 0$

$\exists x[p(x) \wedge r(x)]: TRUE$ $\quad x=4$

$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]: TRUE$

$\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]: TRUE$

$\forall x[q(x) \rightarrow s(x)]: FALSE$ $\quad x=1$

$\forall x[r(x) \vee s(x)]: FALSE$ $\quad x=5,6,\ldots$

$\forall x[r(x) \rightarrow p(x)]: FALSE$ $\quad x=-1$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۳۷. سور ضمنی

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Longleftrightarrow \forall x(\sin^2 x+\cos^2 x=1)$$

"عدد صحیح ۴۱ مساوی مجموع دو مجذور کامل است"

برابر است با:

$$\exists m\exists n[41=m^2+n^2]$$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

تعریف ۲-۶. هم ارزی منطقی برای گزاره های باز $p(x)$ و $q(x)$

$$\forall x[p(x)\Leftrightarrow q(x)]$$

یعنی باید بازاء هر x در عالم سخن گزاره زیر درست باشد:

$$p(x)\leftrightarrow q(x)$$

$p(x)$ به طور منطقی مستلزم $q(x)$ است: $\forall x[p(x)\Rightarrow q(x)]$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۴۲.عالم سخن: تمام اعداد صحیح

$r(x):2x+1=5$

$s(x):x^2=9$

$\exists x[r(x)\wedge s(x)]$ نادرست است، ولی

$\exists xr(x)\wedge\exists xs(x)$ درست می باشد. بنابراین:

$$\exists x[r(x)\wedge s(x)] \not\Leftrightarrow \exists xr(x)\wedge\exists xs(x)$$

اما:

$$\exists x[p(x)\wedge q(x)]\Rightarrow[\exists xp(x)\wedge\exists xq(x)]$$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

بازاء یک عالم سخن مشخص و هر دو گزاره باز $p(x)$ و $q(x)$

$$\exists x[p(x)\wedge q(x)]\Rightarrow[\exists xp(x)\wedge\exists xq(x)]$$
$$\exists x[p(x)\vee q(x)]\Leftrightarrow[\exists xp(x)\vee\exists xq(x)]$$
$$\forall x[p(x)\wedge q(x)]\Leftrightarrow[\forall xp(x)\wedge\forall xq(x)]$$
$$[\forall xp(x)\vee\forall xq(x)]\Rightarrow\forall x[p(x)\vee q(x)]$$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

نحوه نقیض کردن یک جمله سوردار شامل یک متغیر:

$$\neg[\forall x p(x)] \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$$
$$\neg[\exists x p(x)] \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$$
$$\neg[\forall x \neg p(x)] \Leftrightarrow \exists x p(x)$$
$$\neg[\exists x \neg p(x)] \Leftrightarrow \forall x p(x)$$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۴۴

$p(x)$: x فرد است.

$q(x)$: x^2-1 زوج است.

فرمول گزاره ای $\forall x[p(x) \to q(x)]$ را نقیض کنید.

$$\neg[\forall x(p(x) \to q(x)] \Leftrightarrow \exists x[\neg(p(x) \to q(x))]$$
$$\Leftrightarrow \exists x[\neg(\neg p(x) \vee q(x))] \Leftrightarrow \exists x[p(x) \wedge \neg q(x)]$$

"وجود دارد x به گونه ای که x فرد است و x^2-1 زوج نیست" (نادرست)

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

متغیرهای چندگانه

$$\forall x \forall y p(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x p(x, y)$$
$$\exists x \exists y p(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x p(x, y)$$

فصل ۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۴۸.

$p(x, y)$: $x + y = 17$;

$\forall x \exists y p(x, y)$ برای هر x یک عدد صحیح مانند y وجود دارد به گونه ای که $x + y = 17$ (درست)

$\exists y \forall x p(x, y)$ یک عدد صحیح مانند y وجود دارد به گونه ای که بازاء تمام اعداد صحیح مانند x، $x+y=17$

بنابراین: $\forall x \exists y p(x, y) \neq \exists y \forall x p(x, y)$

فصل۲. منطق

۲-۴ استفاده از سورها

مثال ۲-۴۹.

$$\neg[\forall x \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]]$$
$$\Leftrightarrow \exists x[\neg \exists y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]]$$
$$\Leftrightarrow \exists x \forall y \neg[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]$$
$$\Leftrightarrow \exists x \forall y \neg[\neg[p(x,y) \wedge q(x,y)] \vee r(x,y)]$$
$$\Leftrightarrow \exists x \forall y[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \wedge \neg r(x,y)]$$

فصل۲. منطق

تمرینات

۲-۲. تمرین ۲۰

۲-۳. تمرین ۱۰

۲-۴. تمرین ۱۸و ۲۶

فصل سوم
نظریه مجموعه ها

سید ناصر رضوی
e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir
۱۳۸۵

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۱. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

یک گردایه **خوش تعریف** از اشیاء

(مجموعه دانشجویان باهوش! – باهوش باید تعریف شود).

مجموعه متناهی، مجموعه نامتناهی، کاردینالیتی(اندازه)مجموعه، زیر مجموعه

$A=\{1,3,5,7,9\}$

$B=\{x|x \text{ is odd}\}$

$C=\{1,3,5,7,9,...\}$

$1 \in A, 1 \in B, 1 \in C$

کاردینالیتی A برابر است با ۵ (|A|=5)

A یک زیرمجموعه سره از B است $A \subset B$

C زیر مجموعه B است $C \subseteq B$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۱. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

زیرمجموعه ها

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$

$A \not\subset B \Leftrightarrow \neg\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow \exists x \neg[\neg(x \in A) \vee x \in B)]$

$\Leftrightarrow \exists x[x \in A \wedge x \notin B]$

تساوی مجموعه ها

$C = D \Leftrightarrow (C \subseteq D) \wedge (D \subseteq C)$

$C \neq D \Leftrightarrow \neg(C \subseteq D \wedge D \subseteq C)$

$\Leftrightarrow C \not\subseteq D \vee D \not\subseteq C$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۱. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مجموعه *پوچ یا تهی*: {}, Ø

مجموعه *جهانی* (مرجع، عالم سخن): U

مجموعه توانی A: مجموعه تمام زیر مجموعه های A

$A=\{1,2\}, P(A)=\{Ø, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

If $|A|=n$, then $|P(A)|=2^n$.

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۱. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

برای هر مجموعه متناهی مانند A که $|A|=n\geq 0$، تعداد زیرمجموعه های k عضوی برابر است با: $C(n, k)$

شمارش زیرمجموعه های A:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n,\ \text{for } n\geq 0$$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۱. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مثال ۳-۹. تعداد مسیرهای پلکانی میان دو نقطه با مختصات صحیح.

از (2, 1) به (7, 4): ۳ گام به بالا(U) و ۴ گام به راست(R)

$$\text{R,U,R,R,U,R,R,U} \longrightarrow 8!/(5!3!)=56$$

حل با استفاده از مجموعه ها:

A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

یک مجموعه سه عضوی مانند {1, 3, 7} به این معناست که گامهای ۱، ۳ و ۷ روبه بالا هستند. تعداد زیرمجموعه های سه عضوی A برابر است با :

C(8, 3)=56

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۱. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مثال ۳-۱۰. تعداد ترکیبات یک عدد صحیح مثبت

4=3+1=1+3=2+2=2+1+1=1+2+1=1+1+2=1+1+1+1

اکنون از ایده زیر مجموعه ها برای حل این مسأله استفاده می کنیم

در نظر بگیرید $4 = 1 + 1 + 1 + 1$

اولین علامت جمع — دومین علامت جمع — سومین علامت جمع

تعداد ترکیبات = تعداد زیر مجموعه های مجموعه {1,2,3} = ۸

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۱. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مثال ۳-۱۱. برای اعداد صحیح n و r که $n\geq r\geq 0$ به صورت ترکیباتی ثابت کنید:

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$$

جواب: فرض کنید $A=\{x, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

اکنون تمام زیرمجموعه های r عضوی از A را در نظر بگیرید

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$$

تمام زیر مجموعه های r عضوی — تمام زیر مجموعه های r عضوی بدون x — تمام زیر مجموعه های r عضوی شامل x

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

مثال ۳-۱۳. مثلث خیام (پاسکال)

ضرایب دو جمله ای

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

(آ) Z= مجموعه اعداد صحیح= $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3,\dots\}$

(ب) N= مجموعه اعداد صحیح غیر منفی یا اعداد طبیعی= $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(پ) Z^+ = مجموعه اعداد صحیح مثبت= $\{x \in Z \mid x>0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

(ت) Q = مجموعه اعداد گویا = $\{a, b \mid a, b \text{ is integer}, b \neq 0\}$

(ث) Q^+ = مجموعه اعداد گویای مثبت

(ج) Q^* = مجموعه اعداد گویای غیر صفر

(چ) R = مجموعه اعداد حقیقی

(ح) R^+ = مجموعه اعداد حقیقی مثبت

(خ) R^* = مجموعه اعداد حقیقی مخالف صفر

(د) C = مجموعه اعداد مختلط

(ذ) C^* = مجموعه اعداد مختلط مخالف صفر

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۱-۳. مجموعه ها و زیر مجموعه ها

(ر) بازاء هر n متعلق به اعداد صحیح غیر منفی

$Z_n=\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

(ز) بازاء هر دو عدد حقیقی a, b که a<b ،

بازه بسته $[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$

بازه باز $(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$

بازه نیم باز $[a,b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$

$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۲-۳. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

تعریف ۳-۵. بازاء هر دومجموعه مانند $A,B \subseteq U$

اجتماع $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

اشتراک $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

تفاضل متقارن $A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$

تعریف ۳-۶. مجموعه های دوبه دو منفصل $A \cap B = \phi$

تعریف ۳-۷. متمم(مطلق) $\overline{A} = U - A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

تعریف ۳-۸. متمم (نسبی) $B - A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۲. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

قضیه ۳-۴. به ازاء مجموعه مرجع U و مجموعه های Aو B زیرمجموعه U، گزاره های زیر هم ارزند.

(آ) $A \subseteq B$

(ب) $A \cup B = B$

(پ) $A \cap B = A$

(ت) $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۲. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

قوانین نظریه مجموعه ها

قانون متمم مضاعف: (1) $\overline{\overline{A}} = A$

قوانین دمورگان: (2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

قوانین تعویض پذیری: (3) $A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$

قوانین شرکت پذیری: (4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

قوانین توزیع پذیری: (5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۲. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

قوانین نظریه مجموعه ها

قوانین خود توانی: (6) $A \cup A = A, A \cap A = A$

قوانین همانی: (7) $A \cup \phi = A, A \cap U = A$

قوانین معکوس: (8) $A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \phi$

قوانین تسلط: (9) $A \cup U = U, A \cap \phi = \phi$

قوانین جذب: (10) $A \cup (A \cap B) = A$, $\quad A \cap (A \cup B) = A$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۲. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

s	دوگان s (s^d)
ϕ	U
U	ϕ
$\cup$	$\cap$
$\cap$	$\cup$

قضیه ۳-۵. اصل دوگانی: فرض کنیم s قضیه ای در رابطه با تساوی دو عبارت مجموعه ای باشد، در این صورت دوگان S یعنی S^d نیز یک قضیه خواهد بود.

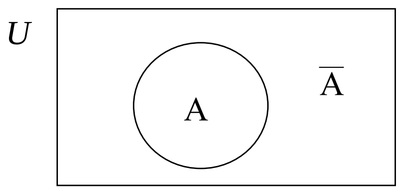
فصل ۳. نظریه مجموعه ها

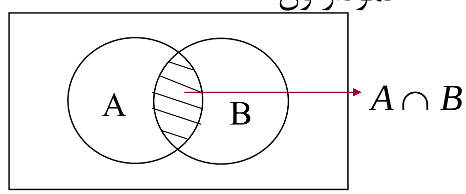
۳-۲. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

مثال ۳-۱۷. دوگان A⊆B را بدست آورید.

ازآنجا که A⊆B⇔A∪B=B بنابراین دوگان A⊆B برابر است با دوگان A∪B=B، که برابر است با A∩B=B یعنی: B⊆A

نمودار ون





فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۲. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

مثال ۳-۱۹.نقیض A-B را بدست آورید.

$$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}=A\cap\overline{B}$$

$$\therefore \overline{A-B}=\overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A}\cup B$$

مثال ۳-۲۰. نقیض AΔB را بدست آورید.

$$\because A\Delta B=\{x \mid x\in A\cup B\wedge x\notin A\cap B\}$$

$$=(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}$$

$$\therefore \overline{A\Delta B}=\overline{(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}}=\overline{A\cup B}\cup(A\cap B)$$

$$=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=[(A\cap B)\cup\overline{A}]\cap[(A\cap B)\cup\overline{B}]$$

$$=(B\cup\overline{A})\cap(A\cup\overline{B})=(\overline{A}\cup B)\cap\overline{(\overline{A}\cap B)}$$

$$=\overline{A}\Delta B=A\Delta\overline{B}$$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۲. اعمال مجموعه ای و قوانین نظریه مجموعه ها

تعریف ۳-۱۰. فرض کنیم I یک مجموعهٔ غیر تهی و U مجموعه مرجع باشد.به ازاء هر i متعلق به I فرض می کنیم $A_i\in U$. در این صورت I را مجموعه **اندیس گذار** و هر i را یک **اندیس** می نامیم.

با این شرایط تعریف می کنیم:

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{x \mid x\in A_i \text{ for at least one } i\in I\},$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\{x \mid x\in A_i \text{ for every } i\in I\}$$

قضیه ۳-۶. قوانین دمورگان تعمیم یافته:

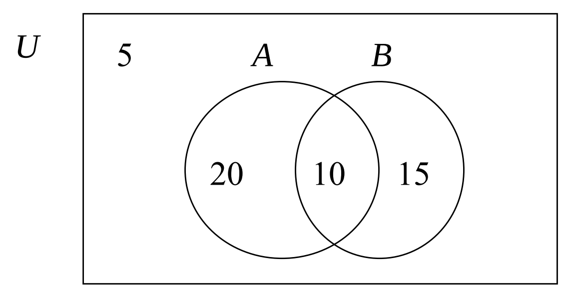
$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$$

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

۳-۳. شمارش و نمودارهای ون

مثال ۳-۲۳. در یک کلاس ۵۰ دانشجو وجود دارد که ۳۰ نفر آنها ++C ، ۲۵ نفر آنها پاسکال و ۱۰ نفر هر دو زبان را می خوانند.چند دانشجو یکی از زبانها را می خواند؟



$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

۳-۳. شمارش و نمودارهای ون

مثال ۳-۲۴. انواع نقصهای یک گیت AND

D_1: ورودی اول در صفر گیر کرده است.

D_2: ورودی دوم در صفر گیر کرده است.

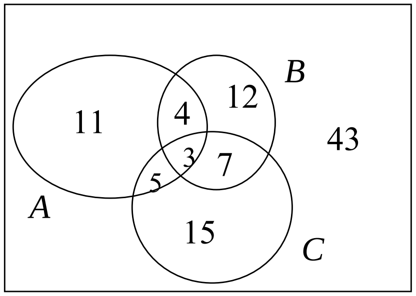
D_3: خروجی در صفر گیر کرده است.

با داشتن ۱۰۰ نمونه:

A: نقص D_1

B: نقص D_2

C: نقص D_3



$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|$$
$$-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$|A|=23,\ |B|=26,\ |C|=30,$$
$$|A\cap B|=7, |A\cap C|=8, |B\cap C|=10,$$
$$|A\cap B\cap C|=3$$

با دانستن موارد روبرو، چند نمونه دارای نقص می باشند؟

جواب : ۵۷

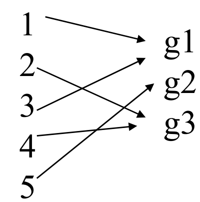
۳-۳. شمارش و نمودارهای ون

مثال ۳-۲۵. سه بازی وجود دارد. به چند طریق شخصی می تواند هر روز یک بازی انجام دهد به طوریکه در مدت ۵ روز ، هر بازی را حداقل یکبار انجام داده باشد؟

A: بدون انجام بازی ۱

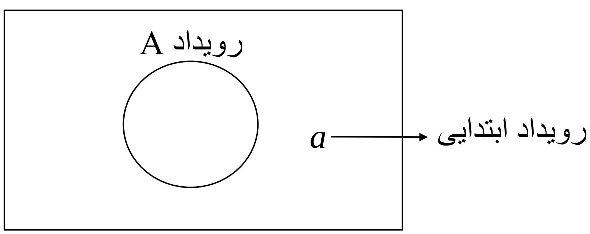
B: بدون انجام بازی ۲

C: بدون انجام بازی ۳



$$|A|=|B|=|C|=2^5$$
$$|A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=1^5$$
$$|A\cap B\cap C|=0$$
$$\therefore |A\cup B\cup C|=3\times 2^5-3\times 1^5+0=93$$
$$Ans=3^5-93=150$$

۳-۴. سخنی درباره احتمال



U= فضای نمونه

P(A): احتمال آنکه رویداد A اتفاق بیافتد= |A|/|U|

P(a) = 1/|U| =|{a}|/|U|

۳-۴. سخنی درباره احتمال

مثال ۳-۲۶. یک تاس را یک بار می اندازیم. احتمال به دست آمدن ۵ یا ۶ چقدر است؟(جواب: 1/3)

مثال ۳ -۲۷. اگر سکه ای را چهار بار پرتاب کنیم، احتمال به دست آمدن دو شیر و دو خط چقدر است؟

جواب:اندازه فضای نمونه برابراست با ۲۴=۱۶

امکان آمدن دو شیر و دو خط در هر ترتیبی (H,H,T,T) برابراست با:

4!/2!2!=6

بنابراین جواب برابرست با:

6/16=3/8

فصل ۳. نظریه مجموعه ها

تمرینات

تمرینهای ۳-۱: تمرین ۱۱و ۱۴و ۲۱

تمرینهای ۳-۲: تمرین ۸، ۱۴و ۱۷

تمرینهای ۳-۳و ۳-۴: تمرین ۳، ۵، ۸و ۹

تمرینهای تکمیلی:تمرین ۴، ۱۸و ۲۳

www.txt.ir

فصل پنجم
رابطه ها و توابع

سید ناصر رضوی
e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir
۱۳۸۵

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۱. ضرب کارتزین و رابطه ها

تعریف ۵-۱. به ازای مجموعه های A, B⊆U، حاصل ضرب **دکارتی** یا حاصل ضرب **خارجی** A و B با A*B نمایش داده می شود و برابر است با:

$\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

– عناصر A*B **زوج های مرتب** می باشند.
– |A*B|=|A|*|B|=|B*A|
– اما در حالت کلی A*B≠B*A . و

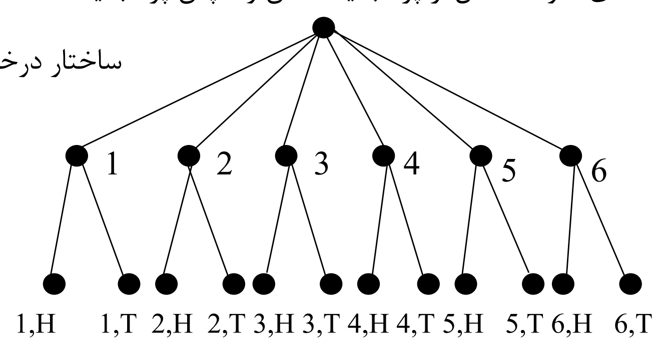
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, 1 \le i \le n\}.$$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۱. ضرب کارتزین و رابطه ها

مثال ۵-۳. فضای نمونه حاصل از پرتاب یک تاس و سپس پرتاب یک سکه

ساختار درختی



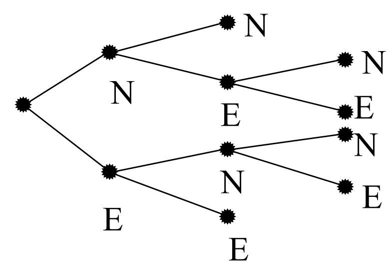
={1,2,3,4,5,6} {H,T}

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۱. ضرب کارتزین و رابطه ها

"درختها ابزار مناسبی برای شمارش می باشند"

مثال ۵-۴. زنان در مسابقات قهرمانی تنیس حداکثر سه دست بازی می کنند. برنده اولین نفری است که دو دست را ببرد. به چند طریق نتیجه یک مسابقه برد می باشد.



جایگشت های NNEو EEN:

$$\frac{3!}{2!} \times 2 = 6, \text{ for men}: \frac{5!}{3! \times 2!} \times 2 = 20)$$

بنابراین
۶ حالت

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۱. ضرب کارتزین و رابطه ها

تعریف ۵-۲. به ازای مجموعه های $A, B \subseteq U$ ، هر زیرمجموعه از A*B یک **رابطه** از A به B نام دارد و هر زیرمجموعه از A*A یک **رابطه یونری** (یکانی) روی A خوانده می شود.

به طور کلی برای مجموعه های متناهی A و B که |A|=m و |B|=n، به تعداد 2^{mn} رابطه از A به B وجود دارد (تمام زیر مجموعه های A*B شامل مجموعه تهی و خود A*B)

مثال ۵-۷. فرض کنیم $A=Z^+$، رابطه باینری R را روی A تعریف می کنیم:

R={(x, y) | x < y}

(7, 11) , (1, 2) متعلق به R هستند اما (2, 2) و (3, 2) نیستند.

1R2 و 7R11 (نمایش میانوندی)

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۱. ضرب کارتزین و رابطه ها

قضیه ۵-۱. بازاء هر سه زیرمجموعه $A, B, C \subseteq U$

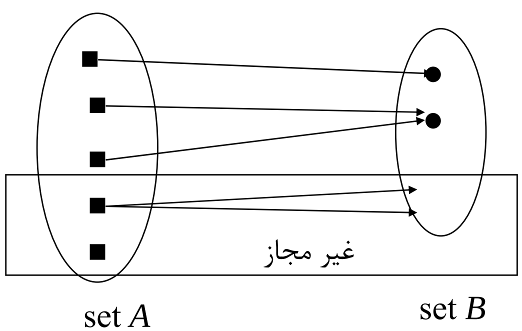
$$(a)\ A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$
$$(b)\ A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$(c)\ (A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$$
$$(d)\ (A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$$

Proof of (a): For any $a,b\in U$, $(a,b)\in A\times(B\cap C)\Leftrightarrow a\in A\wedge$
$b\in(B\cap C)\Leftrightarrow a\in A, b\in B, b\in C\Leftrightarrow(a,b)\in(A\times B)$,
$(a,b)\in(A\times C)\Leftrightarrow(a,b)\in(A\times B)\cap(A\times C)$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۲. توابع : ساده و یک به یک

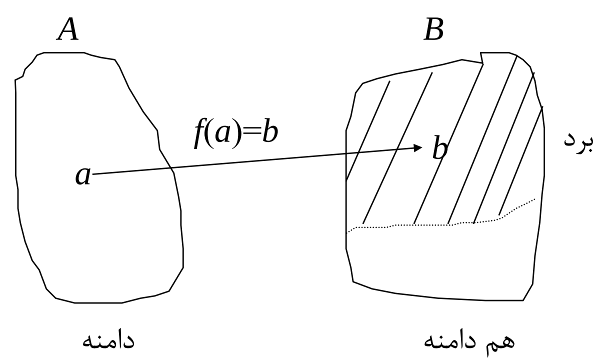
تعریف ۵-۳. بازاء مجموعه های غیر تهی A و B، تابع یا نگاشت f از A به B که با f: A→B نمایش داده می شود، رابطه ای است از A به B که در آن هر عنصر از A درست یک بار به عنوان اولین مؤلفه در یک زوج مرتب از رابطه ظاهر شود.



فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۲. توابع : ساده و یک به یک

تعریف ۵-۴. دامنه(Domain)، هم دامنه(Codomain)، برد(Range)



فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۲. توابع : ساده و یک به یک

مثال ۵-۱۰.

(آ) تابع کف :بزرگترین عدد صحیح عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x

$f(x)=\lfloor x \rfloor$

$\lfloor 3.8 \rfloor = 3, \lfloor -3.8 \rfloor = -4, \lfloor -3 \rfloor = -3$

(ب) تابع سقف: کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x

$f(x)=\lceil x \rceil$

$\lceil 3.8 \rceil = 4, \lceil -3.8 \rceil = -3, \lceil -3 \rceil = -3$

(پ) تابع برش: قسمت صحیح x

$trunc(x) = \text{the integer part of } x$

$trunc(3.8) = 3, trunc(-3.8) = -3, trunc(-3) = -3$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۲. توابع : ساده و یک به یک

اگر $|A|= m$ و اندازه $|B|=n$، تعداد توابع ممکن از A به B برابراست با n^m. (چرا؟)

تعریف ۵-۵. تابع f: A→B را **یک به یک** یا **انژکتیو** گوییم، اگر هر عنصر از B حداکثر یک بار به عنوان نقش یک عنصر از A ظاهر شده باشد.

اگر f: A→B یک به یک بوده و A و B متناهی باشند، داریم $|A|\leq|B|$. به ازای مجموعه های دلخواه A و B، هرگاه f: A→B یک به یک باشد، آنگاه به ازاء هر دو عنصر دلخواه a_1 و a_2 متعلق به A:

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

مثلا تابع $f(x)=3x+7$ یک به یک می باشد، اما تابع $g(x)=x^4-x$ یک به یک نیست زیرا $g(0)=g(1)=0$.

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۲. توابع : ساده و یک به یک

اگر $|A|=m$ و $|B|=n$ و $m\leq n$ ، آنگاه تعداد توابع یک به یک از A به B برابر است با:

$$P(n, m)= n!/(n - m)!$$

(چرا؟)

$\{(a_1, x_1), (a_2, x_2), (a_3, x_3), \ldots, (a_m, x_m)\}$

$n * (n - 1) * (n - 2) * \ldots * (n - m + 1) = P(n, m) = P(|B|, |A|)$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

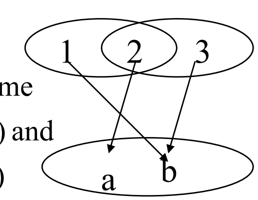
۵-۲. توابع : ساده و یک به یک

قضیه ۵ -۲. فرض کنیم f: A→B و $A_1, A_2 \subseteq A$

(a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(c) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ اگر f یک به یک باشد



Proof : for part (b). For any $b \in B, b \in f(A_1 \cup A_2) \Rightarrow$ for some $a \in A_1 \cup A_2, b = f(a) \Rightarrow (b = f(a)$ and $a \in A_1)$ or $(b = f(a)$ and $a \in A_2) \Rightarrow (b \in f(A_1))$ or $(b \in f(A_2)) \Rightarrow b \in f(A_1) \cup f(A_2)$

Conversely, $b \in f(A_1) \cup f(A_2) \Rightarrow b \in f(A_1)$ or $b \in f(A_2) \Rightarrow$ (for some $a_1 \in A_1, b = f(a_1)$) or (for some $a_2 \in A_2, b = f(a_2)$) $\Rightarrow$ for some $a \in A_1 \cup A_2, b = f(a) \Rightarrow b \in f(A_1 \cup A_2)$.

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

تعریف ۵-۹. تابع $f: A\rightarrow B$ **پوشا** یا **سورژکتیو** می گوییم اگر $f(A)=B$ باشد؛ یعنی به ازای هر b متعلق به B حداقل یک عنصرمانند a متعلق به A وجود داشته باشد که $f(a)=b$.

مثال ۵-۱۹. تابع $f:R\rightarrow R$ با تعریف $f(x)=x^3$ پوشا می باشد، اما تابع $f(x)=x^2$ پوشا نیست.

مثال ۵-۲۰. تابع $f:Z\rightarrow Z$ با تعریف $f(x)=3x+1$ پوشا نمی باشد.
تابع $g:Q\rightarrow Q$ با تعریف $g(x)=3x+1$ پوشا می باشد.
تابع $h:R\rightarrow R$ با تعریف $h(x)=3x+1$ پوشا می باشد.

هرگاه A و B مجموعه هایی متناهی باشند، آنگاه بازاء هر تابع پوشای $f:A\rightarrow B$ باید داشته باشیم $|A|\geq B$. اما تعداد توابع پوشا چیست؟

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثال ۵-۲۲. هرگاه $A=\{x, y, z\}$ و $B=\{1, 2\}$، آنگاه تمام توابع $f:A\rightarrow B$ به غیر از $f_1=\{(x,1), (y, 1), (z, 1)\}$ و $f_2=\{(x,2), (y, 2), (z, 2)\}$ (توابع **ثابت**) پو شا می باشند. بنابراین به تعداد $|B|^{|A|}-2=2^3-2=6$ تابع پوشا از A به B وجود دارد.

در حالت کلی تر، اگر $|A|=m\geq 2$ و $|B|=2$ ، در آن صورت تعداد کل توابع پوشا از A به B از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\mathbf{2^m-2}$$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثال ۵-۲۳. به ازاء $A=\{w, x, y, z\}$ و $B=\{1, 2, 3\}$، ۳^۴ تابع از A به B وجود دارد. در بین تمام توابع:

(۱) ۱ نگاشت نشده است:۲^۴ تابع از A به $\{2, 3\}$
(۲) ۲ نگاشت نشده است:۲^۴ تابع از A به $\{1, 3\}$
(۳) ۳ نگاشت نشده است:۲^۴ تابع از A به $\{1, 2\}$

اما تمام توابع از A به $\{1\}$ یا $\{2\}$ یا $\{3\}$ دو بار شمرده شده اند. بنابراین تعداد توابع پوشا از A به B برابر است با:

$$3^4-\binom{3}{2}2^4+\binom{3}{1}1^4=36$$

در حالت کلی اگر $|A|=m\geq 3$ و $|B|=3$ ، تعداد توابع پوشا از A به B طبق رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\binom{3}{3}3^m-\binom{3}{2}2^m+\binom{3}{1}1^m$$

(این فرمول بازاء m=1 یا m=2 چه نتیجه ای می دهد؟)

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

فرمول کلی

For finite sets A, B with $|A|=m$ and $|B|=n$, there are

$$\binom{n}{n}n^m-\binom{n}{n-1}(n-1)^m+\binom{n}{n-2}(n-2)^m-\cdots$$

$$+(-1)^{n-2}\binom{n}{2}2^m+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}1^m=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثالهای ابتدای فصل (صفحات ۳۴۱و ۳۴۲)

(۱) هفت قرارداد با چهار شرکت به طوری که هر شرکت در بخشی از پروژه شرکت داشته باشد.

$$\binom{4}{4}4^7-\binom{4}{3}3^7+\binom{4}{2}2^7-\binom{4}{1}1^7=8400$$

(۲) چند دنباله چهارتایی $(0, 1, 2, 3)$ و هفت علامتی حداقل یک مورد از هر یک از علایم 0، 1، 2و 3 را دارند؟

(۳) چند ماتریس صفر- یک 7*4 دقیقا یک ۱ در هر سطر و حداقل یک ۱ در هر ستون دارند؟

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثالهای ابتدای فصل (صفحات ۳۴۱و ۳۴۲)

(۴) هفت نفر (غیر مرتبط با هم) وارد یک ساختمان چهار طبقه می شوند و داخل آسانسور می شوند.احتمال اینکه آسانسور در هر طبقه به منظور خروج مسافران بایستد چیست؟

$$8400/4^7 = 8400/16384>0.5$$

(۵) به ازاء اعداد صحیح مثبت m, n که m<n ،ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m=0$$

(۶) به ازاء هر عدد صحیح مثبت n تحقیق کنید که

$$n!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^n$$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثال ۵- ۲۵. هفت کار باید میان ۴ نفر تقسیم شوند به طوریکه هر نفر حداقل یک کار داشته باشند و کار اول را نفر اول انجام دهد.

جواب:

حالت ۱. نفر اول فقط کار اول را می گیرد.

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{3-k}(3-k)^6=540$$

حالت ۲. نفر اول بیش از یک کار را می گیرد.

$$\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{4}{4-k}(4-k)^6=1560$$

حال با استفاده از قانون جمع تعداد کل برابراست با:

۵۴۰+۱۵۶۰

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

تعداد راههای ممکن برای توزیع m شیء مختلف در n مکان مختلف به طوریکه هیچ یک از مکانها خالی نماند:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

و اگر مکانها یکسان باشند:

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

$S(m, n)$: اعداد استرلینگ نوع دوم.

$n!S(m, n)$: تعداد توابع پوشا

مثال ۵- ۲۷. توزیع m شیء مختلف در n مکان یکسان به طوریکه مکان ها می توانند خالی باشند.

$$\sum_{i=1}^{n}S(m,i)$$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

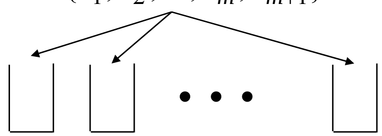
قضیه ۵-۳. فرض کنیم m, n اعداد صحیح مثبتی با $1 < n \leq m$ باشند. در این صورت:

$$S(m + 1, n) = S(m , n - 1) + nS(m, n)$$

اثبات:

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}\}$$

$S(m + 1,n)$



n مکان یکسان

a_{m+1} به تنهایی در یک مکان قرار ندارد: ابتدا m شیء دیگر را در n مکان توزیع کنید.سپس $a_m + 1$ را می توان در هر یک از مکانها قرار داد

$\boldsymbol{nS(m, n)}$

a_{m+1} به تنهایی در یک مکان قرار دارد

$\boldsymbol{S(m, n-1)}$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۳. توابع پوشا(برو) : اعداد استرلینگ نوع دوم

مثال ۵-۲۸. به چند طریق می توان عدد ۳۰۰۳۰ را به حداقل دو عامل (بزرگتر از یک) تجزیه نمود به طوریکه ترتیب مهم نباشد؟

$$30030 = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13$$

جواب:حداکثر ۶ عامل وجود دارد. بنابراین، جواب برابر است با:

$$S(6, 2)+S(6, 3)+S(6, 4)+S(6, 5)+S(6, 6)=202$$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۴. توابع خاص

تعریف ۵-۱۰. به ازای مجموعه های غیر تهی A, B ، هر تابع مانند $f:A*A \rightarrow B$ یک **عمل دوتایی** بر A نام دارد. اگر B زیرمجموعه A باشد، آنگاه می گوییم این عمل دوتایی (بر A) **بسته** است.

تعریف ۵ -۱۱. تابع $g:A \rightarrow A$ یک عمل یکانی بر A نام دارد.

مثال ۵-۲۹.

(آ) تابع $f:Z*Z \rightarrow Z$ با تعریف $f(a, b)=a-b$ یک عمل دوتایی بسته بر Z است.

(ب) تابع $g:Z^+ * Z^+ \rightarrow Z$ با تعریف $g(a, b)=a-b$ یک عمل دوتایی بر Z^+ است ولی بسته نیست.

(پ) تابع $h:R^+ \rightarrow R^+$ با تعریف $h(a)=1/a$ یک عمل یکانی بر R^+ است.

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۴. توابع خاص

تعریف ۵-۱۲. فرض کنیم $f:A*A \rightarrow B$؛ یعنی f یک عمل دوتایی بر A باشد

(آ) گوییم f تعویض پذیر است اگر بازاء هر (a, b) متعلق به A*A داشته باشیم $f(a, b)=f(b, a)$.

(ب) وقتی B زیر مجموعه A باشد(f بسته باشد)، گوییم f شرکت پذیر است اگر بازاء هر سه عنصر a, b, c متعلق به A، داشته باشیم:

$$f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$$

مثال ۵-۳۲. (آ)عمل دوتایی و بستهٔ $f:Z*Z \rightarrow Z$ را با $f(a, b) = a+b-3ab$ تعریف می کنیم. بنابراین f هم تعویض پذیر و هم شرکت پذیر است(چرا؟)

(ب)عمل دوتایی و بستهٔ $h:Z*Z \rightarrow Z$ را با تعریف $h(a, b)=a|b|$ در نظر می گیریم. بنابراین $h(3, -2)=2|-3|=6 \neq h(-2, 3)=-6$. پس h تعویض پذیر نمی باشد. اما h شرکت پذیر است.

$$h(a, h(b, c))= a|h(b, c)|=a|b|c||=a|b||c|$$

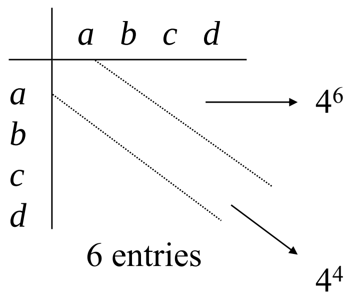
$$h(h(a, b), c))= h(a, b) |c|=a|b||c|$$

(پ) عمل دوتایی و بستهٔ $g:R*R \rightarrow Z$ را با تعریف $g(a, b)=\lceil a+b \rceil$ در نظر می گیریم. بنابراین g تعویض پذیر است. اما شرکت پذیر نمی باشد $g(g(3.2, 4.7), 6.4)=15$ ولی $g(3.2, g(4.7, 6.4))=16$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۴. توابع خاص

مثال ۵-۳۳. اگر $A=\{a, b, c, d\}$ ، آنگاه $|A*A|=16$. در نتیجه 4^{16} تابع (عمل دوتایی بسته)روی A وجود دارد. چه تعداد از آنها تعویض پذیر می باشند؟



Therefore, $4^6 \times 4^4$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۴. توابع خاص

تعریف ۵-۱۳. فرض کنیم $f:A*A \rightarrow B$ یک عمل دوتایی بر A باشد. عنصر $x \in A$ یک عنصر **خنثی** (همانی) برای f است هرگاه بازاء هر $a \in A$

$$f(a,x) = f(x,a) = a$$

مثال ۵-۳۴. (آ) تابع $f:Z*Z \rightarrow Z$ با تعریف $f(a, b)=a+b$ دارای عنصر خنثی 0 می باشد زیرا بازاء هر دو عدد صحیح a $f(a, 0)=f(0, a)=a$

(ب) تابع $f:Z*Z \rightarrow Z$ با تعریف $f(a, b)=a-b$ دارای عنصر خنثی نمی باشد
.

(پ) فرض کنیم $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ و $g:A*A \rightarrow A$ عمل دوتایی بسته با تعریف $g(a, b)=\min(a, b)$ باشد. این عمل دوتایی تعویض پذیر و شرکت پذیر است و عنصر 7 یک عنصر خنثی برای این عمل می باشد(؟).

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۴. توابع خاص

قضیه ۵-۴. فرض کنیم $f:A*A \rightarrow B$ یک عمل دوتایی باشد. هرگاه f دارای عنصر خنثی باشد، آنگاه عنصر خنثی منحصر به فرد (یکتا) می باشد.

اثبات: اگر x_1 و x_2 هر دو عنصر خنثی باشند، بنابراین $f(x_1, x_2)=x_1$ (x_2 عنصر خنثی) و نیز $f(x_1, x_2)=x_2$(x_1 عنصر خنثی)، بنابراین $x_1=x_2$.

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۴. توابع خاص

محاسبه تعداد عمل های دوتایی بسته روی A

$A=\{a_1, a_2, \dots a_n\}, f:A * A \rightarrow A$

	a_1	a_2	a_3	. . .	a_n
a_1					
a_2	n^2 مدخل، برای هر کدام n انتخاب				
a_3					
.					
.	$\therefore n^{n^2}$ closed binary operations				
.					
a_n					

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۴. توابع خاص

A={a_1, a_2, … a_n}, f:A * A →A

	a_1	a_2	a_3	. . .	a_n
a_1					
a_2					
a_3					
.					
.					
.					
a_n					

$\frac{n^2-n}{2}$ entries

n entries

$\therefore n^n \times n^{\frac{n^2-n}{2}}$ commutative closed binary operations

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۴. توابع خاص

A={a_1, a_2, … a_n}, f:A * A →A

اگر a_1 عنصر خنثی باشد:

	a_1	a_2	a_3	. . .	a_n
a_1	a_1	a_2	a_3	. . .	a_n
a_2	a_2				
a_3	a_3				
.	.				
.	.				
.	.				
a_n	a_n				

$(n-1)^2$ entries

$\therefore \binom{n}{1} n^{(n-1)^2} = n^{(n-1)^2+1}$ closed binary operations with an identity

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۴. توابع خاص

A={a_1, a_2, … a_n}, f:A * A →A

اگر a_1 عنصر خنثی باشد:

	a_1	a_2	a_3	. . .	a_n
a_1	a_1	a_2	a_3	. . .	a_n
a_2	a_2				
a_3	a_3				
.	.				
.	.				
.	.				
a_n	a_n				

$\frac{(n-1)^2-(n-1)}{2}$ entries

n-1 entries

$\therefore \binom{n}{1}\left(n^{n-1}\right)\left(n^{\frac{(n-1)^2-(n-1)}{2}}\right) = n^{\frac{n^2-n+2}{2}}$ commutativ e closed binary operations with an identity

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتری

اصل لانه کبوتری. اگر m کبوتر n لانه را اشغال کنند و m > n ، آنگاه حداقل یک لانه توسط دو کبوتر یا بیشتر اشغال خواهد شد.

برای مثال از هر سه نفر، حداقل دو نفر هم جنس می باشند و از هر ۱۳ نفر حداقل دو نفر در یک ماه به دنیا آمده اند.

مثال ۵-۴۱. یک نوار مغناطیسی شامل 500,000 کلمه حداکثر چهار حرفی (حروف کوچک در الفبای لاتین) می باشد.آیا تمام این کلمات می توانند متمایز باشند؟

تعداد کلمات متفاوت ممکن برابر است با :

$26^4+26^3+26^2+26=475,254 < 500,000$

بنابراین، حداقل یک کلمه تکرار شده است.

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتر

مثال ۵-۴۲. فرض کنیم S زیرمجموعه اعداد صحیح مثبت(Z^+) باشد و $|S|=37$. در این صورت S شامل دو عنصر است که باقیمانده تقسیم آنها بر ۳۶ یکسان است.

$$n=36q+r,\ 0\le r<36$$

۳۶ لانه(r) و ۳۷ کبوتر.

مثال ۵-۴۳. ثابت کنید هرگاه از مجموعه $S=\{1, 2, 3, \ldots, 200\}$ ، ۱۰۱ عدد صحیح انتخاب شود، آنگاه دو عدد صحیح وجود دارد که یکی دیگری را عاد می کند.

اثبات: برای هر عنصر x متعلق به S، می توانیم بنویسیم $x=2^k y$ که $k\ge 0$ و y متعلق به $T=\{1, 3, 5, 7, \ldots, 199\}$ می باشد. چون $|T|=100$ و ۱۰۱ عدد صحیح انتخاب شده است، دو عدد صحیح مختلف به شکل $a=2^m y$ و $b=2^n y$ وجود دارند که یا a|b و یا b|a.

فصل ۵. رابطه ها و توابع

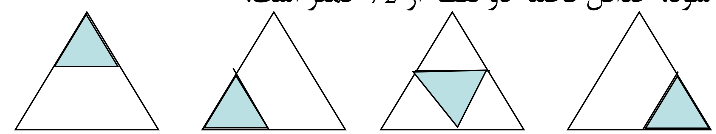
۵-۵. اصل لانه کبوتر

مثال ۵-۴۴. هر زیر مجموعه شش عضوی از مجموعه $S=\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ باید شامل ۲ عنصر با مجموع ۱۰ باشد.

لانه ها: $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$

کبوترها : شش عضو از S.

مثال ۵-۴۵. مثلث ACE متساوی الاضلاع بوده و $AC=1$. اگر در درون این مثلث پنج نقطه اختیار شود، حداقل فاصله دو نقطه از ½ کمتر است.



ناحیه ۱ ناحیه ۲ ناحیه ۳ ناحیه ۴

۵ کبوتر(نقاط)

۴ لانه(ناحیه ها)

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتر

مثال ۵-۴۶. فرض کنیم S مجموعه ای از شش عدد صحیح مثبت باشد که ماکزیمم آنها ۱۴ است. نشان دهید که مجموع همه عناصر در تمام زیرمجموعه های غیر تهی S نمی توانند متمایز باشند.

برای هر زیر مجموعه غیر تهی A از S، مجموع عناصر A که با S_A نشان داده می شود،از رابطه زیر پیروی می کند:

$$1\le S_A \le 9+10+11+12+13+14=69$$

و $2^6-1=63$ زیر مجموعه غیر تهی وجود دارد (تعداد لانه ها بیش از کبوتر ها می باشد).

زیر مجموعه هایی را در نظر می گیریم که کمتر از شش عنصر دارند:

تعداد لانه ها = $10+11+12+13+14=60$

تعداد کبوترها= $2^6-1-1=62$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتر

فرض کنیم که m یک عدد صحیح مثبت و فرد باشد. ثابت کنید عدد صحیح و مثبتی مانند n وجود دارد به طوری که m عدد 2^n-1 را عاد کند.

اثبات. $m+1$ عدد صحیح مثبت زیر را در نظر می گیریم:

$$2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, \ldots , 2^m-1, 2^{m+1}-1$$

طبق اصل لانه کبوتری و الگوریتم تقسیم، اعداد صحیح و مثبتی مانند s, t وجودارند به طوری که $1\le s \le t \le m+1$ و 2^s-1 و 2^t-1 در تقسیم بر m باقیمانده یکسانی دارند. بنابراین:(q_1, q_2 متعلق به اعداد طبیعی هستند)

$$2^s-1=q_1m+r,\ 2^t-1=q_2m+r,$$

$$(2^t-1)-(2^s-1)=(q_2m+r)-(q_1m+r)=(q_2-q_1)m=2^s(2^{t-s}-1)$$

و چون m فرد است، $\gcd(m, 2^s)=1$ و لذا $m|2^{t-s}-1$ و $n=t-s$.

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۵. اصل لانه کبوتر

مثال ۵-۴۸. چهار هفته(۲۸ روز) برای بازی حداکثر ۴۰ دست تنیس وقت داریم و در هر روز باید حداقل یک دست بازی انجام شود. ثابت کنید این بازیها هر طور انجام شوند، چند روز متوالی وجود دارد که در کل آنها دقیقا ۱۵ دست بازی انجام شده است.

بازاء $1 \le i \le 28$ فرض می کنیم x_i تعداد کل دست هایی باشد که از روز شروع بازیها تا پایان روز i اُم انجام شده باشد.بنابراین

$1 \le x_1<x_2<\ldots<x_{28} \le 40 , x_1+15<\ldots<x_{28}+15 \le 55$

از ۵۶ عدد صحیح چون ماکزیمم آنها برابر ۵۵ است، بنابراین دوتای آنها باید یکسان باشند(اصل لانه کبوتری). بنابراین اندیس هایی مانند $1 \le j < i \le 28$ وجود دارند که $x_i = x_j+15$. بنابراین از روز $j+1$ تا پایان روز i دقیقا ۱۵ دست بازی انجام شده اشت.

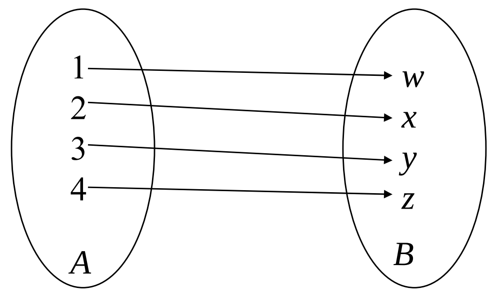
فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

معکوس جمع:u و -u

معکوس ضرب: u و 1/u

تعریف ۵-۱۵. هرگاه $f:A\to B$ ، آنگاه گوییم که f بای ژکتیو یا تناظر یک به یک است اگر f یک به یک و پوشا باشد.



مثال ۵-۵۰.

باید $|A|=|B|$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

تعریف ۵-۱۶. تابع $1_A:A\to A$ با تعریف $1_A(a)=a$ بازاء هر عنصر a متعلق به A، تابع همانی برای A نام دارد.

تعریف ۵-۱۷. اگر $f,g:A\to B$، گوییم f و g مساویند و می نویسیم f=g اگر بازاء تمام اعضاء A داشته باشیم $f(a)=g(a)$.

مثال ۵-۵۱. فرض کنیم $f:Z\to Z, g:Z\to Q$ که در آن برای هر عدد صحیح متعلق به Z، $f(x)=x=g(x)$. اما $f\neq g$! زیرا f یک تابع تناظر یک به یک می باشد، در حالیکه g فقط یک به یک است و پوشا نمی باشد.

مثال ۵-۵۲.توابع $f,g:R\to Z$ را با تعاریف زیر در نظر می گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ if } x\in Z \\ \lfloor x\rfloor+1, \text{ if } x\in R-Z \end{cases} \quad g(x)=\lceil x\rceil, \text{ for all } x\in \mathrm{R}, \text{ then } f=g.$$

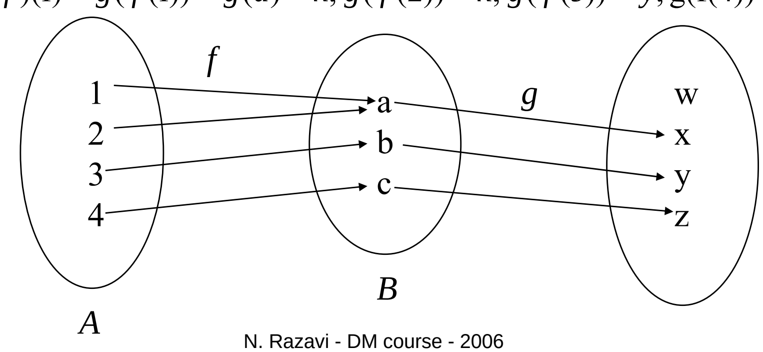
فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

تعریف ۵-۱۸. اگر $f:A\to B$ و $g:B\to C$، تابع **مرکب** را با علامت $gof:A\to C$ نشان داده و بازاء هر عنصر A مانند a، با فرمول $(gof)(a)=g(f(a))$ تعریف می کنیم.

مثال ۵-۵۳.

$$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(a)=x, g(f(2))=x, g(f(3))=y, g(f(4))=z$$



فصل ۵. رابطه ها و توابع

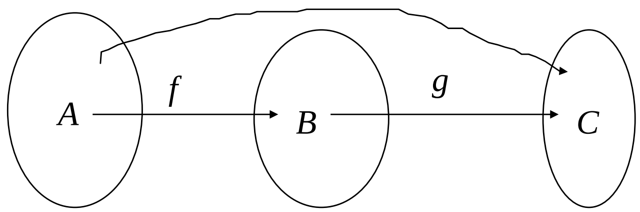
۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

مثال ۵-۵۴. فرض کنیم $f,g:R\rightarrow R$ با تعاریف $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+5$ موجود باشند.دراینصورت $gof(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2+5$ ولی $fog(x)=f(x+5)=(x+5)^2$ و بنابراین ترکیب توابع دارای خاصیت تعویض پذیری نمی باشد.

قضیه ۵-۵. فرض کنیم $f:A\rightarrow B$ و $g:B\rightarrow C$:

(آ) هرگاه f و g یک به یک باشند، آنگاه gof یک به یک است.

(ب) هر گاه f و g پوشا باشند، آنگاه gof پوشا می باشد.



فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

مثال ۵-۵۵. فرض کنیم $f,g,h:R\rightarrow R$ که در آنها:

$$f(x)=x^2,\ g(x)=x+5,\ h(x)=\sqrt{x^2+5}$$

در این صورت :

$$((h\circ g)\circ f)(x)=hg(x^2)=h(x^2+5)=\sqrt{(x^2+5)^2+2}=(h\circ(g\circ f))(x)=h(g(f(x)))$$

در نتیجه:

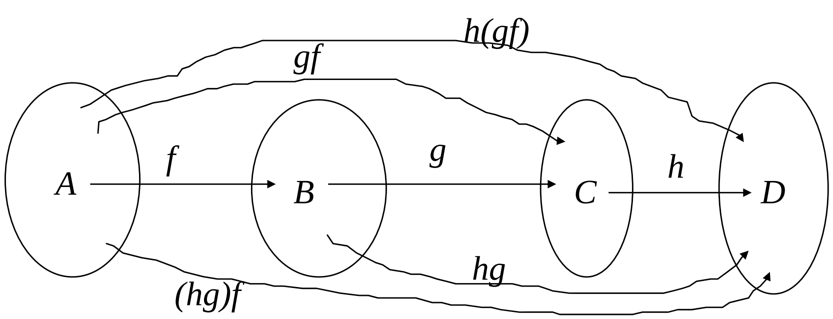
$$(hog)of=ho(gof)$$

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

قضیه ۵-۶. هرگاه $f:A\rightarrow B$ و $g:B\rightarrow C$ و $h:C\rightarrow D$ آنگاه

$$(hog)of=ho(gof)$$



فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

تعریف ۵-۱۹. اگر $f:A\rightarrow A$ ، تعریف می کنیم $f^1=f$ و بازاء هر عدد صحیح مثبت n:

$$f^{n+1}=fo(f^n)$$

(تعریف بازگشتی یا recursive)

مثال ۵-۵۶. فرض کنیم $A=\{1, 2, 3, 4\}$ و $f:A\rightarrow A$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f=\{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 3)\}$$

$$f^2= fof=\{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 1)\},$$

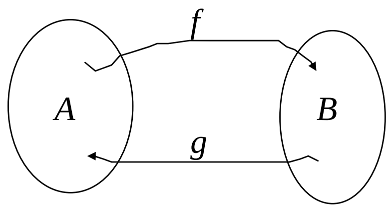
$$f^3= fof^2= \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}=f^n,\ n\geq 3$$

{f^4 و f^5 را محاسبه کنید.}

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

تعریف ۵-۲۱. اگر $f:A\to B$، آنگاه گوییم f **معکوس پذیر** است اگر تابعی مانند $g:B\to A$ چنان باشد که $gof=1_A$ و $fog=1_B$.



فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

مثال ۵-۵۸. فرض کنیم $f,g:R\to R$ به صورت $f(x)=2x+5$ و $g(x)=(1/2)(x-5)$ باشند.در این صورت

$gof(x)=g(f(x))=g(2x+5)=(1/2)(2x+5-5)=x$

و

$fog(x)=f(g(x))=f((1/2)(x-5))=2[(1/2)(x-5)]+5=x$

لذا $fog=1_R$ و $gof=1_R$ و در نتیجه f و g توابعی معکوس پذیر می باشند.

قضیه ۵-۷. هرگاه تابع $f:A\to B$ معکوس پذیر بوده و تابع $g:B\to A$ در $fog=1_B$ و $gof=1_A$ صدق کند، آنگاه این تابع g منحصر به فرد می باشد.

اثبات: اگر $h:B\to A$ نیز معکوس f باشد، بنابراین $foh=1_B$ و $hof=1_A$. در نتیجه $h=ho1_B=ho(fog)=(hof)og=1_Aog=g$.

(چون معکوس f منحصر به فرد است، ما از نماد f^{-1} برای نمایش معکوس f استفاده می کنیم.)

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

قضیه ۵-۸. تابع $f:A\to B$ معکوس پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک و پوشا باشد.

قضیه ۵-۹. هرگاه $f:A\to B, g:B\to C$ توابع معکوس پذیری باشند، آنگاه gof نیز معکوس پذیر است و $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$.

چگونه معکوس یک تابع را محاسبه کنیم؟

مثال ۵-۶۰. $f:R\to R=\{(x, y)|y=mx+b\}$ و m, b اعداد حقیقی و $m\neq 0$.

$$f^{-1}=\{(x,y)\mid y=mx+b\}^c=\{(y,x)\mid y=mx+b\}=\{(x,y)\mid x=my+b\}$$
$$=\{(x,y)\mid y=\frac{1}{m}(x-b)\}.\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{1}{m}(x-b)$$

www.txt.ir

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۶. ترکیب توابع و توابع معکوس

مثال ۵-۶۱. فرض کنیم $f:R\to R^+$ و $f(x)=e^x$. f یک به یک و پوشا ست (نمودار)

$$f^{-1}=\{(x,y)\mid y=e^x\}^c=\{(y,x)\mid y=e^x\}=\{(x,y)\mid x=e^y\}$$
$$=\{(x,y)\mid y=\ln x\}.\therefore\ f^{-1}(x)=\ln x.$$

قضیه ۵-۱۱. فرض کنیم $f:A\to B$ که درآن A و B متناهی اند و $|A|=|B|$. در این صورت احکام زیر هم ارزند:

(آ) f یک به یک است.

(ب) f پوشاست.

(ج) f معکوس پذیر است.

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۷. پیچیدگی محاسباتی

problem ↔ algorithm 1
problem → algorithm 2
•
•
•
problem → algorithm k

کدام بهتر است ؟

نیاز به **معیار** داریم.

معیار: **پیچیدگی زمانی** یا **پیچیدگی حافظه**

یک تابع مانند $f(n)$ که n اندازه ورودی می باشد.

یک الگوریتم را در سه حالت تحلیل می کنیم:

- بهترین حالت(معمولا استفاده نمی شود)
- حالت متوسط(پیچیده می باشد)
- بدترین حالت

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۷. پیچیدگی محاسباتی

تعریف ۵-۲۳. فرض کنیم $f,g:Z^+\rightarrow R$. گوییم g بر f مسلط است(یا f تحت تسلط g) اگر یک ثابت حقیقی و مثبت مانند m و یک ثابت صحیح مثبت مانند k وجود داشته باشند به طوریکه بازاء هر $n\geq k$:

$|f(n)|\leq m|g(n)|$

(این را به صورت $f=O(g)$ نمایش می دهیم)

Big-Oh Form	Name
$O(1)$	constant
$O(\log_2 n)$	Logarithmic
$O(n)$	Linear
$O(n\log_2 n)$	$n\log_2 n$
$O(n^2)$	Quadratic
$O(n^3)$	Cubic
$O(n^m), m=0,1,2,3,\ldots$	Polynomial
$O(c^n), c>1$	Exponential
$O(n!)$	Factorial

harder

فصل ۵. رابطه ها و توابع

۵-۷. پیچیدگی محاسباتی

	Order of Complexity					
problem size n	$\log_2 n$	n	$n\log_2 n$	n^2	2^n	$n!$
2	1	2	2	4	4	2
16	4	16	64	256	6.5×10^4	2.1×10^{13}
64	6	64	384	4096	1.84×10^{19}	$>10^{89}$

$$1.8\times10^{19}\text{ microseconds}\cong 2.14\times10^{8}\text{ days}\cong 5845\text{ centuries}$$

Summaries (*m* objects, *n* containers)

Objects Are Distinct	Containers Are Distinct	Some Containers May Be Empty	Number of Distributions
Yes	Yes	Yes	n^m
Yes	Yes	No	$n!S(m,n)$
Yes	No	Yes	$S(m,1)+S(m,2)+\cdots+S(m,n)$
Yes	No	No	$S(m,n)$
No	Yes	Yes	$\binom{n+m-1}{m}$
No	Yes	No	$\binom{n+(m-n)-1}{m-n}=\binom{m-1}{m-n}=\binom{m-1}{n-1}$

Put one object in each container first.

فصل ۵. رابطه ها و توابع

- تمرینات
  - ۲۷
  - ۶و ۱۸
  - ۱۴
  - ۱۸و ۲۰

فصل هفتم
رابطه ها: برخورد دوم

سید ناصر رضوی
e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir
۱۳۸۵

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۱. اگر A و B مجموعه باشند، یک **رابطه** از A به B زیرمجموعه ای است از A*B. زیرمجموعه های A*A را روابط بر A می نامیم.

مثال ۷-۱. (آ) رابطه R بر مجموعه Z را با aRb یا R (a, b) اگر a≤b تعریف می کنیم(این رابطه را بر Q یا R نیز می توان تعریف نمود- ولی بر C نه).

(ب) فرض کنیم n متعلق به مجموعه اعداد صحیح مثبت(Z^+) باشد. به ازاء اعداد صحیح x و y ، رابطه R به پیمانه n با xRy اگر x-y مضربی از n باشد تعریف می شود. مثلا بازاء n=7 داریم:

9R2, -3R11, 4R0, $3 \not R 7$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۲. رابطه R بر مجموعه A **انعکاسی** است اگر بازاء هر عضو از A مانند x، (x, x) در R باشد.

مثال ۷-۴. برای $A=\{1, 2, 3, 4\}$ رابطه R بر A انعکاسی است اگر و فقط اگر :

$R \supseteq \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

بنابراین $R_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ بر A انعکاسی نیست ولی R_2 بر A انعکاسی می باشد.

$R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \le y\}$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

مثال ۷-۵. اگر A یک مجموعه متناهی با |A|=n باشد، $|A*A|=n^2$ و درنتیجه 2^{n^2} رابطه بر A وجود دارد. چند تا از این روابط انعکاسی می باشند؟

اگر $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ، برای آنکه رابطه R بر A انعکاسی باشد باید تمام (a_i, a_i) را که در آن 1≤i≤n در R قراردهیم. بقیه n^2-n زوج مرتب می توانند در R باشند و یا نباشند، در نتیجه تعداد روابط منعکس بر A با n عنصر برابر است با:

$$2^{n^2-n}$$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۳. رابطه R بر مجموعه A را **متقارن** نامیم اگر بازاء هر x و y متعلق به A:

$$(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R,\ \text{ for all } x,y\in A$$

مثال ۷-۶. بازاء $A=\{1, 2, 3\}$ داریم:

(آ) $R_1=\{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$، متقارن است ولی انعکاسی نیست.

(ب) $R_2=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$، انعکاسی است ولی متقارن نیست.

(پ) $R_3=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ و

$R_4=\{=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2,3), (3, 2)\}$ هر دو بر A هم انعکاسی و هم متقارن می باشند.

(ت) $R_5=\{(1,1), (2, 3), (3, 3)\}$، نه انعکاسی و نه متقارن است.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

برای شمارش روابط متقارن بر $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، $A*A$ را به صورت $A_1\cup A_2$ می نویسیم که در آن

$A_1=\{(a_i, a_i)|1\le i \le n\}$, $A_2=\{(a_i, a_j)|\ 1 \le i, j \le n, i\ne j\}$

$|A_2|=|A*A|-|A_1|=n^2-n=n(n-1)$

مجموعه A_2 شامل $(1/2)(n^2-n)$ زیر مجموعه S_{ij} به شکل $\{(a_i,a_j),(a_j,a_i)\}$ است که در آن $1 \le i<j \le n$.

بنابراین، تعداد روابط متقارن بر A:
$$2^n.2^{(1/2)(n^2-n)}=2^{(1/2)(n^2+n)}$$

و هم چنین تعداد روابط انعکاسی و متقارن بر A:
$$2^{(1/2)(n^2-n)}$$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۴. به ازاء مجموعه A، رابطه R بر A را **متعدی** می نامیم اگر به ازاء هر سه عضو از A مانند x, y, z داشته باشیم:

$$(x,y)\in R,(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R,\quad \text{for all } x,y,z\in A$$

مثال ۷-۸. رابطه R بر Z^+ که به صورت aRb اگر a|b ، انعکاسی و متعدی می باشد اما متقارن نیست.(۲ با ۶ رابطه دارد ولی ۶ با ۲ خیر)

مثال ۷-۹. رابطه R را بر مجموعه Z به صورت aRb اگر $ab\ge0$، تعریف می کنیم. بنابراین، R انعکاسی و متقارن است ولی متعدی نمی باشد.(3R0و 0R-7 اما 3 با -7 رابطه ندارد.)

نکته: فرمول کلی برای تعداد کل روابط متعدی بر یک مجموعه متناهی وجود ندارد.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۵. فرض کنیم R یک رابطه بر A باشد. R **پادمتقارن** است اگر بازاء هر دوعضو از A مانند a, b:

$$(a,b)\in R,(b,a)\in R \Rightarrow a=b,\quad \text{for all } a,b\in A$$

مثال ۷-۱۱. رابطه زیر مجموعه بودن: ARB، اگر A زیر مجموعه B باشد، انعکاسی، پاد متقارن و متعدی می باشد ولی متقارن نیست.

مثال ۷-۱۲. اگر $A=\{1, 2, 3\}$ و $R=\{(1,2), (2, 1), (2, 3)\}$ آنگاه R نه متقارن است و نه پاد متقارن، ولی $R_1=\{(1, 1), (2, 2)\}$ هم متقارن می باشد و هم پاد متقارن.(تعداد این نوع روابط چیست؟)

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

برای شمارش روابط پادمتقارن بر $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ، $A*A$ را به صورت $A_1 \cup A_2$ می نویسیم که در آن

$A_1=\{(a_i, a_i)|1\le i \le n\}$, $A_2=\{(a_i, a_j)|\ 1 \le i, j \le n, i\ne j\}$

$|A_2|=|A*A|-|A_1|=n^2-n=n(n-1)$

مجموعه A_2 شامل $(1/2)(n^2-n)$ زیر مجموعه S_{ij} به شکل $\{(a_i,a_j),(a_j,a_i)\}$ است که در آن $1 \le i<j \le n$. سه انتخاب برای این نوع از زیر مجموعه ها داریم: انتخاب یکی از دوتا و یا هیچ کدام؛ بنابراین:

بنابراین، تعداد روابط پاد متقارن بر A: $2^n.3^{(1/2)(n^2-n)}$

و هم چنین تعداد روابط انعکاسی و پادمتقارن بر A: $3^{(1/2)(n^2-n)}$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۱. بازنگری رابطه ها: خواص رابطه ها

تعریف ۷-۶. گوییم رابطه R بر مجموعه A یک رابطه **ترتیب جزئی** است اگر R انعکاسی، پادمتقارن و متعدی باشد.(اگر برای هر a, b متعلق به A، aRb و یا bRa در این صورت R را یک رابطه **ترتیب تام** گوییم.). مانند روابط $\le,\ge,\subseteq,\supseteq,\ldots$

مثال ۷-۱۵. رابطه عاد کردن بر Z^+ رابطه ترتیب جزئی می باشد.

تعریف ۷-۷. **رابطه هم ارزی** R بر A رابطه ای است انعکاسی، متقارن و متعدی.

مثال: رابطه aRb اگر a mod n=b mod n (هم نهشتی به پیمانه n)

نکته : رابطه **تساوی** هم یک رابطه ترتیب جزئی و هم یک رابطه هم ارزی می باشد.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۸. اگر A، B و C مجموعه بوده و R_1 رابطه ای از A به B و R_2 رابطه ای از B به C باشد، آنگاه رابطه ترکیب R_1oR_2 رابطه ایست از A به C که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_1oR_2=\{(x,z)\,|\,(x,y)\in R_1,(y,z)\in R_2\}$$

(توجه: ترکیب دو رابطه در جهت عکس ترکیب توابع نوشته می شود)

مثال ۷-۱۷. فرض کنیم:

A={1, 2, 3, 4}, B={w, x, y, z}, C={5, 6, 7}

رابطه R_1 از A به B و رابطه R_2 از B به C را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$R_1=\{(1, x), (2, x), (3, y), (3, z)\}$, $R_2=\{(w, 5), (x, 6)\}$, $R_3=\{(w, 5), (w, 6)\}$

در این صورت :

$R_1oR_2=\{(1, 6), (2, 6)\}$, $R_1oR_3=\varnothing$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

قضیه ۷-۱. فرض کنیم A, B, C و D مجموعه بوده و R_1 رابطه ای از A به B، R_2 رابطه ای از B به C و R_3 رابطه ای از C به D باشد. در این صورت:

$$R_1o(R_2oR_3)=(R_1oR_2)oR_3=R_1oR_2oR_3$$

تعریف ۷-۹. بازاء مجموعه A و رابطه R بر A ، توانهای R را به طور بازگشتی تعریف می کنیم:

(آ) $R^1=R$؛

(ب) $R^{n+1}=RoR^n$ (بازاء n متعلق به Z^+)

مثال ۷-۱۹. اگر $A=\{1, 2, 3, 4\}$ و $R=\{(1, 2),(1, 3),(2, 4),(3, 2)\}$ ، آنگاه

$R^2=\{(1, 4),(1, 2), (3, 4)\}$, $R^3=\{(1, 4)\}$, $R^n=\varnothing$ for $n\ge4$

رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۱۰. **ماتریس صفر - یک** (با استفاده از عملیات بولین ۱ = ۱ + ۱)

مثال ۷-۲۰.ماتریس E یک ماتریس ۴*۳(صفر-یک)می باشد.

$e_{11}=1$ و $e_{23}=0$ و $e_{31}=1$

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۷-۲۱. فرض کنیم:

A={1, 2, 3, 4}, B={w, x, y, z}, C={5, 6, 7}

رابطه R_1 از A به B و رابطه R_2 از B به C را به صورت زیر در نظر می گیریم:

R_1={(1, x), (2, x), (3, y), (3, z)}, R_2={(w, 5), (x, 6)},

در این صورت :

ما تریس رابطه

$$M(R_1)=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\ \\\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cccc}w & x & y & z\end{array}\end{array},\quad M(R_2)=\begin{array}{c}w\\x\\y\\z\\ \\\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}5 & 6 & 7\end{array}\end{array}$$

$$M(R_1)\cdot M(R_2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=M(R_1\circ R_2)$$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

فرض کنیم A مجموعه ای با |A|=n و R رابطه ای بر A باشد.اگر M(R) ماتریس رابطه R باشد، در این صورت:

(آ) M(R)=**0**(ماتریس با تمام درایه های صفر)، اگر و فقط اگر R=Ø؛

(ب) M(R)=**1**(ماتریس با تمام درایه های یک)، اگر و فقط اگر R=A*A ؛

(پ) به ازائ هر n متعلق به Z^+، $M(R^n)=[M(R)]^n$.

تعریف ۷-۱۱. **تعریف حق تقدم** (E≤F): می گوییم E پیش از F است هرگاه تمام درایه های E کوچکتر یا مساوی درایه های متناظر شان در F باشند.

مثال ۷-۲۳.

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۷-۱۲. ماتریس واحد:برای هر n متعلق به Z^+ و $I_n=(\delta_{ij})_{n*n}$، I_n ماتریس n*n (صفر-یک) است که:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{if } i=j\\ 0, & \text{if } i\neq j\end{cases}$$

تعریف ۷-۱۳. **ترانهاده**: فرض کنیم $A=(a_{ij})_{m*n}$ یک ماتریس ۰-۱ باشد. ترانهاده A که به صورت A^{tr} نوشته می شود، ماتریس$(a^*_{ij})_{n*m}$است که در آن بازاء هر $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ داشته باشیم:$a^*_{ij}=a_{ij}$.

مثال ۷-۲۴.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ A^{tr}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

قضیه ۲-۷. فرض کنیم A مجموعه ای با $|A|=n$ و R رابطه ای بر A باشد.اگر M(R) ماتریس رابطه R باشد، در این صورت

(آ) R انعکاسی است اگر و فقط اگر $I_n \le M$.

(ب) R متقارن است اگر و فقط اگر $M=M^{tr}$.

(پ) R متعدی است اگر و فقط اگر $M.M=M^2 \le M$.

(ت) R پاد متقارن است اگر و فقط اگر $M \cap M^{tr} \le I_n$.(اشتراک با min تعریف می شود $(0\cap0=0\cap1=1\cap0=0,\ 1\cap1=1)$

رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

اثبات (پ) از قضیه ۲-۷. فرض کنیم $M^2 \le M$. اگر $(x,y),(y,z) \in R$

$$\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1_{xy} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1_{yz} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1_{xz} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \le M$$

بنابراین $(x,z) \in R$. برعکس اگر R متعدی بوده و M ماتریس رابطه ای باشد، s_{xz} را در سطر (x) و ستون (z) از M^2 با $s_{xz}=1$ در نظر می گیریم. بازاء s_{xz} مساوی ۱ در M^2 باید حداقل یک $y \in A$ باشد که در M، $m_{xy}=m_{yz}=1$. این فقط وقتی رخ می دهد که xRy و yRz. پس از متعدی بودن R نتیجه می شود که xRz. بنابراین $M^2 \le M$.

رابطه ها: برخورد دوم

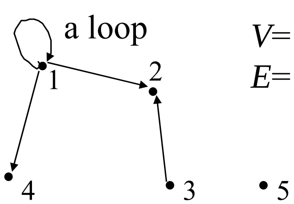
۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

تعریف ۱۴-۷. گرافهای جهت دار $G=(V, E)$

مثال ۲۵-۷.

$V=\{1,2,3,4,5\}$

$E=\{(1,1),(1,2),(1,4),(3,2)\}$

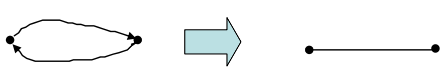


رأس تنها (isolated)

۱ **مجاور** به رأس ۲ است.

۲ **مجاور** از رأس ۱ است.

گراف بدون جهت:لبه ها جهت ندارند.



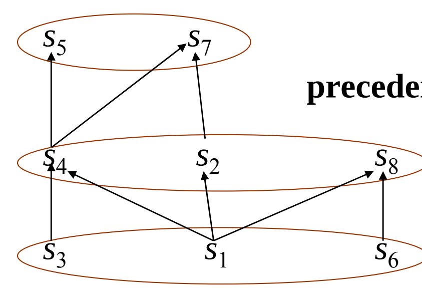
رابطه ها: برخورد دوم

۲-۷. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۲۶-۷. با توجه به برنامه زیر یک گراف جهت دار $G=(V,E)$ ایجاد کنید که درآن $V=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6,s_7,s_8\}$ و (s_i, s_j) در E می باشد اگر s_i باید قبل از s_j انجام شود.

(s_1) $b := 2;$
(s_2) $c := b+2;$
(s_3) $a := 1;$
(s_4) $d := a*b+5;$
(s_5) $e := d-1;$
(s_6) $f := 7;$
(s_7) $e := c+d;$
(s_8) $g := b*f;$

precedence graph



۱ پردازنده: ۸ واحد زمانی

۲ پردازنده: ۴ واحد زمانی

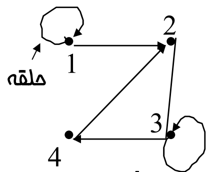
۳ پردازنده : ۳ واحد زمانی

رابطه ها: برخورد دوم

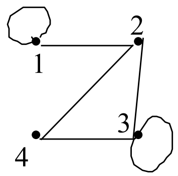
۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۷-۲۷.

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2)\}$



نمایش گراف جهت دار



گراف بدون جهت مربوطه

گراف همبند(متصل): بین هر دو راس یک **مسیر** وجود دارد.

مسیر: رأس تکراری مجاز نمی باشد.

دور(چرخه): یک مسیر بسته (رأس شروع و پایان یکسان هستند)

تعریف ۷-۱۵. گراف همبند قوی:بین هر دو رأس یک مسیر جهت دار وجود دارد.

گراف بالا همبند قوی نمی باشد(مسیر جهت داری از ۳ به ۱ وجود ندارد).

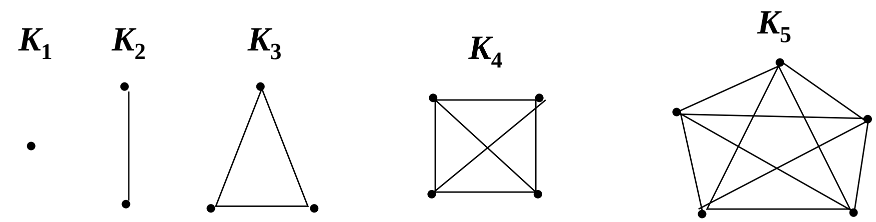
رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۷-۲۸. **مولفه ها**

دو مولفه ای   یک مولفه

مثال ۷-۲۹. **گراف کامل(تام)** : بین هر دو رأس یک یال وجود دارد.



رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

directed graphs ⟷ relations

⇩ ⇩

adjacency matrices ⟷ relation matrices

مثال ۷-۳۰. اگر R یک رابطه روی مجموعه متناهی A باشد، R **انعکاسی** است اگر و فقط اگر گراف جهت دار آن در هر رأس شامل حلقه باشد.

مثال ۷-۳۱. اگر R یک رابطه روی مجموعه متناهی A باشد، R **متقارن** است اگر و فقط اگر گراف جهت دار آن فقط شامل حلقه ها و یال های بدون جهت باشد.

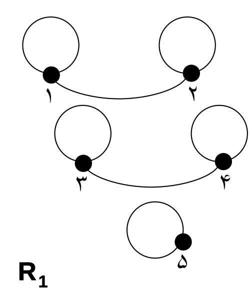
مثال ۷-۳۱. اگر R یک رابطه روی مجموعه متناهی A باشد، R **متعدی** است اگر و فقط اگر در گراف جهت دار آن مسیری از x به y باشد، یال (x, y) نیز موجود باشد.

مثال ۷-۳۱. اگر R یک رابطه روی مجموعه متناهی A باشد، R **پاد متقارن** است اگر و فقط اگر در گراف جهت دار غیر از حلقه ها یال بدون جهتی وجود نداشته نباشد.

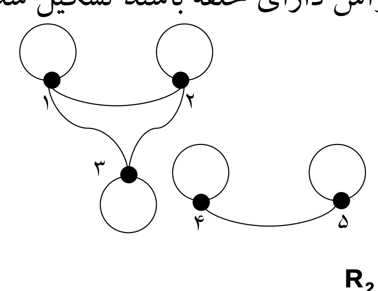
رابطه ها: برخورد دوم

۷-۲. ماتریس های صفر-یک و گراف های جهت دار

مثال ۷-۳۳. یک رابطه بر یک مجموعه متناهی A **هم ارزی** می باشد اگر و فقط اگر گراف بدون جهت مربوطه اش یک گراف کامل باشد که در هر رأس شامل حلقه باشد، یا از اجتماع از هم جدایی از گرا فهای کامل که در هر رأس دارای حلقه باشند تشکیل شده باشد.



R_1



R_2

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

natural counting: **N**
$x+5=2$: **Z**
$2x+3=4$: **Q**
$x^2-2=0$: **R**
$x^2+1=0$: **C**

توان بیشتر در حل معادلات چند جمله ای

ضمن عبور از R به C چیزی را از دست می دهیم :

توانايي "مرتب سازی" عناصر در C.

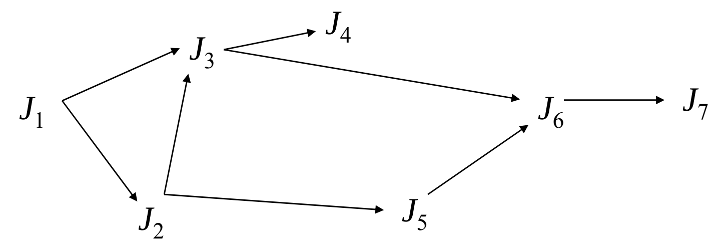
فرض کنیم R یک رابطه بر A باشد. زوج (A, R) را یک مجموعه **جزئی مرتب** (جم poset) می نامیم اگر رابطه R بر A یک رابطه ترتیب جزئی (تعریف ۶-۷) باشد.

مثال ۷-۳۴. فرض کنیم A مجموعه دروس ارائه شده در یک دانشکده باشد. رابطه R را بر A بوسیله xRy تعریف می کنیم اگر x و y درس یکسانی باشند و یا x پیش نیاز y باشد. در این صورت R مجموعه A را به یک مجموعه مرتب جزئی تبدیل می کند.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-۳۶. شبکه PERT (Performance Evaluation and Review Technique)



CPM:

زودترین زمان شروع و **دیر ترین زمان شروع** هر کار محاسبه می شود

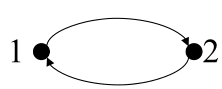
کارهایی که زودترین زمان شروع و دیرترین زمان شروعشان برابر است **بحرانی** هستند.

تمام کارهای بحرانی **مسیر بحرانی** را تشکیل می دهند.

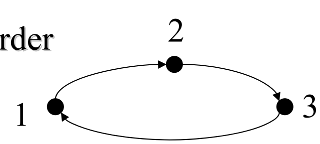
رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

not partial order



پاد متقارن نیست

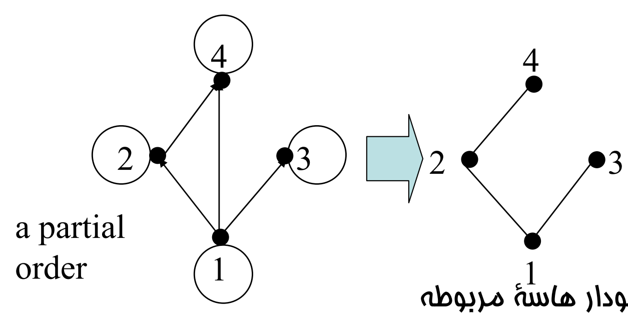


با فرض متعدی بودن:
پاد متقارن نیست

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-۳۷.



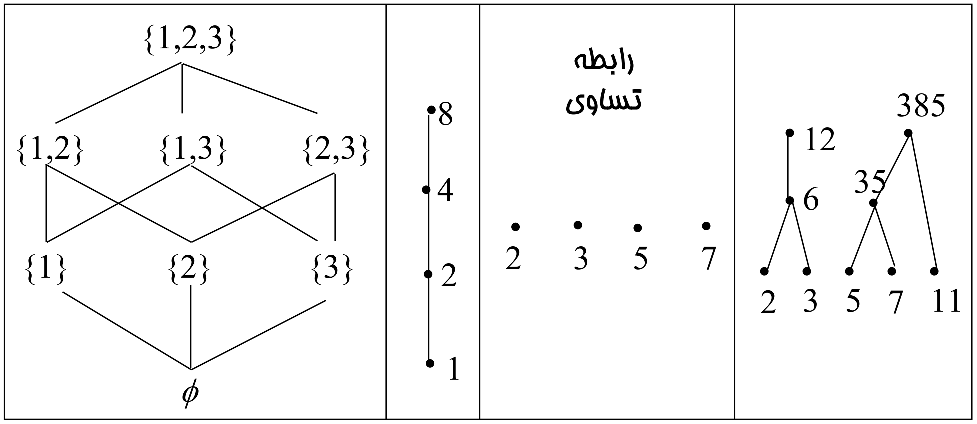
نمودار هاسهٔ مربوطه

از پایین به بالا خوانده می شود.اتصالات مربوط به خواص انعکاسی (حلقه ها) و متعدی بودن نمایش داده نمی شوند.

رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-۳۸.



رابطه زیر مجموعه بودن — رابطه عاد کردن — رابطه عاد کردن

رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

تعریف ۷-۱۶. اگر (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، گوییم A **ترتیب تام** است اگر بازاء هر x,y∈A داشته باشیم xRy یا yRx.در این صورت R یک رابطه ترتیب تام می باشد.

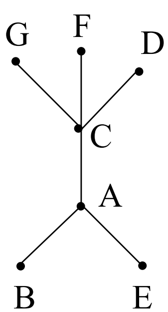
برای مثال ≤ و ≥ برای N ، Z، Q و R ترتیب تام هستند ولی برای C ترتیب جزئی هستند.

مثال. در اسلاید قبل فقط رابطه عاد کردن برای A={1, 2, 4, 8} ترتیب تام است.

سوال: آیا می توان عناصر یک مجموعه مرتب جزئی را به طریقی لیست نمود.

مرتب سازی برای یک مجموعه ترتیب تام

رابطه ها: برخورد دوم



نمودار هاسه برای تعدادی فعالیت

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مرتب سازی توپولوژیکی یک مجموعه مرتب جزئی

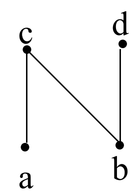
چگونه فعالیتها را یک به یک اجرا کنیم به طوریکه ترتیب جزئی نقض نشود؟

برای مثال: BEACGFD, EBACFGD

رابطه ها: برخورد دوم

۳-۷. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

دنباله مرتب سازی توپولوژیکی (تعمیم خطی)



a^bc^d: 2 jumps

a^bd^c: 2 jumps

b^ac^d: 2 jumps

b^a^d^c: 3 jumps

bd^ ac: 1 jumps

یافتن یک تعمیم خطی با حداقل پرشهای ممکن

NP-Complete

رابطه ها: برخورد دوم

۷–۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

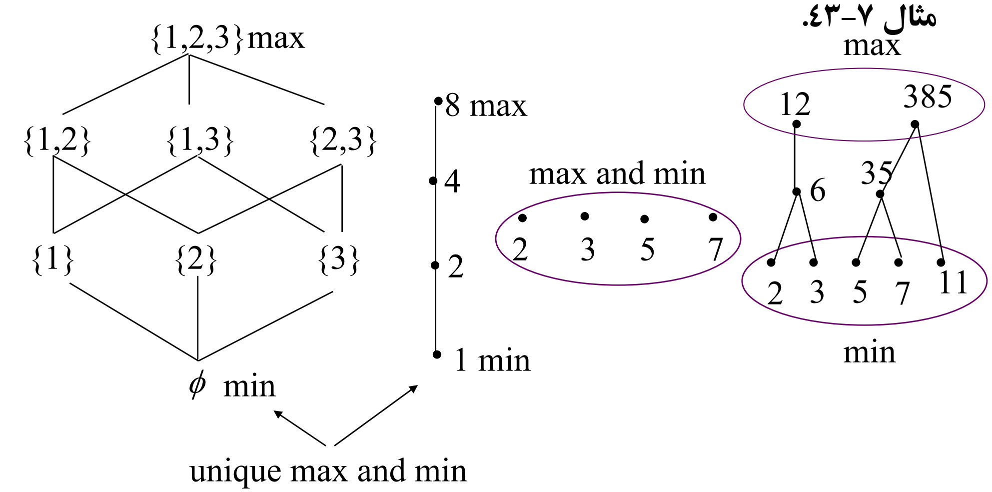
تعریف ۷–۱۷. اگر (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه عنصر $x \in A$ را یک عنصر **ماکزیمال** A نامیم اگر بازاء هر $a \in A$، $a \neq x \Rightarrow x \not R a$ (به غیر از خودش با هیچ عنصری در رابطه نباشد). عنصر $y \in A$ یک عنصر **مینیمال** A است اگر بازاء هر $b \in A$ و $b \neq y$، $b \not R y$ (هیچ عنصری غیر از خودش با آن رابطه نداشته باشد).

مثال ۷–۴۲. $(Z, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی بدون عنصر ماکزیمال و مینیمال است.و $(N, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی با عنصر مینیمال صفر و بدون عنصر ماکزیمال است.

رابطه ها: برخورد دوم

۷–۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷–۴۳.



رابطه ها: برخورد دوم

۷–۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

قضیه ۷–۳. هرگاه (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی بوده و A متناهی باشد، آنگاه A هم عنصر ماکزیمال و هم عنصر مینیمال دارد.

(اثبات؟)

در الگوریتم مرتب سازی توپولوژیکی هر بار یک عنصر ماکزیمال و یا هر بار یک عنصر مینیمال می یابیم.

رابطه ها: برخورد دوم

۷–۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

تعریف ۷–۱۸. هرگاه (A, R) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه عنصر $x \in A$ را **کوچکترین** عنصر می نامیم اگر بازاء هر $a \in A$، xRa . عنصر y □ A را **بزرگترین** عنصر می گوییم اگر بازاء هر a □ A، aRy.

مثال ۷–٤٤. فرض کنیم $U=\{1,2,3\}$ و R رابطه زیرمجموعه باشد.

(آ) بازاء $A=P(U)$ ، مجموعه مرتب جزئی (A,R) مجموعه $\emptyset$ را به عنوان کوچکترین عنصر و مجموعه U را به عنوان بزرگترین عنصر دارد.

(ب) فرض کنیم B مجموعه تمام زیرمجموعه های غیر تهی U باشد. مجموعه مرتب جزئی $(B, \subseteq)$ دارای بزرگترین عنصر U می باشد. در اینجا کوچکترین عنصر نداریم ولی سه عنصر مینیمال خواهیم داشت.

(پ) فرض کنیم C مجموعه تمام زیرمجموعه های سره U باشد. در این صورت مجموعه مرتب جزئی $(C, \subseteq)$ دارای مجموعه تهی به عنوان کوچکترین عنصر می باشد و بزرگترین عنصر وجود ندارد، اما سه عنصر ماکزیمال خواهیم داشت.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

قضیه ۷-٤. هرگاه مجموعه جزئی مرتب (A, R) دارای بزرگترین(کوچکترین) عنصر باشد، این عنصر منحصر به فرد است.

اثبات. فرض کنیم $x,y\in A$ و هر دو بزرگترین عنصر باشند. در این صورت (x,y) و (y,x) هر دو در R هستند و چون R پادمتقارن است $x=y$. اثبات درمورد کوچکترین عنصر به همین شکل می باشد.

تعریف ۷-۱۹. فرض کنیم (A, R) یک مجموعه جزئی مرتب باشد به طوری که $B\subseteq A$. عنصر $x\in A$ را **کران پایینی** B می گوییم اگر بازاء هر $b\in B$ ، xRb. به همین نحو عنصر $y\in A$ را **کران بالایی** B گوییم اگر بازاء هر $b\in B$، bRy.

عنصر $x'\in A$ را **بزرگترین کران پایینی** B (glb) گوییم اگر کران پایینی B بوده و بازاء هرکران پایینی دیگر B مانند x'' داشته باشیم $x''Rx'$.

به همین نحو، عنصر $y'\in A$ را **کوچکترین کران بالایی** B (lub) گوییم اگر کران بالایی B بوده و بازاء هرکران بالایی دیگر B مانند y'' داشته باشیم $y'Ry''$.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

مثال ۷-٤٦. فرض کنیم $U=\{1,2,3,4\}$ و $A=P(U)$ و R رابطه زیر مجموعه بر A باشد. هرگاه $B=\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ باشد، آنگاه $\{1,2\}$، $\{1,2,3\}$، $\{1,2,4\}$ و $\{1,2,3,4\}$ همه کرانهای بالایی B می باشند ولی $\{1,2\}$ کوچکترین کران بالایی است. در حالی که بزرگترین کران پایینی B مساوی $\emptyset$ است که در B نیست.

مثال ۷-۴۷. فرض کنیم R رابطه"کوچکتر یا مساوی" در مجموعه جزئی مرتب (A, R) باشد.

(آ) هرگاه $A=\mathbf{R}$(real numbers) و $B=[0, 1]$، آنگاه B دارای glb مساوی صفر و lub برابر یک است. توجه کنید که $0,1 \in B$. بازاء $C=(0, 1]$ ، C دارای glb برابر صفر و lub برابر ۱ می باشد، و $1 \in C$ اما صفر متعلق به C نمی باشد.

(ب) اگر $A=\mathbf{R}$ و $B=\{q \in Q \mid q^2 < 2\}$، در این صورت B دارای lub مساوی $\sqrt{2}$ و glb برابر $-\sqrt{2}$ است.و هیچ یک از این اعداد حقیقی در B نیستند.

(پ) حال فرض می کنیم که $A=Q$ و B همانند قسمت (ب) باشد. در اینجا B نه glb دارد و نه lub.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۳. ترتیب های جزئی: نمودارهای هاسه

قضیه ۷-۵. هرگاه (A, R) یک مجموعه جزئی مرتب بوده و $B\subseteq A$ ، آنگاه B حداکثر یک glb (lub) دارد.

تعریف ۷-۲۰. مجموعه جزئی مرتب (A, R) را یک **شبکه** (lattice) نامیم اگر بازاء هر $x,y\in A$ ، عناصر $\text{lub}\{x, y\}$ و $\text{glb}\{x, y\}$ هر دو در A موجود باشند.

مثال ۷-٤٨. بازاء $A=\mathbf{N}$ و $x,y\in N$، xRy را با $x\le y$ تعریف می کنیم. در این صورت $\text{lub}\{x, y\}=\max\{x, y\}$ و $\text{glb}\{x, y\}=\min\{x, y\}$ و بنابراین $(N, \le)$ یک شبکه می باشد.

مثال ۷-٤٩. بازاء مجموعه جزئی مرتب مثال ۷-۴۴(آ) ، هرگاه $S,T\subseteq U$ و $\text{glb}\{S, T\}=S\cap T$ و $\text{lub}\{S, T\}=S\cup T$، آنگاه $(P(U), \subseteq)$ یک شبکه است.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۴. روابط هم ارزی و افراز ها

تعریف ۷-۲۱. مجموعه A و مجموعه اندیس گذار I داده شده اند. همچنین بازاء هر $i\in I$، $\emptyset\neq A_i\subseteq A$. در این صورت $\{A_i\}_{i\in I}$ یک **افراز** A است اگر

(آ) $A=\cup A_i$ و $i\in I$ و

(ب) بازاء هر $i,j\in I$ که $i\neq j$، $A_i\cap A_j=\emptyset$.

هر زیر مجموعه A_i را یک **سلول** یا **بلوک** افراز می نامیم.

مثال ۷-۵۱. اگر $A=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$، آنگاه هرمورد زیر یک افراز A می باشد:

(آ) $A_1=\{1, 2, 3, 4, 5\}, A_2=\{6, 7, 8, 9, 10\}$.

(ب) $A_1=\{1, 2, 3\}, A_2=\{4, 6, 7, 9\}, A_3=\{5, 8, 10\}$.

(پ) $A_i=\{i, i+5\}, 1\le i\le 5$.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۴. روابط هم ارزی و افراز ها

تعریف ۷-۲۲. فرض کنیم R یک رابطه هم ارزی بر مجموعه A باشد. بازاء هر $x \in A$، **رده هم ارزی** (کلاس هم ارزی) x با $[x]$ نشان داده شده و بوسیله $[x]=\{y \in A | yRx\}$ تعریف می شود.

مثال ۷-۵۳. رابطه R را بر Z با xRy اگر $4|(x-y)$ تعریف می کنیم. برای این رابطه هم ارزی داریم:

$$[0]=\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}=\{4k | k \in Z\}$$
$$[1]=\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}=\{4k+1 | k \in Z\}$$
$$[2]=\{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}= \{4k+2 | k \in Z\}$$
$$[3]=\{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}=\{4k+3 | k \in Z\},$$

$\{[0], [1], [2], [3]\}$ یک افراز Z می باشد.

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۴. روابط هم ارزی و افراز ها

مثال ۷-۵٤. فرض کنیم برای هر $a, b \in Z$ ، aRb اگر $a^2=b^2$. بنابراین R یک رابطه هم ارزی می باشد(چرا؟). راجع به افراز نظیر Z چه می توان گفت؟

به طور کلی بازاء هر $n \in Z^+$ ، $[n]=[-n]=\{n, -n\}$ و بنابراین : $Z=\bigcup_{n=0}^{\infty}[n].$

قضیه ۷-٦. هرگاه R یک رابطه هم ارزی بر مجموعه A بوده و $x,y \in A$، آنگاه

(آ) $x \in [x]$؛

(ب) xRy اگر و فقط اگر $[x]=[y]$؛ و

(پ) $[x]=[y]$ یا $[x] \cap [y]=\emptyset$.

www.txt.ir

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۴. روابط هم ارزی و افراز ها

مثال ۷-۵۸. اگر رابطه هم ارزی R بر $A=\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ افراز $A=\{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5, 7\} \cup \{6\}$ را ایجاد کند ، R چیست؟

$$R=(\{1,2\}*\{1,2\}) \cup (\{3\}*\{3\}) \cup (\{4, 5, 7\}*\{4, 5, 7\}) \cup (\{6\}*\{6\}),$$
$$|R|=2^2+1^2+3^2+1^2=15.$$

قضیه ۷-۷. هرگاه A یک مجموعه باشد، آنگاه

(آ) هر رابطه هم ارزی مانند R بر A یک افراز برA را ایجاد می کند، و

(ب) هر افراز A یک رابطه هم ارزی مانند R بر A را به دست می دهد.

قضیه ۷-۸. بازاء هر مجموعه A یک تناظر یک به یک بین مجموعه روابط هم ارزی بر Aو مجموعه افرازهای A وجود دارد.

www.txt.ir

رابطه ها: برخورد دوم

۷-۴. روابط هم ارزی و افراز ها

مثال ۷-۵۹. (آ) اگر $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، چند رابطه بر A هم ارزی اند.

تناظر یک به یک میان روابط هم ارزی و افرازها

$$\therefore \sum_{i=1}^{6} S(6,i)=203$$

چند رابطه هم ارزی در $1,2 \in [4]$ صدق می کنند.

۱ و ۲و ۴ در یک افراز هستند و

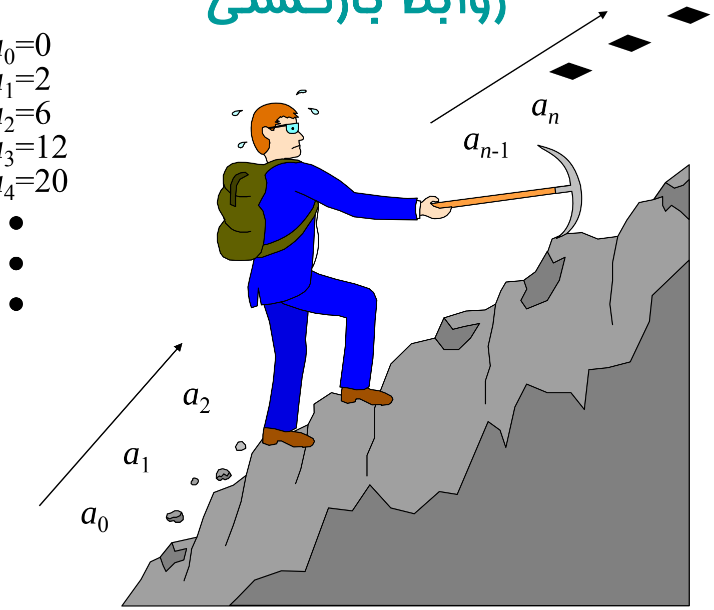
$$\therefore \sum_{i=1}^{4} S(4,i)=15.$$

فصل دهم
روابط بازگشتی

سید ناصر رضوی
Email: razavi@comp.iust.ac.ir
۱۳۸۵

روابط بازگشتی

$a_0=0$
$a_1=2$
$a_2=6$
$a_3=12$
$a_4=20$
•
•
•



روابط بازگشتی

- ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول

تصاعد هندسی

اگر a_0، a_1، a_2 و ... یک تصاعد هندسی باشد، آنگاه:

$$\frac{a_1}{a_0}=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\cdots=r$$

به عنوان مثال $a_{n+1}=3a_n$ و $a_n \ge 0$ یک رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول می باشد.

تصاعد ریاضی $a_{n+1}=a_n+3$ غیر همگن می باشد.

روابط بازگشتی

- ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول

دنباله های بسیاری وجود دارند که در $a_{n+1}=3a_n$ صدق می کنند. مثلاً ۵، ۵، ۴۵، ۱۳۵ و ... یا ۷، ۲۱، ۶۳، ۱۸۹و ... .
برای تعیین یک دنباله مشخص باید یکی از جملات دنباله را بدانیم. **(شرط مرزی، شرط اولیه)**

$$a_{n+1}=3a_n, n\ge 0, a_0=5$$

بیانگر دنباله ۵، ۱۵، ۴۵، ... می باشد.

راه حل عمومی رابطه بازگشتی $a_{n+1}=da_n$ و $a_0=A$ منحصر بفرد و به صورت زیر می باشد:

$$a_n=Ad^n, n\ge 0$$

روابط بازگشتی

• ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول

مثال ۱۰ – ۲. یک بانک ۶ درصد سود سالانه به صورت ماهیانه پرداخت می کند. اگر شخصی در روز اول ماه می ۱۰۰۰ دلار پس انداز کند، اندوخته این شخص پس از یک سال چه مقدار خواهد بود؟

اگر p_n میزان اندوخته در پایان ماه n اُم باشد، آنگاه:

$p_{n+1}=p_n+(6\%/12)p_n=1.005p_n$ و $p_0 = 1000$

بنابراین $p_{12}=\$1000(1.005)^{12}=\$1061.68$

یک رابطه بازگشتی **غیرخطی**

مثال ۱۰ – ۳. محاسبه مقدار a_{12} به شرطی که $a^2_{n+1} = a^2_n$ و $a_0 = 2$

روابط بازگشتی

• ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول

رابطه بازگشتی خطی مرتبه اول غیرهمگن

مثال ۱۰ – ۴. پیچیدگی الگوریتم مرتب سازی حبابی

$a_n=a_{n-1}+(n-1),\ n>1,\ a_1=0,$

a_n = تعداد مقایسه ها برای مرتب سازی n عدد

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= n-1\\
a_{n-1} - a_{n-2} &= n-2\\
a_{n-2} - a_{n-3} &= n-3\\
&\vdots\\
+\quad a_2 - a_1 &= 1\\
\hline
a_n &= 1+2+3+\ldots+(n-1)=(n^2-n)/2
\end{aligned}$$

روابط بازگشتی

• ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول

یافتن الگوی بازگشتی

مثال ۱۰- ۵

$a_0=0$
$a_1=2$
$a_2=6$
$a_3=12$
$a_4=20$
•
•
•

$$\begin{aligned}
a_1 - a_0 &= 2\\
a_2 - a_1 &= 4\\
a_3 - a_2 &= 6\\
a_4 - a_3 &= 8\\
&\vdots\\
+)\quad a_n - a_{n-1} &= 2n\\
\hline
a_n &= n^2+n
\end{aligned}$$

روابط بازگشتی

• ۱۰-۱ رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه-اول

ضرایب غیر ثابت

مثال ۱۰- ۶

$$a_n = n \cdot a_{n-1},\ n \ge 1,$$
$$a_0 = 1.$$

روابط بازگشتی

- ۱۰ – ۲. رابطه بازگشتی خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت

شکل کلی:

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = 0$$

با قرار دادن $a_n = cr^n$ در رابطه فوق داریم (c و r هر دو مخالف صفر):

$$C_n cr^n + C_{n-1} cr^{n-1} + C_{n-2} cr^{n-2} = 0$$

$$C_n r^2 + C_{n-1} r + C_{n-2} = 0$$

معادله فوق را **معادله مشخصه** رابطه بازگشتی می گوییم.

سه حالت برای ریشه های معادله مشخصه:

۱) اعداد حقیقی متمایز (r_1, r_2): $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$

۲) اعداد مختلط مزدوج (r_1, r_2): $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$

۳) ریشه مضاعف (r_1, r_1): $a_n = (c_1 + c_2 n) r_1^n$

روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۸.

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} = 6a_{n-2}, n \ge 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \Rightarrow a_n = c_1 2^n + c_2 (-3)^n$$

$$\begin{cases} a_0 = c_1 2^0 + c_2(-3)^0 = 1 \\ a_1 = c_1 2^1 + c_2(-3)^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - 3c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_n = 2^n$$

روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۹.

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \ge 0 \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

$$r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

روابط بازگشتی

مثال ۱۰ – ۱۰. به ازای $n \ge 0$ داریم $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$. اگر a_n بیانگر تعداد زیرمجموعه های S باشد به طوری که شامل دو عدد متوالی نباشند، آنگاه a_n را محاسبه نمایید.

اگر $A \subseteq S$ و A در a_n شمرده شده باشد، در این صورت دو امکان وجود دارد:

الف) $n \notin A$: در این صورت $(n-1) \notin A$ و $A - \{n\}$ باید در a_{n-2} شمرده شده باشد. (به بیان دیگر، به ازاي تمام مجموعه هاي شمرده شده در a_{n-2} مي توانيم n را به آنها اضافه کنیم و مجموعه حاصل را در a_n بشمریم)

ب) $n \in A$: در این صورت A در a_{n-1} نیز شمرده شده است.

بنابراین داریم:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

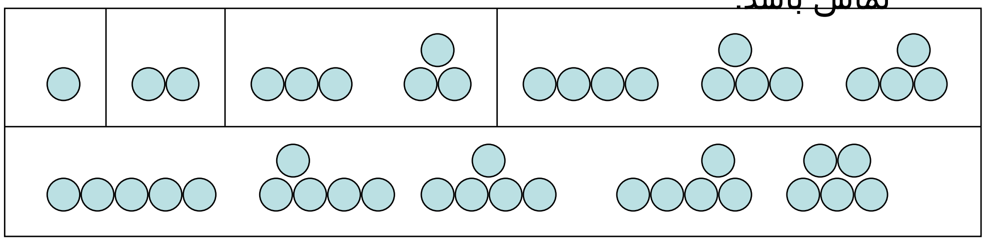
که همان سري فيبوناچي مي باشد. با توجه به این که $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ بنابراین:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

روابط بازگشتی

مراقب باشید که از روي تعداد کمي نمونه خاص (و یا حتي تعداد زیاد) نتیجه گیري نکنید

مثال ۱۰-۱۴. تعدادي سکه را در ردیف هایي قرار دهید به طوري که هر سکه در ردیف بالاي ردیف اول، با دوسکه در سطر زیرین خود در تماس باشد.



$a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, a_6=8, \ldots$ Is $a_n=F_n$? **NO**

روابط بازگشتی

تعمیم به مرتبه های بالاتر

مثال ۱۰-۱۵

$$2a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n, n \geq 0, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$$

روابط بازگشتی

حالت (ب) ریشه های مختلط

قضیه دموآور

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, n \geq 0.$$

If $z = x + iy \in \mathbb{C}, z \neq 0$, then

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\therefore z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

روابط بازگشتی

حالت (ب) ریشه های مختلط

Ex. 10.17 $a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}), n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 2.$
The C.E. is $r^2 - 2r + 2 = 0$ with roots $1 \pm i$.

$$\therefore a_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n = c_1\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n +$$
$$c_2\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = c_1\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) +$$
$$c_2\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right) =$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^n\left[(c_1+c_2)\cos\frac{n\pi}{4} + i(c_1-c_2)\sin\frac{n\pi}{4}\right].$$

With $a_0 = 1, a_1 = 2$, we have $c_1 + c_2 = 1$ and $c_1 - c_2 = -i$. Therefore,

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

روابط بازگشتی

حالت (ج) ریشه های حقیقی مکرر

مثال ۱۰-۱۹.

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \text{ where } n \geq 0 \text{ and } a_0 = 1, a_1 = 3$$

به طور کلی جواب مرتبط با یک ریشه r از چندی m به شکل زیر می باشد:

$$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$$

روابط بازگشتی

۱۰-۳ روابط بازگشتی غیر همگن

$$C_n a_n + C_{n-1} a_{n-1} + C_{n-2} a_{n-2} = f(n)$$

فرض می کنیم که $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ که در آن $a_n^{(h)}$ جواب کلی مرتبط با جواب همگن و $a_n^{(p)}$ جواب غیر همگن می باشد. در این صورت

$$C_n(a_n^{(h)} + a_n^{(p)}) + C_{n-1}(a_{n-1}^{(h)} + a_{n-1}^{(p)}) +$$
$$C_{n-2}(a_{n-2}^{(h)} + a_{n-2}^{(p)}) = (C_n a_n^{(h)} + C_{n-1} a_{n-1}^{(h)} + C_{n-2} a_{n-2}^{(h)}) +$$
$$(C_n a_n^{(p)} + C_{n-1} a_{n-1}^{(p)} + C_{n-2} a_{n-2}^{(p)}) = 0 + f(n) = f(n),$$

روابط بازگشتی

مثال ۱۰-۲۲.

$$a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n), \text{ where } n \geq 1 \text{ and } a_0 = 2$$

$$a_n^{(h)} = c(3^n)$$

$$a_n^{(p)} = A(7^n)$$

بنابراین:

$$A(7^n) - 3A(7^{n-1}) = 5(7^n), A = \frac{35}{4}$$

$$a_n^{(p)} = \frac{5(7^{n+1})}{4}$$

$$a_n = c(3^n) + \frac{5(7^{n+1})}{4}$$

$$a_0 = 2, c = -\frac{27}{4}$$

روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۲۳ .

$$a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n), n \geq 1, a_0 = 2$$

$$a_n^{(h)} = c(3^n)$$

$$a_n^{(p)} = Bn3^n$$

$$Bn3^n - 3B(n-1)3^{n-1} = 5(3^n)$$

$$Bn - B(n-1) = 5$$

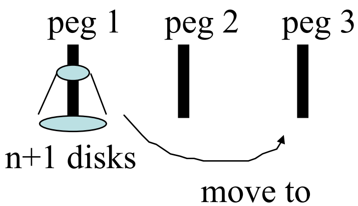
$$B = 5$$

$$a_n = (c + 5n)3^n$$

$$a_0 = 2, c = 2$$

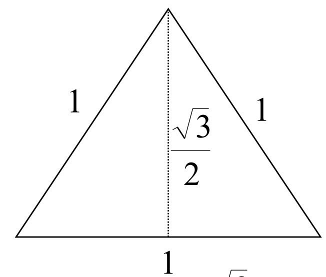
روابط بازگشتی

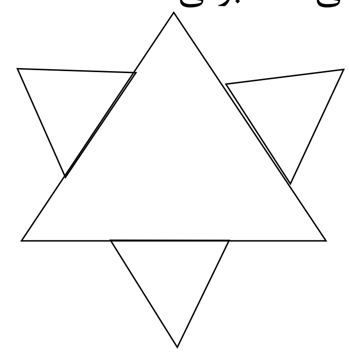
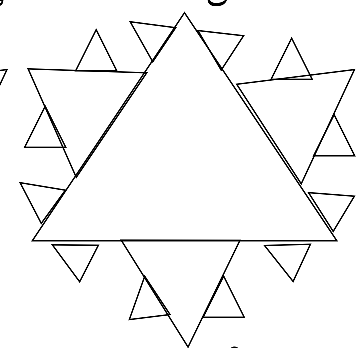
- مثال ۱۰- ۲۴ . برج های هانوی



روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۲۷. منحنی دانه برفی



area: $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \qquad a_2 = a_1 + 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2$$

روابط بازگشتی

- مثال ۱۰-۲۷. منحنی دانه برفی

$$a_{n+1} = a_n + \left[4^n(3)\right]\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 = a_n + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$a_n^{(h)} = A(1)^n = A, a_n^{(p)} = B\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$a_n = \frac{1}{5\sqrt{3}}\left[6 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right].$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{1}{1-\frac{4}{9}}$$

روابط بازگشتی

خلاصه

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
c, a constant	A, a constant
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in Z^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in R$	Ar^n
$\sin \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$\cos \alpha n$	$A \sin \alpha n + B \cos \alpha n$
$n^t r^n$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin \alpha n$	$r^n (A \sin \alpha n + B \cos \alpha n)$
$r^n \cos \alpha n$	$r^n (A \sin \alpha n + B \cos \alpha n)$

اگر $f(n)$ شامل r^n باشد و r یک ریشه معادله مشخصه با چندی k باشد، حاصل در n^k ضرب می شود

روابط بازگشتی

فرض کنید که در یک میهمانی n نفر حضور دارند و هر نفر دقیقاً یک بار با هریک از افراد دیگر (به جز خودش) دست می دهد.
اگر a_n بیانگر تعداد کل دست دادن ها باشد، بنابراین:

$$a_{n+1}=a_n+n,\ a_2=1$$

پس:

$$a_n^{(h)} = c(1)^n = c$$
$$a_n^{(p)} = n(A_1 n + A_0)$$

The result is $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dbinom{n}{2}$

روابط بازگشتی

مثال ۱۰-۳۱

$$a_{n+2} - 10a_{n+1} + 21a_n = f(n), n \ge 0$$
$$a_n^{(h)} = c_1 3^n + c_2 7^n$$

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
5	A_0
$3n^2 - 2$	$A_3 n^2 + A_2 n + A_1$
$7(11)^n$	$A_4 11^n$
$31r^n, r \ne 3,7$	$A_5 r^n$
$6(3)^n$	$A_6 n 3^n$
$2(3)^n - 8(9)^n$	$A_7 n 3^n + A_8 9^n$
$4(3)^n + 3(7)^n$	$A_9 n 3^n + A_{10} n 7^n$

فصل یازدهم
نظریه گراف

سید ناصر رضوی
e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir
۱۳۸۵

نظریه گراف

- کاربردها در علوم کامپیوتری
  - طراحی مدارهای منطقی
  - هوش مصنوعی
  - زبانهای صوری
  - گرافیک کامپیوتری
  - ...

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۱. تعاریف و مثالها

تعریف ۱۱-۱. فرض کنیم V یک مجموعه متناهی و غیرتهی بوده و $E \subseteq V*V$. زوج (V, E) را یک **گراف جهت دار** (بر V) می نامیم که در آن V مجموعه **رئوس** یا **گره ها** بوده و E مجموعه **لبه ها** (**یال ها**) می باشد. برای نمایش چنین گرافی می نویسیم $G = (V, E)$.

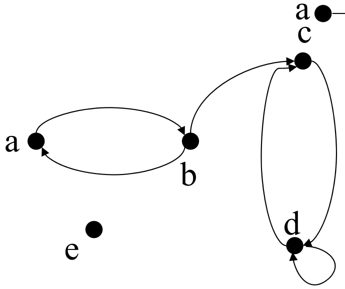
اگر زوج مرتب (a, b) متعلق به E باشد، آنگاه a را **مجاور به** b و b را **مجاور از** a می نامیم و به شکل این نمایش می دهیم: a → b

مثال:گراف جهت دار

V={a, b, c, d, e}

E={(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d)}

G=(V, E)

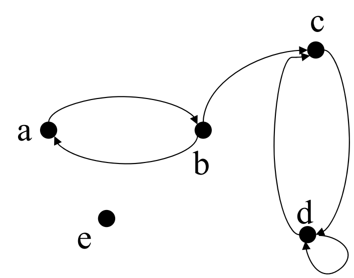


فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۱. تعاریف و مثالها

حلقه(loop): هر یالی که از یک رأس به همان رأس ترسیم شود مانند یال (d, d).

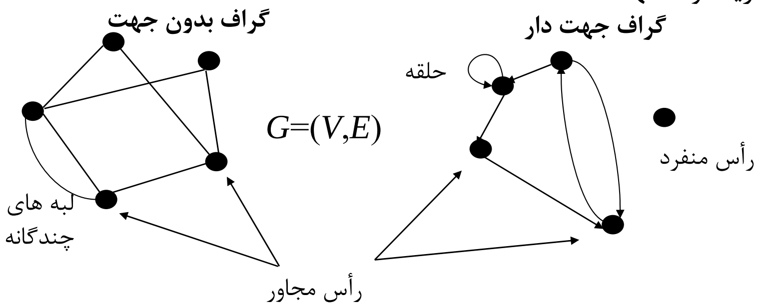
رأس منفرد: رأسی که از آن یالی نگذرد مانند e.



گراف بدون جهت: اگر V یک مجموعه متناهی و غیرتهی و E مجموعه ای باشد که هر عضو آن یک زیرمجموعه دو عضوی از V باشد، در این صورت زوج (V, E) را یک گراف بدون جهت می نامیم.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۱. تعاریف و مثالها

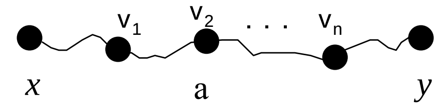


گراف ساده: یک گراف بدون جهت و بدون حلقه و بدون لبه های چندگانه

درجه یک رأس: تعداد لبه های متصل به آن رأس (درجه ورودی و خروجی)

در گرا ف ساده: $\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2|E|$

فصل ۱۱. نظریه گراف



۱۱-۱. تعاریف و مثالها

مسیر(path): رأس تکراری مجاز نیست.

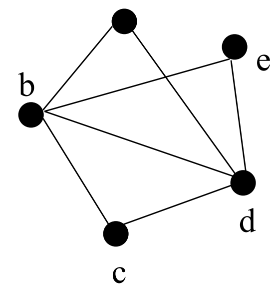
a-b-c-d-e

راه(trail): لبه تکراری مجاز نیست.

a-b-c-d-e-b-d

گردش(walk): بدون محدودیت.

a-b-d-a-b-c



طول: تعداد لبه ها در مسیر، راه، گردش

مدار(circuit) : راه بسته (x=y)- مانند a-b-c-d-b-e-d-a

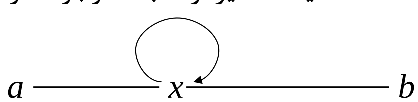
دور(cycle): مسیر بسته (x=y)- مانند a-b-c-d-a

فصل ۱۱. نظریه گراف

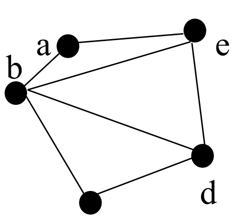
۱۱-۱. تعاریف و مثالها

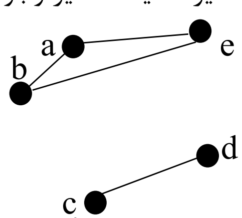
قضیه ۱۱-۱. فرض کنیم G=(V, E) یک گراف بدون جهت بوده و a, b∈V و a≠b. هر گاه یک راه از a به b موجود باشد، آنگاه یک مسیر از a به b وجود خواهد داشت.

با حذف دورها در رأسهای تکراری



تعریف ۱۱-۴. فرض کنیم G=(V, E) یک گراف بدون جهت باشد. G را **همبند** گوییم اگر بین هر دو رأس متمایز G یک مسیر وجود داشته باشد.





گراف ناهمبند با دو مؤلفه

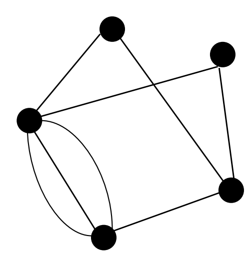
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۱. تعاریف و مثالها

تعریف ۱۱-۵. در گراف G تعداد مؤلفه های G با $k(G)$ نشان داده می شود.

$$1 \le k(G) \le |V|$$

تعریف ۱۱-۶. چند گراف (گراف چندگانه)



چندگراف با چندی ۳

فصل ۱۱. نظریه گراف

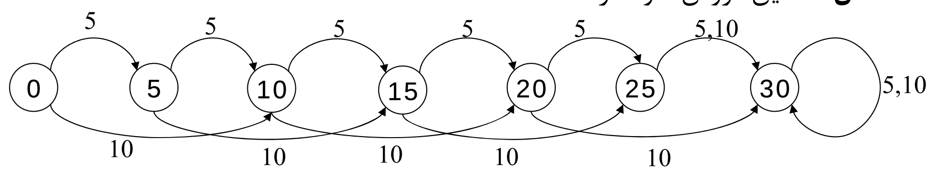
- **گراف وزن دار**

"شامل اطلاعات بیشتری علاوه بر رئوس و یالها می باشد."

مثال: در نقشه جاده های یک کشور که به صورت گراف نشان داده است ممکن است به هر یال عددی بیانگر فاصله بین دو شهر منسوب کنیم. یا به هر رأس عددی که بیانگر جمعیت آن شهر می باشد منسوب کنیم.

مثال: ممکن است درگرافی که بیانگر نتایج یک دوره مسابقات تنیس است تاریخ و یا امتیاز مسابقه را به هر یال نسبت دهیم.

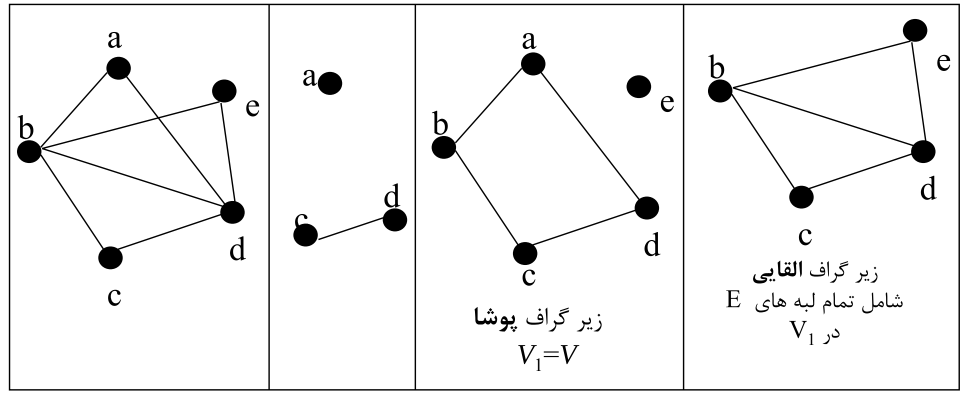
مثال: ماشین فروش خودکار



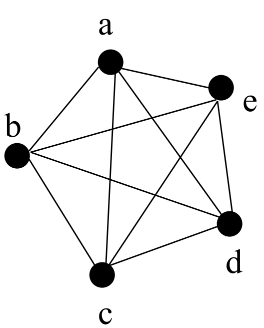
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۲. زیرگرافها، متمم ها و یکریختی گرافها

تعریف ۱۱-۷. هرگاه $G=(V, E)$ یک گراف باشد، آنگاه گراف $G_1=(V_1, E_1)$ یک **زیرگراف** G نام دارد اگر $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$ و $E_1 \subseteq E$ که در آن هر لبه در E_1 تنها با رئوس در V_1 تلاقی داشته باشد.



فصل ۱۱. نظریه گراف

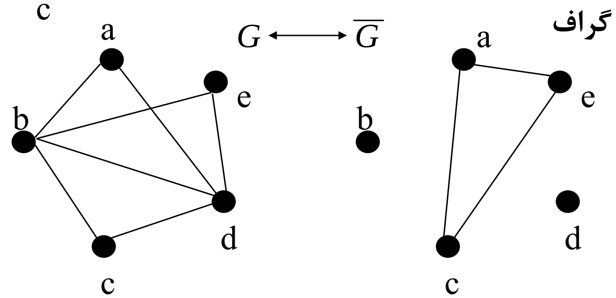


K_5

۱۱-۲. زیرگرافها، متمم ها و یکریختی گرافها

تعریف ۱۱-۱۱. **گراف کامل** : یک گراف بدون جهت و بدون حلقه که در آن بین هر دو رأس متمایز یک لبه وجود دارد. (k_n)

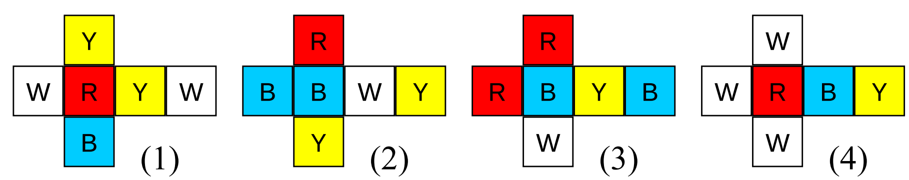
تعریف ۱۱-۱۲. **متمم گراف**



فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۲. زیرگرافها، متمم ها و یکریختی گرافها

مثال ۷-۱۱. **جنون آنی:** چهار مکعب داریم که هر یک از شش وجه آنها با یکی از رنگهای قرمز(R)، سفید(W)، آبی(B)یا زرد(Y)، رنگ شده است.هدف بازی قرار دادن مکعبها در یک ستون چهارتایی است به طوریکه هر چهار رنگ در هر یک از چهار طرف ستون قرار گیرد.

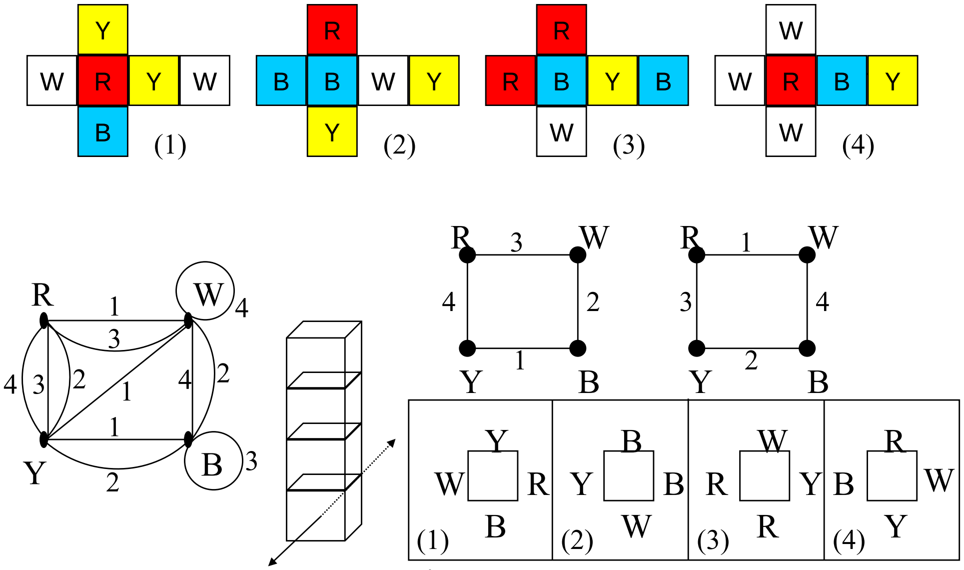


تعداد امکانهای مختلف= $(3)(24)(24)(24)=41,472$

معکب پایینی

۶ وجه با چهار دوران

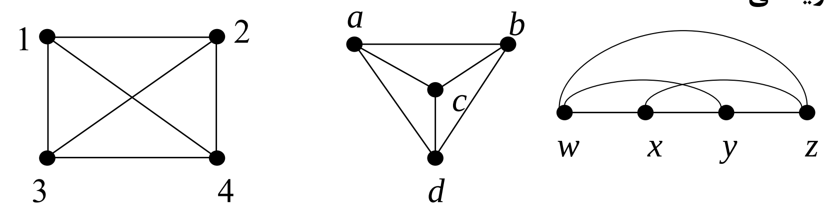
فصل ۱۱. نظریه گراف



فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۲. زیرگرافها، متمم ها و یکریختی گرافها

یکریختی

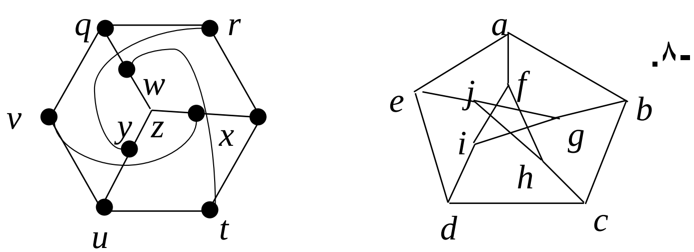


تعریف ۱۱-۳. فرض کنیم G_1 و G_2 دوگراف بدون جهت باشند. تابع $f{:}V_1 \rightarrow V_2$ را یک **یک ریختی گرافها** گوییم اگر (آ) f یک به یک و پوشا باشد. (ب) بازاء هر $a,b \in V_1$، $\{a, b\} \in E_1$ اگر و فقط اگر $\{f(a), f(b)\} \in E_2$. در صورت وجود f، دوگراف G_1 و G_2 را **یکریخت** گویند.

نکته: یکریختی مجاورت ها را حفظ می کند.

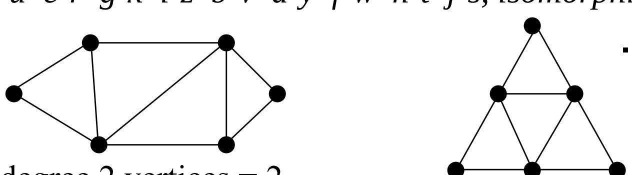
فصل ۱۱. نظریه گراف

مثال ۱۱-۸.



a-q c-u e-r g-x i-z b-v d-y f-w h-t j-s, isomorphic

مثال ۱۱-۹.



degree 2 vertices = 2

degree 2 vertices=3

آیا می توانید الگوریتمی برای تشخیص یک ریختی بیان کنید؟

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

رأس با درجه یک: رأس آویزان

قضیه ۱۱-۲. هرگاه $G=(V, E)$ یک گراف ساده یا یک چندگراف بدون جهت باشد،آنگاه

$$\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2|E|$$

نتیجه ۱۱-۱. در یک گراف ساده یا چند گراف بدون جهت، تعداد رئوس از درجه فرد باید زوج باشد.

مثال ۱۱-۱۱. گراف منظم. یک گراف بی جهت (یا چند گراف) که در آن درجه تمام رئوس یکسان باشد.

آیا ممکن است یک گراف منظم ۴ با ۱۰ لبه داشته باشیم؟

$4|V|=2|E|=20 \Rightarrow |V|=5$

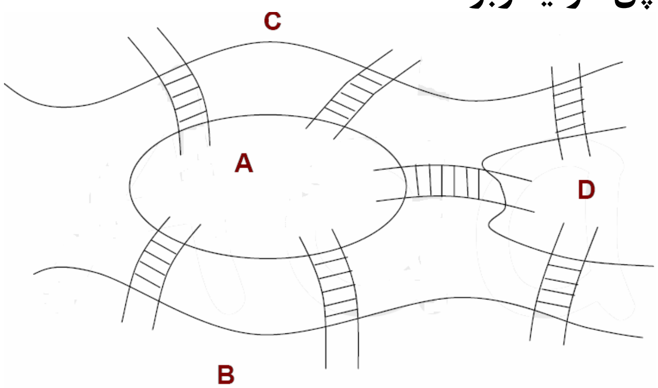
با ۱۵ لبه چطور؟

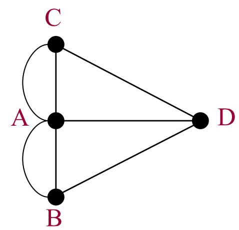
$4|V|=2|E|=30 \rightarrow$ غیر ممکن

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

مثال ۱۱-۲. **هفت پل کونیگزبرگ**





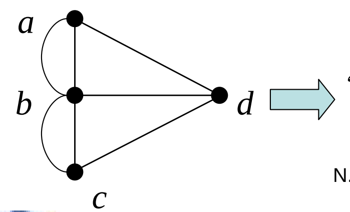
می خواهیم راهی پیدا کنیم که شهر را دور زده و از هر پل درست یک بار عبور کنیم و سپس به نقطه شروع بازگردیم.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

تعریف ۱۱-۱۵. فرض کنیم G=(V,E) یک گراف یا چند گراف بدون جهت و بدون رأس منفرد باشد.گوییم G دارای **مدار اویلری** است اگر مداری در G باشد که از هر لبه گراف درست یک بار عبور کند. اگر یک راه باز از a به b در G موجود باشد که از هر لبه مدار درست یک بار گذر کند، آنرا یک **راه اویلری** گوییم.

قضیه ۱۱-۳. اگر G یک گراف یا چند گراف بدون جهت و بدون رأس منفرد باشد، آنگاه G دارای مدار اویلری است اگر و فقط اگر G همبند بوده و درجه هر رأس در G زوج باشد.



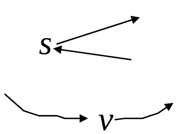
درجه تمام رئوس فرد است. بنابراین برای مسأله هفت پل کونیگزبرگ مدار اویلری وجود ندارد.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

مدار اویلری ⟵ همبند و درجه زوج

بدیهی



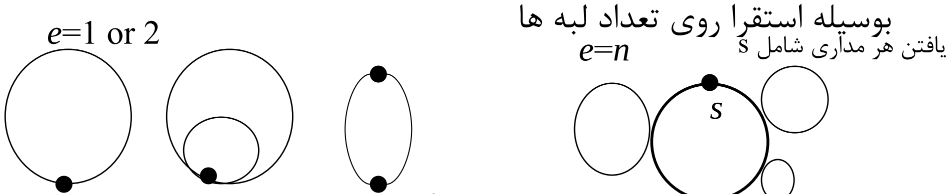
برای رأس شروع s

برای رئوس دیگر

همبند و درجه رئوس زوج ⟵ مدار اویلری

بوسیله استقرا روی تعداد لبه ها

یافتن هر مداری شامل s



فصل ۱۱. نظریه گراف

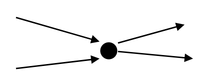
۱۱-۳. درجه رأسی :راه ها و مدارهای اویلری

آیا می توانید الگوریتمی برای ساختن مدار اویلری بیان کنید؟

نتیجه ۱۱-۲. هرگاه G یک گراف یا چندگراف بدون جهت و بدون رأس منفرد باشد، آنگاه G دارای راه اویلری است اگر و فقط اگر G همبند بوده و درست دو رأس از درجه فرد داشته باشد.

$a \xrightarrow{\text{یک لبه اضافه می کنیم}} b$ a و b : درجه فرد

قضیه ۱۱-۴. هرگاه G یک گراف یا چندگراف جهت دار و بدون رأس منفرد باشد، آنگاه G دارای مدار اویلری جهت دار است اگر و فقط اگر G همبند بوده و برای هر $v \in V$ ، in-degree(v)=out-degree(v)



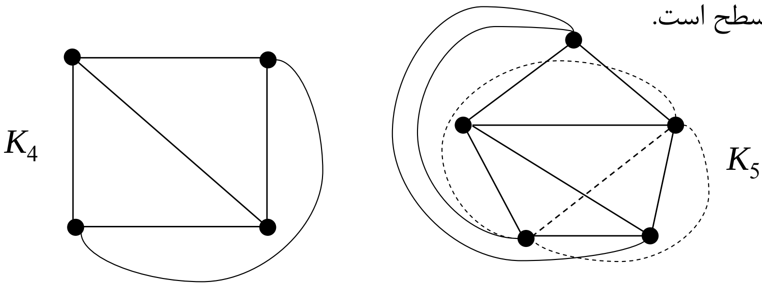
one in, one out

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۱۷. گراف(یا چند گراف) G را **مسطح** نامیم اگر G را بتوان در یک صفحه طوری رسم نمود که لبه های آن فقط در رئوس G متقاطع باشند. یک چنین ترسیمی از G، **تعبیه** G در صفحه نام دارد.

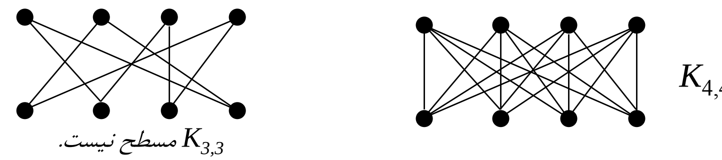
مثال ۱۱-۱۵و ۱۱-۱۶. گرافهای K_1 ، K_2 ، K_3 و K_4 مسطح می باشند ، K_n بازاء $K>4$ نامسطح است.

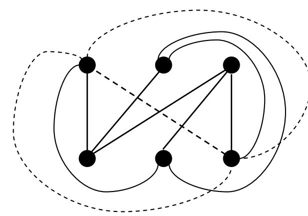


فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۱۸. گراف دوبخشی و گراف دوبخشی کامل($K_{m,n}$)



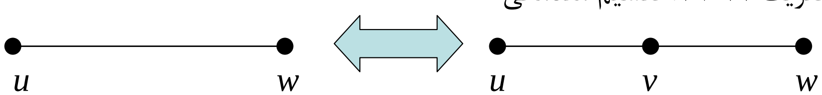


بنابراین هر گراف شامل K_5 و یا $K_{3,3}$ مسطح نمی باشد

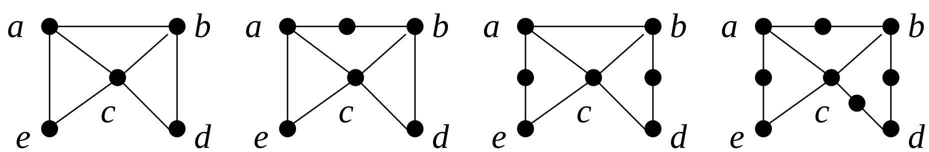
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۱۹. تقسیم مقدماتی



گرافهای G_1 و G_2 را همریخت نامیم اگر یکریخت بوده یا بتوان هر دو را از گراف بدون جهت و بدون حلقه H با دنباله ای از تقسیمات مقدماتی بدست آورد.



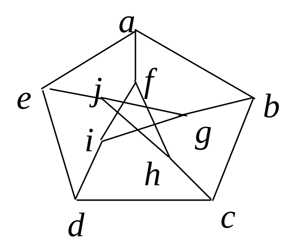
دوگراف همریخت همزمان مسطح و یا نامسطح می باشند.

فصل ۱۱. نظریه گراف

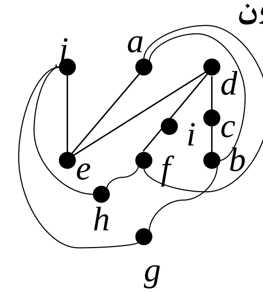
۱۱-۴. گرافهای مسطح

قضیه ۱۱-۵. (قضیه کوارتسکی) یک گراف نامسطح است اگر و فقط شامل زیرگرافی همریخت با K_5 یا $K_{3,3}$ باشد.

مثال ۱۱-۱۹. **گراف پترسون**



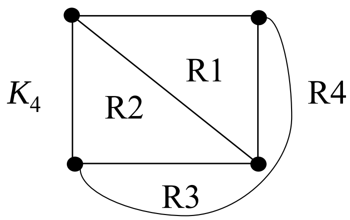
گراف پترسون مسطح نمی باشد.



یک زیر گراف همریخت با $k_{3,3}$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح



یک گراف مسطح صفحه را به نواحی متعددی تقسیم می کند که یکی از این نواحی بینهایت می باشد.

$$v = 4,\ e = 6,\ r = 4,\ v - e + r = 2$$

قضیه ۱۱-۶. در یک گراف (یا چند گراف) مسطح همبند:

$$v\text{-}e\text{+}r\text{=}2$$

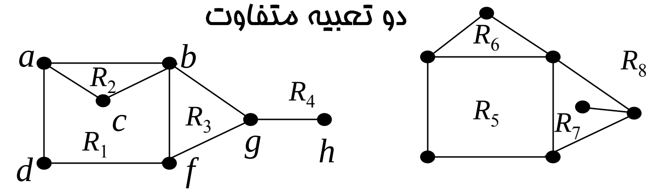
تعداد رأسها — تعداد لبه ها — تعداد ناحیه ها

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

درجه یک ناحیه($\deg(R)$) : تعداد لبه هایی که در یک (کوتاهترین) گردش بسته حول (اضلاع در) مرز R پیموده می شود.

دو تعبیه متفاوت



$\deg(R_1) = 5,\ \deg(R_2) = 3$
$\deg(R_3) = 3,\ \deg(R_4) = 7$

$\deg(R_5) = 4,\ \deg(R_6) = 3$
$\deg(R_7) = 5,\ \deg(R_8) = 6$

$\rightarrow$ *abghgfda*

$$\sum_{i=1}^{4} \deg(R_i) = 18 = \sum_{i=5}^{8} \deg(R_i) = 2 \times 9 = 2\,|E|$$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

نتیجه ۱۱-۳. فرض کنیم G یک گراف مسطح همبند و بدون حلقه با $|V|=v$ و $|E|=e>2$ و r ناحیه باشد. در این صورت $e\le 3v-6$ و $3r\le 2e$.

اثبات: چون G بدون حلقه بوده و چند گراف نیست، مرز هر ناحیه حداقل دارای ۳ لبه می باشد؛ لذا هر ناحیه از درجه بزرگتر یا مساوی ۳ می باشد. و چون مجموع درجات r ناحیه 2e می باشد بنابراین $3r\le 2e$.
از قضیه اویلر (قضیه ۱۱-۶) داریم :

$$2=v-e+r \le v-e+(2/3)e = v-(1/3)e \Rightarrow 6\le 3v-e \Rightarrow e \le 3v-6$$

این تنها یک شرط لازم است نه کافی!

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

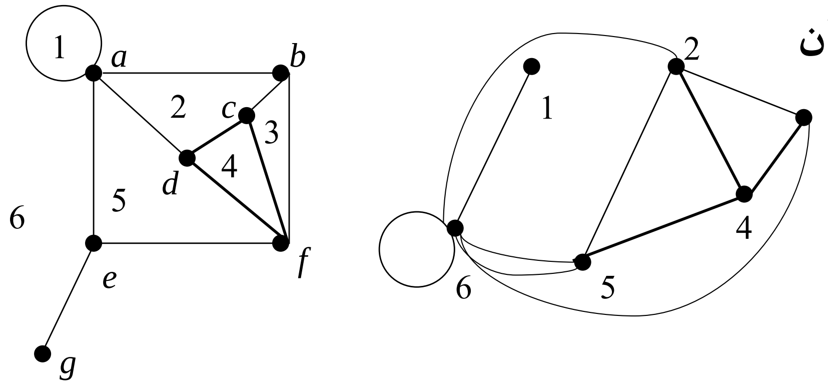
مثال ۱۱-۲۰. برای k_5 داریم $e = 10,\ v = 5$ و بنابراین $3v-6 =9<10$ پس K_5 مسطح نیست.

مثال ۱۱-۲۱. برای $k_{3,3}$ ، هر ناحیه حداقل دارای ۴ لبه می باشد، و لذا $4r \le 2e$. اگر $k_{3,3}$ مسطح باشد، $r = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$. بنابراین $20 = 4r \le 2e = 18$ ، و این یک تناقض است و بنابراین $k_{3,3}$ مسطح نیست.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

دوگان



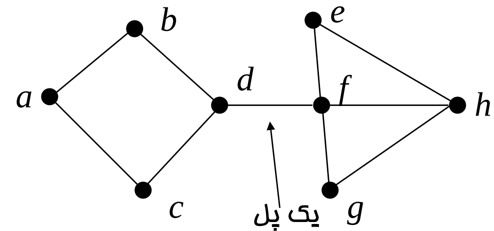
یک لبه در G متناظر با یک لبه در G^d می باشد و بالعکس.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۴. گرافهای مسطح

تعریف ۱۱-۲۰. **مجموعه برشی**: زیرمجموعه ای از لبه ها که حذف آنها باعث افزایش تعداد مولفه های گراف $(k(G))$ شود.

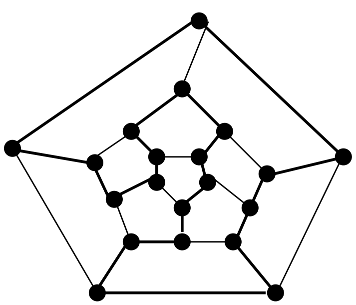
مثال ۱۱-۲۳.



cut-sets: {(a,b),(a,c)}, {(b,d),(c,d)},{(d,f)},...

در گرافهای مسطح، دورها در یک گراف متناظر با مجموعه های برشی در گراف دوگان آن می باشد و بالعکس.

فصل ۱۱. نظریه گراف

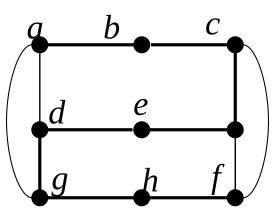


۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

یک مسیر یا دور که شامل تمام رأسها باشد

برخلاف مدار اویلری، **شرط لازم و کافی** شناخته شده ای برای اینکه یک گراف همیلتونی باشد وجود ندارد.

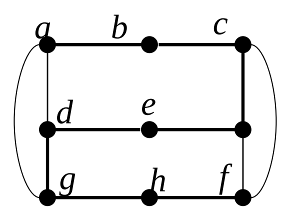
مثال ۱۱-۲۷.مسیر همیلتونی وجود دارد اما دور همیلتونی وجود ندارد.



فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

چند نکته برای بدست آوردن یک دور همیلتونی در یک گراف دلخواه $G=(V, E)$:



۱. اگر G دور همیلتونی دارد، در این صورت برای هر رأس $v\in V$، $\deg(v) \geq 2$.

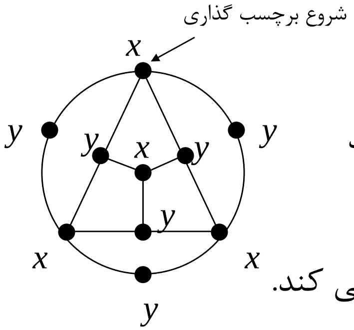
۲. اگر برای $a \in V$ ، $\deg(a) = 2$، در این صورت هر دو یال متلاقی با رأس a حتما باید در دور همیلتونی قرار بگیرند.

۳. اگر برای $a \in V$ ، $\deg(a) > 2$، در این صورت در زمان تشکیل دور همیلتونی به محض عبور از a می توانیم سایر یالهای استفاده نشده a را حذف کنیم.

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

مثال ۱۱-۲۸.

۴ تا x و ۶ تا y، چون در مسیر(دور) همیلتونیx و y ها باید یک در میان باشند بنابراین این گراف همیلتونی نمی باشد.



این روش تنها برای گرافهای دوبخشی کار می کند.

مسأله یافتن مسیر همیلتونی هنوز هم حتی برای گراف دوبخشی NP-Complete می باشد

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

قضیه ۱۱-۷. فرض کنیم k^*_n یک گراف جهت دار کامل باشد. یعنی بازاء هر دور رأس متمایز x و y ، درست یکی از لبه های (x, y) یا (y, x) در K^*_n باشد. چنین گرافی (به نام گراف تورنمنت) همواره شامل یک مسیر هامیلتونی (جهت دار) می باشد.

اثبات:فرض کنیم $m \geq 2$ و p_m مسیری شامل m-1 لبه به شکل زیر باشد:

$(v_1, v_2), (v_2, v_3),\ldots(v_{m-1}, v_m)$

اگر m=n کار تمام است. در غیر این صورت فرض می کنیم v رأسی باشد که در p_m ظاهر نشده باشد:

حالت ۱. $v \to v_1 \to v_2 \to v_m$،

حالت ۲. $v_1 \to v_2 \to \ldots v_k \to v \to v_{k+1} \to \ldots \to v_m$،

حالت ۳. $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m \to v$

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

قضیه ۱۱-۸. فرض کنیم G یک گراف بدون حلقه با $|v|=n\geq 2$ باشد. هرگاه بازاء هر $x,y \in V$ که $x\neq y$ داشته باشیم $deg(x)+deg(y)\geq n-1$، آنگاه G دارای مسیر همیلتونی است.

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی

نتیجه ۱۱-۴. فرض کنیم G یک گراف بدون حلقه با $n\geq 2$ رأس باشد. هرگاه بازاء هر $v \in V$، $deg(v) \geq (n-1)/2$، آنگاه G دارای یک مسیر همیلتونی است.

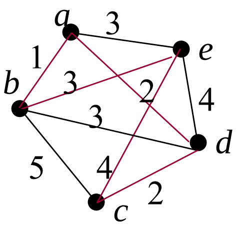
قضیه ۱۱-۹. فرض کنیم G یک گراف بدون جهت و بدون حلقه با $|V|=n\geq 3$ رأس باشد. هرگاه بازاء هر $x, y \in V$ غیر مجاور $deg(x)+deg(y)\geq n$، آنگاه G شامل یک دور همیلتونی می باشد.

نتیجه ۱۱-۵. هر گاه G یک گراف بدون جهت و بدون حلقه با $|V|=n\geq 3$ باشد و بازاء هر $v \in V$، $deg(v) \geq (n/2)$ ، آنگاه G دارای یک دور همیلتونی است.

نتیجه ۱۱-۶. هر گاه G یک گراف بدون جهت و بدون حلقه با $|V|=n\geq 3$ باشد و نیز $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2$ ، آنگاه G دارای یک دور همیلتونی می باشد.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۵. دور ها و مسیرهای هامیلتونی



یک مسأله مرتبط:فروشنده دوره گرد(TSP)

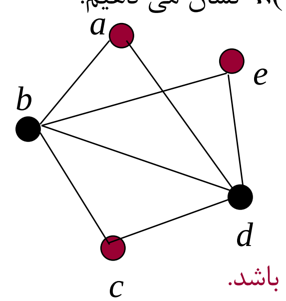
هدف:یافتن دور همیلتونی با کمترین هزینه کل

مثلا a-b-e-c-d-a با هزینه کل 1+3+4+2+2=12

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

تعریف ۱۱-۲۲. اگر $G=(V, E)$ یک گراف بدون جهت باشد، **رنگ آمیزی سره** G وقتی رخ می دهد که اگر $\{a,b\}$ یک لبه در G باشد، a و b رنگهای متفاوتی داشته باشند. (رئوس مجاور رنگهای متفاوتی دارند.) کمترین تعداد رنگهای لازم برای رنگ آمیزی مناسب G را **عدد رنگی** G نامیده و به صورت $\aleph(G)$ نشان می دهیم.



3 colors are needed.

$\chi(K_n)=n$

$\chi(\text{bipartite graph})=2$

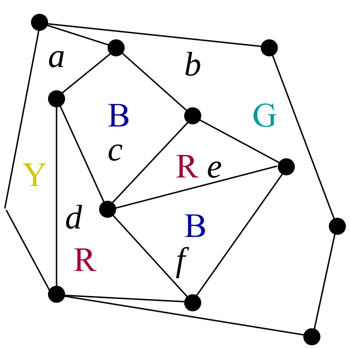
این مسأله در حالت کلی NP-Complete می باشد.

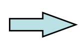
فصل ۱۱. نظریه گراف

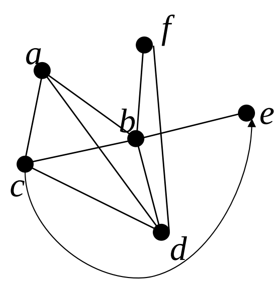
۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

یک مسأله مرتبط: رنگ آمیزی نقشه به طوریکه نواحی با مرز مشترک رنگ متفاوت داشته باشند.

برای هر نقشه چهاررنگ کافی است







فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

چند جمله ای رنگی $P(\lambda,G)$ = تعداد روشهای رنگ کردن G بوسیله λ رنگ.

مثال ۱۱-۳۴. (آ) هرگاه G برابر n رأس منفرد باشد $P(G, \lambda)= \lambda^n$

(ب) $G=K_n$، آنگاه برای G حداقل n رنگ لازم است:

$$P(G, \lambda)= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)= \lambda^{(n)}$$

(پ) بازاء یک مسیر با n رأس

$$P(G, \lambda)= \lambda(\lambda-1)^{n-1}$$

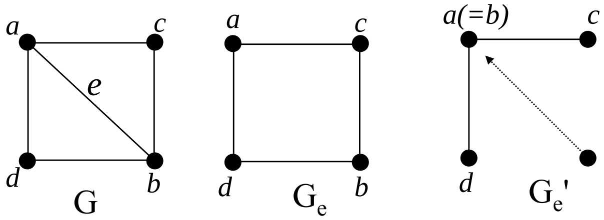
(ت) هرگاه G دارای مولفه های $G_1, G_2,\ldots G_K$ باشد، طبق قانون ضرب:

$$P(G, \lambda)=P(G_1, \lambda)\, P(G_2, \lambda)\ldots P(G_k, \lambda)$$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

مثال ۱۱-۳۵.



یکی شدن رئوس

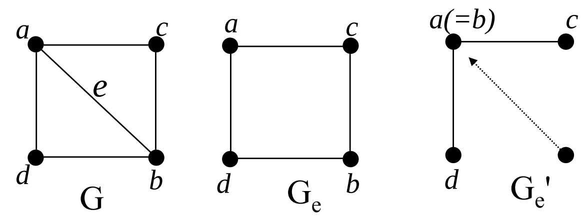
فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

قضیه ۱۱-۱۰. قضیه تجزیه برای چند جمله ایهای رنگی:

هرگاه $G=(V, E)$ یک گراف همبند بوده و $e \in E$ ، آنگاه

$$\mathbf{P(G_e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G'_e, \lambda)}$$



یکی شدن رئوس

در رنگ آمیزی مناسب G_e:

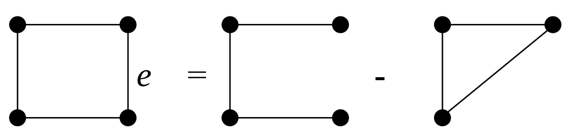
حالت ۱. a و b هم رنگ باشند : رنگ آمیزی مناسب G'_e

حالت ۲. a و b هم رنگ نباشند: رنگ آمیزی مناسب G

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

مثال ۱۱-۳۶.



$P(G,\lambda)$ $P(G_e,\lambda)$ $P(G'_e,\lambda)$

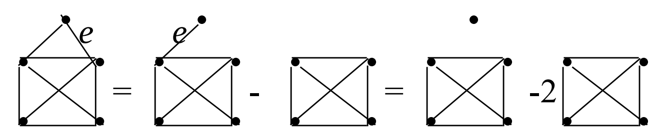
$$P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^3-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda$$

Since $P(G,1)=0$ while $P(G,2)=2>0$, we know that $\chi(G)=2$.

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

مثال ۱۱-۳۷.



$$P(G,\lambda)=\lambda\lambda^{(4)}-2\lambda^{(4)}= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3) \qquad \chi(G)=4$$

فصل ۱۱. نظریه گراف

۱۱-۶. رنگ آمیزی گراف ها و چند جمله ایهای رنگی

قضیه ۱۱٫۱۱. به ازائ هر گراف G جمله ثابت در $P(G, \lambda)$ برابر صفر است.
برهان. اگر $P(G, 0)=\alpha$ و $\alpha\neq 0$ یعنی گراف را می توان با صفر رنگ به α طریق رنگ آمیزی نمود.

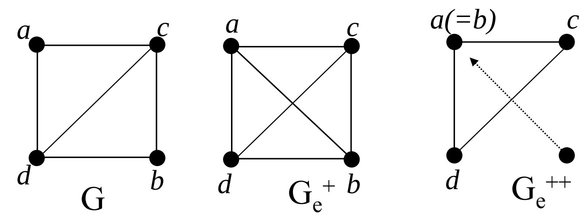
قضیه ۱۱٫۱۲– فرض کنیم $G=(V, E)$ و $|E|>0$. در این صورت مجموع ضرایب در $P(G, \lambda)$ مساوی صفر است.
برهان. چون گراف حداقل شامل یک لبه است بنابراین عدد رنگی آن حداقل برابر دو می باشد یعنی گراف را نمی توان با یک رنگ رنگ آمیزی نمود. یعنی:

$$P(G, 1) = 0$$

فصل ۱۱. نظریه گراف

قضیه ۱۱٫۱۳–

یکی شدن رئوس



$$P(G, \lambda) = P(G_e^{+}, \lambda) + P(G_e^{++}, \lambda)$$

$$P(G, \lambda) = \lambda^{(4)} + \lambda^{(3)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

فصل دوازدهم
درخت ها

سید ناصر رضوی
e-mail: razavi@comp.iust.ac.ir
۱۳۸۵

فصل ۱۲. درخت ها

کاربردها :

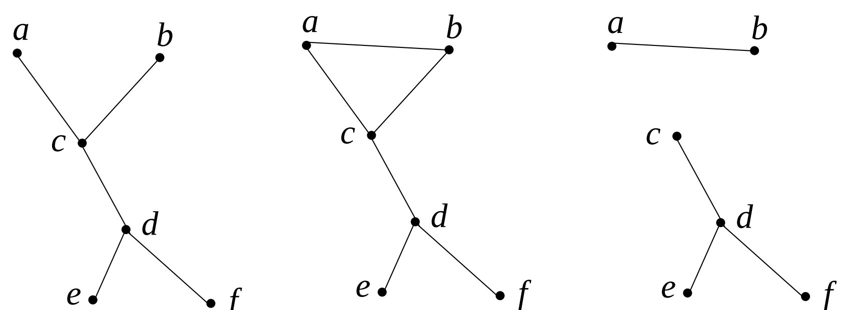
- ساختمان های داده ای
- ساختار فایل ها
- هوش مصنوعی
- نظریه رمزگذاری
- مسائل بهینه سازی

...

فصل ۱۲. درخت ها

۱-۱۲. تعاریف، خواص و مثالها

تعریف ۱۲-۱. فرض می کنیم $G=(V, E)$ یک گراف بدون جهت و بدون حلقه باشد. گراف G را **درخت** می نامیم اگر G همبند بوده و شامل دور نباشد.



(G_1): درخت

(G_2): درخت نیست (دور)

(G_3): درخت نیست (**جنگل**)

فصل ۱۲. درخت ها

۱-۱۲. تعاریف، خواص و مثالها

درخت پوشا: برای یک گراف همبند یک زیرگراف پوشاست که درخت نیز باشد.

مثال: G_1 برای G_2 در اسلاید قبل یک درخت پوشا می باشد.

قضیه ۱۲-۱. هرگاه a و b رئوس متمایزی در $T=(V, E)$ باشند، آنگاه مسیر منحصر به فردی هست که این رئوس را به هم وصل کند.

قضیه ۱۲-۲. هر گاه $G=(V, E)$ یک گراف بدون جهت باشد، آنگاه G همبند است اگر و فقط اگر G دارای درخت پوشا باشد.

فصل ۱۲. درخت ها

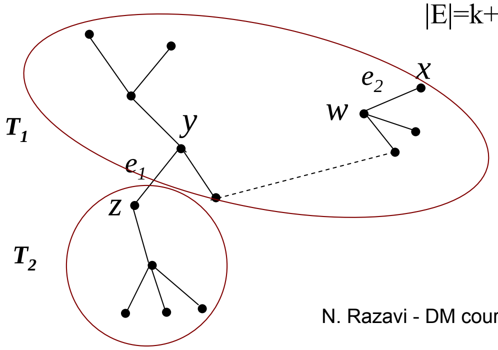
۱۲-۱. تعاریف، خواص و مثالها

قضیه ۱۲-۳. در هر درخت $T=(V, E)$ داریم $|V|=|E|+1$.

برهان. با استفاده از استقرا روی تعداد رئوس درخت

الف- پایه استقرا : اگر $|V|=1$ بنابراین $|E|=0$.

ب- فرض استقرا: فرض می کنیم قضیه برای هر درخت حداکثر شامل $k\geq 0$ رأس درست باشد. حال درخت زیر را در نظر می گیریم که درآن $|E|=k+1$



اگر e_1 حذف شود:

$T_1=(V_1, E_1), T_2=(V_2, E_2),$

$|V|=|V_1|+|V_2|, |E|=|E_1|+|E_2|+1\Rightarrow$

$|V_1|=|E_1|+1, |V_2|=|E_2|+1\Rightarrow$

$|V|=|V_1|+|V_2|=(|E_1|+1)+(|E_2|+1)=$

$(|E_1|+|E_2|+1)+1=|E|+1$

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۱. تعاریف، خواص و مثالها

قضیه ۱۲-۴. در هر درخت $T=(V, E)$، هرگاه $|V|\geq 2$ ، آنگاه حداقل دو رأس **آویزان** داریم.

برهان . استقرا بر روی $|V|$

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۱. تعاریف، خواص و مثالها

قضیه ۱۲-۵. احکام زیر برای گراف بدون جهت و بدون حلقه $G=(V,E)$ هم ارزند.

(آ) G یک درخت است.

(ب) G همبند است ولی حذف یک یال از G آنرا به دو زیرگراف که درخت هستند ناهمبند می سازد.

(پ) G شامل دور نیست و $|V|=|E|+1$.

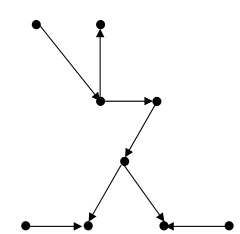
(ت) G همبند است و $|V|=|E|+1$.

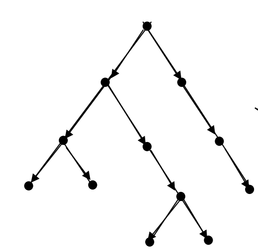
(ث) G شامل دور نیست، و هرگاه $a, b\in V$ که $\{a, b\}\notin E$ ، آنگاه گراف حاصل از افزودن یال $\{a, b\}$ به G درست یک دور دارد.

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

تعریف ۱۲-۲. هرگاه G یک گراف جهت دار باشد، آنگاه G را یک **درخت جهت دار** می نامیم اگر گراف بدون جهت مربوط به G یک درخت باشد. وقتی G یک درخت جهت دار است، G را یک **درخت ریشه دار** نامیم اگر یک رأس منحصر به فرد r به نام **ریشه** در G با درجه ورودی $\text{in\_degree}(r)=0$ بوده و بازاء سایر رئوس v، داشته باشیم $\text{in\_degree}(v)=1$.

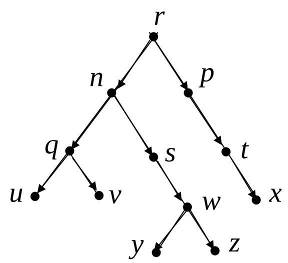




درخت ریشه دار

فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار



مسیر: هر دنباله ای از گره ها در درخت

مانند $n_1, n_2, \ldots, n_k$ که در آن هر گره، پدر گره

بعد از خود در دنباله باشد.

مثال:

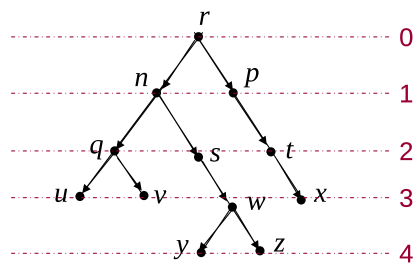
$r \rightarrow n \rightarrow s$

$n \rightarrow s \rightarrow w \rightarrow z$

طول مسیر: تعداد گره های موجود در مسیر منهای یک.

فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار



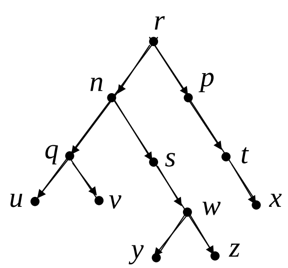
سطح گره: طول مسیر از ریشه تا آن گره .

s در سطح ۲، x در سطح ۳، y در سطح ۴

s

فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار



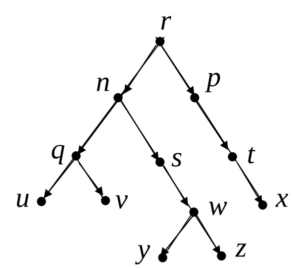
پدر و فرزند:

اگر از a به b مسیری به طول ۱ وجود داشته باشد آنگاه a را **پدر** b و b را **فرزند** a گوییم

- s **فرزند** n، n **پدر** s می باشد.

فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار



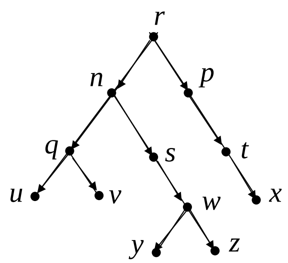
جد و نسل:

اگر از a به b مسیری وجود داشته باشد آنگاه a را **جد** b و b را **نسل** a گوییم

-r، n و s **اجداد** w، y و z هستند.

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار



دو گره با والد مشترک را **همزاد** گوییم مانند s و q.

برگ: گره ای که هیچ فرزندی نداشته باشد. مانند: u, v, y, z, x

گره داخلی: گره غیر برگ. مانند n, s, t

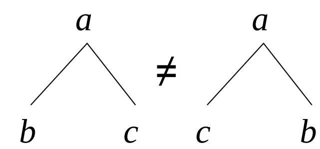
گره n به همراه تمام اخلافش **زیردرخت** r محسوب می شود.

فصل ۱۲. درخت ها

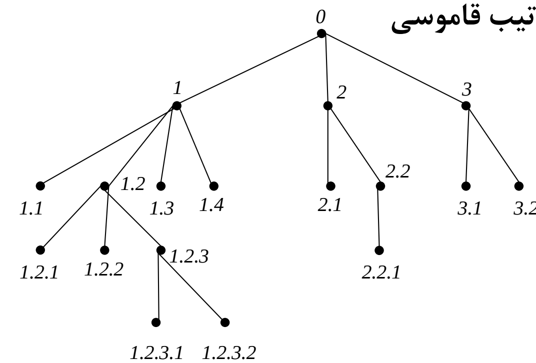
۱۲-۲. درخت های ریشه دار

درخت ریشه دار **مرتب**:

درخت ریشه داری که درآن ترتیب فرزندان اهمیت دارد.



مثال ۱۲-۴. **ترتیب قاموسی**



فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

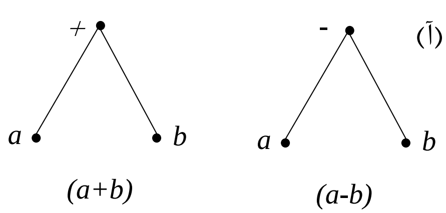
درخت دودویی: درختی که در آن هر گره حداکثر دو فرزند داشته باشد.

درخت دودویی کامل: یک درخت دودویی که درآن هر گره صفر یا دو فرزند داشته باشد.

نکته: درخت دودویی مرتب است.

مثال ۱۲-۵. (آ)

درخت عبارت:

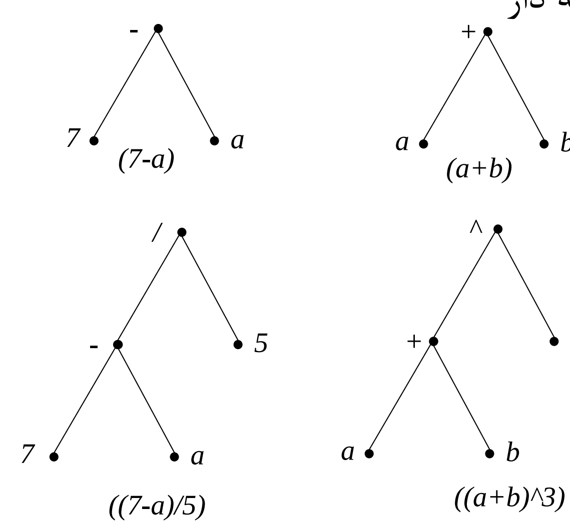


فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۵. (ب)

$((7\text{-}a)/5)*((a+b)\text{^}3)$

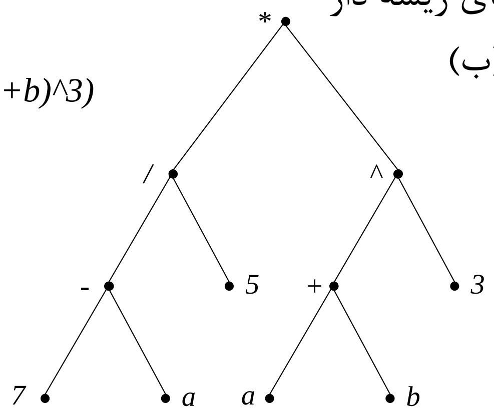


فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۵. (ب)

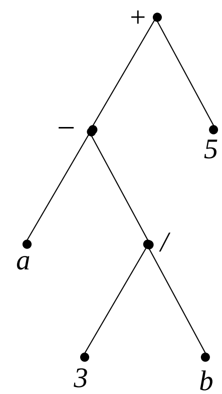
$((7-a)/5)*((a+b)\wedge 3)$



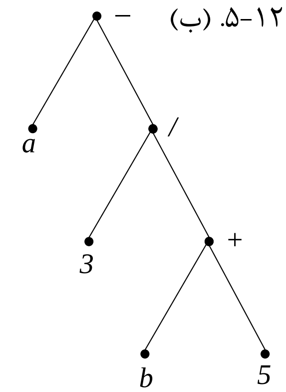
فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۵. (ب)



$(a-(3/b))+5$

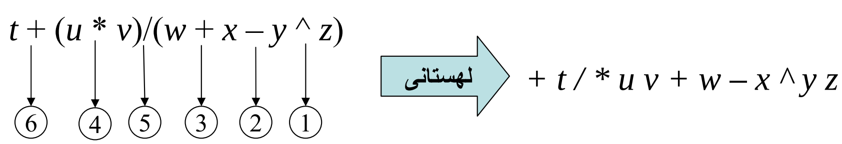


$a-(3/(b+5))$

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۵. (پ):نمادگذاری **لهستانی**(پیشوندی)



عبارت میانوندی aob در نمایش پیشوندی به صورت oab در می آید.

مزیت عبارت پیشوندی : نیاز به پرانتز ندارد و محاسبه از راست به چپ صورت می گیرد.

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مراحل محاسبه عبارت میانوندی

$$+\,t\,/\,*\,u\,v\,+\,w\,-\,x\,\wedge\,y\,z$$

بازاء مقادیر زیر:

$$t=4,\ u=2,\ v=3,\ w=1,\ x=9,\ y=2,\ z=3$$

(۱) $+\,4\,/\,*\,2\,3\,+\,1\,-\,9\,\wedge\,2\,3$

(۲) $+\,4\,/\,*\,2\,3\,+\,1\,-\,9\,8$

(۳) $+\,4\,/\,*\,2\,3\,+\,1\,1$

(۴) $+\,4\,/\,*\,2\,3\,2$

(۵) $+\,4\,/\,6\,2$

(۶) $+\,4\,3$

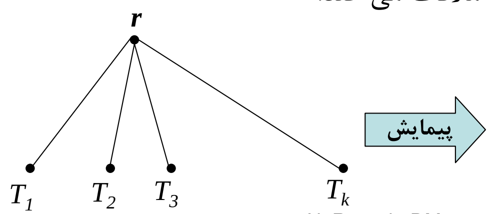
فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

تعریف ۱۲-۳. فرض کنیم $T=(V, E)$ یک درخت ریشه دار با ریشه r باشد. اگر T به جز ریشه گره دیگری نداشته باشد، آنگاه خود ریشه پیمایشهای پیش ترتیب و پس ترتیب T را تشکیل می دهد. اگر $|V|>1$، فرض می کنیم $T_1, T_2, \ldots, T_k$ زیر درختهای T از چپ به راست باشند:

(آ) پیمایش **پیش ترتیب** T: ابتدا r را ملاقات می کند و سپس زیردرختهای T_1 و بعد T_2 و ... و در نهایت T_k را به صورت پیش ترتیب پیمایش می کند.

(ب) پیمایش **پس ترتیب** T: گره های زیر درختهای T_1 ، T_2 ، ... و T_k را به صورت پس ترتیب پیموده و سپس ریشه را ملاقات می کند.



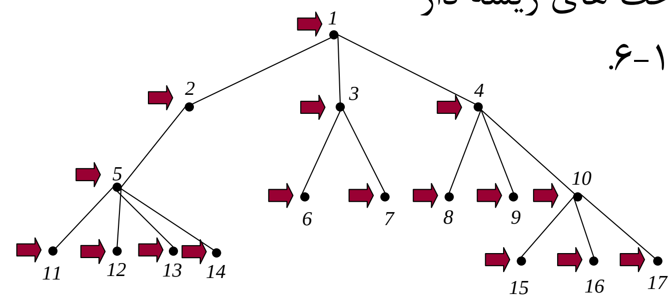
PreOrder : $r, T_1, T_2, T_3, \ldots, T_k$

PostOrder: $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_k, r$

فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۶.

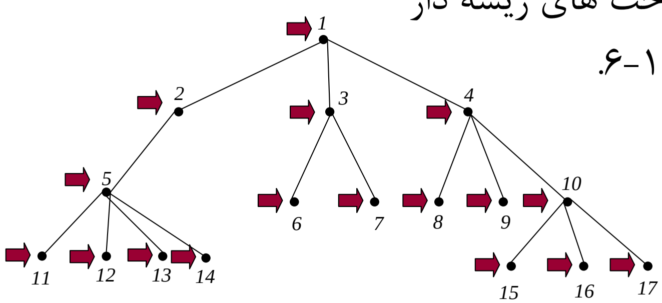


PreOrder: 1, 2, 5, 11, 12, 13, 14, 3, 6, 7, 4, 8, 9, 10, 15, 16, 17

فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۶.



PostOrder:11, 12, 13, 14, 5, 2, 6, 7, 3, 8, 9, 15, 16, 17, 10, 4, 1

www.txt.ir

فصل ۱۲. درخت ها

۲-۱۲. درخت های ریشه دار

تعریف ۱۲-۴. فرض کنیم $G=(V, E)$ یک درخت دودویی با گره r به عنوان ریشه باشد.

(آ) هرگاه $|V|=1$ ، آنگاه خود r پیمایش میان ترتیب را تشکیل می دهد.

(ب) وقتی $|V|>1$ ، آنگاه T_L و T_R را زیر درختان **چپ** و **راست** T می گیریم. پیمایش **میان ترتیب** T ابتدا گره های T_L را به صورت میان ترتیب پیمایش می کند، سپس ریشه را ملاقات نموده و بعد گره های T_R را به صورت میان ترتیب پیمایش می کند.

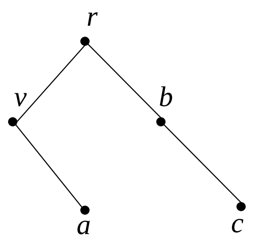
نکته : در درخت دودویی زیردرخت چپ یا راست ممکن است تهی باشند.

نکته : در درخت دودویی ترتیب فرزندان گره ها اهمیت دارد.

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

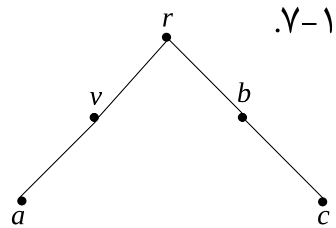
مثال ۱۲-۷.



InOrder : v, a, r, b, c

PreOrder : r, v, a, b, c

PostOrder :a, v, c, b, r



InOrder : a, v, r, b, c

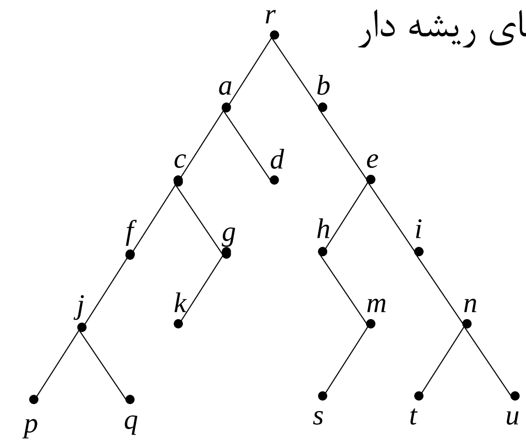
PreOrder : r, v, a, b, c

PostOrder : a, v, c, b, r

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۸.



InOrder: *p, j, q, f, c, k, g, a, d, r, b, h, s, m, e, i, t, n, u*

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

درخت پوشا: زیرگراف H از گراف G=(V, E) یک درخت پوشا برای G نامیده می شود، اگر H یک درخت بوده و شامل همه گره های مجموعه V باشد.

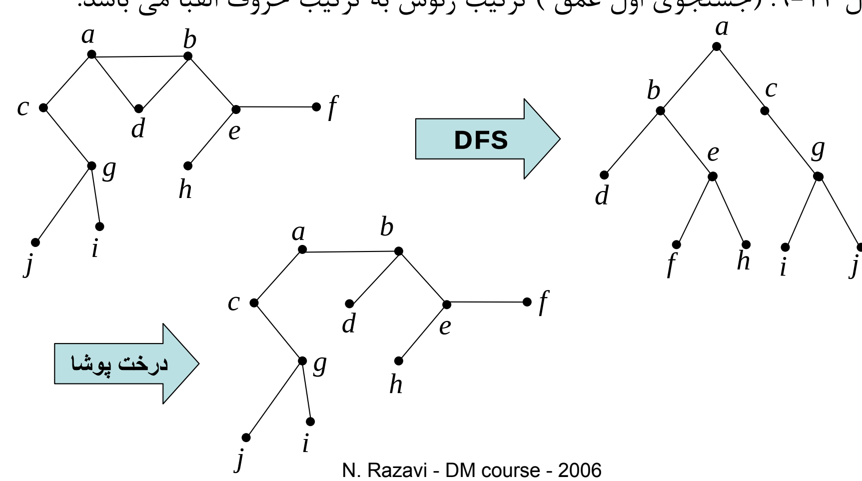
درخت پوشای جهت دار: درخت پوشایی که جهت دار نیز باشد.

نکته: برای ساختن درخت پوشا می توان از جستجوی **اول عمق** و جستجوی **اول سطح** استفاده نمود.

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

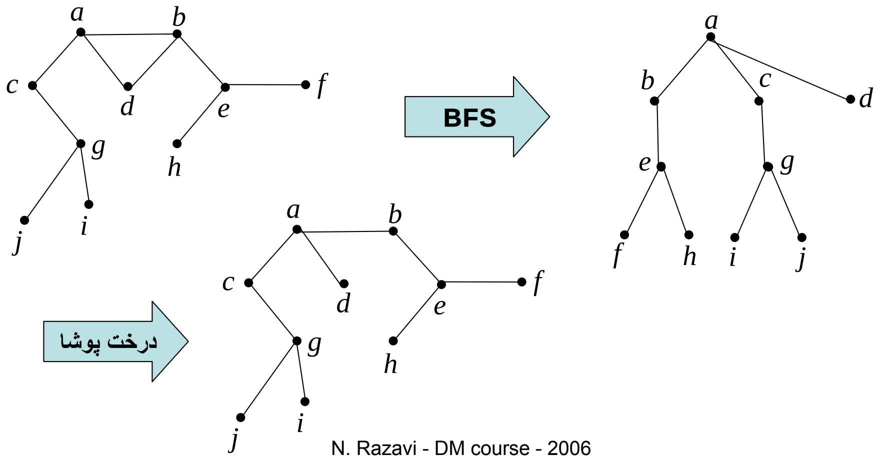
مثال ۱۲-۹. (جستجوی اول عمق) ترتیب رئوس به ترتیب حروف الفبا می باشد.



فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

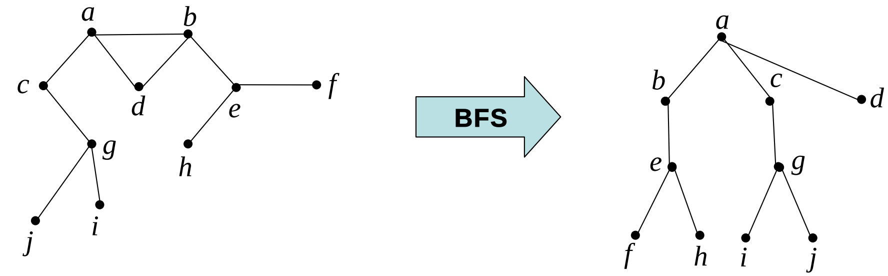
مثال ۱۲-۹. (جستجوی اول سطح) ترتیب رئوس به ترتیب حروف الفبا می باشد.



فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۹. (جستجوی اول سطح) ترتیب رئوس به ترتیب حروف الفبا می باشد.



Queue: a

$b\ c\ d$

$c\ d\ e$

$d\ e\ g$

$e\ g$

$g\ f\ h$

$f\ h\ i\ j$

$h\ i\ j$

$i\ j$

j

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

درخت k-تایی: درختی است که در آن هر گره حداکثر k فرزند دارد.

در حالت خاص اگر k=2 درخت دودویی بدست می آید.

درخت k-تایی کامل: یک درخت k- تایی می باشد که درآن هر گره صفر(برگ) و یا k فرزند (گره داخلی)دارد.(درخت دودویی کامل حالت خاص می باشد که در آن k=2).

قضیه ۱۲-۶. در یک درخت k-تایی کامل با n گره، اگر n_0 تعداد برگها و n_k تعداد گره های داخلی باشد، آنگاه :

(آ) $n = kn_k + 1$؛

(ب) $n_0 = (k - 1)n_k + 1$، و

(پ) $n_k = (n_0 - 1) / (k - 1) = (n - 1) / k$ (چرا؟)

تعداد شاخه ها= $n - 1$

تعداد شاخه ها= kn_k

$\rightarrow n - 1 = kn_k$

$\rightarrow n = kn_k + 1$

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۱۲-۱۳. تعداد بازیهای لازم در یک دوره مسابقات تک حذفی با ۲۷ شرکت کننده.

جواب: درخت بازیها یک درخت دودویی کامل می باشد و تعداد بازیها برابر تعداد گره های داخلی این درخت یعنی ۲۶ می باشد.

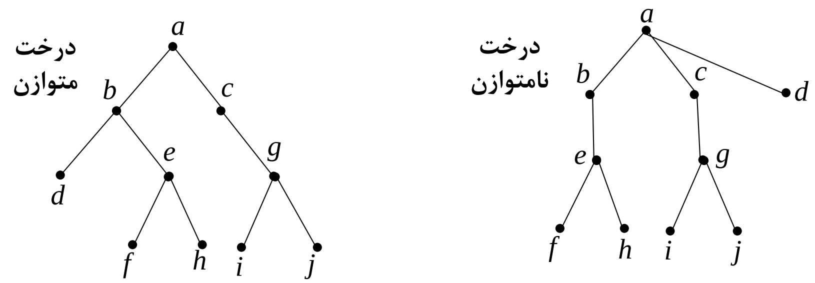
$$n_k = (n_0 - 1) / (k - 1) = (27-1)/(2-1) = 26$$

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

تعریف ۱۲-۶. **ارتفاع** درخت: هرگاه $T=(V, E)$ یک درخت ریشه دار بوده و h بزرگترین شماره سطحی باشد که یک برگ در T بدان می رسد، آنگاه گوییم T دارای **ارتفاع** h می باشد.

درخت متوازن: درختی است که در آن شماره سطح هر برگ برابر h یا h-1 باشد.

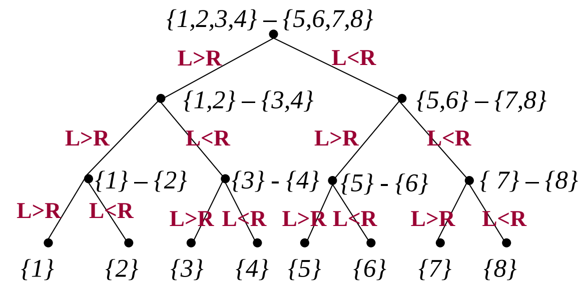


فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

درخت تصمیم (decision tree):

مثال ۱۲-۴. هشت سکه یک شکل و یک ترازو در اختیار داریم. اگر درست یکی از این سکه ها تقلبی و سنگین تر از بقیه باشد، می خواهیم با حداقل توزین آن را پیدا کنیم.



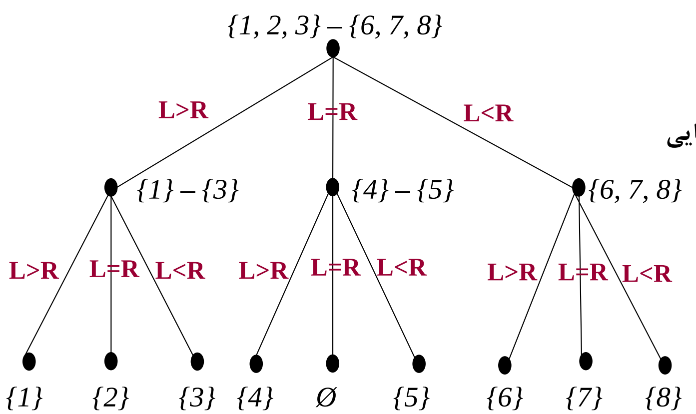
درخت تصمیم دودویی

(h=3)

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۲. درخت های ریشه دار

مثال ۲۱-۴.



درخت تصمیم سه تایی

(h=2)

فصل ۱۲. درخت ها

درخت پوشای مینیمم

الگوریتم کراسکال

ورودی. گراف همبند، بدون جهت و وزن دار $G=(V, E)$، که در آن برای هر $e \in E$ یک عدد حقیقی $C(e)>0$ منسوب شده است.

خروجی. درخت پوشای T با هزینه مینیمم.

(۱) $i \leftarrow 1$ فرض می کنیم $e_i \in E$ یالی (غیر از یک حلقه) از G است که $C(e_i)$ از همه یالهای دیگر کوچکتر است(اگر چندین یال با هزینه مینیمم وجود داشت، یکی را به طور دلخواه انتخاب می کنیم)

(۲) برای $1 \le i \le n-2$ اگر یالهای e_1، e_2 ، ... و e_i قبلا انتخاب شده اند، در این صورت از میان بقیه یالهای باقیمانده از G، e_{i+1} را به گونه ای انتخاب کنیم که

(الف) $C(e_{i+1})$ از همه کمتر باشد.

(ب) زیرگراف تشکیل شده بوسیله یالهای e_1، e_2 ، ... وe_{i+1} (با رئوسی که این یالها تلاقی دارند) تشکیل هیچ دوری ندهند.

(۳) $i \leftarrow i+1$

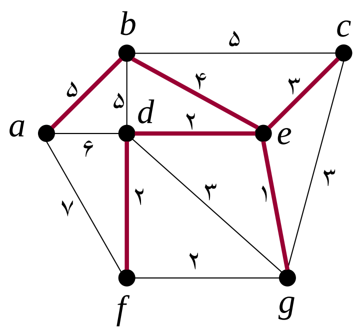
اگر $i=n-1$ ، زیرگراف حاصل از یالهای e1، e2 ، ... وe_{n+1} همبند، دارای n رأس و n-1 یال بوده، در نتیجه T، یک درخت پوشای مینیمم است و الگوریتم خاتمه پیدا می کند.

اگر $i<n-1$، برو به مرحله ۲.

فصل ۱۲. درخت ها

درخت پوشای مینیمم

الگوریتم کراسکال



هزینه درخت پوشا = ۱۷

فصل ۱۲. درخت ها

درخت پوشای مینیمم

الگوریتم پریم

ورودی. گراف همبند، بدون جهت و وزن دار $G=(V, E)$، که در آن برای هر $e \in E$ یک عدد حقیقی $C(e)>0$ منسوب شده است.

خروجی. درخت پوشای T با هزینه مینیمم

(۱) $i \leftarrow 1$، $P \leftarrow V_1$ که در آن $v_1 \in V$، $N \leftarrow V-\{v_1\}$، $T \leftarrow \emptyset$

(۲) برای $1 \le i \le n-1$، فرض $P=\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$، $T=\{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}\}$، $N=V-P$. به T یال دارای کمترین هزینه را که رأسی مثل $x \in P$ رابه رأسی مثل $y=(v_{i+1})$ از N وصل می کند، اضافه می کنیم. $P \leftarrow P \cup \{y\}$ و $N \leftarrow N-\{y\}$

(۳) $i \leftarrow i+1$

اگر $i=n$، زیرگراف حاصل از یالهای e_1، e_2 ، ... وe_{n-1} همبند، دارای n رأس و $n-1$ یال بوده، و در نتیجه یک درخت پوشای مینیمم برای Gاست و الگوریتم خاتمه پیدا می کند.

اگر $i<n-1$، برو به مرحله ۲.

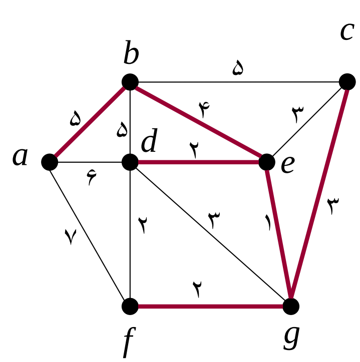
مثال.

www.txt.ir

فصل ۱۲. درخت ها

- الگوریتم پریم

i	P	N	T
1	{a}	{b,c,d,e,f,g}	Ø
2	{a,b}	{c,d,e,f,g}	{ab}
3	{a,b,e}	{c,d,f,g}	{ab, be}
4	{a,b,e,g}	{c,d,f}	{ab,be,eg}
5	{a,b,e,g,d}	{c,f}	{ab,be,eg,de}
6	{a,b,e,g,d,f}	{c}	{ab,be,eg,de,fg}
7	{a,b,e,g,d,f,c}	Ø	{ab,be,eg,de,fg,cg}



www.txt.ir

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

فرض کنید بخواهیم برای نمایش حروف انگلیسی از رشته های باینری (صفر و یک) راهی پیدا کنیم. چون ۲۶ حرف داریم و $2^4<26<2^5$ باید بتوانیم این حروف را با رشته های باینری ۵ بیتی نمایش دهیم.

روش اول: استفاده از رشته هایی به طول ثابت برای حروف

مثلا رشته ‘‘*ata*’’ را به وسیله ۱۵ بیت نمایش داده می شود. و یک رشته n کاراکتری دارای طول $5n$ می باشد.

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

روش دوم. (استفاده از رشته های با طولهای متفاوت)اگر بتوانیم روشی بیابیم که درآن به کاراکترهایی که احتمال وقوعشان بالاتر است کد کوتاه تری نسبت دهیم در این صورت ضریب فشرده سازی افزایش می یابد.

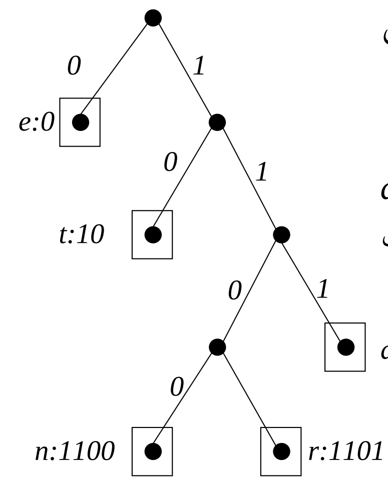
مثلا زیر مجموعه $S=\{a,e,n,r,t\}$ از حروف الفبا را در نظر می گیریم. و عناصر S را با رشته های باینری زیر نمایش می دهیم:

$a{:}01,\quad e{:}0,\quad n{:}101,\quad r{:}10,\quad t{:}1$

$ata{:}01101$ و طول کد برابر ۵ است ولی برای پیامهای "an" و "etn" و "$atet$" نیز همین کد تولید می شود و امکان ابهام وجود دارد.

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی



حال طرح دیگری را در نظر می گیریم:

$a{:}111,\ e{:}0,\ n{:}1100,\ r{:}1101,\ t{:}10$

در اینجا کد "ata" برابر 11110111 به طول ۸ می باشد و امکان ابهام نیز وجود ندارد.

رمزگشایی 11110111

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

تعریف ۱۲-۷. مجموعه P از رشته های دودویی یک **رمز پیشوندی** نام دارد اگر هیچ رشته ای در P پیشوند رشته دیگری در P نباشد.

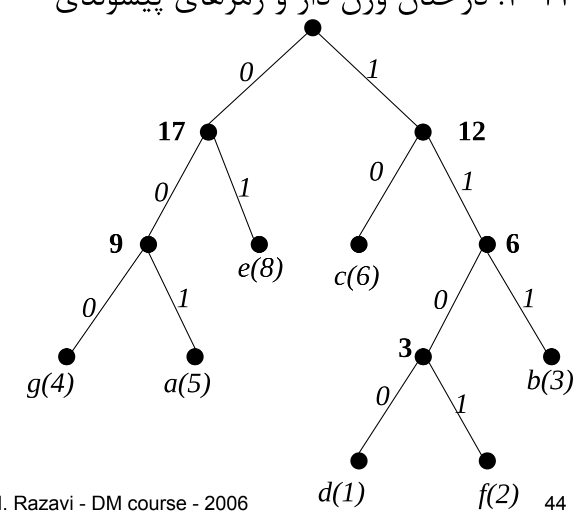
بنابراین $P=\{111,\ 0,\ 1100,\ 1101,\ 10\}$ یک رمز پیشوندی برای حروف a, e, n, r, t می باشد.

مسأله: می خواهیم با داشتن تعدادی علامت و نیز احتمال وقوع هر کدام، یک طرح رمزگذاری با حداکثر فشرده سازی ایجاد کنیم.

فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

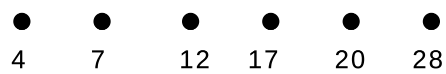
علامت	تعداد	احتمال	کد
a	5	5/29	001
b	3	3/29	111
c	6	6/29	10
d	1	1/29	1100
e	8	8/29	01
f	2	2/29	1101
g	4	4/29	000



فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

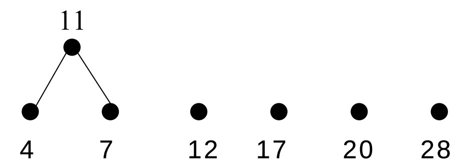
مثال ۱۲-۱۷. برای علایم a, o, q, u, y, z که (در یک نمونه داده شده) به ترتیب با فرکانسهای $20, 28, 4, 17, 12, 7$ ظاهر می شوند، یک رمز پیشوندی بهینه بسازید.



فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

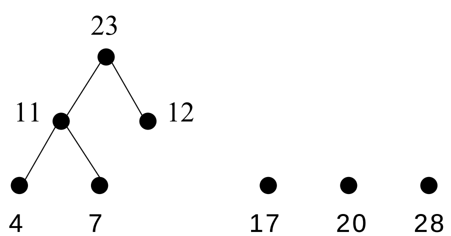
مثال ۱۲-۱۷.



فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

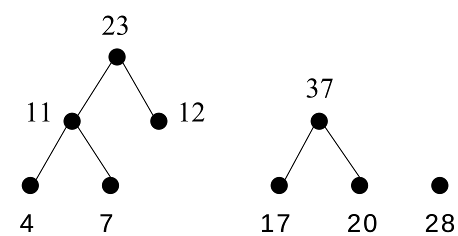
مثال ۱۲-۱۷.



فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

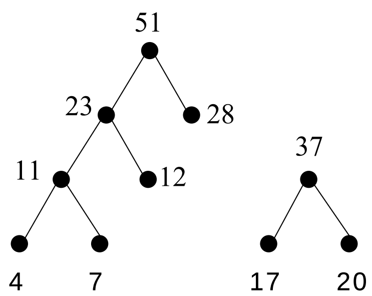
مثال ۱۲-۱۷.



فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

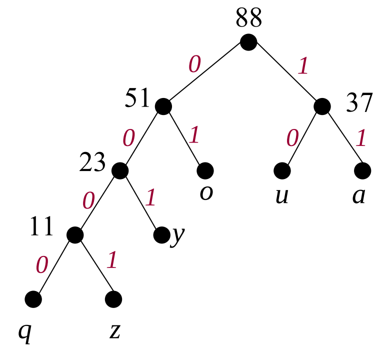
مثال ۱۲-۱۷.



فصل ۱۲. درخت ها

۱۲-۴. درختان وزن دار و رمزهای پیشوندی

مثال ۱۲-۱۷.



a:11

o:01

q: 0000

u: 10

y: 001

z: 0001