ریاضیات(ریاضی عمومی(۱و۲)، معادلات دیفرانسیل، ریاضی مهندسی) :

استرلینگ $\longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(kn\pm a)!} = \left(\frac{kn}{e}\right)^k$

۳۱- حاصل $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!}}$ ، کدام است؟

۱) ۴

۲) ۲e

۳) ۲

۴) $\frac{2}{e}$ ✓

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\cdot\frac{(2n/e)^2}{n/e} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\times\frac{4/e^2}{1/e} = \frac{2}{e}$

۳۲- معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y^x + x^y = 2$ در نقطهٔ $(1,1)$ کدام است؟

۱) $x+y=2$ ✓

۲) $2x-y=1$

۳) $3x-y=2$

۴) $2x+y=3$

مشتق ضمنی $\longrightarrow$ $y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y^x \ln y + y x^{y-1}}{x y^{x-1} + x^y \ln y}$

$\xrightarrow[y=1]{x=1} y' = -\frac{1}{1} = -1$

$\rightarrow y-1 = -1(x-1) \rightarrow y-1 = -x+1 \rightarrow x+y=2$

۳۳- زاویهٔ بین خطوط مماس بر منحنی‌های قطبی $r=2(1+\sin\theta)$ و $r=3(1-\sin\theta)$ در محل تقاطع، برحسب رادیان کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$ ✓

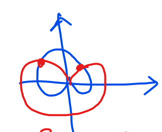
۴) $\frac{2\pi}{3}$

$\boxed{tg\alpha = \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}$ $\boxed{m = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}}$

تقاطع $\rightarrow$ $r = 12/5$ ، $\sin\theta = 1/5$ ، $\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$r_1 = 2+2\sin\theta \rightarrow m_1 = \frac{2\cos\theta\sin\theta + 2\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta}{2\cos^2\theta - 2\sin\theta - 2\sin^2\theta} = -\frac{3\sqrt{6}}{14}$

$r_2 = 3-3\sin\theta \rightarrow m_2 = \frac{7\sqrt{6}}{9}$ $\rightarrow tg\alpha = \frac{\text{عدد}}{0} = \infty \rightarrow \alpha = \pi/2$



با شکل هم مشخص بود برهم عمودند

۳۴- ضریب x^9 در بسط مکلورن تابع $\frac{\sin x}{1+x^4}$ به ازای $|x|<1$، کدام است؟

۱) $1-\frac{1}{5!}-\frac{1}{9!}$

۲) $1+\frac{1}{5!}+\frac{1}{9!}$

۳) $1+\frac{1}{5!}-\frac{1}{9!}$

۴) $1-\frac{1}{5!}+\frac{1}{9!}$ ✓

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$

$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

$\xrightarrow{x\to -x} \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$

$\xrightarrow{x\to x^4} \frac{1}{1+x^4} \simeq 1 - x^4 + x^8 - \cdots$

$\rightarrow \frac{\sin x}{1+x^4} \simeq \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\right)\left(1 - x^4 + x^8\right) \rightarrow a_9 = +\frac{1}{9!} - \frac{1}{5!} + 1$

آزمون ریشه $= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n \frac{e^{2n}-e^{-2n}}{2}}$

$= e^2|x| \xrightarrow{\text{شرط}} e^2|x|<1 \to |x| < \frac{1}{e^2}$

$\boxed{-e^{-2}<x<e^{-2}}$ $\quad x=e^{-2} \to \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}\frac{(e^{2n}-e^{-2n})}{2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-4n}}{2} \to \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0 \to$ (واگرا)

۳۵- شعاع (R) و بازهٔ همگرایی (D) سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sinh(2n)$، کدام است؟

۱) $R = e^{-2}$ $\quad D = [-e^{-2}, e^{-2}]$

۲) $R = e^{-2}$ $\quad D = (-e^{-2}, e^{-2})$ ✓

۳) $R = e^{2}$ $\quad D = [-e^{2}, e^{2}]$

۴) $R = e^{2}$ $\quad D = (-e^{2}, e^{2})$

۳۶- کدام مورد برای تابع $F(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ درست است؟

$f = \frac{2x^3y - 2xy^3}{x^2+y^2}$

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$

$f_{xy} = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{-2h}{f_x(0,h)} - \overset{0}{f_x(0,0)}}{h} = -2$

$f_x = \frac{(6x^2y-2y^3)(x^2+y^2)-2x(2x^3y-2xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$

$f_x(0,h) = \frac{(-2h^3)(h^2)}{h^4} = -2h$

۱) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = -2$ ✓

۲) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0)$

۳) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0) = -2$

۴) $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0,0)$ وجود ندارند.

در بی‌نهایت مقدار x از ln بیشتر است ← کافی

$= \int_1^{\infty} \frac{x}{x^{n/2}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{n/2-1}} \to \frac{n}{2}-1>1 \to \frac{n}{2}>2 \to n>4$

۳۷- کدام عبارت برای $\int_1^{\infty} \frac{x-\ln x}{\sqrt{x^n}}\,dx, (n\in\mathbb{N})$، درست است؟

۱) به ازای $n \geq 2$ همگرا است.

۲) به ازای $n \geq 3$ همگرا است.

۳) به ازای $n \geq 4$ همگرا است.

۴) به ازای $n \geq 5$ همگرا است. ✓

۳۸- اگر (a,b) مرکز ثقل ناحیهٔ محدود به منحنی $y = \cos x$ در ناحیهٔ اول صفحه مختصات باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}+1$

۲) $\frac{3\pi}{4}+1$

۳) $\frac{3\pi}{8}-1$ ✓

۴) $\frac{5\pi}{8}-1$

۳۹- اگر D ناحیهٔ درون قرص $x^2+y^2 \le e^2-1$ باشد، حاصل $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy$ ، کدام است؟

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{e^2-1}} \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\theta$

$= (2\pi)\left(\frac{1}{2}\int_1^{e^2} \ln(t)\,dt\right) = (\pi)\cdot\left(t\ln t - t\Big|_1^{e^2}\right) = \pi(\underbrace{2e^2-e^2}_{e^2}+1)$

۱) $\pi(e^2-1)$

۲) $\pi(e^2+1)$ ✓

۳) e^2-1

۴) e^2+1

۴۰- شار گذرا از سطح پوستهٔ $y=x+1$ محدود به بازه‌های $0\le x\le 1$, $0\le z\le 1$ توسط میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=x\hat{i}+y\hat{j}+\tan^{-1}z\,\hat{k}$ به سمت صفحهٔ yz، کدام است؟

۱) ۱ ✓

۲) ۲

۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۴) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

۴۱- فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$ دارای عامل انتگرال‌ساز به صورت $\mu(z)$ با شرط $z=x^2+xy$ باشد، $\frac{d\ln\mu}{dz}$، کدام است؟

$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \mu_y \cdot M + \mu M_y$

$\frac{\partial \mu N}{\partial x} = \mu_x \cdot N + \mu N_x$

$\rightarrow \frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$ شرط کامل

$\mu_x = \mu_z(2x+y)$

$\mu_y = \mu_z(x)$

$\rightarrow \mu(M_y - N_x) = \mu_x \cdot N - \mu_y M$

$\rightarrow \mu(M_y - N_x) = \mu_z\left((2x+y)N - xM\right)$

$\rightarrow \frac{\mu_z}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{(2x+y)N - xM} = \frac{\mu'}{\mu}$ است

۱) $\frac{M_y - N_x}{(2x+y)N - xM}$ ✓

۲) $\frac{M_y - N_x}{(2x+y)M - xN}$

۳) $\frac{M_y - N_x}{(2x+y)N + xM}$

۴) $\frac{M_y - N_x}{(2x+y)M + xN}$

۴۲- فرض کنید $y(x)$ سری مکلورن جواب معادلهٔ دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ باشد. در این صورت اگر $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)u^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$ باشد، $y(x)$، کدام است؟

$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)=0 \rightarrow n=3$

$\sqrt{}$ $P_3(x)$ ← یعنی تابع لژاندر درجه ۳

۱) $p_1(x)$

۲) $p_2(x)$

۳) $p_3(x)$ ✓

۴) $p_4(x)$

$\mathcal{L}(y)=F(s)$ $\quad \mathcal{L}(x)=G(s)$

۴۳- دستگاه معادلات دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x'(t)-4y''(t)=\underbrace{\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & t\ge 1\end{cases}}_{1-u_1(t)} \\ y''(t)-3x(t)=1 \\ x(0)=y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} sG(s)-\cancel{g(0)}-4s^2F(s)+\cancel{4sf(0)}+\cancel{4f'(0)}=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2F(s)-\cancel{sf(0)}-\cancel{f'(0)}-3G(s)=\frac{1}{s}$

$x(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(e^{12}-1)$

۲) $\frac{5}{12}(e^{24}-1)$ — طراح اشتباه کرده

۳) $\frac{1}{12}(5e^{24}+e^{12}-6)$

۴) $\frac{1}{12}(5e^{12}+e^{24}-6)$

$\rightarrow \begin{cases} G(s)(s)+F(s)(-4s^2)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s} \\ G(s)(-3)+F(s)(s^2)=\frac{1}{s} \end{cases}$

$\rightarrow G(s)=\dfrac{\begin{vmatrix}\frac{1-e^{-s}}{s} & -4s^2\\ \frac{1}{s} & s^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s & -4s^2\\ -3 & s^2\end{vmatrix}}=\dfrac{s(1-e^{-s})+4s}{s^3-12s^2}=\dfrac{5-e^{-s}}{s^2-12s}=\dfrac{5-e^{-s}}{s(s-12)}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t)=-\frac{1}{12}(5)(1-e^{12t})+\frac{1}{12}u_1(t)(1-e^{12(t-1)}) \xrightarrow{t=2} x(2)=\dfrac{5e^{24}-5+1-e^{12}}{12}=\dfrac{5e^{24}-e^{12}-4}{12}$

۴۴- مسیرهای قائم بر منحنی‌های $x^2+\frac{y^2}{c^2}=1$ که در آن $c\neq 0$ پارامتر ثابت حقیقی است، کدام است؟

۱) $x^2+y^2=\ln(cx)$

۲) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=x+c$

۳) $x^2+y^2=c-x$

۴) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=\ln(cx)$ ✓

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2x+\frac{2yy'}{c^2}=0 \rightarrow c^2=-\frac{yy'}{x}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} x^2-\frac{xy}{y'}=1 \xrightarrow{y'\to -\frac{1}{y'}} x^2+xyy'=1$

$\rightarrow yy'=1-x^2 \rightarrow y\,dy=\frac{(1-x^2)}{x}dx \xrightarrow{\int} \frac{y^2}{2}=\ln x-\frac{x^2}{2}+\alpha$

۴۵- رونسکین دو جواب مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل $xy''-(1+x)y'+(\sin x)y=0\ ,\ x>0$ کدام است؟

۱) cxe^{x} ✓

۲) cxe^{-x}

۳) $\frac{c}{x}e^{x}$

۴) $\frac{c}{x}e^{-x}$

$\dfrac{W(x)}{W(x_0)}=e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{b}{a}dx}$

$\rightarrow W(x)=\alpha\, e^{+\int_0^x \frac{1+x}{x}dx}$

$=\alpha\, e^{\ln x+x}$

$=\alpha\cdot xe^{x}$